

## Работа 3.2.6

# Исследование гальванометра

**Цель работы:** изучение работы высокочувствительного магнитозеркального гальванометра магнитоэлектрической системы в режимах измерения постоянного тока и электрического заряда.

**Оборудование:** зеркальный гальванометр с осветителем и шкалой, источник постоянного напряжения, делитель напряжения, магазин сопротивлений, эталонный конденсатор, вольтметр, переключатель, ключ, линейка.

## 1. Теоретическая справка

**Устройство.** Баллистический гальванометр - электроизмерительный прибор магнитоэлектрической системы, отличающийся высокой чувствительностью и сравнительно большим периодом колебаний подвижной части. Он представляет собой скрепленную с полым цилиндром проводящую рамку, подвешенную на нити в радиально направленном постоянном магнитном поле (см. рис. 1). На рамке закреплено зеркало, служащее для измерения угла поворота.

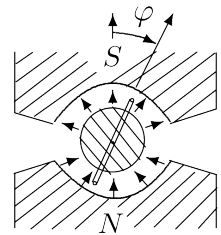


Рис. 1: Рамка с током в магнитном поле

**Уравнение движения.** Введем следующие обозначения:  $\varphi$  - угол поворота рамки,  $D$  - модуль кручения,  $S$  - площадь рамки,  $N$  - число витков,  $I$  - сила тока в рамке при отсутствии ЭДС индукции,  $B$  - индукция магнитного поля,  $R_{\Sigma}$  - общее сопротивление цепи,  $J$  - момент инерции подвижной системы. Если пренебречь сопротивлением воздуха, то уравнение движения записывается в виде

$$J\ddot{\varphi} + \frac{(BSN)^2}{R_{\Sigma}}\dot{\varphi} + D\varphi = BSNI. \quad (1)$$

Введем обозначения

$$\begin{cases} 2\gamma = \frac{(BSN)^2}{JR_{\Sigma}}, \\ \omega_0^2 = \frac{D}{J}, \\ K = \frac{BSN}{J}. \end{cases} \quad (2)$$

Таким образом, уравнение (1) примет вид

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = KI. \quad (3)$$

Заметим, что данное уравнения является уравнением затухающих колебаний с коэффициентом затухания  $\gamma$  и собственной частотой  $\omega_0$ .

**Режим измерения постоянного тока.** Если  $I = const$ , то по прошествии некоторого времени колебания затухнут, и можно принять  $\varphi = const$ . Тогда из уравнения (3) легко получить

$$\varphi = \frac{K}{\omega_0^2}I = \frac{BSN}{D}I = \frac{I}{C_I}. \quad (4)$$

$C_I$  называется *динамической постоянной* гальванометра и определяется выражением

$$C_I = \frac{I}{\varphi} = \frac{D}{BSN}. \quad (5)$$

**Свободные колебания рамки.** Пусть  $I = 0$  и выполнены следующие начальные условия:

$$\begin{cases} \varphi(t=0) = 0, \\ \dot{\varphi}(t=0) = \dot{\varphi}_0. \end{cases} \quad (6)$$

Тогда в зависимости от  $\gamma$  и  $\omega_0$  решение уравнения (3) имеет вид

$$\begin{cases} \varphi = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega} e^{-\gamma t} \sin \omega t, & \gamma < \omega_0 \text{ (колебательный режим);} \\ \varphi = \dot{\varphi}_0 t e^{-\gamma t}, & \gamma = \omega_0 \text{ (критический режим);} \\ \varphi = \frac{\dot{\varphi}_0}{\varkappa} e^{-\gamma t} \operatorname{sh} \varkappa t, & \gamma > \omega_0 \text{ (апериодический режим).} \end{cases} \quad (7)$$

Здесь  $\varkappa$  и  $\omega$  определяются соотношениями

$$\begin{cases} \omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2, \\ \varkappa^2 = \gamma^2 - \omega_0^2. \end{cases} \quad (8)$$

В случае колебательного режима можно ввести логарифмический декремент затухания  $\Theta$ :

$$\Theta = \ln \frac{\varphi_n}{\varphi_{n+1}}, \quad (9)$$

где  $\varphi_n$  и  $\varphi_{n+1}$  - углы последовательных отклонений в одну сторону с номерами  $n$  и  $n+1$ . Из (7) в случае малого затухания ( $\gamma \ll \omega$ ) легко получить выражение для  $\Theta$ :

$$\Theta = \gamma T, \quad (10)$$

где  $T$  - период колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (11)$$

Заметим, что при приближении к критическому режиму  $\Theta \rightarrow \infty$ .

