

## Работа 3.2.6

## Исследование гальванометра

**Цель работы:** изучение работы высокочувствительного магнитозеркального гальванометра магнитоэлектрической системы в режимах измерения постоянного тока и электрического заряда.

**Оборудование:** зеркальный гальванометр с осветителем и шкалой, источник постоянного напряжения, делитель напряжения, магазин сопротивлений, эталонный конденсатор, вольтметр, переключатель, ключ, линейка.

## 1. Теоретическая справка

**Устройство.** Баллистический гальванометр - электроизмерительный прибор магнитоэлектрической системы, отличающийся высокой чувствительностью и сравнительно большим периодом колебаний подвижной части. Он представляет собой скрепленную с полым цилиндром проводящую рамку, подвешенную на нити в радиально направленном постоянном магнитном поле (см. рис. 1). На рамке закреплено зеркало, служащее для измерения угла поворота.

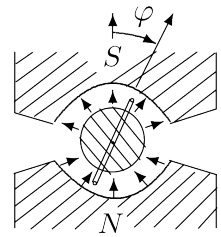


Рис. 1: Рамка с током в магнитном поле

**Уравнение движения.** Введем следующие обозначения:  $\varphi$  - угол поворота рамки,  $D$  - модуль кручения,  $S$  - площадь рамки,  $N$  - число витков,  $I$  - сила тока в рамке при отсутствии ЭДС индукции,  $B$  - индукция магнитного поля,  $R_{\Sigma}$  - общее сопротивление цепи,  $J$  - момент инерции подвижной системы. Если пренебречь сопротивлением воздуха, то уравнение движения записывается в виде

$$J\ddot{\varphi} + \frac{(BSN)^2}{R_{\Sigma}}\dot{\varphi} + D\varphi = BSNI. \quad (1)$$

Введем обозначения

$$\begin{cases} 2\gamma = \frac{(BSN)^2}{JR_{\Sigma}}, \\ \omega_0^2 = \frac{D}{J}, \\ K = \frac{BSN}{J}. \end{cases} \quad (2)$$

Таким образом, уравнение (1) примет вид

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = KI. \quad (3)$$

Заметим, что данное уравнение является уравнением затухающих колебаний с коэффициентом затухания  $\gamma$  и собственной частотой  $\omega_0$ .

**Режим измерения постоянного тока.** Если  $I = \text{const}$ , то по прошествии некоторого времени колебания затухнут, и можно принять  $\varphi = \text{const}$ . Тогда из уравнения (3) легко получить

$$\varphi = \frac{K}{\omega_0^2}I = \frac{BSN}{D}I = \frac{I}{C_I}. \quad (4)$$

$C_I$  называется *динамической постоянной* гальванометра и определяется выражением

$$C_I = \frac{I}{\varphi} = \frac{D}{BSN}. \quad (5)$$

**Свободные колебания рамки.** Пусть  $I = 0$  и выполнены следующие начальные условия:

$$\begin{cases} \varphi(t=0) = 0, \\ \dot{\varphi}(t=0) = \dot{\varphi}_0. \end{cases} \quad (6)$$

Тогда в зависимости от  $\gamma$  и  $\omega_0$  решение уравнения (3) имеет вид

$$\begin{cases} \varphi = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega} e^{-\gamma t} \sin \omega t, & \gamma < \omega_0 \text{ (колебательный режим);} \\ \varphi = \dot{\varphi}_0 t e^{-\gamma t}, & \gamma = \omega_0 \text{ (критический режим);} \\ \varphi = \frac{\dot{\varphi}_0}{\varkappa} e^{-\gamma t} \operatorname{sh} \varkappa t, & \gamma > \omega_0 \text{ (апериодический режим).} \end{cases} \quad (7)$$

Здесь  $\varkappa$  и  $\omega$  определяются соотношениями

$$\begin{cases} \omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2, \\ \varkappa^2 = \gamma^2 - \omega_0^2. \end{cases} \quad (8)$$

В случае колебательного режима можно ввести логарифмический декремент затухания  $\Theta$ :

$$\Theta = \ln \frac{\varphi_n}{\varphi_{n+1}}, \quad (9)$$

где  $\varphi_n$  и  $\varphi_{n+1}$  - углы последовательных отклонений в одну сторону с номерами  $n$  и  $n+1$ . Из (7) в случае малого затухания ( $\gamma \ll \omega$ ) легко получить выражение для  $\Theta$ :

$$\Theta = \gamma T, \quad (10)$$

где  $T$  - период колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (11)$$

Заметим, что при приближении к критическому режиму  $\Theta \rightarrow \infty$ .

