Es 1 :

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{3/4}$.

Notiamo prima di tutto che $1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}} > 0 \quad \forall n \Rightarrow$ è una serie a segni alterni con $a_n = \left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{3/4}$

- **Convergenza semplice:**

  $a_n > 0$

  $(a_n)_n$ è decrescente perché $n \mapsto \frac{1}{\sqrt{n}}$ è decrescente, il coseno anche essendo $\frac{1}{\sqrt{n}} \in (0, 1]$, $x \mapsto 1-x$ è decrescente, e $x \mapsto x^{3/4}$ è crescente $\forall x \geq 0$

  Infine $\lim_n \left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{3/4} = 0$.

  $\Rightarrow$ per Leibnitz la serie converge semplicemente.

- **Convergenza assoluta:**

  Studiamo la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{3/4}$.

  Si ha:

  $\cos x \underset{x\to 0}{\approx} 1 - x^2 \Rightarrow 1-\cos x \underset{x\to 0}{\sim} x^2 \Rightarrow 1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n}{\sim} \frac{1}{n}$.

  Pertanto $\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{3/4} \underset{n}{\sim} \frac{1}{n^{3/4}}$ che è termine generale di una serie armonica generalizzata divergente (avendo l'esponente $\alpha < 1$)

  $\Rightarrow$ per il criterio del confronto asintotico $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{3/4}$ non converge.

  Quindi la serie di partenza non converge assolutamente.

b) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n+1}{n^4 \lg n - 2n}$

Notiamo che $n^4 \lg n - 2n = n(n^3 \lg n - 2) \underset{n \geq 2}{\geq} n(8 \lg 2 - 2) > 0$

$\Rightarrow$ è serie a termini positivi

con $a_n := \dfrac{n+1}{n^4 \lg n - 2n} \quad \forall n \geq 2$.

Si ha $\dfrac{n+1}{n^4 \lg n - 2n} = \dfrac{n(1 + 1/n)}{n^4\left(\lg n - \frac{2}{n^3}\right)} \sim \dfrac{1}{n^3}$ termine generale di

una serie convergente (serie armonica generalizzata con $\alpha = 3$).

$\Rightarrow$ per il criterio del confronto asintotico la serie converge.

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (2^n + 5^n) x^n$

Serie di potenze con $a_n = 2^n + 5^n$, $\quad n \geq 0$.

Usiamo il criterio della radice per determinare il raggio di convergenza ρ della serie.

$$\lim_n \sqrt[n]{2^n + 5^n} = \lim_n \sqrt[n]{5^n\left(\frac{2^n}{5^n} + 1\right)} = \lim_n 5 \cdot \underbrace{\sqrt[n]{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1}}_{\downarrow\, 1} = 5$$

$\Rightarrow \rho = \dfrac{1}{5}$.

Ne segue che $\left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right) \subseteq I \subseteq \left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]$.

Verifichiamo la convergenza in $\pm \frac{1}{5}$

- $$\sum_{n=0}^{+\infty} (2^n + 5^n) x^n = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (2^n + 5^n)\left(-\frac{1}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n + 5^n}{5^n} & x = -\frac{1}{5} \\[2ex] \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n + 5^n}{5^n} & x = \frac{1}{5}. \end{cases}$$

Ma

$$\frac{2^n+5^n}{5^n} = \left(\frac{2}{5}\right)^n + 1 \longrightarrow 1 \Rightarrow$$ non è sodd. il criterio di Cauchy per nessuna delle 2 serie $\Rightarrow \pm\frac{1}{5} \notin I$, cioè

$$I = \left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right).$$

La serie derivata è $\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(2^n+5^n\right)x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\left(2^{n+1}+5^{n+1}\right)x^n$ con raggio di convergenza pari a $\rho = \frac{1}{5}$.

<u>Es 2</u>: $f(x) = e^{2x} - \dfrac{x^2}{1+x}$

1) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \varepsilon(x)x^4$

$$\Rightarrow e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{8}{6}x^3 + \frac{16}{24}x^4 + \varepsilon(x)x^4 =$$

$$= 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \varepsilon(x)x^4$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \varepsilon(x)x^2$$

$$\Rightarrow T_4 f(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 - x^2 + x^3 - x^4 =$$

$$= 1 + 2x + x^2 + \frac{7}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4.$$

2) Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ con $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Quindi $f^{(15)}(0) = a_{15} \cdot 15!$ con

$a_{15} = \frac{2^{15}}{15!} - c_{13}$ con c_{13} coeff. di x^{13} nello sviluppo di Taylor di $\frac{1}{1+x}$.

Ma $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$, e quindi $c_{13} = -1$

$\Rightarrow f^{(15)}(0) = 15!\left(\frac{2^{15}}{15!} + 1\right)$

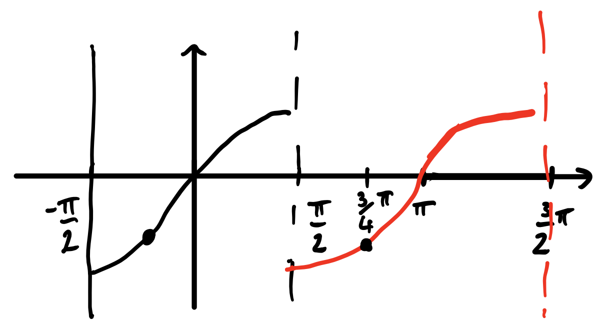
Es 3:

$g(x) = \operatorname{sen} x$ per $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$T = \pi$

$g \in C^1(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

I punti di discontinuità sono $\pm\frac{\pi}{2}$, ma $\exists$ finiti



$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} g(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} g(x) = -1$$

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} g(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} g(x) = 1$$

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} g'(x) = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \cos x = 0 = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} g'(x)$$

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} g'(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} g'(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \cos x = 0$$

Quindi, per il Teor di Dirichlet, la serie di Fourier $\mathcal{F}g$ di g converge semplicemente a

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x & \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & x = \pm \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Infine $g\left(\frac{3}{4}\pi\right) = g\left(\frac{3}{4} - \pi\right) = g\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

<u>ES 4</u>: $f(x) = (x+2y)^2 + x^2$

1) f polinomio di II grado in x e $y \Rightarrow$ è diff.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(x+2y) + 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(x+2y)2.$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P_0) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ diff}}}{=} \langle \nabla f(P_0), v \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(0,1)\cdot(-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)\cdot 3$$

$$= -4 + 24 = 20.$$

2) I pti di max e min relativo di f soddisfano $\nabla f(x,y) = 0$, cioè $\begin{cases} 2(x+2y) + 2x = 0 \\ 4(x+2y) = 0 \end{cases}$

si trova $\begin{cases} x = 0 \\ x = -2y \end{cases}$, quindi $(0,0)$ è l'unico punto critico.

Calc. la matrice Hessiana in tale pto

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 4$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 8$

$$\Rightarrow Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = Hf(0,0).$$

si ha $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 4 > 0$ e $\det Hf(0,0) = 32-16 > 0$,

e quindi $(0,0)$ é pto di minimo relativo, con

$f(0,0) = 0$.

3) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 = 1\}$

$g(x,y) = x^2+y^2-1$.

$f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, C chiuso e limitato (é una circonferenza)

$\Rightarrow f$ ha pti di max e min relativo su C per teor di Weierstrass.

Per determinarli usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

$g \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $\nabla g(x,y) = (2x, 2y) \neq (0,0)$ $\forall (x,y) \in C$.

Quindi devo risolvere

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}, \text{ cioé } \begin{cases} 2y(4x+4y) = 2x\cancel{4}(x+2y) \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2+xy = 2xy+x^2 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2-x^2-xy = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

$y^2 - yx - x^2 = 0$

$\Delta = x^2 + 4x^2 = 5x^2$

$y_{1,2} = \frac{x \pm \sqrt{5}\,x}{2}$ $\nearrow \frac{x(1+\sqrt{5})}{2}$, $\searrow \frac{x}{2}(1-\sqrt{5})$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{x^2}{4}(1+5+2\sqrt{5}) = 1 \\ y = x \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x^2 + \frac{x^2}{4}(1+5-2\sqrt{5}) = 1 \\ y = x \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = \frac{4}{10+2\sqrt{5}} \\ y = x \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x^2 = \frac{4}{10-2\sqrt{5}} \\ y = x \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = \frac{2}{5+\sqrt{5}} \\ y = \pm\sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 = \frac{2}{5-\sqrt{5}} \\ y = \pm\sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Pertanto i candidati ad essere max e min assoluti di f su C sono:

$$P_1 = \left(\sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}}, \sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \quad P_2 = \left(\sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}}, -\sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}} \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$P_3 = \left(-\sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}}, -\sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \quad P_4 = \left(-\sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}}, \sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$P_5 = \left(\sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}}, \sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right), \quad P_6 = \left(\sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}}, -\sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}} \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$P_7 = \left(-\sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}}, -\sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right), \quad P_8 = \left(-\sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}}, \sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Valutiamo f in tali punti.

$$f(P_1) = \left(\sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}} + \sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}} (1+\sqrt{5})\right)^2 + \frac{2}{5+\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{2}{5+\sqrt{5}} \left(2+\sqrt{5}\right)^2 + \frac{2}{5+\sqrt{5}} = \frac{2}{5+\sqrt{5}} \left(5 + 4\sqrt{5} + 5\right) =$$

$$= \frac{4}{5+\sqrt{5}} \left(5 + 2\sqrt{5}\right) = f(P_3)$$

$$f(P_2) = \left(\sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}} - \sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}} \left(1+\sqrt{5}\right)\right)^2 + \frac{2}{5+\sqrt{5}} =$$

$$\frac{2}{5+\sqrt{5}} \cdot 5 + \frac{2}{5+\sqrt{5}} = \frac{12}{5+\sqrt{5}} = f(P_4)$$

$$f(P_5) = \left(\sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}} + \sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}} \left(1-\sqrt{5}\right)\right)^2 + \frac{2}{5-\sqrt{5}} =$$

$$\frac{2}{5-\sqrt{5}} \left(2-\sqrt{5}\right)^2 + \frac{2}{5-\sqrt{5}} = \frac{2}{5-\sqrt{5}} \left(5 - 4\sqrt{5} + 5\right) =$$

$$\frac{4}{5-\sqrt{5}} \left(5 - 2\sqrt{5}\right) = f(P_7)$$

$$f(P_6) = \left(\sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}} - \sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}} \left(1-\sqrt{5}\right)\right)^2 + \frac{2}{5-\sqrt{5}} =$$

$$\frac{2}{5-\sqrt{5}} \cdot 5 + \frac{2}{5-\sqrt{5}} = \frac{12}{5-\sqrt{5}} = f(P_8)$$