**Режим измерения заряда.** Теперь рассмотрим ситуацию, когда через гальванометр проходит короткий импульс тока. Будем считать, что продолжительность импульса  $\tau$  достаточно мала ( $\tau \ll T$ ), и отклонением рамки можно пренебречь. Пусть через рамку протекал ток с момента времени  $t = 0$  до момента времени  $t = \tau$ . Проинтегрировав уравнение (3) с учетом приближения  $\varphi \approx 0$ , получим

$$\dot{\varphi}(\tau) = K \int_0^\tau I dt. \quad (12)$$

Заряд, прошедший через гальванометр выражается формулой

$$q = \int_0^\tau I dt + \int_0^\tau I_{\text{инд}} dt, \quad (13)$$

где  $I_{\text{инд}}$  - индукционный ток. Заметим, что  $I_{\text{инд}} \sim \dot{\varphi}$ , а значит

$$\int_0^\tau I_{\text{инд}} dt \sim \int_0^\tau \dot{\varphi} dt = \varphi(\tau) \approx 0. \quad (14)$$

Поэтому зарядом, протекшим в результате индукционного тока, можно пренебречь, и выражение (13) примет вид

$$q = \int_0^\tau I dt. \quad (15)$$

Отсюда и из выражения (12) получим

$$\dot{\varphi}(\tau) = Kq. \quad (16)$$

Из выражения (7) легко видеть, что при любом режиме максимальное отклонение от положения равновесия  $\varphi_{\max} \sim \dot{\varphi}_0 \stackrel{(16)}{\sim} q$ . Таким образом, величина

$$C_q = \frac{q}{\varphi_{\max}}, \quad (17)$$

называемая *баллистической постоянной*, зависит только от параметров цепи.

Можно показать, что при неизменном  $q$  максимальное отклонение достигается при отсутствии затухания и определяется выражением

$$\varphi_{\max \text{ св}} = \frac{\dot{\varphi}(\tau)}{\omega_0} = \frac{Kq}{\omega_0}. \quad (18)$$

В критическом режиме, когда система быстрее всего приходит в равновесие, максимальное отклонение в  $e$  раз меньше:

$$\varphi_{\max \text{ кр}} = \frac{Kq}{\omega_0 e}. \quad (19)$$

Отсюда следует выражение для баллистических констант:

$$\frac{C_{Q \text{ кр}}}{C_{Q \text{ св}}} = e. \quad (20)$$

## 2. Определение динамической постоянной

**Экспериментальная установка.** Схема для измерений в стационарном режиме приведена на рис. 2. Значение входного напряжения  $U = 1,32 \pm 0,02$  В, сопротивления гальванометра  $R_0 = 475 \pm 1$  Ом. Сопротивление  $R$  можно изменять.

Угол отклонения рамки от положения равновесия измеряется с помощью осветителя, зеркала, закрепленного на рамке, и шкалы, на которую отражается свет. Если обозначить координату светового пятна за  $x$  и считать  $x \ll a$ , то выражение для угла отклонения примет вид

$$\varphi = \frac{x}{2a}, \quad (21)$$

где  $a = 128 \pm 1$  см - расстояние от шкалы до зеркала. Таким образом, из выражения (5) легко получить формулу для динамической постоянной:

$$C_I = \frac{2aI}{x} \quad (22)$$

Отсюда следует выражение для зависимости  $I(x)$ :

$$I = x \frac{C_I}{2a}. \quad (23)$$

При  $R_1 \ll R + R_0$  сила тока, протекающего через гальванометр, выражается формулой