**Режим измерения заряда.** Теперь рассмотрим ситуацию, когда через гальванометр проходит короткий импульс тока. Будем считать, что продолжительность импульса  $\tau$  достаточно мала ( $\tau \ll T$ ), и отклонением рамки можно пренебречь. Пусть через рамку протекал ток с момента времени  $t = 0$  до момента времени  $t = \tau$ . Проинтегрировав уравнение (3) с учетом приближения  $\varphi \approx 0$ , получим

$$\dot{\varphi}(\tau) = K \int_0^\tau I dt. \quad (12)$$

Заряд, прошедший через гальванометр выражается формулой

$$q = \int_0^\tau I dt + \int_0^\tau I_{\text{инд}} dt, \quad (13)$$

где  $I_{\text{инд}}$  - индукционный ток. Заметим, что  $I_{\text{инд}} \sim \dot{\varphi}$ , а значит

$$\int_0^\tau I_{\text{инд}} dt \sim \int_0^\tau \dot{\varphi} dt = \varphi(\tau) \approx 0. \quad (14)$$

Поэтому зарядом, протекшим в результате индукционного тока, можно пренебречь, и выражение (13) примет вид

$$q = \int_0^\tau I dt. \quad (15)$$

Отсюда и из выражения (12) получим

$$\dot{\varphi}(\tau) = Kq. \quad (16)$$

Из выражения (7) легко видеть, что при любом режиме максимальное отклонение от положения равновесия  $\varphi_{\max} \sim \dot{\varphi}_0 \stackrel{(16)}{\sim} q$ . Таким образом, величина

$$C_q = \frac{q}{\varphi_{\max}}, \quad (17)$$

называемая *баллистической постоянной*, зависит только от параметров цепи.

Можно показать, что при неизменном  $q$  максимальное отклонение достигается при отсутствии затухания и определяется выражением

$$\varphi_{\max \text{ св}} = \frac{\dot{\varphi}(\tau)}{\omega_0} = \frac{Kq}{\omega_0}. \quad (18)$$

В критическом режиме, когда система быстрее всего приходит в равновесие, максимальное отклонение в  $e$  раз меньше:

$$\varphi_{\max \text{ кр}} = \frac{Kq}{\omega_0 e}. \quad (19)$$

Отсюда следует выражение для баллистических констант:

$$\frac{C_{Q \text{ кр}}}{C_{Q \text{ св}}} = e. \quad (20)$$

## 2. Определение динамической постоянной

**Экспериментальная установка.** Схема для измерений в стационарном режиме приведена на рис. 2. Значение входного напряжения  $U = 1,32 \pm 0,02$  В, сопротивления гальванометра  $R_0 = 475 \pm 1$  Ом. Сопротивление  $R$  можно изменять.

Угол отклонения рамки от положения равновесия измеряется с помощью осветителя, зеркала, закрепленного на рамке, и шкалы, на которую отражается свет. Если обозначить координату светового пятна за  $x$  и считать  $x \ll a$ , то выражение для угла отклонения примет вид

$$\varphi = \frac{x}{2a}, \quad (21)$$

где  $a = 128 \pm 1$  см - расстояние от шкалы до зеркала. Таким образом, из выражения (5) легко получить формулу для динамической постоянной:

$$C_I = \frac{2aI}{x} \quad (22)$$

Отсюда следует выражение для зависимости  $I(x)$ :

$$I = x \frac{C_I}{2a}. \quad (23)$$

При  $R_1 \ll R + R_0$  сила тока, протекающего через гальванометр, выражается формулой

