Es 1 :

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}\cdot\cos(n)}{n^3+2}$

É una serie a termini non positivi, visto che il coseno assume valori in $[-1,1]$.
NON é A SEGNI ALTERNI perché non é vero che $\cos(2n)>0$ qp $\cos(2n)<0$ $\forall n$.
Prima di tutto verifico che sia soddisfatta la condizione di Cauchy:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}\cos(n)}{n^3+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3+2}\cdot \underbrace{\cos n}_{\text{limitato}} = 0 \;.\; \Rightarrow \text{OK}.$$

$$\frac{\sqrt{n}}{n^3+2} = \frac{\sqrt{n}}{n^3\left(1+\frac{2}{n^3}\right)} = \underbrace{\frac{1}{n^{5/2}}}_{\to 0}\;\underbrace{\frac{1}{1+\frac{2}{n^3}}}_{\to 1} \xrightarrow{n} 0$$

Studio la convergenza assoluta:

$$\left|\frac{\sqrt{n}\cdot\cos n}{n^3+2}\right| = \frac{\sqrt{n}}{n^3+2}\cdot\underbrace{|\cos n|}_{\leq 1} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^3+2} \sim \frac{1}{n^{5/2}} \text{ per quanto visto sopra.}$$

$\Rightarrow$ per il criterio del confronto + confronto asintotico, si ha che la serie converge assolutamente, essendo $\frac{1}{n^{5/2}}$ termine generale di una serie armonica generalizzata convergente.
Pertanto la serie converge anche semplicemente.

b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \lg\left(\frac{n+1}{n-2}\right)$.

Serie a segni alterni con $a_n := \lg\left(\frac{n+1}{n-2}\right)$ $\forall n \geq 3$.

Osserviamo che $\lg\left(\frac{n+1}{n-2}\right) = \lg\left(\frac{(n-2)+2+1}{n-2}\right) = \lg\left(1+\frac{3}{n-2}\right)$

quindi $a_n > 0$ essendo $\frac{3}{n-2} > 0$ per $n \geq 3$, e $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$.
Infine $(a_n)_n$ è decrescente perché $\left(1 + \frac{3}{n-2}\right)_n$ è decrescente mentre il logaritmo è crescente.
$\Rightarrow$ per il criterio di Leibnitz la serie converge semplicemente.
Studiamo ora la convergenza assoluta.

$$\left|(-1)^n \lg\left(\frac{n+1}{n-2}\right)\right| = \lg\left(\frac{n+1}{n-2}\right) = \lg\left(1 + \frac{3}{n-2}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n-2}$$

(ricorda che $\lg(1+x)$ va come x per $x \to 0$, essendo
$\lg(1+x) = x + \varepsilon(x)x$ con $\varepsilon(x) \underset{x \to 0}{\to} 0$).

Possiamo quindi concludere che, per il Teorema del confronto asintotico, $\sum_{n \geq 3} \lg\left(\frac{n+1}{n-2}\right)$ diverge, essendo $\frac{1}{n-2}$ termine generale di una serie divergente.

$\Rightarrow \sum_{n \geq 3} (-1)^n \lg\left(\frac{n+1}{n-2}\right)$ non converge assolutamente.

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4^n} x^n$ è serie di potenze $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$, con $a_n = \frac{n}{4^n}$ $\forall n \geq 1$.

Calcolo il raggio di convergenza con il criterio del rapporto:

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_n \frac{\cancel{n+1}}{4^{n+1}} \cdot \frac{4^n}{\cancel{n}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \rho = 4.$$

Detto I l'insieme di convergenza della serie, si ha quindi

$$(-4, 4) \subseteq I \subseteq [-4, 4].$$

Guardiamo cosa succede in ± 4.

- $x = 4$: ho $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\cancel{4^n}} \cancel{4^n} = \sum_{n \geq 1} n = +\infty \Rightarrow 4 \notin I$.