$$I = U \frac{R_1}{R_2} \frac{1}{R + R_0}. \quad (24)$$

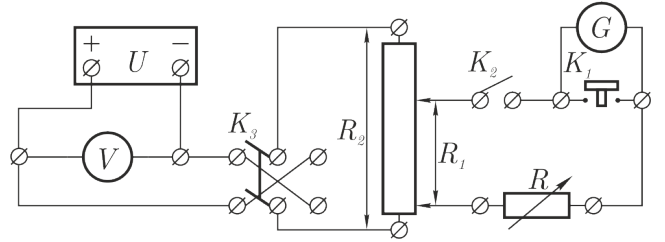


Рис. 2: Схема установки для работы в стационарном режиме

По этой формуле мы можем рассчитать токи по значениям сопротивления  $R$ , и, таким образом, получить экспериментальную зависимость  $I(x)$ . Согласно (23), она должна быть линейной, и по ее коэффициенту наклона  $k$  мы сможем вычислить  $C_I$ :

$$C_I = 2ka. \quad (25)$$

**Обработка результатов.** Экспериментальные данные вместе с пересчитанными значениями занесены в таблицу 1.

$R$ , кОм	90	80	70	60	50	40	30	25	23
$x$ , см	5,6	6,3	7,2	8,3	10	12,6	16,9	20,3	22,2
$I$ , нА	7,3	8,2	9,4	10,9	13,1	16,3	21,7	25,9	28,1
$\Delta I$ , нА	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,3	0,4	0,4

Таблица 1: Данные для измерения  $C_I$

Здесь  $\Delta I$  - погрешность силы тока, вычисляемая по формуле

$$\Delta I = \frac{\Delta U}{U}, \quad (26)$$

т.к., сопротивление  $R_0$  мало по сравнению с  $R$ , и мы считаем, что сопротивление магазина измеряется точно. За погрешность измерения  $x$  принимается  $\Delta x = 0,05$  см.

