

BSQ201 - Projet 2

Optimisation du placement de cloches de dons de vêtements dans Sherbrooke



Ludovic Marcotte

Sahar Saoudi

Louis-Félix Vigneux

8 décembre 2024

RÉCUPEX

PASQAL

UDS Université de
Sherbrooke

Table des matières

1	Introduction	3
2	Objectifs	3
2.1	Conditions de placement des cloches de Récupex	3
3	Théorie	4
3.1	Graphes	4
3.1.1	Introduction aux graphes	4
3.1.2	Ensemble indépendant maximal	5
3.2	Grapher Sherbrooke	6
3.3	Ordinateur quantique à atome neutre	7
3.4	Trouver l'ensemble indépendant maximal à l'aide de l'ordinateur quantique à atome neutre	8
3.4.1	Algorithme quantique adiabatique	8
3.4.2	Algorithme d'optimisation approximative quantique	9
3.5	Ensemble maximal indépendant en sous-graphe	10
4	Méthodologie	10
4.1	Comparer les méthodes trouvant le MIS	10
4.1.1	Choisir la méthode quantique la plus prometteuse	10
4.1.2	Détermination du pulse optimal	11
4.1.3	Évaluer la performance de l'algorithme de recombinaison de sous-graphes	12
4.2	Résoudre le problème de Récupex	12
4.2.1	Tri de l'emplacement actuel des bacs	12
4.2.2	Raffiner la liste des endroits possibles	12
4.2.3	Trouver les nouveaux endroits des bacs retirés	13
5	Résultats	13
5.1	Comparaison du QAA et QAOA	13
5.2	Détermination du pulse optimal	14
5.3	Analyse de l'algorithme de recombinaison de graphe	14
5.4	Solution au problème de Récupex	14
6	Discussion	16
6.1	Algorithme d'optimisation approximative quantique	16
6.2	Analyse du pulse	16
6.3	Performance de l'algorithme de recombinaison de graphe	16
6.4	Performance pour la résolution du problème de Récupex	17
7	Pistes d'amélioration	18
8	Conclusion	18
9	Références	19

10 Annexe	21
10.1 Comparaison des distributions de bacs obtenue par la méthode classique et quantique	21

Résumé

Un algorithme adiabatique quantique (QAA) et d'optimisation approximative quantique (QAOA) pouvant résoudre le problème d'un ensemble indépendant maximal d'un graphe (MIS) sont proposés. Leurs performances seront comparées à l'implémentation classique actuelle fournie par la librairie *networkx* en python. L'algorithme adiabatique et classique permettra de régler la problématique de l'entreprise québécoise Récupex consistant à remplacer leurs cloches récoltant les vêtements usagés dans une distribution optimale pour couvrir l'ensemble du territoire de la ville de Sherbrooke. Une recombinaison déterministe pour trouver une approximation d'un ensemble indépendant maximal à l'aide de sous-graphes est aussi présentée. Finalement, il sera déterminé s'il est pertinent actuellement ou dans un futur rapproché d'envisager les méthodes quantiques analogues pour résoudre ce problème.

1 Introduction

Récupex est un organisme à but non lucratif dédié à l'insertion socioprofessionnelle des personnes en difficulté d'employabilité. L'organisme gère un vaste réseau de collecte de vêtements, avec une centaine de bacs répartis principalement à Sherbrooke et dans la région de l'Estrie. En partenariat avec des friperies et d'autres organismes communautaires, Récupex contribue activement à la valorisation des textiles usagés, sensibilisant la population aux enjeux environnementaux.

La gestion des cloches de récupération de vêtements à Sherbrooke présente des défis importants pour Récupex. Comme l'a dit Danny Roy, directeur général de Récupex, la performance de celles-ci varie selon les emplacements en termes de volume de dons, de qualité des textiles et de nuisances (dépôts sauvages, vandalisme) [1]. La logistique de collecte demande des ressources significatives (chauffeurs, camions, matériel), rendant l'entretien complexe. Récupex cherche donc à optimiser l'emplacement de ses bacs pour améliorer la collecte, minimiser les nuisances et assurer une gestion efficace des ressources.

2 Objectifs

- Aider l'organisation Récupex à améliorer leur gestion de bacs de récupération en utilisant différentes approches quantiques.
- Évaluer la pertinence des approches quantiques lorsqu'elles sont comparées à leur analogue classique.
- Répondre au plus de conditions de Récupex mentionnées dans la sous-section suivante.

2.1 Conditions de placement des cloches de Récupex

Récupex applique plusieurs critères pour optimiser l'emplacement de ses bacs de récupération de vêtements, en tenant compte des aspects de couverture, d'accessibilité, et de performance.

1. **Couverture des territoires non desservis** : Récupex cherche à s'assurer que chaque région a accès à un bac, en priorisant les territoires non encore desservis. Cela vise à améliorer l'accessibilité pour tous.

2. **Proximité et accessibilité** : Plus un bac est proche des habitants, plus il est accessible et utilisé. Récupex souhaite donc placer les bacs dans des zones faciles d'accès pour maximiser la collecte.
3. **Contrôle de la densité de bacs** : Bien qu'il soit important d'avoir des bacs à proximité, Recupex évite de multiplier les bacs dans la même zone pour éviter la redondance et les coûts inutiles.
4. **Qualité des dons** : La qualité des vêtements collectés varie selon les quartiers. Dans les zones plus aisées, les vêtements ont tendance à être de meilleure qualité. Cela peut influencer le placement des bacs en fonction des priorités de collecte de qualité. Cette qualité sera exprimée par volume de vêtement reçu en moyenne annuellement par bac. Ce sont les données les plus près de cette condition.
5. **Densité de population** : Les secteurs plus peuplés sont propices à accueillir plusieurs bacs, car ils génèrent un volume de dons plus élevé. Cette condition ne sera pas considérée due à un manque de banque de données de densité de population.
6. **Pertinence et fonctionnalité des bacs** : Récupex suit la performance de chaque bac (s'il est régulièrement utilisé ou non) pour ajuster leur distribution, en ajoutant, déplaçant ou retirant des bacs selon leur pertinence dans chaque zone.
7. **Prendre en considération les autres associations** : Récupex prend en compte la présence d'autres associations, comme Estrie Aide, pour éviter une concurrence directe et mieux répartir les services. Pour notre solution, nous avons pris en considération les bacs de l'entreprise Estrie-Aide.
8. **Autorisation pour le placement** : Le placement de chaque bac nécessite une autorisation, et il est plus facile d'obtenir cette autorisation dans des zones où les propriétaires sont plus ouverts au projet. Pour la solution proposée, cette contrainte n'a pas été prise en compte.