$$I = U \frac{R_1}{R_2} \frac{1}{R + R_0}. \quad (24)$$

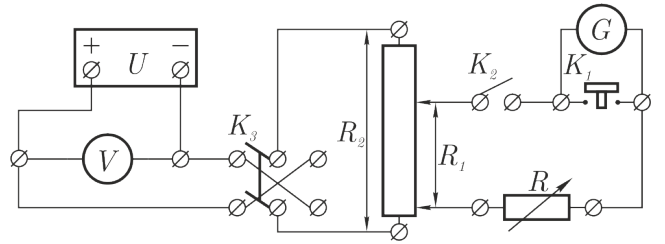


Рис. 2: Схема установки для работы в стационарном режиме

По этой формуле мы можем рассчитать токи по значениям сопротивления  $R$ , и, таким образом, получить экспериментальную зависимость  $I(x)$ . Согласно (23), она должна быть линейной, и по ее коэффициенту наклона  $k$  мы сможем вычислить  $C_I$ :

$$C_I = 2ka. \quad (25)$$

**Обработка результатов.** Экспериментальные данные вместе с пересчитанными значениями занесены в таблицу 1.

|                 |     |     |     |      |      |      |      |      |      |
|-----------------|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|------|
| $R$ , кОм       | 90  | 80  | 70  | 60   | 50   | 40   | 30   | 25   | 23   |
| $x$ , см        | 5,6 | 6,3 | 7,2 | 8,3  | 10   | 12,6 | 16,9 | 20,3 | 22,2 |
| $I$ , нА        | 7,3 | 8,2 | 9,4 | 10,9 | 13,1 | 16,3 | 21,7 | 25,9 | 28,1 |
| $\Delta I$ , нА | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,2  | 0,2  | 0,2  | 0,3  | 0,4  | 0,4  |

Таблица 1: Данные для измерения  $C_I$

Здесь  $\Delta I$  - погрешность силы тока, вычисляемая по формуле

$$\Delta I = \frac{\Delta U}{U}, \quad (26)$$

т.к., сопротивление  $R_0$  мало по сравнению с  $R$ , и мы считаем, что сопротивление магазина измеряется точно. За погрешность измерения  $x$  принимается  $\Delta x = 0,05$  см.