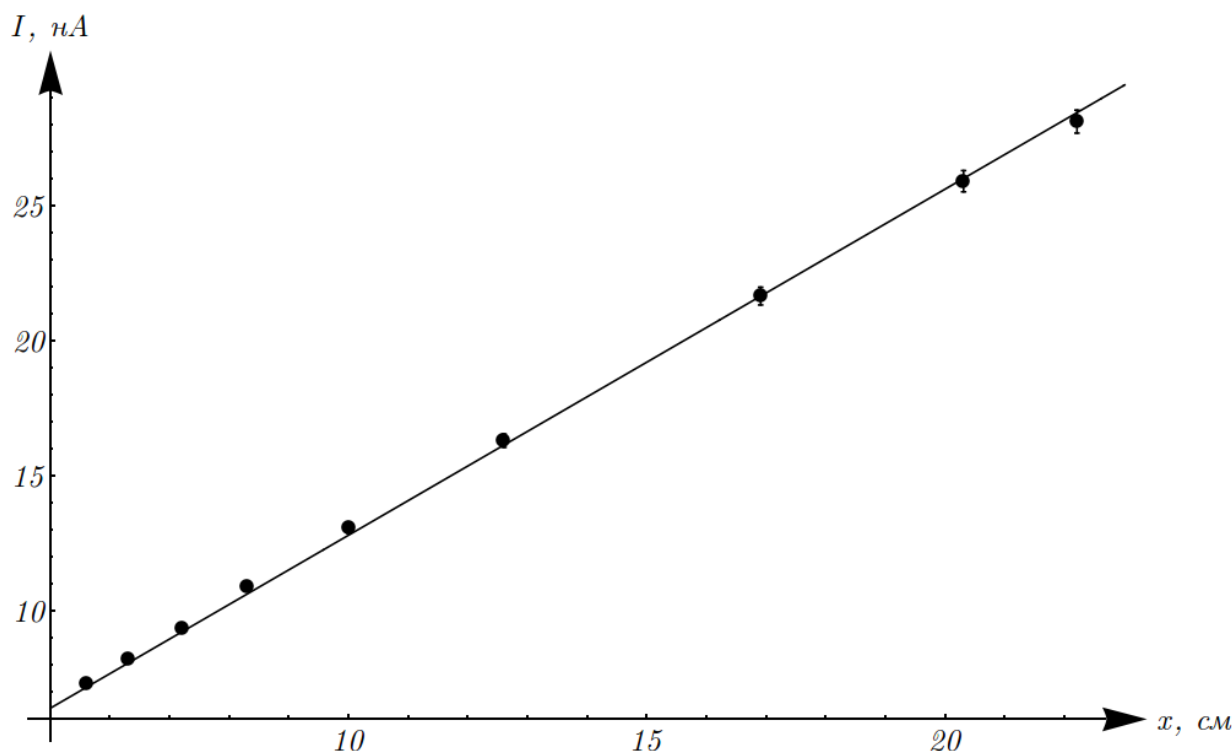


Рис. 3: График зависимости  $I(x)$

По этим данным построим график зависимости  $I(x)$ , он изображен на рис. 3. Из графика находим значение коэффициента наклона:

$$k = (1,28 \pm 0,01) \cdot 10^{-7} \text{ А/м}. \quad (27)$$

Отсюда по формуле (25) находим значение  $C_I$ :

$$C_I = (3,28 \pm 0,04) \cdot 10^{-7} \text{ А}, \quad (28)$$

погрешность  $C_I$  была вычислена по формуле

$$\Delta C_I = C_I \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta k}{k}\right)^2}. \quad (29)$$

### 3. Определение критического сопротивления гальванометра

**Экспериментальная установка.** В этой части измерения проводятся на той же схеме, что и в предыдущей, но при свободных колебаниях рамки.

При достаточно больших  $R$  из (2) следует, что  $\gamma < \omega_0$  и, согласно (7), наблюдается колебательный режим. С уменьшением  $R$  затухание увеличивается, и при  $R = R_{кр}$  движение рамки переходит в критический режим. При  $R > R_{кр}$  движение апериодическое.

Выразим логарифмический декремент затухания через параметры цепи. Подставляя в (10) выражения для периода из (11),  $\omega$  из (8),  $\gamma$  и  $\omega_0$  из (2), находим:

$$\Theta = \frac{2\pi R_3}{\sqrt{(R + R_0)^2 - R_3^2}}, \quad (30)$$

где  $R_3$  определяется выражением

$$R_3 = \frac{(BSN)^2}{2\sqrt{JD}}. \quad (31)$$

Для измерения  $\Theta$  мы будем измерять начальное отклонение луча  $x_0$  и отклонение после одного колебания  $x_1$ . Тогда логарифмический декремент затухания определяется выражением

$$\Theta = \ln \frac{x_0}{x_1}. \quad (32)$$

Теперь преобразуем равенство (30):

$$\frac{1}{\Theta^2} = \frac{(R_0 + R)^2}{4\pi^2 R_3^2} - \frac{1}{4\pi^2}. \quad (33)$$

Отсюда график зависимости  $\frac{1}{\Theta^2} ((R_0 + R)^2)$  должен быть линейен, и его коэффициент наклона определяется выражением

$$k = \frac{1}{4\pi^2 R_3^2}. \quad (34)$$

Нам осталось выразить  $R_3$  через известные параметры схемы и  $R_{кр}$ . Для этого вспомним, что при приближении к критическому режиму, то есть при  $R \rightarrow R_{кр}$ ,  $\Theta \rightarrow \infty$ . Отсюда и из выражения (30) легко получить формулу для  $R_3$ :

$$R_3 = R_0 + R_{кр}. \quad (35)$$

Окончательно, подставив результат в (34), получим выражение для  $R_{кр}$ :

$$R_{кр} = \frac{1}{2\pi\sqrt{k}} - R_0. \quad (36)$$

**Обработка результатов.** Сначала оценим  $R_{кр}$ . Для этого подберем наибольшее значение  $R_{кр}$ , при котором колебаний еще не наблюдается. Получим

