Sprawozdanie - Lista 1

Jakub Zdancewicz

Spis treści

1 Wstęp

Sortowanie to jeden z fundamentalnych problemów informatyki, mający szerokie zastosowanie w wielu dziedzinach. Algorytmy sortowania odgrywają kluczową rolę w wielu aplikacjach, a ich wydajność istotnie wpływa na czas działania. Wybór odpowiedniego algorytmu sortującego jest zatem istotną decyzją podczas tworzenia oprogramowania. W niniejszym sprawozdaniu przeanalizujemy trzy popularne algorytmy sortowania wraz z ich wybranymi modyfikacjami:

- `Insertion Sort`
- `Merge Sort`
- `Heap Sort`

oraz porównamy ich efektywność na zestawach danych o różnych rozmiarach, badając liczbę operacji przypisań i porównań.

2 Opis zaimplementowanych algorytmów

Każdy z algorytmów został przetestowany na 10 losowo wygenerowanych tablicach dla każdej z 15 wybranych długości. Elementy tablic to liczby wymierne z zakresu $[-10^6, 10^6]$. Minimalna długość tablicy wynosiła 2, a maksymalna 100000. Średnia liczba operacji przypisań i porównań dla m tablic o danej długości n jest wyliczana według wzoru:

$$L_n = \sum_{i=1}^{m} \left\lceil \frac{porownania_i}{m} \right\rceil + \left\lceil \frac{przypisania_i}{m} \right\rceil$$

gdzie:

L_n - średnia liczba operacji dla tablicy o długości n,

porownania$_i$ - liczba porównań wykonanych dla i-tej tablicy,

przypisania$_i$ - liczba przypisań wykonanych dla i-tej tablicy.

Analogicznie obliczamy średni czas wykonania algorytmu dla m tablic o danej długości n.

2.1 Insertion Sort

Insertion Sort to algorytm działający w czasie $\Theta(n^2)$. Poniżej przedstawiamy kluczowy fragment jego implementacji:

```
void insertion_sort(float A[], int n)
{
  for (int i = 1; i < n; ++i)
  {
    float x = A[i];
    int j = i - 1;
    while (j > -1 && A[j] > x)
    {
      A[j + 1] = A[j];
      --j;
    }
    A[j + 1] = x;
  }
}
```

Kod 1: Implementacja `Insertion Sort`

Algorytm działa poprzez wstawianie w i-tym kroku pętli **for** elementu $A[i]$ do wcześniej posortowanej części tablicy $A[0] \leqslant A[1] \leqslant \cdots \leqslant A[i-1]$. W pętli **while** przesuwamy wszystkie elementy większe od $A[i]$ o jeden indeks w prawo, a następnie wstawiamy $A[i]$ na odpowiednią pozycję, czyli po pierwszym elemencie mniejszym od $A[i]$ lub na początku tablicy, jeśli wszystkie elementy są większe.

2.1.1 Modyfikacja Insertion Sort

Rozważmy modyfikację algorytmu *Insertion Sort* polegającą na jednoczesnym wstawianiu dwóch kolejnych elementów tablicy. Kluczowy fragmenty implementacji przedstawiono poniżej:

```
void insertion_sort2(float A[], int n)
{
  for (int i = 1; i < n; i += 2)
  {
    float max = A[i];
    float min = A[i + 1];
    if (max < min)
    {
      float temp = max;
      max = min;
      min = temp;
    }
    int j = i - 1;
    while (j > -1 && A[j] > max)
    {
      A[j + 2] = A[j];
      --j;
    }
    A[j + 2] = max;
    while (j > -1 && A[j] > min)
    {
      A[j + 1] = A[j];
      --j;
    }
    A[j + 1] = min;
  }
  if (n % 2 == 0)
  {
    int j = n - 2;
    float key = A[n - 1];
    while (j > -1 && A[j] > key)
    {
      A[j + 1] = A[j];
      --j;
    }
    A[j + 1] = key;
  }
}
```