3 Théorie

3.1 Graphes

3.1.1 Introduction aux graphes

Un graphe est un objet mathématique très utile lorsqu'une carte doit être représentée dans un ordinateur [2][3]. Ce dernier est représenté par un ensemble $G = (V, E)$ où V est un ensemble de sommets et E l'ensemble des arrêtes du graphe. Un sommet est un point dans l'espace qui sera connecté à un autre grâce à une arrête. Voici la manière usuelle de représenter un graphe.

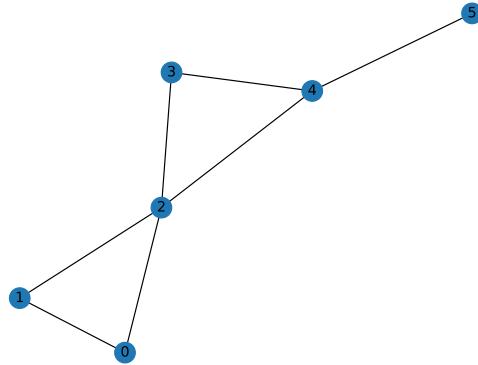


FIGURE 1 – Exemple de graphe.

Par contre, l'utilisation de graphes par disques unitaires sera plus appropriée pour le projet. Dans ce type de graphe, on note la position des sommets dans l'espace et non leur relation entre eux. Pour définir les interactions, un disque de rayon arbitraire est tracé. Ensuite, si deux cercles de deux sommets distincts se croisent, il y a alors une interaction entre ces deux sommets. Voici la comparaison entre un graphe de disque unitaire et son analogue de représentation plus «classique».

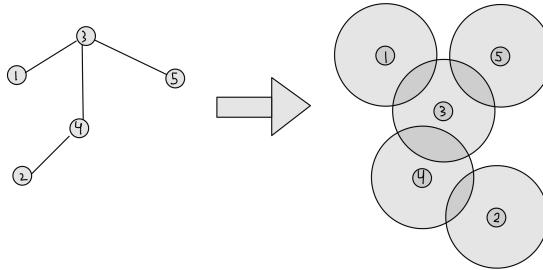


FIGURE 2 – Exemple de graphes à disques unitaires.

3.1.2 Ensemble indépendant maximal

Un ensemble indépendant maximal est un ensemble de sommets qui ne sont pas connectés par une arête. Cet ensemble doit contenir le plus de sommets possible afin d'être complet. Par exemple, le graphe de la figure 1 comporte 6 nœuds et son ensemble indépendant maximal en comporte 3.

Il peut y avoir plusieurs ensembles indépendants maximaux pour un seul graphe comme c'est le cas avec le graphe précédent. Les ensembles correspondants seraient $\{1, 4, 6\}$ et $\{2, 4, 6\}$ comme illustrés par la figure 3.

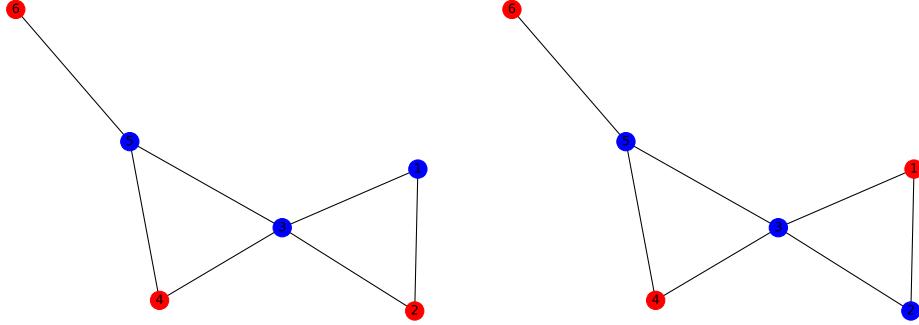


FIGURE 3 – Ensembles indépendants maximaux pour le graphe de la figure 1.

3.2 Grapher Sherbrooke

Récupex se doit de couvrir l'ensemble de Sherbrooke au meilleur de ses possibilités avec ses 60 bacs. Il faut alors trouver une manière de représenter la ville dans l'ordinateur quantique. Pour ce faire, un graphe sera utilisé.

Pour utiliser cet objet mathématique dans la problématique, tous les emplacements possibles des bacs seront représentés par un sommet du graphe. Ces emplacements ont été définis grâce à une base de données des édifices commerciaux et industriels de la ville de Sherbrooke [4]. Nous avons raffiné cette base de données en gardant seulement les commerces, les institutions et lieux publics. En effet, les bacs ne peuvent pas être situés sur un terrain résidentiel ou industriel pour encourager les dons. Ces emplacements possibles sont illustrés par la figure 4. Nous allons représenter le graphe de la ville selon un graphe de disque unitaire. Les sommets du graphe sont donc ces emplacements possibles et nous notons leur position dans l'espace par leur longitude sur l'axe des x et leur latitude sur l'axe des y. Par la suite, pour définir les arrêtes du graphe, il suffit de définir un rayon pour lequel les endroits possibles sont connectés. Par la suite, un algorithme d'ensemble indépendant maximal pourra être utilisé pour faire ressortir le nombre maximal d'emplacements de bacs qui ne sont pas trop proches des autres et des cloches déjà présentes.