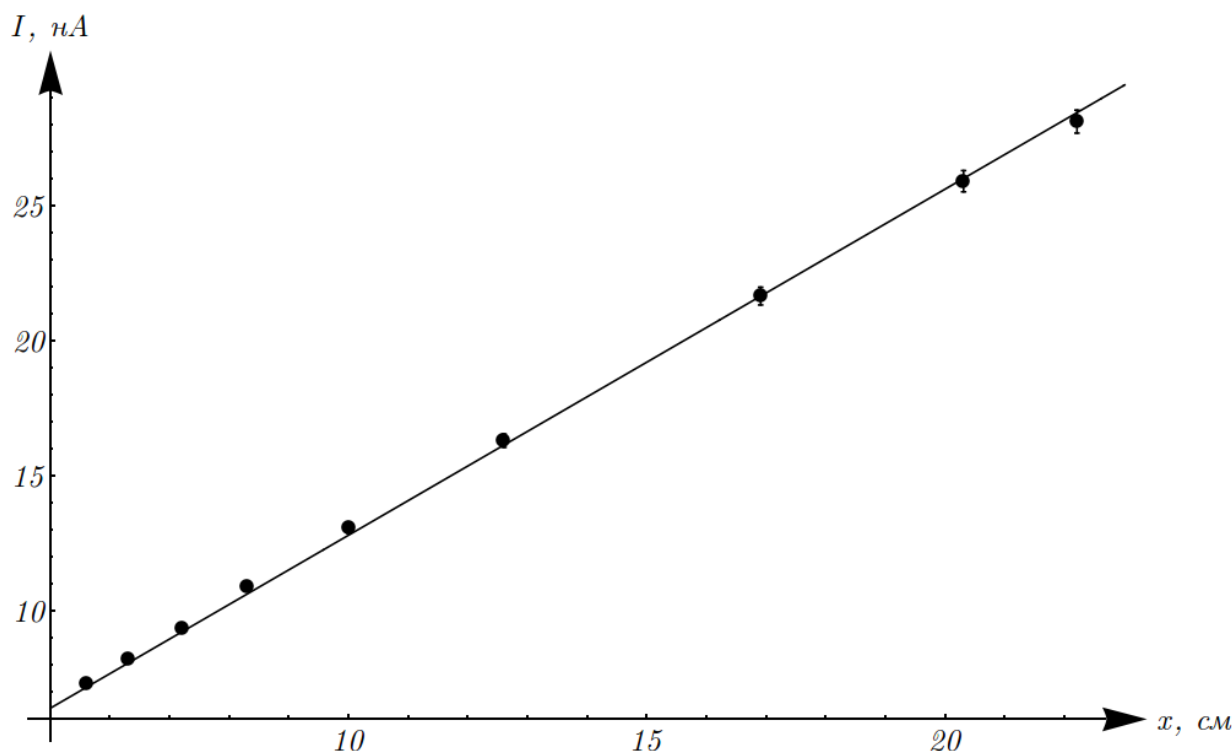


Рис. 3: График зависимости  $I(x)$

По этим данным построим график зависимости  $I(x)$ , он изображен на рис. 3. Из графика находим значение коэффициента наклона:

$$k = (1,28 \pm 0,01) \cdot 10^{-7} \text{ А/м}. \quad (27)$$

Отсюда по формуле (25) находим значение  $C_I$ :

$$C_I = (3,28 \pm 0,04) \cdot 10^{-7} \text{ А}, \quad (28)$$

погрешность  $C_I$  была вычислена по формуле

$$\Delta C_I = C_I \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta k}{k}\right)^2}. \quad (29)$$

### 3. Определение критического сопротивления гальванометра

**Экспериментальная установка.** В этой части измерения проводятся на той же схеме, что и в предыдущей, но при свободных колебаниях рамки.

При достаточно больших  $R$  из (2) следует, что  $\gamma < \omega_0$  и, согласно (7), наблюдается колебательный режим. С уменьшением  $R$  затухание увеличивается, и при  $R = R_{кр}$  движение рамки переходит в критический режим. При  $R > R_{кр}$  движение апериодическое.

Выразим логарифмический декремент затухания через параметры цепи. Подставляя в (10) выражения для периода из (11),  $\omega$  из (8),  $\gamma$  и  $\omega_0$  из (2), находим:

$$\Theta = \frac{2\pi R_3}{\sqrt{(R + R_0)^2 - R_3^2}}, \quad (30)$$

где  $R_3$  определяется выражением

$$R_3 = \frac{(BSN)^2}{2\sqrt{JD}}. \quad (31)$$

Для измерения  $\Theta$  мы будем измерять начальное отклонение луча  $x_0$  и отклонение после одного колебания  $x_1$ . Тогда логарифмический декремент затухания определяется выражением

$$\Theta = \frac{x_1}{x_0}. \quad (32)$$

Теперь преобразуем равенство (30):

$$\frac{1}{\Theta^2} = \frac{(R_0 + R)^2}{4\pi^2 R_3^2} - \frac{1}{4\pi^2}. \quad (33)$$

Отсюда график зависимости  $\frac{1}{\Theta^2} ((R_0 + R)^2)$  должен быть линейен, и его коэффициент наклона определяется выражением

$$k = \frac{1}{4\pi^2 R_3^2}. \quad (34)$$

Нам осталось выразить  $R_3$  через известные параметры схемы и  $R_{кр}$ . Для этого вспомним, что при приближении к критическому режиму, то есть при  $R \rightarrow R_{кр}$ ,  $\Theta \rightarrow \infty$ . Отсюда и из выражения (30) легко получить формулу для  $R_3$ :

$$R_3 = R_0 + R_{кр}. \quad (35)$$

Окончательно, подставив результат в (34), получим выражение для  $R_{кр}$ :

