# UEContest 003 補足説明

grobner, maccha, tonphy

2020 年 5 月 6 日

公式の解説に不足している点を補足説明します。

## 1 ABC108B - Ruined Square

### 1.1 問題文 (要約)

xy 平面上に正方形があり、各頂点の座標を反時計回りに順に、$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$ とする。$x_1, y_1, x_2, y_2$ が与えられるので、$x_3, y_3, x_4, y_4$ を求めて、出力せよ。

なお、$x_3, y_3, x_4, y_4$ は一意に定まる整数である。

### 1.2 制約

- $|x_1|, |y_1|, |x_2|, |y_2| \leq 100$
- $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$
- 入力はすべて整数

### 1.3 補足説明

解説によれば、$x_3, y_3, x_4, y_4$ は、それぞれ

$$\begin{cases} x_3 = x_2 + y_1 - y_2 & (1) \\ y_3 = x_2 - x_1 + y_2 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = x_1 + y_1 - y_2 & (3) \\ y_4 = x_2 - x_1 + y_1 & (4) \end{cases}$$

である。このことを示したい。ここでは、高校数学で習う「複素数」を用いる。

一般に、複素数平面において、点 B$(b)$ を点 A$(a)$ を中心に $\theta$ だけ回転させてできた点 C$(c)$ は、次式で表される。

$$c = (b - a)(\cos\theta + i\sin\theta) + a$$

なお $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を点 A を中心に $\theta$ だけ回転させてできるベクトルである。

正方形の各頂点を、複素数平面上で反時計回りに $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$, $\mathrm{C}(x_3, y_3)$, $\mathrm{D}(x_4, y_4)$ とする。このとき、次のことが常に成り立つ。

- $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を、点 A を中心に $\frac{\pi}{2}$ だけ回転させてできるベクトルは、$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ である。
- $\overrightarrow{\mathrm{DC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ゆえ、$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}}$

まず、点 D を示す複素数 $(x_4 + y_4 i)$ を求める。$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を、点 A を中心に $\frac{\pi}{2}$ だけ回転させてできるベクトルである。

$$
\begin{aligned}
x_4 + y_4 i &= \{(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)i\}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) + (x_1 + y_1 i) \\
&= (x_1 + y_1 - y_2) + (x_2 - x_1 + y_1)i
\end{aligned}
$$

したがって、式 (3), (4) と一致する。

次に、点 C を示す複素数 $(x_3 + y_3 i)$ を求める。$\overrightarrow{\mathrm{DC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるから、

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OC}} &= \overrightarrow{\mathrm{OD}} + \overrightarrow{\mathrm{DC}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{OD}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}}
\end{aligned}
$$

となる。よって、

$$
\begin{aligned}
x_3 + y_3 i &= \{(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)i\} + (x_4 + y_4 i) \\
&= \{(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)i\} + (x_1 + y_1 - y_2) + (x_2 - x_1 + y_1)i \\
&= (x_2 + y_1 - y_2) + (x_2 - x_1 + y_2)i
\end{aligned}
$$

これは、式 (1), (2) と一致する。

まとめると、

$$
\begin{cases}
x_3 = x_2 + y_1 - y_2 \\
y_3 = x_2 - x_1 + y_2
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
x_4 = x_1 + y_1 - y_2 \\
y_4 = x_2 - x_1 + y_1
\end{cases}
$$

# 2 ABC159C - Maximum Volume

## 2.1 問題文 (要約)

縦、横、高さの長さの合計が $L(>0)$ の直方体としてありうる体積の最大値を求めよ。

## 2.2 制約

- $1 \leq L \leq 1000$
- $L \in \mathbb{Z}$

## 2.3 補足説明

公式の解説によれば、相加平均と相乗平均の関係により、直方体の体積の最大値は $\frac{L^3}{27}$ であることが分かった。ここでは、高校数学の「微分」を用いて直方体の最大値を求める方法を紹介したい。

直方体の縦、横、高さの長さを $a, b, c$ とすれば

$$\begin{cases} 0 < a, b, c < L \\ a + b + c = L \end{cases} \tag{5}$$

の制約に縛られる。直方体の体積 $V$ は、

$$V = abc$$

と表される。式 (5) より、$a = L - b - c$ であるから

$$\begin{aligned} V &= (L-b-c) \times bc \\ &= -cb^2 + (L-c)cb \\ &= -c\left(b - \frac{L-c}{2}\right)^2 + \frac{(L-c)^2 c}{4} \end{aligned}$$

$b = \frac{L-c}{2}$ のとき、最大値 $V = \frac{(L-c)^2 c}{4}$ をとる。

ここで、$W = \frac{(L-c)^2 c}{4}$ とおくと、

$$\begin{aligned} W &= \frac{(L-c)^2 c}{4} \\ &= \frac{c^3 - 2Lc^2 + L^2 c}{4} \end{aligned}$$

と変形できる。

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}c} &= \frac{3c^2 - 4Lc + L^2}{4} \\ &= \frac{(c-L)(3c-L)}{4} \end{aligned}$$

$0 < c < L$ において、増減表は次のようになる。

| $c$ | $(0)$ | $\cdots$ | $L/3$ | $\cdots$ | $(L)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{d}W/\mathrm{d}c$ | | $+$ | $0$ | - | |
| $W$ | $(0)$ | $\nearrow$ | Max | $\searrow$ | $(0)$ |

よって、$c = \frac{L}{3}$ で $W$ は最大となる。つまり、$b = \frac{L}{3}, c = \frac{L}{3}$ で直方体の体積 $V$ は最大となる。このとき、$a = \frac{L}{3}$ である。

したがって、$a = b = c = \frac{L}{3}$ のとき、直方体の体積 $V$ は

$$V = \frac{L^3}{27}$$

で最大となる。

# 参考文献


[1] AtCoder, "ARC 102 解説", `https://img.atcoder.jp/arc102/editorial.pdf`, latest accessed on 2020/5/2

[2] AtCoder, "ABC 159 解説", `https://img.atcoder.jp/abc159/editorial.pdf`, latest accessed on 2020/5/2