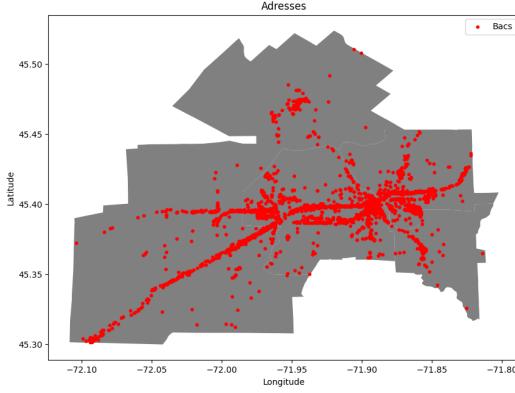


FIGURE 4 – Emplacements possibles des bacs dans la ville de Sherbrooke

3.3 Ordinateur quantique à atome neutre

L’ordinateur quantique à atome neutre utilisée sera employé comme un ordinateur analogue. Pour ce projet, les appareils développés par Pasqal seront utilisés [5]. Le qubit de cet ordinateur quantique est un atome de Rydberg. Cet atome peut se trouver dans l’état fondamental $|g\rangle$ ou dans son état excité $|R\rangle$ [6]. L’intrication entre les qubits est créée à l’aide du rayon de blocage de Rydberg. Quand un atome atteint l’état $|R\rangle$, les atomes plus près de ce dernier qu’une distance prédéfinie (le rayon de blocage) ont besoin de beaucoup plus d’énergie pour qu’ils atteignent aussi l’état $|R\rangle$. La première étape du calcul quantique est de créer un registre contenant des atomes à certaines positions afin de représenter notre problème dans l’ordinateur. Pour ce projet, seulement des registres en deux dimensions sont considérés. Des pinces optiques sont positionnées [7] aux endroits déterminés afin de capturer les atomes. Puisque le taux de capture des pinces optiques est d’environ 55% [8], le double du nombre de pinces optiques est placé dans le registre. Après la capture des atomes, on vérifie leurs positions pour ensuite les replacer un par un afin de créer le registre voulu. Tout ce processus est fait directement par Pulser [9] (la librairie Python de Pasqal) lors de la création d’un registre. Le calcul quantique se fait à l’aide d’un pulse. Le pulse peut avoir plusieurs formes et atteint une certaine valeur maximale Ω_{max} qui définit le rayon de blocage. Deux atomes se tenant à l’intérieur de ce cercle demandent une valeur de désaccord beaucoup plus grande afin de s’exciter tous les deux en même temps. Le désaccord noté δ est une valeur qui influe sur le pulse envoyé. Un désaccord négatif pousse les atomes dans l’état fondamental alors qu’un désaccord positif pousse les atomes dans l’état excité. Le désaccord doit donc être négatif au début afin d’initialiser les atomes dans leur état fondamental. La valeur augmente au fur et à mesure du calcul et atteint une valeur positive afin de pousser les atomes à l’état excité. Durant le pulse, certains atomes vont s’exciter et seront éjectés du registre avant la mesure. On mesure donc par fluorescence les atomes dans l’état fondamental présents dans le registre à la suite du pulse pour déduire que les atomes manquants sont les atomes qui ont été excités. Cette

mesure est aussi effectuée par Pulser directement. Ainsi, pour utiliser l'ordinateur quantique à atome neutre de Pasql, l'utilisateur doit simplement définir une séquence contenant la forme du registre et le Pulse en fonction du temps.

3.4 Trouver l'ensemble indépendant maximal à l'aide de l'ordinateur quantique à atome neutre

Le problème np complet [10] qu'est de trouver l'ensemble maximal indépendant (MIS) d'un graphe géométrique peut être résolu grâce à la technologie d'ordinateurs à atomes neutres [11]. Deux méthodes trouvant les MIS seront proposés, l'algorithme quantique adiabatique ou bien l'algorithme d'optimisation approximative quantique [12].

3.4.1 Algorithme quantique adiabatique

La première étape est de créer le registre en fonction du graphe. La clé est de ne considérer que les interactions entre les noeuds du graphe. Ces interactions sont reliées directement au rayon de blocage dans le registre. On doit alors positionner les atomes afin de créer le graphe à disque unitaire en fonction du graphe en entrée. Cette étape est la plus complexe à réaliser en termes d'implémentation. Le registre doit respecter des contraintes physiques de placement entre les atomes en fonction de l'appareil utilisé. Il est donc difficile de créer un bon registre pour un graphe géométrique en général. Pour simplifier la création des registres, un algorithme qui sépare les graphes en composantes connexes est utilisé puisqu'un ensemble indépendant maximal d'un graphe contenant plusieurs composantes connexes est tout simplement la somme des ensembles indépendants maximaux des composantes connexes. Il ne reste plus qu'à construire un pulse avec une valeur de Ω_{max} , appelée fréquence de Rabi, en fonction du rayon de blocage souhaité. Il doit être appliqué à tous les atomes du registre. Le pulse doit valoir 0 au départ et atteindre Ω_{max} avant de redescendre à 0. Plusieurs types de pulses sont possibles. La figure 5 présente un exemple de pulse à appliquer. Les pulses utilisés sont présentés à la section 4.1.2.

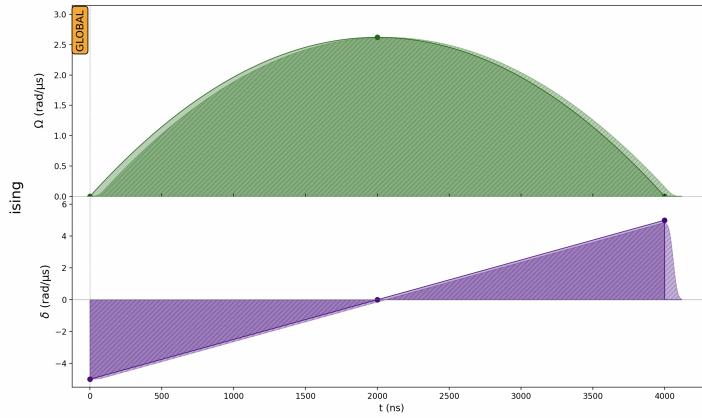


FIGURE 5 – Exemple de Pulse adiabatique

L'algorithme quantique adiabatique tente de transformer un hamiltonien initial en un final en lui appliquant le pulse de la plus longue durée possible. L'hamiltonien initial du système est

ici représenté par le registre initial. En lui appliquant le pulse, on retrouve l'hamiltonien final qui encode la solution. En fait, comme vu précédemment, les atomes ayant une distance entre eux inférieurs au rayon de blocage ne peuvent pas être dans l'état excité en même temps. Puisque les sommets qui sont liés par une arête dans le graphe sont à des positions contenus dans le rayon de blocage du registre, un seul des deux va pouvoir s'exciter. Ainsi, l'hamiltonien final ne contiendra que des atomes excités qui forment un ensemble indépendant maximal. Le calcul quantique ne donne pas toujours le même résultat et ne donne pas toujours l'ensemble indépendant maximal. En fait, puisque le temps d'application du pulse est limité, le retour optimal de l'ordinateur n'est pas toujours observé. Si le pulse pouvait s'appliquer beaucoup plus longtemps, il nous faudrait théoriquement un seul calcul pour trouver directement l'ensemble indépendant maximal par le théorème adiabatique [13]. Le calcul est donc effectué un certain nombre de fois afin d'obtenir un histogramme contenant plusieurs résultats. Les résultats qui ont la plus grande fréquence de retour dans l'histogramme sont théoriquement des ensembles indépendants maximaux. Par exemple, on pourrait prendre le graphe de la figure 1 et trouver l'ensemble indépendant maximal avec les étapes expliquées ci-dessus afin d'obtenir le registre et l'histogramme de la figure 6.