$$R_{кр} = \frac{1}{2\pi\sqrt{k}} - R_0. \quad (36)$$

**Обработка результатов.** Сначала оценим  $R_{кр}$ . Для этого подберем наибольшее значение  $R_{кр}$ , при котором колебаний еще не наблюдается. Получим

$$R_{кр} \approx 9,1 \pm 0,2 \text{ кОм}. \quad (37)$$

|   |       |       |       |       |       |       |       |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $R$ , кОм   | 30    | 33    | 36    | 39    | 42    | 45    | 48    |
| $x_0$ , см  | 16,9  | 15,4  | 15,4  | 17,0  | 24,0  | 22,1  | 20,7  |
| $x_1$ , см  | 2,1   | 2,5   | 3,2   | 3,9   | 5,7   | 6,2   | 6,3   |
| $\frac{1}{\Theta^2}$                              | 0,23  | 0,30  | 0,41  | 0,46  | 0,48  | 0,62  | 0,71  |
| $\Delta\Theta^2$                                  | 0,02  | 0,02  | 0,03  | 0,02  | 0,02  | 0,02  | 0,02  |
| $(R + R_0)^2$ , Ом <sup>2</sup> · 10 <sup>8</sup> | 9,29  | 11,21 | 13,30 | 15,58 | 18,04 | 20,68 | 23,50 |
| $R$ , кОм   | 51    | 54    | 60    | 70    | 80    | 90    | -     |
| $x_0$ , см  | 20,5  | 18,3  | 16,5  | 23,2  | 20,3  | 18,0  | -     |
| $x_1$ , см  | 6,7   | 6,1   | 6,3   | 10,3  | 9,5   | 9,7   | -     |
| $\frac{1}{\Theta^2}$                              | 0,80  | 0,83  | 1,08  | 1,52  | 1,73  | 2,62  | -     |
| $\Delta\Theta^2$                                  | 0,03  | 0,03  | 0,04  | 0,03  | 0,04  | 0,06  | -     |
| $(R + R_0)^2$ , Ом <sup>2</sup> · 10 <sup>8</sup> | 26,50 | 29,68 | 36,57 | 49,67 | 64,76 | 81,86 | -     |

Таблица 2: Данные для измерения  $R_{кр}$

Погрешность была оценена по минимальному изменению сопротивления, при котором заметно отличие в характере колебаний.

Теперь определим  $R_{кр}$  из графика. Для того, чтобы можно было вычислять  $\Theta$  с достаточной точностью, будем проводить измерения при  $R \geq 3R_{кр}$ . Экспериментальные данные вместе с пересчитанными значениями занесены в таблицу 2. По этим данным построим график требуемой зависимости (рис. 4)