$+\infty$ n

- $x=-4$, ho $\sum_{n=1} (-1)^n n$ che diverge visto che il Termine generale non è infinitesimo

$\Rightarrow -4 \notin I$.

Si conclude quindi che $I=(-4,4)$.

Es 2: 1) $f(x) = \operatorname{arctg}(2x^2) - x\cos x$

Det il polinomio di Taylor di f di ordine 6 e centrato in 0.

Ricordiamo che

$$g(t) = \operatorname{arctg} t = t - \frac{t^3}{3} + \varepsilon(t)t^3$$

con $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + \varepsilon(t)t^4$$

OSS: Nello sviluppo del coseno mi fermo al grado 4 perché so che il Termine successivo ha grado 6. Visto che il coseno deve essere moltiplicato per x, il suo Termine di grado 6 non serve perché mi porta ad avere un Termine di grado 7 nello sviluppo di f

calcolando g in $2x^2$ si Trova:

$$\operatorname{arctg}(2x^2) = 2x^2 - \frac{(2x^2)^3}{3} + \varepsilon(x)x^6 = 2x^2 - \frac{8}{3}x^6 + \varepsilon(x)x^6$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x^2 - \frac{8}{3}x^6 - x\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right) + \varepsilon(x)x^6$$

$$= 2x^2 - \frac{8}{3}x^6 - x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{24} + \varepsilon(x)x^6$$

Pertanto $T^6 f(x) = -x + 2x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{24} - \frac{8}{3}x^6$.

Determiniamo ora $f^{(11)}(0)$.

Sappiamo che i coeff. dello sviluppo di Taylor di f sono unici, cioè che, se $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, allora $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

$$\Rightarrow f^{(11)}(0) = a_{11} \cdot 11!$$

Visto che $\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}_{\substack{\| \\ f(x)}} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n - x \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{n+1}$

con $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ sviluppo di Taylor di $\operatorname{arctg}(2x^2)$, e $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$

sviluppo di Taylor del coseno (centrati in 0), si ha

$$a_{11} = b_{11} - c_{10}.$$

Ma $b_{11} = 0$ perché $\operatorname{arctg}(2x^2) = g(2x^2)$ ha solo termini di grado pari $\Rightarrow$ $a_{11} = -c_{10}$.

Ricordando che $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, si ha che $c_{10} = (-1)^5 \cdot \frac{1}{(10)!} = -\frac{1}{10!}$

Concludiamo quindi che $a_{11} = \frac{1}{10!}$, da cui

$$f^{(11)}(0) = \frac{1}{10!} \cdot 11! = 11.$$

2) $h(x) = \begin{cases} x \cos x & x \in [-\pi, 0] \\ 0 & x \in (0, \pi) \end{cases}$

h è derivabile con continuità su $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$.

Inoltre $\exists$ finiti i limiti da dx e da sx di h e di h' in $\pm\pi$ e in 0. $\Rightarrow$ h è regolare a tratti.

In particolare $\lim_{x \to 0^+} h(x) = 0 = h(0)$ $\Rightarrow$ h è continua in 0,

mentre $\quad \lim_{x \to -\pi^-} h(x) = \lim_{x \to \pi^-} h(x) = 0$

$$\lim_{x \to -\pi^+} h(x) = h(-\pi) = \pi = \lim_{x \to \pi^+} h(x)$$

Per il Teor di Dirichlet, si ottiene quindi

$$\mathcal{F}h(x) = \begin{cases} h(x) & x \in (-\pi, \pi) \\ \frac{\pi}{2} & x = \pm\pi \end{cases}$$

visto che

$$\frac{h(-\pi^-) + h(-\pi^+)}{2} = \frac{\pi}{2} = \frac{h(\pi^-) + h(\pi^+)}{2}$$

Ricordo che $h(x) = h(x - 2\pi) = (x - 2\pi)\cos(x - 2\pi) = (x - 2\pi)\cos x$
$\forall x \in [\pi, 2\pi] \Rightarrow h(\pi^+) = (\pi - 2\pi)\cos\pi = (-\pi)(-1) = \pi = h(-\pi^+)$

3) Sia $f(x,y) = 4xy + 4x$

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4y + 4$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4x$ $\quad$ sono funzioni continue

$\Rightarrow f$ è differenziabile e $\frac{\partial f}{\partial v}(P) = \langle \nabla f(P), v \rangle$.