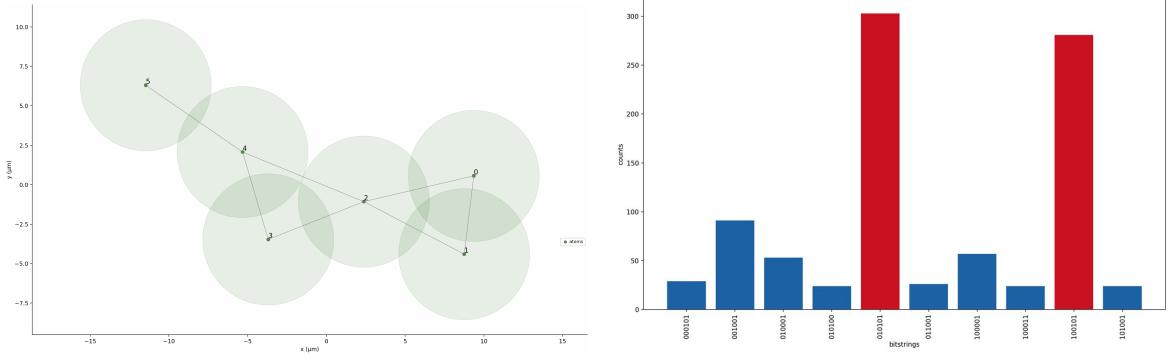


FIGURE 6 – Registre quantique et l'histogramme associé à ce registre après 1000 tentatives

Les deux solutions suivantes sont donc les mis retournés : $\{0, 3, 5\}$, $\{1, 3, 5\}$. Elles correspondent bien aux deux solutions admises du graphe de la figure 3.

3.4.2 Algorithme d'optimisation approximative quantique

L'algorithme d'optimisation approximative quantique (*QAOA*) est une méthode largement utilisée pour résoudre des problèmes d'optimisation combinatoire tels que le problème de l'ensemble indépendant maximal [14]. Le QAOA utilise des circuits quantiques pour approximer les solutions optimales des problèmes. Il repose sur la définition de deux hamiltoniens : l'hamiltonien de coût (H_c), dont l'état fondamental encode la solution du problème d'optimisation, et l'hamiltonien de mélange (H_m), conçu pour explorer l'espace des états quantiques. L'algorithme alterne ensuite l'application de ces deux hamiltoniens sur un état initial. À chaque étape, l'hamiltonien de coût est appliqué pendant un temps α , et l'hamiltonien de mélange pendant un temps β . Ces paramètres α et β sont ensuite optimisés à l'aide de méthodes d'optimisation classique pour maximiser la probabilité de mesurer une solution optimale. Avec un nombre élevé d'étapes (représentées par la profondeur p), le QAOA peut théoriquement s'approcher de plus en plus de la solution optimale. Il s'impose donc comme une technique prometteuse pour aborder des

problèmes complexes, notamment ceux liés aux graphes, ainsi que des problèmes industriels et logistiques.

L'algorithme QAOA alterne entre deux pulses sur p couches, chacun représentant un hamiltonien spécifique. Le premier, appelé *hamiltonien de mélange (mixing hamiltonian)*, est paramétré par Ω et T_{mixer} et est conçu pour permettre l'exploration de l'espace des solutions. Le second, appelé *hamiltonien de coût (H_q)*, encode la fonction objectif à optimiser. Ce deuxième pulse, paramétré par Ω et T_{cost} , oriente l'évolution du système vers des états correspondant aux solutions optimales.

3.5 Ensemble maximal indépendant en sous-graphe

Sachant que le simulateur quantique ne peut traiter que des problèmes à 25 atomes (équivalent à un graphe d'au plus 25 sommets que l'on tente de trouver l'ensemble indépendant maximal), un graphe contenant beaucoup plus de points doit être traité plusieurs sous-graphes. La première étape consiste à employer l'algorithme METIS [15]. Il permet de séparer un graphe en n sous-graphes contenant environ le même nombre de sommets tout en minimisant le nombre d'arêtes perdues dans la somme des sous-graphes. Cet algorithme sera utile puisqu'il permet de créer juste le nombre d'instances de sous-graphe nécessaire pour faire le plus de calcul quantique possible tout en gardant le plus d'information possible.

Par la suite, pour recombiner les ensembles indépendants maximaux des sous-graphes, nous allons effectuer un algorithme permettant de fusionner une paire de ceux-ci. Selon Michael Blondin, professeur en algorithmie à l'Université de Sherbrooke [16], il est possible de créer un ensemble indépendant maximal rapidement en prenant simplement les noeuds impliqués dans les MIS et la connexion entre les deux sous-graphes. Autrement dit, en créant le graphe reliant les points du MIS des sous-graphes A et B selon les arêtes du graphe initial, il est possible de trouver le MIS de ce nouveau graphe rapidement. Les sommets qui n'ont pas d'arêtes reliant un sommet de l'autre sous-graphe ne sont pas inclus dans ce nouveau graphe.

Le graphe obtenu est acyclique et est nommé forêt. Il est possible de trouver l'ensemble maximal indépendant de ce type de graphe par un algorithme classique inspiré de la programmation dynamique. Même s'il n'existe pas de garantie que la solution ne sera pas un ensemble indépendant maximal, il restera tout de même indépendant et cette recombinaison permet d'utiliser le simulateur quantique avec une bonne approximation de la réponse.

4 Méthodologie

4.1 Comparer les méthodes trouvant le MIS

4.1.1 Choisir la méthode quantique la plus prometteuse

L'algorithme adiabatique et d'optimisation approximative seront testés sur le registre suivant :

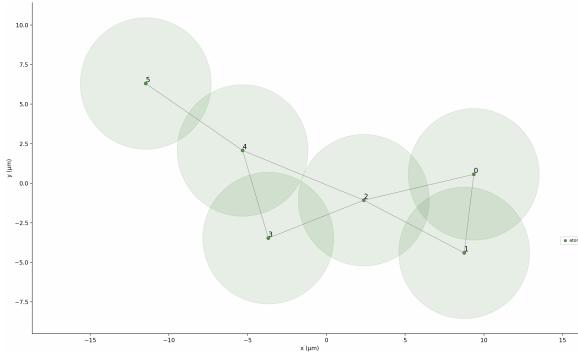


FIGURE 7 – Registre pour lequel les deux algorithmes quantiques seront testés sur un simulateur

Les performances des algorithmes seront comparées pour déterminer la méthode à employer pour résoudre de plus gros problèmes. En effet, les ressources pour tester les algorithmes sont limitées. Ainsi, une seule méthode se doit d'être explorée en détail pour avoir des résultats intéressants.

Pour les deux méthodes, le pulse *Rise_fall* et 1000 *shots* seront utilisés.

4.1.2 Détermination du pulse optimal

Après avoir établi la méthode quantique la plus prometteuse, les pulses seront testés pour déterminer celui qui donne les meilleurs résultats. En effet les pulses suivants appliqués pendant $4\mu s$ seront appliqués sur le registre de la figure 4.1.1.

