Илья Кочергин, 626 группа

Листок 4

1. Вопросы

Вопрос 1

Представлением Лакса, или LA — парой, называется запись некоторой системы дифференциальных уравнений в виде

$$\dot{L} = [L, A], \tag{1}$$

где L и A — матрицы, или, в более общем случае, дифференциальные операторы.

Вопрос 2

Для цепочки Тоды (для простоты рассмотрен случай $N = 3$) L и A — следующие матрицы:

$$\begin{gathered} L = \begin{pmatrix} p_1 & x_1 & x_3 \\ x_1 & p_2 & x_2 \\ x_3 & x_2 & p_3 \end{pmatrix}; \\ \\ A = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & -x_3 \\ -x_1 & 0 & x_2 \\ x_3 & -x_2 & 0 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{2}$$

Для уравнения KdV ими будут дифференциальные операторы:

$$\begin{gathered} L = -\partial_x^2 + u \\ A = 4\partial_x^3 - 6u\partial_x - 3u'_x \end{gathered} \tag{3}$$

2. Упражнения

Упражнение 1

Рассмотрим матрицу $B = L^n$. Ее производная по времени имеет вид

$$\dot{B} = \dot{L}^n = nL^{n-1}\dot{L} = nL^{n-1}[L, A]. \tag{4}$$

Отсюда

$$\operatorname{tr} L^n = n \operatorname{tr} L^{n-1}(\operatorname{tr}(AL) - \operatorname{tr}(LA)) = n(\operatorname{tr}(L^n A) - \operatorname{tr}(L^{n-1}AL)) = 0, \tag{5}$$

т.к. след не зависит от порядка перемножения. Отсюда $\operatorname{tr}(L^n)$ - интеграл движения при любом n. Т.к. след выражается через собственные значения, то число линейно-независимых интегралов равно числу собственных значений L (и они также сохраняются).

3. Задачи

Задача 1

Рассмотрим уравнение KdV:

$$u'''_{xxx} + 6uu'_x + u'_t = 0. \tag{6}$$

Произведем замену

$$a = x - vt, \tag{7}$$

и будем искать решение вида

$$u(x,t) = f(a). \tag{8}$$

Тогда производные u перезаписываются в следующей форме:

$$\begin{gathered} u'_x = f'a'_x = f' \\ u'_t = f'a'_t = -vf'. \end{gathered} \tag{9}$$

В новых обозначениях уравнение KdV примет вид

$$-vf' + f''' + 6ff' = 0. \tag{10}$$

Это уравнение легко интегрируется, получаем

$$-vf + f'' + 3f^2 + C_1 = 0. \tag{11}$$

Для дальнейшего интегрирования сначала домножим уравнение на f', в итоге получим

$$-\frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{2}f'^2 + f^3 + C_1 f + C_2 = 0. \tag{12}$$

При произвольных C_1 и C_2 невозможно решить это уравнение в элементарных функциях. Примем

$$C_1 = C_2 = 0, \tag{13}$$

тогда приходим к выражению

$$f' = \sqrt{vf^2 - 2f^3}, \tag{14}$$

для решения необходимо найти интеграл

$$\int \frac{df}{f\sqrt{v - 2f}}. \tag{15}$$

Заменой

$$u = v - 2f \tag{16}$$

он приводится к виду

$$\int \frac{du}{u^{\frac{3}{2}} - v\sqrt{u}} = /\tau = \sqrt{u}/ = 2\int \frac{d\tau}{\tau^2 - v} = -\frac{2}{\sqrt{v}} \operatorname{arcth} \frac{\tau}{\sqrt{v}}. \tag{17}$$

Отсюда путем обратных замен получаем решение:

$$-\operatorname{arcth}\sqrt{1 - \frac{2f}{v}} = \frac{1}{2}\sqrt{v}(a + C). \tag{18}$$

Из этого выражения получаем:

$$1 - \frac{2f}{v} = \operatorname{th}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{v}(a + C)\right). \tag{19}$$

Применив тригонометрические свойства и обозначив

$$a_0 = -C, \tag{20}$$

получим окончательное решение:

$$f = \frac{1}{2}\frac{v}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{v}(a - a_0)\right)}. \tag{21}$$

3.1 Задача 2

Вычислим $[L, A]\psi$:

$$\begin{aligned}[L, A]\psi &= (\partial_x^2 + u)(\psi'''_{xxx} + v\psi'_x + w\psi) - (\partial_x^3 + v\partial_x + w)(\psi''_{xx} + u\psi) = \\ &= \psi''_{xx}(2v'_x - 3u'_x) + \psi'_x(v''_{xx} + 2w'_x - 3u''_{xx}) + \psi(w''_{xx} - u'''_{xxx} - vu'_x).\end{aligned} \tag{22}$$

Отсюда легко получить условия, при которых $[L, A]$ не содержит операторов дифференцирования:

$$\begin{cases} 2v'_x - 3u'_x = 0 \\ v''_{xx} + 2w'_x - 3u''_{xx} = 0. \end{cases} \tag{23}$$

Эта система несложно разрешается относительно одного из параметров, пусть это будет u. Тогда получим:

$$\begin{cases} v = \frac{3}{2}u \\ w = \frac{3}{4}u'. \end{cases} \tag{24}$$

Тогда уравнение Лакса примет вид

$$u'_t = -\frac{3}{2}u'''_{xxx} - \frac{3}{2}uu'_x, \tag{25}$$

то есть

$$u'_t + \frac{3}{2}u'''_{xxx} + \frac{3}{2}uu'_x = 0. \tag{26}$$