$P = (1, -1)$ $\quad v = (3, 2)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(P) = 0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(P) = 4$ $\quad \Rightarrow \nabla f(P) = (0, 4)$. e

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P) = \langle (0,4), (3,2) \rangle = 8$$

L'equazione del piano π tg al grafico di f in $(1, -1, f(P))$

ha equazione

π: $z = f(P) + \frac{\partial f}{\partial x}(P)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P)(y - y_0)$, con (x_0, y_0) le

coordinate di P.

$\Rightarrow \pi$: $z = 0 + 0 \cdot (x - 1) + 4(y + 1)$, cioè $z = 4y + 4$

b) Dom $f = \mathbb{R}^2$ aperto, connesso illimitato

Pti critici soddisfano l'eq. $\nabla f(x,y) = (0,0)$, cioè $\begin{cases} 4y+4=0 \\ 4x=0 \end{cases}$

Quindi $\exists!$ punto critico $P_0 = (0,-1)$.

Studiamone la natura con la matrice Hessiana.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 4$, da cui

$Hf(0,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$. Visto che $\det Hf(0,-1) < 0$, P_0 è pto di

sella e non esistono estremi relativi di f su $\mathbb{R}^2$

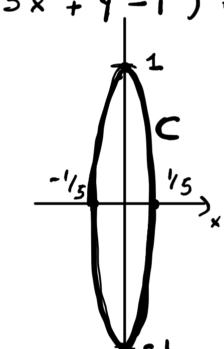
c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5x^2 + y^2 = 1\}$

f cont. su C chiuso ($C = g^{-1}(\{0\})$ con $g(x,y) = 5x^2 + y^2 - 1$) e

limitato (perché è un'ellisse, oppure

perché $x^2 + y^2 \leq 5x^2 + y^2 = 1$

$\forall (x,y) \in C$)



Quindi f ammette max e min assoluto su C.

Per calcolarli usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange (possiamo perché $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$).

Gli estremi vincolati di f sotto il vincolo g soddisfano

$$\begin{cases} \nabla g(x,y) \neq 0 \\ g(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \end{cases}$$

Visto che $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 10x$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2y$, si ottiene

$$\begin{cases} (x,y) \neq (0,0) \longrightarrow \text{Tale condiz è soddisfatta da tutti i pti } (x,y) \in C \\ 5x^2+y^2 = 1 \\ (4y+4)\,2y = 4x \cdot 10x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x^2+y^2=1 \\ y^2+y = 5x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x^2 = 1-y^2 \\ y^2+y = 1-y^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x^2 = 1-y^2 \\ 2y^2+y-1 = 0. \end{cases}$$

L'equazione $2y^2+y-1$ ha soluzioni $y_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$

Quindi le soluzioni del sistema sono:

$$\begin{cases} y=-1 \\ 5x^2 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ 5x^2 = 1-\frac{1}{4} \end{cases}, \quad \text{cioè } P_1 = (0,-1),\ P_2 = \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3}{5}}, \tfrac{1}{2}\right) \text{ e } P_3 = \left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3}{5}}, \tfrac{1}{2}\right).$$

Ora calcolo f su tali punti per determinare max e min assoluti di f su C.

$$f(P_1) = 0 \qquad f(P_2) = \cancel{4} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} + 4\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{3}{5}} + 2\sqrt{\frac{3}{5}} = 3\sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$f(P_3) = -f(P_2) = -3\sqrt{\frac{3}{5}}$$

Possiamo quindi concludere che P_2 è punto di max assoluto di f su C, mentre P_3 è punto di minimo assoluto per f su C.