- «Rise_sweep_fall» : Ce pulse commence à une fréquence de $0 \text{ rad}/\mu s$, augmente jusqu'à la valeur de Omega spécifiée pendant le quart du temps, reste constant à cette valeur pendant la moitié du temps et finalement redescend à $0 \text{ rad}/\mu s$ pour le dernier quart du temps. Les changements se font linéairement.
- «Pyramid» : Ce pulse commence à une valeur spécifiée de Omega moins un certain delta. Le pulse reste à cette valeur durant le quart du temps total. Le pulse fait ensuite un pulse de type «Rise_fall» pendant la moitié du temps total pour monter à Omega et redescendre à Omega - delta. Le pulse reste finalement constant pour le dernier quart du temps total à la valeur de Omega - delta.
- «Blackman» : Ce pulse est un pulse de forme d'une courbe normale avec comme aire totale la valeur donnée de Omega.
- «Rise_fall» : Ce pulse est simplement la partie «Rise_fall» du pulse de type «Rise_sweep_fall». Le pulse commence à $0 \text{ rad}/\mu s$ et monte jusqu'à Omega pendant la moitié du temps. Le pulse redescend jusqu'à $0 \text{ rad}/\mu s$ pour la dernière moitié du temps. Les changements sont aussi linéaires.
- «Waveform» : Ce pulse commence à $0 \text{ rad}/\mu s$, atteint Omega à la moitié du temps total et vaut de nouveau $0 \text{ rad}/\mu s$ à la fin du temps. La forme du changement suit une courbe qui ressemble le plus possible à une parabole.

La proportion de résultats valides du dictionnaire de retour sera évaluée. L'appareil *Analog-Device* sera utilisé pour cette prise de données.

4.1.3 Évaluer la performance de l'algorithme de recombinaison de sous-graphes

La performance de l'algorithme de recombinaison de graphe sera testée sur le graphe de 35 sommets de la figure 8 . Avec l'aide du puissant simulateur de Pasql permettant de rouler des algorithmes de calculs analogiques quantiques à environ 35 atomes, il sera possible d'appeler directement l'algorithme quantique ayant le mieux performé à l'étape précédente une seule fois pour le graphe. Ainsi, en exécutant l'algorithme classique n'ayant pas de limitations, l'algorithme quantique, nous allons pouvoir comparer la performance de ces algorithmes. Il sera aussi possible de voir si la recombinaison de sous-graphe donne une bonne approximation d'avoir exécuté le graphe au complet dans un seul appel de MIS.

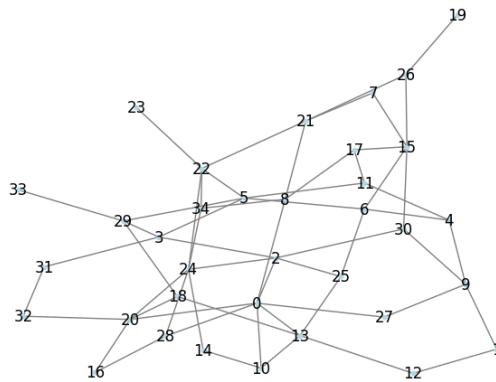


FIGURE 8 – Graphe utilisé pour tester l'algorithme de recombinaison de graphe.

4.2 Résoudre le problème de Récupex

La réattribution des bacs plus efficace dans la ville se sépare en trois grandes étapes présentées dans les sous-sections suivantes.

4.2.1 Tri de l'emplacement actuel des bacs

La première étape consiste à retirer des bacs dans leur répartition actuelle. En effet, en utilisant un algorithme de MIS, des bacs seront enlevés. Le graphe sera construit comme suit :

- Les bacs représenteront les sommets du graphe.
- Deux sommets du graphe sont reliés si les bacs en question sont à 1,5 km ou moins de distance. Par contre, cette arête est retirée si le volume moyen annuel de vêtement reçu de chacun des bacs impliqués est de plus de 27754 (ce nombre est la somme de la moyenne des volumes annuels recueillis par bac et leur écart-type).

La solution maximisant le nombre de sommets est choisie. En cas d'égalité, c'est celle générant le plus grand volume annuel de cueillette de textile qui sera choisie.

4.2.2 Raffiner la liste des endroits possibles

Avec les données de l'ensemble indépendant maximal résultant, les commerces à un rayon de 1,5 km d'un bac seront retirés de la base de données des emplacements possibles de bacs. Les

emplacements possibles sont discutés dans la théorie.

4.2.3 Trouver les nouveaux endroits des bacs retirés

Par la suite, un graphe sera créé avec la liste raffinée des endroits possibles pour mettre les bacs.

- Les sommets seront les endroits possibles.
- Deux sommets seront reliés par une arrête si la distance entre leur endroit possible associé est moins de 2,8 km. Par la suite, un algorithme de MIS sera utilisé pour obtenir la nouvelle distribution des bacs.

Le choix des distances est arbitraire. Le choix a été fait dans le but d'obtenir une nouvelle distribution d'environ 60 bacs. Cette méthodologie sera exécutée pour la méthode classique où chacun des MIS sera exécuté 100 fois pour obtenir le résultat approprié selon l'étape (décris plus haut). Elle sera aussi exécutée avec la méthode trouvant des MIS en divisant en sous-graphes où chacun des «sous-mis» est exécuté 100 fois avec le pulse «Rise-Fall» de $4000\mu s$ avec la méthode quantique adiabatique. La première étape sera faite avec des sous-graphes d'au plus 10 atomes et la troisième avec au plus 7 atomes. Ces paramètres ont été choisis après plusieurs tests parce qu'ils donnaient la meilleure distribution. De plus, le *device DigitalAnalogDevice* a été utilisé pour traiter de plus gros graphes plus facilement.