Kod 2: Implementacja Modyfikacji `Insertion Sort`

W tej modyfikacji algorytm przetwarza elementy tablicy parami, co umożliwia jednoczesne wstawienie dwóch kolejnych elementów. Na początku algorytm porównuje te dwa elementy i przypisuje większy do zmiennej **max**, a mniejszy do zmiennej **min**. Następnie przesuwa elementy większe od **max** o dwie pozycje w prawo. Gdy napotka element mniejszy $A[j_0]$ od **max** lub osiągnie początek tablicy ($j_0 = 0$), wstawia **max** na właściwe miejsce. Nastepnie, podobnie jak w oryginalnej wersji algorytmu, wstawia **min** do wcześniej posortowanej części tablicy $A[0] \leqslant \cdots \leqslant A[j_0]$.

W przypadku tablicy o parzystej liczbie elementów algorytm wykonuje dodatkowy krok: wstawia ostatni element tablicy do pozostałej części. Intuicyjnie, zmniejszenie liczby iteracji powinno skutkować mniejszą liczbą porównań i przypisań, co powinno wpłynąć na zwiększenie efektywności algorytmu.

Zakładając, bez utraty ogólności, że na wejściu otrzymujemy tablicę o nieparzystej liczbie elementów n, w pesymistycznym przypadku w każdej iteracji pętli **for** wykonujemy około 9 operacji oraz 4 operacje za każdą iterację w pętli **while**. Możemy zatem ilość operacji zapisać jako sumę:

$$T(n) = \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} 4i + 9 = 4 \cdot \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}+1\right)}{2} + 9 \cdot \frac{n-1}{2} = \Theta(n^2)$$

W przypadku gdy tablica ma parzystą długość, dodajemy dodatkowe $4(n-1)$ operacji, co nie zmienia ogólnej złożoności algorytmu.

2.1.2 Wyniki dla Insertion Sort

Tabele poniżej przedstawiają wyniki eksperymentów dla algorytmu *Insertion Sort* oraz jego modyfikacji na tablicach o różnej wielkości:

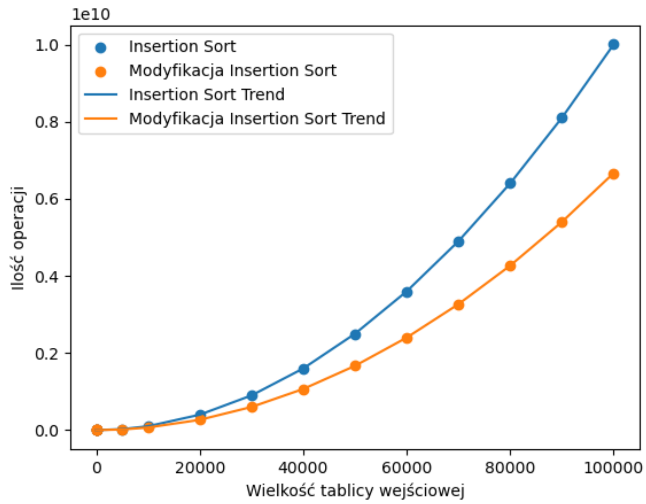
Wielkość tablicy	**Ilość przypisań**	**Ilość porównań**	**Łączna liczba operacji**	**Czas (ms)**
5	29	25	54	0
10	80	71	151	0
100	5,342	5,343	10,585	0
5,005	12,610,131	12,610,132	25,215,263	17.9
10,000	50,094,315	50,084,316	100,178,631	73.3
50,005	1,246,816,445	1,246,816,446	2,493,582,891	2486.5
80,000	3,200,278,104	3,200,278,105	6,400,476,209	5640.4
100,000	5,000,376,268	5,000,376,269	10,000,652,537	9577.2

Tabela 1: Liczba operacji dla algorytmu `Insertion Sort` przy różnych rozmiarach tablicy