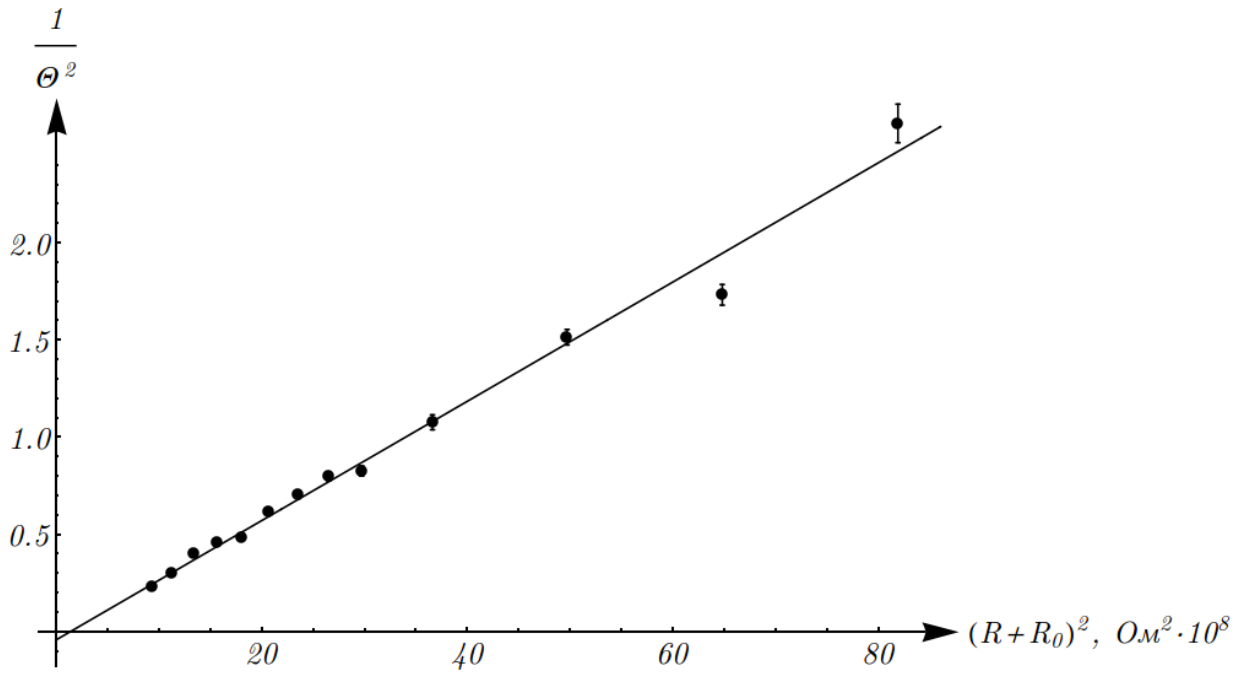


Рис. 4: График зависимости  $\frac{1}{\Theta^2} ((R_0 + R)^2)$

Из графика по МНК определим коэффициент наклона:

$$k \approx (0,31 \pm 0,01) \cdot 10^{-9} \text{ Ом}^{-2}. \quad (38)$$

Таким образом, по формуле (36) получаем искомое значение:

$$R_{кр} \approx (8,6 \pm 0,3) \text{ кОм}. \quad (39)$$

Здесь в таблице 2 погрешности  $x_0$  и  $x_1$  принимались

$$\Delta x_0 = \Delta x_1 = \Delta x = 0,2 \text{ см}, \quad (40)$$

погрешность  $\frac{1}{\Theta^2}$  вычислялась по формуле

$$\Delta \frac{1}{\Theta^2} = \frac{\Delta x \sqrt{\frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{x_1^2}}}{\Theta} \frac{1}{\Theta^2}, \quad (41)$$

погрешность измерения сопротивления считалась малой, а погрешность  $R_{кр}$  вычислялась по формуле

$$\Delta R_{кр} = \frac{\Delta k}{k} R_{кр}. \quad (42)$$

#### 4. Определение баллистической постоянной и критического сопротивления гальванометра.

**Экспериментальная установка.** Схема для измерений в баллистическом режиме представлена на рис. 5. В коробке с выводами находится сложная схема с кнопками для обеспечения правильных измерений. Емкость конденсатора  $C = 2$  мкФ.

Заряд на конденсаторе выразится формулой

$$q = CU_C = \frac{R_1}{R_2} UC \quad (43)$$

При нажатии на кнопку этот заряд быстро проходит через гальванометр и сопротивление  $R$ , таким образом достигается баллистический режим. Если измерят угол отклонения так же, как и в части 2, то из (17) выражение для  $C_q$  примет вид

$$C_Q = 2a \frac{R_1}{R_2} \frac{UC}{l_{\max}}, \quad (44)$$

где  $l_{\max}$  - максимальное отклонение луча. Таким образом, в критическом режиме

$$C_{Q_{кр}} = 2a \frac{R_1}{R_2} \frac{UC}{l_{\max_{кр}}} \quad (45)$$

Из (20) в критическом режиме угол отклонения, а значит и  $l_{\max}$ , в  $e$  раз меньше, чем при отсутствии трения. Чтобы измерить  $l_{\max}$  в этом режиме ( $l_{\max 0}$ ), измерим максимальное отклонение при отключенном от цепи гальванометре  $l_{\max 1}$  и декремент затухания  $\Theta_1$ . Тогда из определения декремента затухания следует, что