5 Résultats

5.1 Comparaison du QAA et QAOA

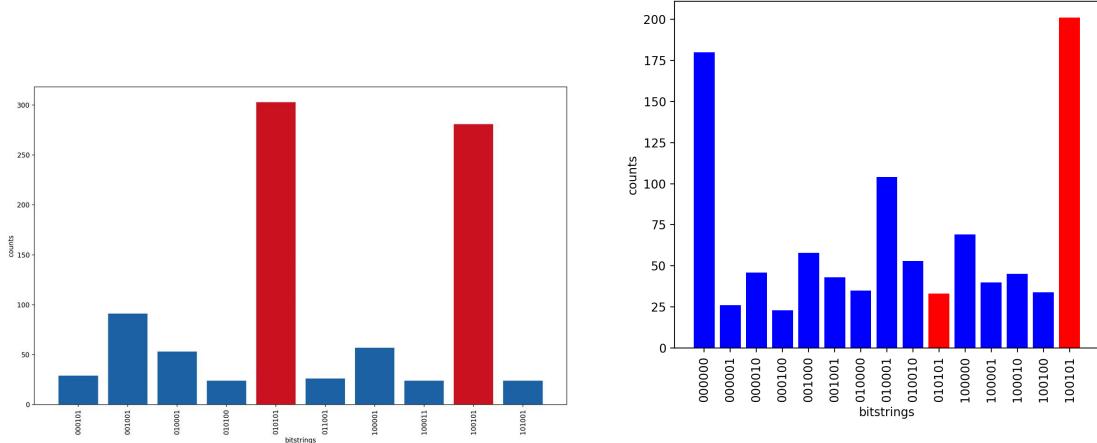


FIGURE 9 – Histogrammes des MIS retournés, à gauche par l'algorithme adiabatique et à droite par le QAOA pour le graphe de la figure 1

5.2 Détermination du pulse optimal

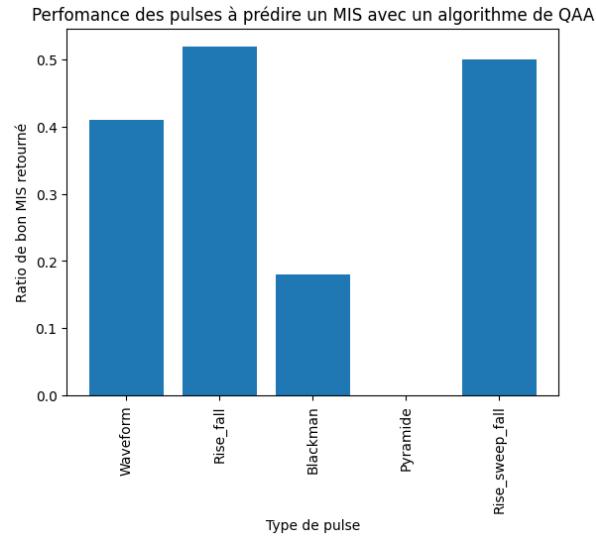


FIGURE 10 – Comparaison de la performance des pulses sur le graphe de la figure 3 avec la méthode de QAA. L'appareil *Analogdevice* a été utilisé pour les pulses durant $4000\mu s$.

5.3 Analyse de l'algorithme de recombinaison de graphe

Résultats émulateur		
	QAA	Classique
Nombre moyen de sommets	11,82352941	14,69811321
Ratio d'ensembles indépendants	0,516556291	1

FIGURE 11 – Table des résultats d'un graphe à 35 atomes roulé sur l'émulateur de Pascal. Pour les données présentées, seules les réponses retournées plus d'une fois par l'ordinateur sont considérées.

5.4 Solution au problème de Récupex

Résultats Récupex			
	Quantique	Classique	Initial
Nombre de bacs gardés	26	28	49
Places possibles filtrées	245	244	2408
Nombre de bacs finaux	59	56	NA
Nombre de bacs communs	34		NA

FIGURE 12 – Statistiques de placement des bacs pour le problème de Recupex. La méthode choisie est le QAA.

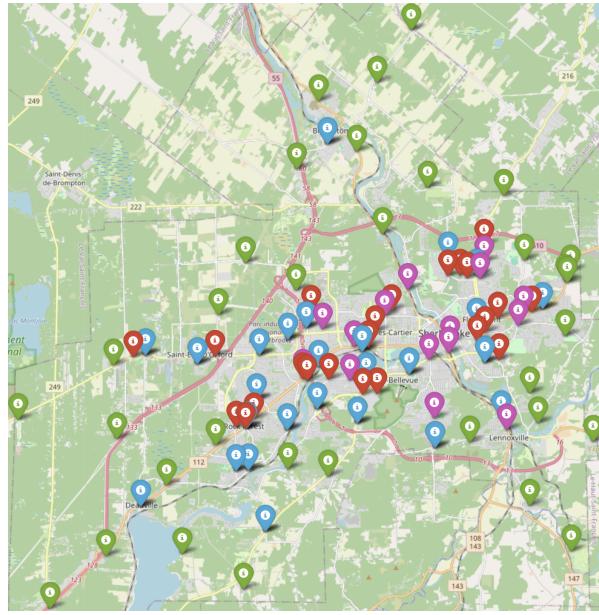


FIGURE 13 – Carte des cloches après l’usage de notre algorithme quantique de QAA (les points **violets** représentent les bacs d’Estrie-Aide, les points **verts** représentent les bacs ajoutés, les points **rouges** représentent les bacs enlevés et les points **bleus** représentent les bacs conservés).

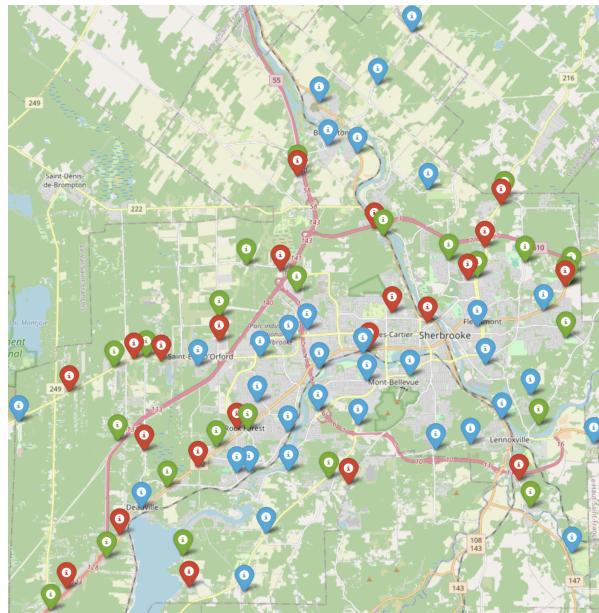


FIGURE 14 – Carte de la comparaison des emplacements choisis par la méthode classique et quantique (les points **verts** représentent les bacs seulement dans la distribution des bacs obtenus par la méthode quantique, les points **rouges** représentent les bacs seulement dans la distribution des bacs obtenus par la méthode classique et les points **bleus** représentent les bacs observés dans les deux distributions).