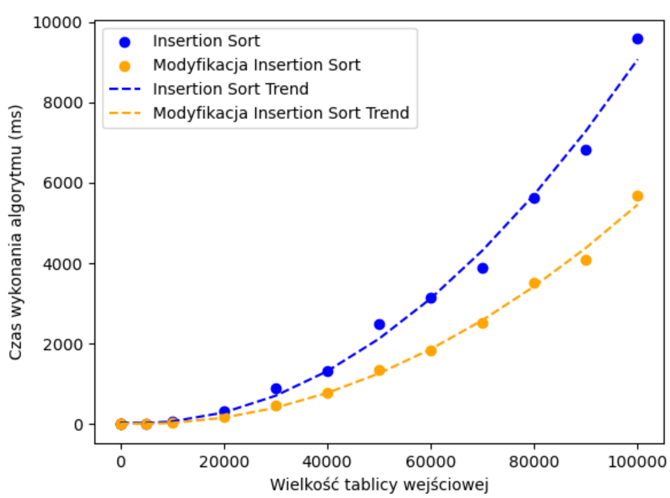
Wielkość tablicy	**Ilość przypisań**	**Ilość porównań**	**Łączna liczba operacji**	**Czas (ms)**
5	23	21	44	0
10	66	61	127	0
100	3,656	3,605	7,261	0
5,005	8,350,361	8,347,866	16,698,227	12.1
10,000	33,267,559	33,262,542	66,530,101	48.4
50,005	833,429,925	833,404,889	1,666,834,814	1355.2
80,000	2,131,445,810	2,131,405,792	4,262,851,602	3513.2
100,000	3,332,835,201	3,332,785,140	6,665,620,341	5673.5

Tabela 2: Liczba operacji dla modyfikacji algorytmu `Insertion Sort` przy różnych rozmiarach tablicy

Co ciekawe, dla tablicy o długości n algorytm *Insertion Sort* wykonuje średnio n^2 operacji. Z tabeli jednoznacznie wynika, że modyfikacja algorytmu *Insertion Sort* jest wydajniejsza dla większych tablic. Różnice te są dobrze zobrazowane na Wykresach 1 oraz 2.



Wykres 1: Ilość operacji w zależności od rozmiarów tablicy wejściowej



Wykres 2: Czas wykonania algorytmu w zależności od rozmiarów tablicy wejściowej

2.2 Merge Sort

Merge Sort to algorytm sortowania działający w czasie $\Theta(n \log n)$. Poniżej przedstawiamy kluczowy fragment jego implementacji:

```
void merge_sort(float A[], int p, int k)
{
  if (p < k)
  {
    int s = p + (k - p) / 2;
    merge_sort(A, p, s);
    merge_sort(A, s + 1, k);
    merge(A, p, s, k);
  }
}
```

Kod 3: Implementacja `Merge Sort`

Algorytm działa poprzez rekurencyjne dzielenie tablicy na dwie podtablice aż do momentu, gdy każda z nich ma tylko jeden element. Takie tablice jednoelementowe są naturalnie posortowane. Następnie następuje proces łączenia dwóch posortowanych podtablic w jedną większą.

Funkcja **MERGE**, odpowiedzialna za łączenie posortowanych podtablic, jest zdefiniowana w następujący sposób:

```
void merge(float A[], int p, int s, int k)
{
  int n1 = s - p + 1;
  int n2 = k - s;
  float L[n1 + 1];
  float R[n2 + 1];
  L[n1] = numeric_limits<float>::infinity();
  R[n2] = numeric_limits<float>::infinity();
  for (int i = 0; i < n1; ++i)
  {
    L[i] = A[i + p];
  }
  for (int j = 0; j < n2; ++j)
  {
    R[j] = A[j + s + 1];
  }
  int i = 0;
  int j = 0;
  for (int l = p; l <= k; ++l)
  {
    if (L[i] <= R[j])
    {
      A[l] = L[i];
      ++i;
    }
    else
    {
      A[l] = R[j];
      ++j;
    }
  }
}
```