$$R_{кр} \approx 9,1 \pm 0,2 \text{ кОм}. \quad (37)$$

$R$ , кОм	30	33	36	39	42	45	48
$x_0$ , см	16,9	15,4	15,4	17,0	24,0	22,1	20,7
$x_1$ , см	2,1	2,5	3,2	3,9	5,7	6,2	6,3
$\frac{1}{\Theta^2}$	0,23	0,30	0,41	0,46	0,48	0,62	0,71
$\Delta\Theta^2$	0,02	0,02	0,03	0,02	0,02	0,02	0,02
$(R + R_0)^2$ , Ом <sup>2</sup> · 10 <sup>8</sup>	9,29	11,21	13,30	15,58	18,04	20,68	23,50
$R$ , кОм	51	54	60	70	80	90	-
$x_0$ , см	20,5	18,3	16,5	23,2	20,3	18,0	-
$x_1$ , см	6,7	6,1	6,3	10,3	9,5	9,7	-
$\frac{1}{\Theta^2}$	0,80	0,83	1,08	1,52	1,73	2,62	-
$\Delta\Theta^2$	0,03	0,03	0,04	0,03	0,04	0,06	-
$(R + R_0)^2$ , Ом <sup>2</sup> · 10 <sup>8</sup>	26,50	29,68	36,57	49,67	64,76	81,86	-

Таблица 2: Данные для измерения  $R_{кр}$

Погрешность была оценена по минимальному изменению сопротивления, при котором заметно отличие в характере колебаний.

Теперь определим  $R_{кр}$  из графика. Для того, чтобы можно было вычислять  $\Theta$  с достаточной точностью, будем проводить измерения при  $R \geq 3R_{кр}$ . Экспериментальные данные вместе с пересчитанными значениями занесены в таблицу 2. По этим данным построим график требуемой зависимости (рис. 4)