6 Discussion

6.1 Algorithme d'optimisation approximative quantique

On peut observer que les bitstrings correspondant aux solutions optimales sont présents, mais pas avec la fréquence la plus élevée pour la méthode de QAOA (l'histogramme de droite de la figure 9). Cela s'explique par la profondeur limitée du circuit QAOA, qui empêche l'algorithme de converger pleinement vers les solutions optimales. De plus, d'autres bitstrings non optimaux apparaissent avec des fréquences significatives, ce qui reflète une exploration plus variée de l'espace des solutions. En comparaison, les résultats obtenus avec la méthode QAA (*Quantum Adiabatic Algorithm*) (l'histogramme de gauche de la figure 9) montrent une concentration beaucoup plus marquée sur les solutions optimales, ce qui est représentée l'histogramme correspondant. Cela prouve que, bien que le QAOA permette une exploration plus large, il est moins déterministe que le QAA.

Ainsi, bien que le QAOA soit moins limité en termes de coût, il nécessite une profondeur de circuit importante pour obtenir des résultats satisfaisants, ce qui rend l'optimisation plus complexe. Une conclusion similaire a été observée dans le tutoriel de Pasqal [17] avec un problème QUBO (*Quadratic Unconstrained Binary Optimization*).

En conclusion, bien que l'algorithme d'optimisation approximative quantique ne soit pas la méthode optimale pour un problème comme le MIS, il constitue néanmoins une approche alternative intéressante à explorer pour d'autres types de problèmes, où il pourrait offrir de meilleures performances.

Pour les prochains résultats, l'algorithme de QAA a été utilisé dû à ces résultats.

6.2 Analyse du pulse

La figure 10 indique que certains pulses fonctionnent mieux avec le QAA (méthode quantique préférable). Il est normal de remarquer que le pulse pyramide performe moins bien, puisque sa valeur d'oméga est constante à une valeur plus basse que l'oméga maximal pendant la moitié du temps total. De plus, le pulse «Blackman» n'est pas efficace pour le projet, puisque nous n'avons pas de contrôle sur la valeur d'oméga maximum qui détermine le rayon de blocage. L'aire du pulse n'est pas très importante pour ce projet. Les trois autres pulses sont comparables, puisqu'ils respectent toutes les conditions de pulse nécessaires pour trouver l'ensemble maximal indépendant. Ils atteignent tous la fréquence de Rabi au milieu du temps total afin de déterminer le rayon de blocage. On trouve finalement qu'entre les pulses «*Rise_fall*», «*Rise_sweep_fall*», «*Waveform*», le pulse *Rise_fall* semblent obtenir de meilleurs résultats.

L'appareil *AnalogDevice* a été employé puisqu'il présentait de meilleurs résultats pour des plus petits graphes. En effet, pour le graphe en exemple, en utilisant l'appareil *DigitalAnalogDevice*, des résultats très faibles étaient présentés. Par contre, la même tendance entre les pulses était présente. En contrepartie, pour rouler des graphes plus grands, l'appareil *DigitalAnalogDevice* sera utilisé.

Ainsi, pour le reste des résultats le pulse *Rise_fall* a été utilisé avec un temps de $4000\mu\text{s}$.

6.3 Performance de l'algorithme de recombinaison de graphe

Comme montre la compilation des résultats de la figure 11, nous remarquons que l'algorithme de recombinaison de graphe quantique donne un MIS près des solutions données par la méthode

la version quantique avec plus d'atomes. Il est évident que l'ensemble indépendant retourné n'est pas maximal. Par contre, il donne une bonne approximation du résultat final. Il est donc pertinent de l'utiliser pour le plus grand problème de Récupex dû aux graphes ayant trop de sommets pour le simulateur. Dans un monde idéal où le nombre d'atomes sur l'ordinateur ne serait pas limité, la division du graphe en sous-graphe ne serait pas pertinente. En effet, un MIS serait directement calculé sur le grand graphe. Cette recombinaison de graphe permet d'utiliser l'information quantique sur un grand problème même avec ses limitations actuelles.

De plus, la méthode classique retourne toujours des ensembles indépendants (pour les résultats significatifs). La méthode quantique ne donne pas la précision de la méthode classique pour ce graphe. Ainsi, pour un grand graphe, la méthode classique reste plus intéressante. Cela est dû à la difficulté de simulation de système quantique à 35 atomes. Des résultats erronés ont plus tendance à subvenir. Un vrai ordinateur quantique aurait peut-être de meilleurs résultats, mais quant à lui serait soumis à des erreurs de bruit quantique. Ainsi, pour le moment, pour de plus grands graphes, faire une multitude d'exécutions de l'algorithme classique prend moins de ressources et donne de meilleurs résultats.

6.4 Performance pour la résolution du problème de Récupex

Pour résoudre le problème de Recupex, la méthode QAA et classique ont été utilisés. En effet, comme mentionné plus tôt, la méthode de «QAOA» ne donnait pas des résultats satisfaisants sur des petits graphes.

Il est important de noter que la méthode classique donne des résultats beaucoup plus rapidement que le QAA. Effectivement, le fait de rouler plusieurs simulations quantiques prend beaucoup de temps. Même si sur un ordinateur quantique le temps de calcul sera moindre, le fait de préparer le système d'atome neutre 100 fois par sous-graphe prend aussi beaucoup de temps. Il y a donc un avantage d'utiliser la méthode classique lorsque plus d'emplacements possibles seront considérés. De plus, la figure 14 indique que les deux méthodes font tout de même une bonne distribution des bacs en choisissant une majorité de mêmes bacs. Effectivement, le tableau de la figure 12 indique que plus de la moitié des bacs choisis sont communs dans les deux méthodes. Cela indique que le premier ensemble indépendant trouvé maximisant le volume est semblable pour les deux méthodes. Par la suite, à l'ajout des nouveaux bacs, quelques différences sont notées par la grandeur du réseau d'emplacement possible et leur interconnexion. Dans les deux cas, les deux méthodes ont réussi à bien couvrir la surface de Sherbrooke en entier. En effet, la couverture du territoire comparé à la répartition originale est bien meilleure et présentée en annexe à la figure 15. Les deux méthodes ont environ le même nombre de bacs. Il n'est pas surprenant d'observer que la méthode quantique retourne une distribution avec plus de bacs puisque cette méthode retourne moins facilement des ensembles indépendants (discutés à la section 6.3). Ainsi, la méthode quantique place quelques bacs trop près l'un des autres. En général, la solution générale quantique approxime bien la classique.

