UEContest 003 補足説明

grobner, maccha, tonphy

2020 年 5 月 6 日

公式の解説に不足している点を補足説明します。

1 ABC108B - Ruined Square

1.1 問題文 (要約)

xy 平面上に正方形があり、各頂点の座標を反時計回りに順に、$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$ とする。x_1, y_1, x_2, y_2 が与えられるので、x_3, y_3, x_4, y_4 を求めて、出力せよ。

なお、x_3, y_3, x_4, y_4 は一意に定まる整数である。

1.2 制約

- $|x_1|, |y_1|, |x_2|, |y_2| \leq 100$
- $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$
- 入力はすべて整数

1.3 補足説明

解説によれば、x_3, y_3, x_4, y_4 は、それぞれ

$$\begin{cases} x_3 = x_2 + y_1 - y_2 & (1) \\ y_3 = x_2 - x_1 + y_2 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = x_1 + y_1 - y_2 & (3) \\ y_4 = x_2 - x_1 + y_1 & (4) \end{cases}$$

である。このことを示したい。ここでは、高校数学で習う「複素数」を用いる。

一般に、複素数平面において、点 $\mathrm{B}(b)$ を点 $\mathrm{A}(a)$ を中心に θ だけ回転させてできた点 $\mathrm{C}(c)$ は、次式で表される。

$$c = (b - a)(\cos\theta + i\sin\theta) + a$$

なお $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を点 A を中心に θ だけ回転させてできるベクトルである。

正方形の各頂点を、複素数平面上で反時計回りに $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$, $\mathrm{C}(x_3, y_3)$, $\mathrm{D}(x_4, y_4)$ とする。このとき、次のことが常に成り立つ。

- $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を、点 A を中心に $\frac{\pi}{2}$ だけ回転させてできるベクトルは、$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ である。
- $\overrightarrow{\mathrm{DC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ゆえ、$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}}$

まず、点 D を示す複素数 $(x_4 + y_4 i)$ を求める。$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を、点 A を中心に $\frac{\pi}{2}$ だけ回転させてできるベクトルである。

$$\begin{aligned} x_4 + y_4 i &= \{(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)i\}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) + (x_1 + y_1 i) \\ &= (x_1 + y_1 - y_2) + (x_2 - x_1 + y_1)i \end{aligned}$$

したがって、式 (3), (4) と一致する。

次に、点 C を示す複素数 $(x_3 + y_3 i)$ を求める。$\overrightarrow{\mathrm{DC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OC}} &= \overrightarrow{\mathrm{OD}} + \overrightarrow{\mathrm{DC}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OD}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} x_3 + y_3 i &= \{(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)i\} + (x_4 + y_4 i) \\ &= \{(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)i\} + (x_1 + y_1 - y_2) + (x_2 - x_1 + y_1)i \\ &= (x_2 + y_1 - y_2) + (x_2 - x_1 + y_2)i \end{aligned}$$

これは、式 (1), (2) と一致する。

まとめると、

$$\begin{cases} x_3 = x_2 + y_1 - y_2 \\ y_3 = x_2 - x_1 + y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = x_1 + y_1 - y_2 \\ y_4 = x_2 - x_1 + y_1 \end{cases}$$

2 ABC159C - Maximum Volume

2.1 問題文 (要約)

縦、横、高さの長さの合計が $L(>0)$ の直方体としてありうる体積の最大値を求めよ。

2.2 制約

- $1 \leq L \leq 1000$
- $L \in \mathbb{Z}$

2.3 補足説明

公式の解説によれば、相加平均と相乗平均の関係により、直方体の体積の最大値は $\dfrac{L^3}{27}$ であることが分かった。ここでは、高校数学の「微分」を用いて直方体の最大値を求める方法を紹介したい。

直方体の縦、横、高さの長さを a, b, c とすれば

$$\begin{cases} 0 < a, b, c < L \\ a + b + c = L \end{cases} \tag{5}$$

の制約に縛られる。直方体の体積 V は、

$$V = abc$$

と表される。式 (5) より、$a = L - b - c$ であるから

$$\begin{aligned} V &= (L-b-c) \times bc \\ &= -cb^2 + (L-c)cb \\ &= -c\left(b - \frac{L-c}{2}\right)^2 + \frac{(L-c)^2 c}{4} \end{aligned}$$

$b = \dfrac{L-c}{2}$ のとき、最大値 $V = \dfrac{(L-c)^2 c}{4}$ をとる。

ここで、$W = \dfrac{(L-c)^2 c}{4}$ とおくと、

$$\begin{aligned} W &= \frac{(L-c)^2 c}{4} \\ &= \frac{c^3 - 2Lc^2 + L^2 c}{4} \end{aligned}$$

と変形できる。

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}c} &= \frac{3c^2-4Lc+L^2}{4}\\ &= \frac{(c-L)(3c-L)}{4}\end{aligned}$$

$0<c<L$ において、増減表は次のようになる。

c	(0)	$\cdots$	$L/3$	$\cdots$	(L)
$\mathrm{d}W/\mathrm{d}c$		$+$	0	-	
W	(0)	$\nearrow$	Max	$\searrow$	(0)

よって、$c=\dfrac{L}{3}$ で W は最大となる。つまり、$b=\dfrac{L}{3}, c=\dfrac{L}{3}$ で直方体の体積 V は最大となる。このとき、$a=\dfrac{L}{3}$ である。

したがって、$a=b=c=\dfrac{L}{3}$ のとき、直方体の体積 V は

$$V=\frac{L^3}{27}$$

で最大となる。

参考文献

[1] AtCoder, "ARC 102 解説", `https://img.atcoder.jp/arc102/editorial.pdf`, latest accessed on 2020/5/2

[2] AtCoder, "ABC 159 解説", `https://img.atcoder.jp/abc159/editorial.pdf`, latest accessed on 2020/5/2