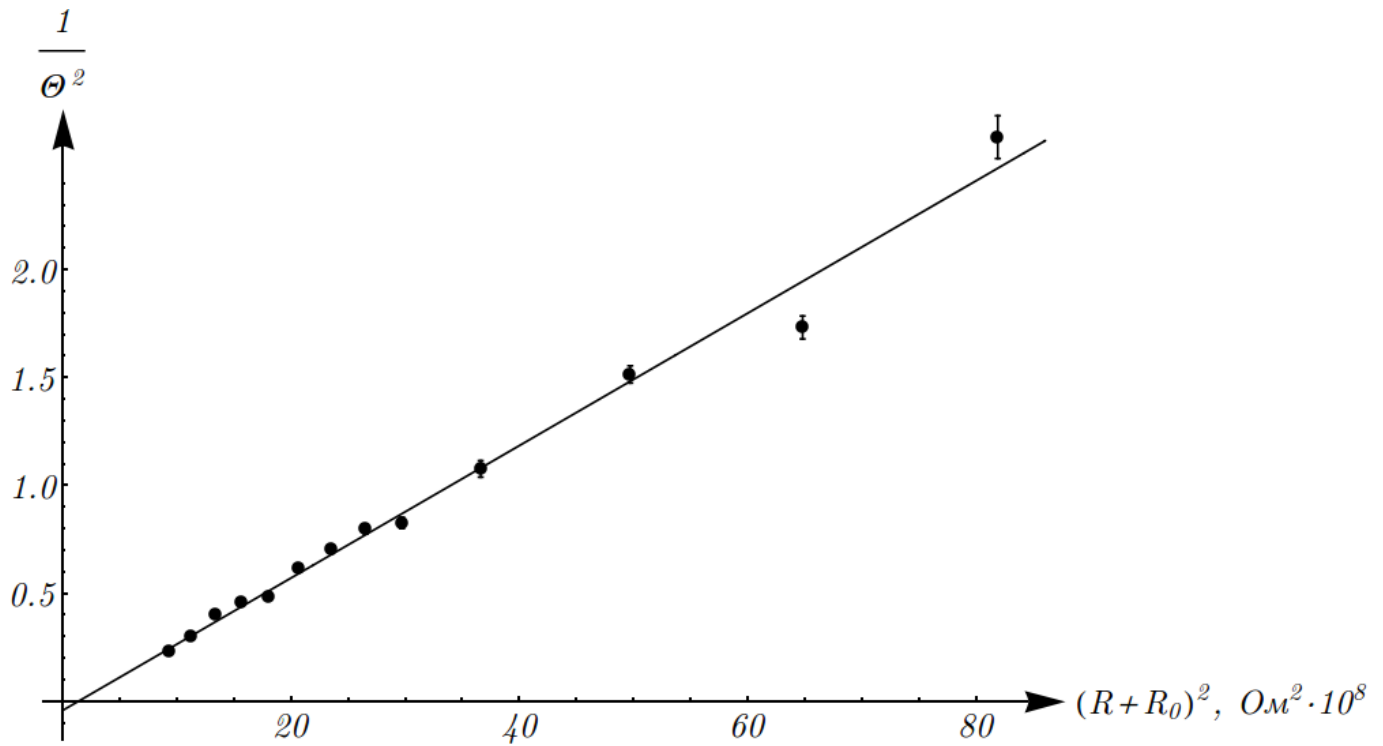


Рис. 4: График зависимости  $\frac{1}{\Theta^2} ((R_0 + R)^2)$

Из графика по МНК определим коэффициент наклона:

$$k \approx (0,31 \pm 0,01) \cdot 10^{-9} \text{ Ом}^{-2}. \quad (38)$$

Таким образом, по формуле (36) получаем искомое значение:

$$R_{кр} \approx (8,6 \pm 0,3) \text{ кОм}. \quad (39)$$

Здесь в таблице 2 погрешности  $x_0$  и  $x_1$  принимались

$$\Delta x_0 = \Delta x_1 = \Delta x = 0,2 \text{ см}, \quad (40)$$

погрешность  $\frac{1}{\Theta^2}$  вычислялась по формуле

$$\Delta \frac{1}{\Theta^2} = \frac{\Delta x \sqrt{\frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{x_1^2}}}{\Theta} \frac{1}{\Theta^2}, \quad (41)$$

погрешность измерения сопротивления считалась малой, а погрешность  $R_{кр}$  вычислялась по формуле

$$\Delta R_{кр} = \frac{\Delta k}{k} R_{кр}. \quad (42)$$

#### 4. Определение баллистической постоянной и критического сопротивления гальванометра.

**Экспериментальная установка.** Схема для измерений в баллистическом режиме представлена на рис. 5. В коробке с выводами находится сложная схема с кнопками для обеспечения правильных измерений. Емкость конденсатора  $C = 2 \text{ мкФ}$ ,  $\frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{40}$ , и это отношение остается постоянным.

Заряд на конденсаторе выражается формулой

$$q = CU_C = \frac{R_1}{R_2} UC \quad (43)$$

При нажатии на кнопку этот заряд быстро проходит через гальванометр и сопротивление  $R$ , таким образом достигается баллистический режим. Если измерят угол отклонения так же, как и в части 2, то из (17) выражение для  $C_q$  примет вид

$$C_Q = 2a \frac{R_1}{R_2} \frac{UC}{l_{\max}}, \quad (44)$$

где  $l_{\max}$  - максимальное отклонение луча. Таким образом, в критическом режиме

$$C_{Q_{кр}} = 2a \frac{R_1}{R_2} \frac{UC}{l_{\max_{кр}}} \quad (45)$$

Из (20) в критическом режиме угол отклонения, а значит и  $l_{\max}$ , в  $e$  раз меньше, чем при отсутствии трения. Чтобы измерить  $l_{\max}$  в этом режиме ( $l_{\max 0}$ ), измерим максимальное отклонение при отключенном от цепи гальванометре  $l_{\max 1}$  и декремент затухания  $\Theta_1$ . Тогда из определения декремента затухания следует, что

$$l_{\max 0} = l_{\max 1} \cdot e^{\frac{\Theta_1}{4}}. \quad (46)$$

После этого остается снять зависимость  $l_{\max}(R)$ , и с помощью экстраполяции найти точку, в которой

$$l_{\max} = \frac{l_{\max 0}}{e}. \quad (47)$$

Это удобно делать в координатах  $l_{\max} \left( \frac{1}{R+R_0} \right)$ , т.к. несложно показать, что при  $\gamma \ll \omega_0$ , то есть при достаточно больших  $R$ , график в них линеен.