Kod 4: Implementacja `Merge`

Funkcja **MERGE** przypisuje elementy z tablicy $A[p \dots s]$ do tablicy L oraz elementy z tablicy $A[s+1 \dots k]$ do tablicy R. Następnie iteruje przez tablice L i R, wybierając za każdym razem mniejszy element i wstawiając go w odpowiednie miejsce w tablicy A. Na wyjściu otrzymujemy posortowaną tablicę, składającą się z elementów $A[p \dots s]$ i $A[s+1 \dots k]$.

2.2.1 Modyfikacja Merge Sort

W tej modyfikacji algorytm dzieli tablicę na trzy części zamiast dwóch. Kluczowe różnice w implementacji tego algorytmu w porównaniu do oryginalnej wersji obejmuje dodanie nowych miejsc podziału oraz dodanie dodatkowego rekurencyjnego wywołania w funkcji **MERGE_SORT**:

```
int s1 = p + (k - p) / 3;
int s2 = p + 2 * ((k - p) / 3);
merge_sort(A, p, s1);
merge_sort(A, s1 + 1, s2);
merge_sort(A, s2 + 1, k);
merge(A, p, s1, s2, k);
```

Kod 5: Fragment implementacji modyfikacji `Merge Sort`

Dodatkowo w funkcji **MERGE** wprowadzamy nową tablicę M:

```
float M[n2 + 1];
```

Kod 6: Fragment implementacji modyfikacji `Merge`

Działanie zmienionej funkcji jest analogiczne do oryginalnej, z tą różnicą, że łączenie odbywa się teraz dla trzech tablic zamiast dwóch:

```
int i = 0;
int j = 0;
int z = 0;

for (int l = p; l <= k; ++l)
{
    if (L[i] <= R[j] && L[i] <= M[z])
    {
        A[l] = L[i];
        ++i;
    }
    else if (M[z] <= R[j] && M[z] <= L[i])
    {
        A[l] = M[z];
        ++z;
    }
    else
    {
        A[l] = R[j];
        ++j;
    }
}
```

Kod 7: Fragment implementacji modyfikacji `Merge`

Ilość operacji wykonywanych przez modyfikację algorytmu *Merge Sort* możemy opisać poprzez rekurencyjne równanie:

$$T(n) = 3T(n/3) + n$$

Możemy zatem zapisać:

$$T(n) = \sum_{k=0}^{\log_3 n} 3^k \left(\frac{n}{3^k}\right) = n \sum_{k=0}^{\log_3 n} 1 = \Theta(n \log n)$$

Intuicyjnie, dzięki szybszemu przejściu do zbiorów jednoelementowych, modyfikacja powinna być efektywniejsza od orginału.

2.2.2 Wyniki dla Merge Sort

Tabele poniżej przedstawiają wyniki eksperymentów dla algorytmu *Merge Sort* oraz jego modyfikacji na tablicach o różnej wielkości:

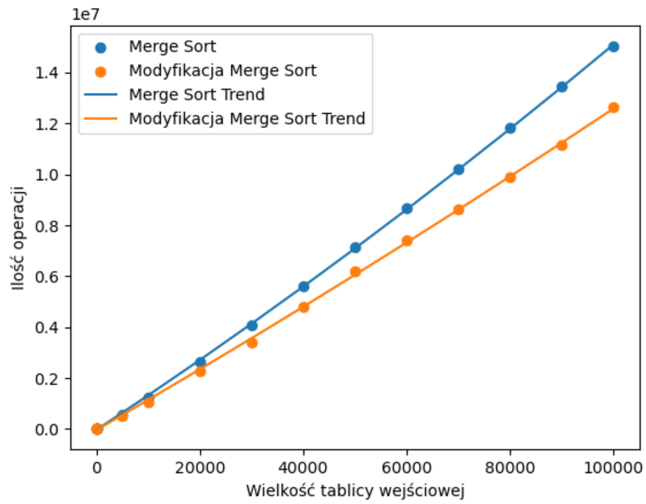
Wielkość tablicy	Ilość przypisań	Ilość porównań	Łączna liczba operacji	Czas (ms)
5	108	57	165	0
10	278	148	426	0
100	4,548	2,512	7,060	0
5,005	369,028	210,420	579,448	0.5
10,000	788,068	450,844	1,238,912	1.4
50,005	4,522,308	2,603,388	7,125,696	10.5
80,000	7,504,628	4,326,780	11,831,408	17.8
100,000	9,544,628	5,506,780	15,051,408	22.3

Tabela 3: Liczba operacji dla algorytmu `Merge Sort` przy różnych rozmiarach tablicy

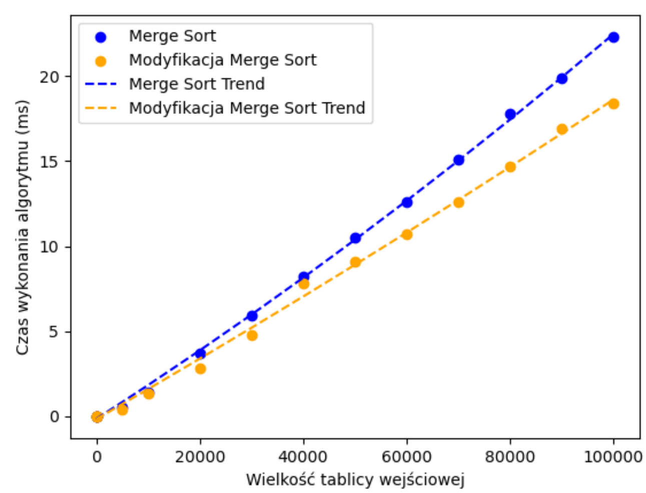
Wielkość tablicy	Ilość przypisań	Ilość porównań	Łączna liczba operacji	Czas (ms)
5	99	67	166	0
10	256	180	436	0
100	3,560	2,791	6,351	0
5,005	277,738	234,773	512,511	0.4
10,000	555,727	481,819	1,037,546	1.3
50,005	3,318,096	2,880,715	6,198,811	9.1
80,000	5,238,096	4,635,715	9,873,811	14.7
100,000	6,706,625	5,931,401	12,638,026	18.4

Tabela 4: Liczba operacji dla modyfikacji algorytmu `Merge Sort` przy różnych rozmiarach tablicy

Z tabel wynika, że modyfikacja algorytmu *Merge Sort* jest wydajniejsza dla większych tablic. Co ciekawe, ilość porównań w modyfikacji algorytmu *Merge Sort* rośnie szybciej niż w orginalym algorytmie. Różnice w ilości wykonanych operacji są dobrze zobrazowane na Wykresach 3 oraz 4.



Wykres 3: Ilość operacji w zależności od rozmiarów tablicy wejściowej



Wykres 4: Czas działania algorytmu w zależności od rozmiarów tablicy wejściowej

2.3 Heap Sort

Heap Sort to algorytm sortowania działający w czasie $\mathcal{O}(n \log n)$. Poniżej przedstawiamy kluczowy fragment jego implementacji:

```
void heap_sort(heap &A, int n)
{
  build_heap(A, n);
  for (int i = n - 1; i > 0; --i)
  {
    float temp = A[i];
    A[i] = A[0];
    A[0] = temp;
    --A.heap_size;
    heapify(A, 0);
  }
}
```