$$l_{\max 0} = l_{\max 1} \cdot e^{\frac{\Theta_1}{4}}. \quad (46)$$

После этого остается снять зависимость  $l_{\max}(R)$ , и с помощью экстраполяции найти точку, в которой

$$l_{\max} = \frac{l_{\max 0}}{e}. \quad (47)$$

Это удобно делать в координатах  $l_{\max} \left( \frac{1}{R+R_0} \right)$ , т.к. несложно показать, что при  $\gamma \ll \omega_0$ , то есть при достаточно больших  $R$ , график в них линеен.

**Обработка данных.** Сначала проведем измерения при отключенном от цепи гальванометре. Для периода таких колебаний получим значение

$$T_0 \approx (6,43 \pm 0,02) \text{ с}, \quad (48)$$

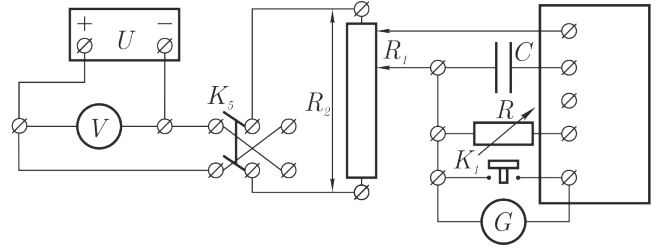


Рис. 5: Схема установки для работы в баллистическом режиме

этот результат получен из измерения времени 13 колебаний, время реакции принималось равным 0,2 с. Значение максимального отклонения

$$l_{\max 1} \approx 21,3 \pm 0,2 \text{ см}, \quad (49)$$

значение следующего отклонения

$$l_1 = 15,4 \pm 0,2 \text{ см}. \quad (50)$$

Отсюда по определению

$$\Theta_1 = \ln \frac{l_1}{l_{\max 1}} \approx 0,32 \pm 0,02. \quad (51)$$

Таким образом, из (46) получим

$$l_{\max 0} = (23,1 \pm 0,2) \text{ см}. \quad (52)$$

Погрешность была вычислена по формуле

$$\Delta l_{\max 0} = l_{\max 0} \frac{\Delta l_{\max 1}}{l_{\max 1}}, \quad (53)$$

т.к.

$$\Delta e^{\frac{\Theta_1}{4}} = \frac{\Delta \Theta_1}{4} e^{\frac{\Theta_1}{4}}, \quad (54)$$

а эта величина мала (относительная погрешность получится на порядок меньше  $\frac{\Delta l_{\max 1}}{l_{\max 1}}$ ). Также теперь несложно найти  $l_{\max \text{кр}}$ :

$$l_{\max \text{кр}} = \frac{l_{\max 0}}{e} \approx (8,5 \pm 0,1) \text{ см}. \quad (55)$$

Теперь снимем зависимость  $l_{\max}(R)$ . Экспериментальные данные вместе с пересчитанными значениями занесены в таблицу

|   |      |      |      |      |      |      |      |      |       |
|---|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| $R$ , кОм   | 50   | 40   | 35   | 30   | 25   | 20   | 15   | 10   | 5     |
| $l_{\max}$ , см   | 17.1 | 16.4 | 15.9 | 15.3 | 15   | 14   | 12.3 | 10.4 | 7.1   |
| $\frac{1}{R+R_0}$ , Ом <sup>-1</sup> · 10 <sup>-5</sup> | 1.98 | 2.47 | 2.82 | 3.28 | 3.93 | 4.88 | 6.46 | 9.55 | 18.26 |

Таблица 3: Данные для измерения  $R_{\text{кр}}$

Погрешность измерения  $l_{\max}$  принята

$$\Delta l_{\max} \approx 0,2 \text{ см}, \quad (56)$$

погрешность измерения сопротивления считаем малой.

По этим данным построим график зависимости  $l_{\max} \left( \frac{1}{R+R_0} \right)$ , он изображен на рис. 6.