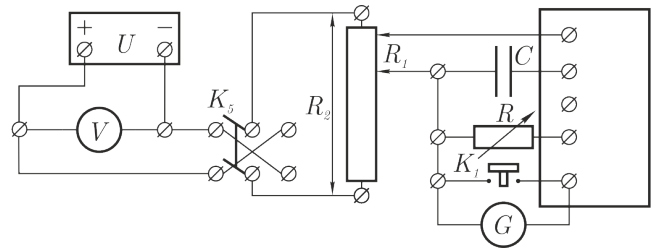


Рис. 5: Схема установки для работы в баллистическом режиме

**Обработка данных.** Сначала проведем измерения при отключенном от цепи гальванометре. Для периода таких колебаний получим значение

$$T_0 \approx (6,43 \pm 0,02) \text{ с}, \quad (48)$$

этот результат получен из измерения времени 13 колебаний, время реакции принималось равным 0,2 с. Значение максимального отклонения

$$l_{\max 1} \approx (21,3 \pm 0,2) \text{ см}, \quad (49)$$

значение следующего отклонения

$$l_1 \approx (15,4 \pm 0,2) \text{ см}. \quad (50)$$

Отсюда по определению

$$\Theta_1 = \ln \frac{l_1}{l_{\max 1}} \approx 0,32 \pm 0,02. \quad (51)$$

Таким образом, из (46) получим

$$l_{\max 0} \approx (23,1 \pm 0,2) \text{ см}. \quad (52)$$

Погрешность была вычислена по формуле

$$\Delta l_{\max 0} = l_{\max 0} \frac{\Delta l_{\max 1}}{l_{\max 1}}, \quad (53)$$

т.к.

$$\Delta e^{\frac{\Theta_1}{4}} = \frac{\Delta \Theta_1}{4} e^{\frac{\Theta_1}{4}}, \quad (54)$$

а эта величина мала (относительная погрешность получится на порядок меньше  $\frac{\Delta l_{\max 1}}{l_{\max 1}}$ ). Также теперь несложно найти  $l_{\max \text{кр}}$ :

$$l_{\max \text{кр}} = \frac{l_{\max 0}}{e} \approx (8,5 \pm 0,1) \text{ см}. \quad (55)$$

Теперь снимем зависимость  $l_{\max}(R)$ . Экспериментальные данные вместе с пересчитанными значениями занесены в таблицу 3.

$R, \text{ кОм}$	50	40	35	30	25	20	15	10	5
$l_{\max}, \text{ см}$	17.1	16.4	15.9	15.3	15	14	12.3	10.4	7.1
$\frac{1}{R+R_0}, \text{ Ом}^{-1} \cdot 10^{-5}$	1.98	2.47	2.82	3.28	3.93	4.88	6.46	9.55	18.26

Таблица 3: Данные для измерения  $R_{\text{кр}}$

Погрешность измерения  $l_{\max}$  принята

$$\Delta l_{\max} = 0,2 \text{ см}, \quad (56)$$

погрешность измерения сопротивления считаем малой. По этим данным построим график зависимости  $l_{\max} \left( \frac{1}{R+R_0} \right)$ , он изображен на рис. 6.

Хотя при больших  $R$  зависимость действительно линейна, на всем измеренном диапазоне она хорошо аппроксимируется зависимостью вида  $a\sqrt{x} + bx + c$  (такое фитирование и представлено на рис. 6). Зная  $l_{\max \text{кр}}$ , находим точку, которая соответствует такому отклонению, это точка

$$G = \frac{1}{R + R_0} \approx (11,1 \pm 0,3) \text{ Ом}^{-1} \cdot 10^{-5}, \quad (57)$$