Kod 8: Implementacja `Heap Sort`

Algorytm jest oparty na strukturze kopca binarnego (dokładniej, na kopcu typu maksymalnego), czyli drzewie binarnym, w którym wartość każdego węzła jest mniejsza niż wartość jego rodzica(własność **MAX_HEAP**). W naszej implementacji kopiec jest reprezentowany jako tablica, wraz z dodatkowym parametrem **heap_size**, który przechowuje aktualny rozmiar kopca:

```
struct heap
{
  float *array;
  int heap_size = 0;

  float &operator[](int idx)
  {
    return array[idx];
  }
  heap(float *arr)
  {
    array = arr;
  }
};
```

Kod 9: Implementacja `Heap`

Dodatkowo definiujemy dwie funkcje **LEFT** oraz **RIGHT** zwracające lewe i prawe dziecko węzła o indeksie i:

```
int left(int i)
{
  return 2 * i + 1;
}

int right(int i)
{
  return 2 * i + 2;
}
```

Kod 10: Implementacja `Left` i `Right`

Definiujemy również funkcję **HEAPIFY**, która rekurencyjnie naprawia własność **MAX_HEAP** dla węzła o indeksie i, pod warunkiem, że poddrzewa o wierzchołkach będących dziećmi węzła o indeksie i mają już własność **MAX_HEAP**. Funkcja działa poprzez zamianę węzła z dzieckiem o największej wartości, jeśli jest to konieczne:

```
void heapify(heap &A, int i)
{
  int l = left(i);
  int r = right(i);
  int largest = i;
  if (l < A.heap_size && A[l] > A[i]) {
    largest = l;
  }
  if (r < A.heap_size && A[r] > A[largest]) {
    largest = r;
  }
  if (i != largest)
  {
    float temp = A[i];
    A[i] = A[largest];
    A[largest] = temp;
    heapify(A, largest);
  }
}
```

Kod 11: Implementacja `Heapify`

Algorytm działa poprzez zbudowanie kopca z tablicy A przy pomocy funkcji **BUILD_HEAP**, która wywołuje funkcję **HEAPIFY** dla każdego węzła, który nie jest liściem:

```
void build_heap(heap &A, int n)
{
  A.heap_size = n;
  for (int i = (n / 2); i >= 0; --i)
  {
    heapify(A, i);
  }
}
```

Kod 12: Implementacja `Build Heap`

Następnie, algorytm iteracyjnie zamienia wierzchołek (największy element) z ostatnim liściem (węzłem o największym indeksie), wywołuje funkcję **HEAPIFY** na wierzchołku oraz zmniejsza parametr **heap_size** o jeden. Po zakończeniu pętli **for** otrzymujemy posortowaną tablicę A.

2.3.1 Modyfikacja Heap Sort

W tej modyfikacji algorytm używa kopców trenarnych zamiast binarnych. Kluczowe różnice w implementacji tego algorytmu w porównaniu do oryginalnej wersji obejmuje dodanie funkcji **MID**, która zwraca środkowe dziecko węzła, oraz zmiana kodu funkcji **LEFT** i **RIGHT**:

```
int left(int i)
{
  return 3 * i + 1;
}

int mid(int i)
{
  return 3 * i + 2;
}

int right(int i)
{
  return 3 * i + 3;
  ;
}
```

Kod 13: Implementacja `Left`, `Mid` i `Right`

Dodatkowo, w funkcji **HEAPIFY** wybieramy największe dziecko z trzech zamiast dwóch:

```
  int l = left(i);
  int m = mid(i);
  int r = right(i);
  if (l < A.heap_size && A[l] > A[i])
  {
    largest = l;
  }
  comparisions += 2;
```

```
if (m < A.heap_size && A[m] > A[largest])
{
  largest = m;
}
comparisions += 2;
if (r < A.heap_size && A[r] > A[largest])
{
  largest = r;
}
```

Kod 14: Część implementacji zmodyfikowanego `Heapify`

Reszta kodu pozostaje analogiczna. Dzięki posiadaniu większej liczby liści w kopcu trenarnym, które są pomijane w procedurze **BUILD_HEAP**, efektywność modyfikacji algorytmu powinna być wyższa.