Хотя при больших  $R$  зависимость действительно линейна, на всем измеренном диапазоне она хорошо аппроксимируется зависимостью вида  $a\sqrt{x} + bx + c$  (такое фитирование и представлено на рис. 6). Зная  $l_{\max \text{кр}}$ , находим точку, которая соответствует такому отклонению, это точка

$$G = \frac{1}{R + R_0} \approx (11,1 \pm 0,3) \text{ Ом}^{-1} \cdot 10^{-5}, \quad (57)$$

погрешность была оценена по крайним значениям. Отсюда, т.к. эта точка критическая, находим  $R_{\text{кр}}$ :

$$R_{\text{кр}} = \frac{1}{G} - R_0 \approx 8,5 \pm 0,3 \text{ кОм}. \quad (58)$$

Погрешность была найдена по формуле

$$\Delta R_{\text{кр}} = R_{\text{кр}} \frac{\Delta G}{G}. \quad (59)$$

Ранее в этой части был измерен  $T_0$ . Сравним его с величиной  $R_0 C$ :

$$R_0 C \approx 1 \text{ мс} \ll T_0. \quad (60)$$



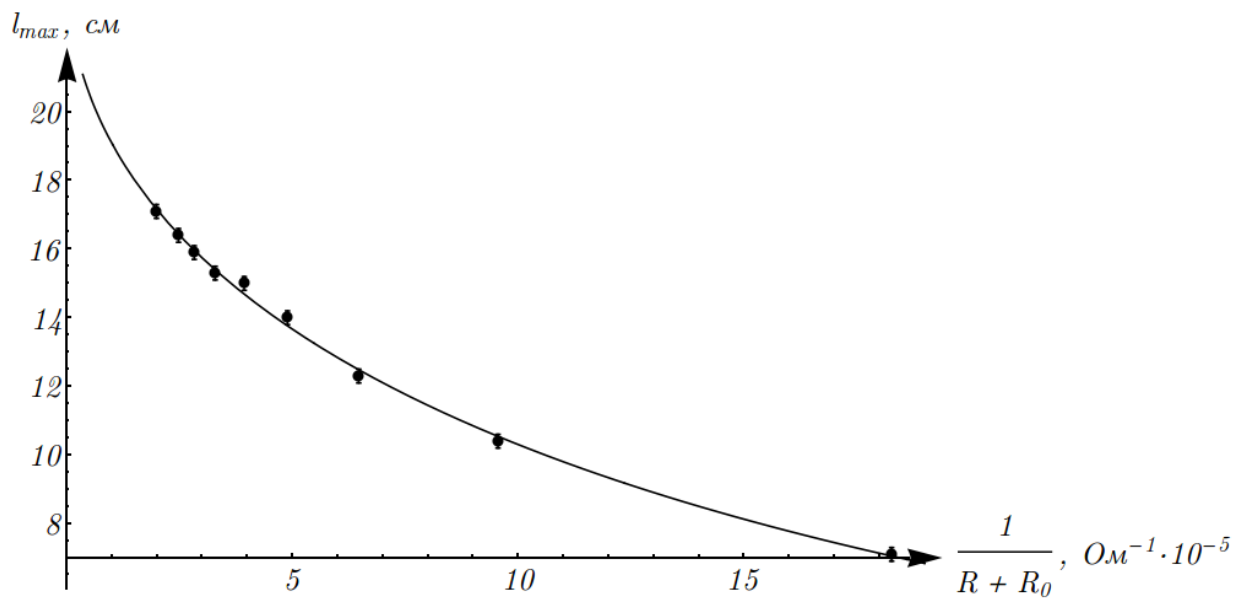


Рис. 6: График зависимости  $l_{\max} \left( \frac{1}{R+R_0} \right)$

## 5. Заключение

Мы измерили постоянные гальванометра, и, тремя разными способам, критическое сопротивление. Все они дали довольно близкие значения, но наибольшее отклонение от остальных у метода подбора (у двух оставшихся почти одинаковы результаты). Кроме того, мы сравнили характерное время разрядки с периодом колебаний, и получили, что его можно действительно считать малым.