погрешность была оценена по крайним значениям. Отсюда, т.к. эта точка критическая, находим  $R_{кр}$ :

$$R_{кр} = \frac{1}{G} - R_0 \approx 8,5 \pm 0,3 \text{ кОм}, \quad (58)$$

погрешность была найдена по формуле

$$\Delta R_{кр} = R_{кр} \frac{\Delta G}{G}. \quad (59)$$

Осталось найти  $C_{Q_{кр}}$  из выражения (45), получим

$$C_{Q_{кр}} = (1,98 \pm 0,04) \cdot 10^{-6} \text{ Кл}, \quad (60)$$

выражение для погрешности:

$$\Delta C_{Q_{кр}} = C_{Q_{кр}} \sqrt{\left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l_{\max_{кр}}}{l_{\max_{кр}}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2} \quad (61)$$

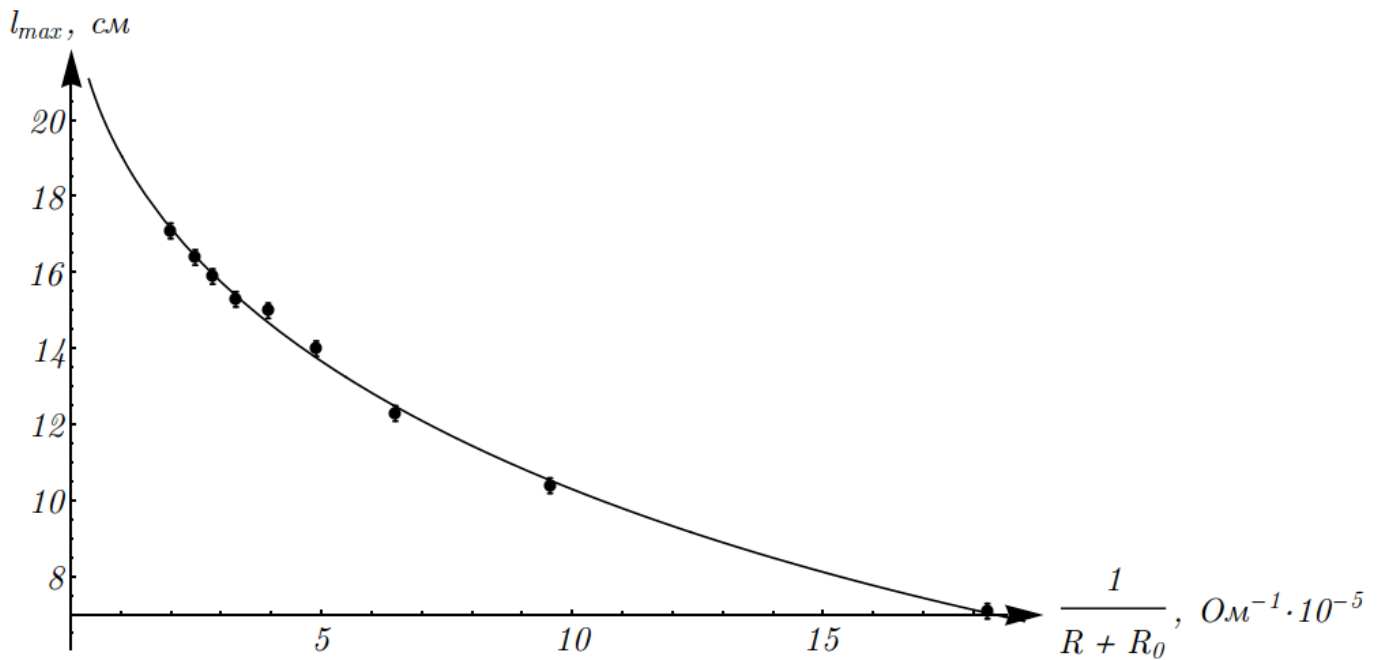


Рис. 6: График зависимости  $l_{\max} \left( \frac{1}{R+R_0} \right)$

Ранее в этой части был измерен  $T_0$ . Сравним его с величиной  $R_0 C$ :

$$R_0 C \approx 1 \text{ мс} \ll T_0. \quad (62)$$

## 5. Заключение

Мы измерили постоянные гальванометра, и, тремя разными способом, критическое сопротивление. Все они дали довольно близкие значения, но наибольшее отклонение от остальных у метода подбора (у двух оставшихся почти одинаковы результаты). Кроме того, мы сравнили характерное время разрядки с периодом колебаний, и получили, что его можно действительно считать малым.