BUILD_HEAP działa w czasie $\mathcal{O}(n)$, zatem zmodyfikowany algorytm działa w czasie $\mathcal{O}(n \log n)$.

2.3.2 Wyniki dla Heap Sort

Tabele poniżej przedstawiają wyniki eksperymentów dla algorytmu *Heap Sort* oraz jego modyfikacji na tablicach o różnej wielkości:

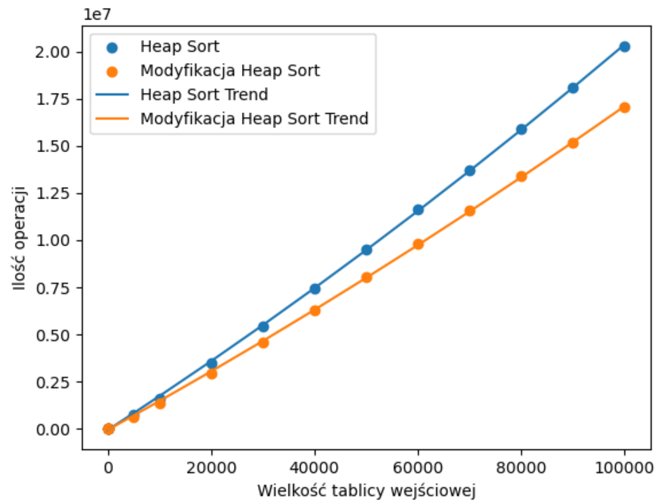
Wielkość tablicy	Ilość przypisań	Ilość porównań	Łączna liczba operacji	Czas (ms)
5	85	70	155	0
10	232	183	415	0
100	4,562	3,308	7,870	0
5,005	438,290	305,525	743,815	1.4
10,000	951,673	661,035	1,612,708	3.4
50,005	5,631,385	3,887,342	9,518,727	22.6
80,000	9,412,168	6,487,715	15,899,883	41.0
100,000	12,012,335	8,274,443	20,286,778	50.2

Tabela 5: Liczba operacji dla algorytmu `Heap Sort` przy różnych rozmiarach tablicy

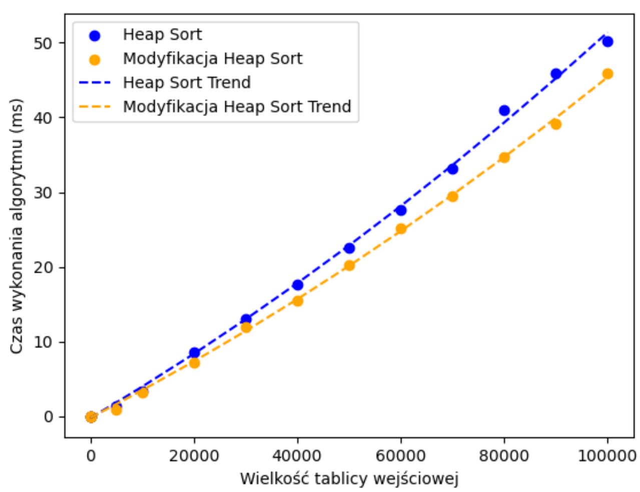
Wielkość tablicy	Ilość przypisań	Ilość porównań	Łączna liczba operacji	Czas (ms)
5	83	78	161	0
10	211	195	406	0
100	3,803	3,290	7,093	0
5,005	347,976	289,958	637,934	0.9
10,000	749,096	621,005	1,370,101	3.2
50,005	4,405,541	3,633,093	8,038,634	20.2
80,000	7,338,882	6,037,845	13,376,727	34.7
100,000	9,348,531	7,686,258	17,034,789	45.9

Tabela 6: Liczba operacji dla modyfikacji algorytmu `Heap Sort` przy różnych rozmiarach tablicy

Z tabel wynika, że modyfikacja algorytmu *Heap Sort* jest wydajniejsza dla większych tablic. Różnice te są dobrze zobrazowane na Wykresach 5 oraz 6.



Wykres 5: Ilość operacji w zależności od rozmiarów tablicy wejściowej

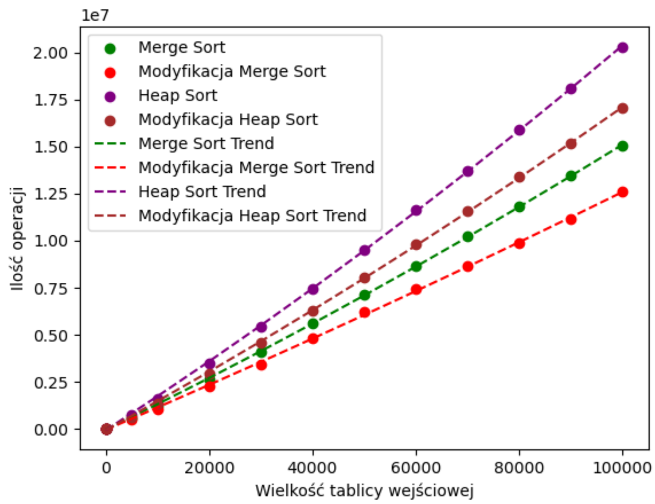


Wykres 6: Czas działania algorytmu w zależności od rozmiarów tablicy wejściowej

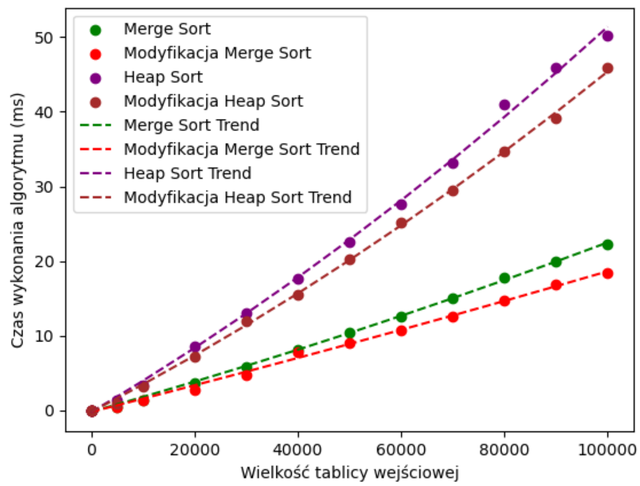
3 Wnioski

Na podstawie przeprowadzonej analizy algorytmów, *Insertion Sort* może być wydajny dla niewielkich zestawów danych, jednak w miarę zwiększania się rozmiaru tablicy liczba wykonywanych operacji rośnie nawet o trzy rzędy wielkości w porównaniu do *Merge Sort* i *Heap Sort*.

Porównując *Merge Sort* i *Heap Sort* możemy zauważyć, że pierwszy z nich jest zauważalnie szybszy:



Wykres 7: Ilość operacji w zależności od rozmiaru tablicy wejściowej



Wykres 8: Czas działania algorytmów w zależności od rozmiaru tablicy wejściowej

Jednak *Merge Sort* posiada jedną znaczącą wadę – złożoność pamięciową. Z powodu konieczności definiowania dodatkowych tablic **L** i **R**, ilość pamięci potrzebnej do działania algorytmu jest nieporównywalnie większa niż w przypadku *Heap Sort*. Wybór odpowiedniego algorytmu zależy więc od dostępnych zasobów.

Zaproponowane modyfikacje algorytmów okazują się efektywniejsza od ich oryginałów; różnica jest szczególnie widoczna w przypadku dużych zestawów danych. Warto zatem rozważyć ich zastosowanie, zwłaszcza gdy zasoby są mocno ograniczone.