Par contre, il est important de noter que le résultat proposé par la version quantique est limité à des sous-graphes traités par la méthode quantique à 10 sommets pour la première partie et la dernière partie à 7 sommets. En faisant cela, les MIS résultant des sous-graphes ne sont pas autant significatifs que souhaité puisque la majorité des calculs se fait par la recombinaison de plusieurs petits sous-graphes ayant un MIS trivial qui ne nécessiterait pas le quantique. Des avenues pour résoudre ce problème seront présentées dans la prochaine section. Il est important aussi de prendre en compte les ressources nécessaires afin d'obtenir la solution quantique. Disons

qu'hypothétiquement, une entreprise donne accès à un ordinateur quantique à atome neutre au coût d'une cent par calcul. Puisque l'algorithme est probabiliste et que nous devons effectuer plusieurs algorithmes sur différents graphes, le calcul devient rapidement dispendieux. En effet, la détermination d'un seul ensemble indépendant maximal coûte environ 100 calculs, c'est-à-dire 1\$. Supposons maintenant qu'on souhaite plus de précision et qu'on décide d'effectuer 1000 calculs au lieu de 100. On obtient donc le prix de 10\$ par ensemble indépendant maximal calculé. Cependant, notre algorithme nécessite plusieurs ensembles indépendants maximaux (on approxime le nombre à 40). Ainsi, le coût total pour avoir une bonne réponse sans revérification serait environ de $40 \cdot 10\$ = 400\$$.

7 Pistes d'amélioration

On peut espérer que, dans le futur, l'ordinateur quantique à atome neutre continue d'évoluer et nous permette d'utiliser un plus grand registre contenant plus d'atomes [18]. De cette façon, il ne serait plus nécessaire d'approximer le graphe total en plusieurs sous-graphes et obtenir seulement un ensemble indépendant maximal approximatif à cause de la recombinaison. Nous trouverions plutôt les ensembles indépendants maximaux et nous pourrions obtenir une meilleure solution plus simplement. Si on suit la feuille de route de Pasqal, le problème devrait être soluble sans avoir à couper le graphe dans les prochaines années [19]. De plus, l'utilisation d'un vrai ordinateur quantique fiable (sans trop de bruit) pourra potentiellement donner de meilleurs résultats pour de grands graphes.

Même si le QAOA ne performait pas autant bien sur des plus petits graphes, il aurait été intéressant d'explorer son utilisation sur de plus grosses instances. Peut-être que cette méthode aurait été plus facile à simuler ou offre de meilleurs résultats pour de gros systèmes ?

D'autres méthodes de création d'un registre devraient être explorées. C'est principalement le registre qui limite l'algorithme d'ensemble indépendant maximal du QAA puisqu'il est difficile de mettre en registre n'importe quel graphe en général. Une méthode intéressante de création de registres à explorer est le «king's lattice» [20].

De plus, une fonction de coût pourrait être utilisée afin de déterminer si le registre construit représente bien le graph. Une méthode d'optimisation afin de créer un meilleur registre pourrait être explorée.

8 Conclusion

En conclusion, l'algorithme quantique présente peu d'avantages lorsqu'il est comparé à la méthode classique. En effet, les limitations actuelles des ressources font en sorte que seulement des petits systèmes peuvent être traités avec précision. De ce fait, seulement des réponses approximatives à des problèmes de plus grande taille. Alors, plusieurs répétitions de l'algorithme classique sont suggérées pour résoudre des problèmes d'ensemble indépendant maximal.

De plus, une solution au problème de Recupex a été fournie. Peu de différences entre les deux méthodes ont été observées. Par contre, la méthode quantique a tendance à moins respecter les contraintes en plus de prendre plus de temps à exécuter au simulateur. Si l'algorithme était roulé sur un vrai ordinateur quantique, le coût serait aussi plus élevé.

Ainsi, avec les infrastructures quantiques actuelles ne permettant pas d'observer un réel avantage d'utiliser l'information quantique pour trouver des ensembles indépendants maximaux.

En effet, l'utilisation de simulateurs limités en nombres d'atomes ne donne pas de meilleurs résultats. Il serait intéressant de tester le plus grand problème sur une technologie mature. En effet, sans avoir besoin de subdiviser les graphes, de meilleurs résultats pourraient être observés. D'autres pistes d'optimisation de pulse et de registre ont aussi été proposées.

En bref, la méthode classique pour déterminer un MIS est encore plus puissante que la méthode quantique tant que les infrastructures quantiques ne sont pas plus développées, il est difficile de justifier leur utilisation et leur performance sur des problèmes de taille substantielle.

9 Références

- [1] *Récupex - Organisme d'insertion socioprofessionnelle*, fr-CA. adresse : <https://recupex.ca/> (visité le 09/12/2024).
- [2] W. A. MACKANESS et K. M. BEARD, "Use of Graph Theory to Support Map Generalization," *Cartography and Geographic Information Systems*, t. 20, n° 4, p. 210-221, jan. 1993, Publisher : Taylor & Francis _ eprint : <https://doi.org/10.1559/152304093782637479>, ISSN : 1050-9844. DOI : 10.1559/152304093782637479. adresse : <https://doi.org/10.1559/152304093782637479> (visité le 27/11/2024).
- [3] F. RIAZ et K. M. ALI, "Applications of Graph Theory in Computer Science," in *2011 Third International Conference on Computational Intelligence, Communication Systems and Networks*, juill. 2011, p. 142-145. DOI : 10.1109/CICSyN.2011.40. adresse : <https://ieeexplore.ieee.org/document/6005872/?arnumber=6005872> (visité le 27/11/2024).
- [4] *Répertoire des locaux et entreprises du territoire de Sherbrooke - Liste des locaux et entreprises du territoire de Sherbrooke - Données Québec*, fr. adresse : <https://www.donneesquebec.ca/recherche/dataset/repertoire-des-entreprises/resource/93cb0f78-50bc-431b-a2ba-f66511450441> (visité le 27/11/2024).
- [5] A. BROWAEYS, "Quantum computing and simulation with arrays of Rydberg atoms : from proof-of-principle experiments to the startup PASQAL," in *Quantum Computing Workshop CEA-LETI*, Grenoble, France, mai 2019. adresse : <https://hal.science/hal-04334541> (visité le 20/11/2024).
- [6] *Learn / QuEra*. adresse : <https://qbook.quera.com/learn/?course=6630211af30e7d0013c66147&file=66da2107d33a247c664fecf4> (visité le 07/12/2024).
- [7] A. BROWAEYS, "Des pinces optiques pour piéger des atomes un par un...", fr, *Reflets de la physique*, n° 47-48, p. 36-40, mars 2016, ISSN : 1953-793X, 2102-6777. DOI : 10.1051/refdp/20164748036. adresse : <http://www.refletsdelaphysique.fr/10.1051/refdp/20164748036> (visité le 20/11/2024).
- [8] C. MULDOON, L. BRANDT, J. DONG et al., "Control and manipulation of cold atoms in optical tweezers," en, *New Journal of Physics*, t. 14, n° 7, p. 073 051, juill. 2012, Publisher : IOP Publishing, ISSN : 1367-2630. DOI : 10.1088/1367-2630/14/7/073051. adresse : <https://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/14/7/073051> (visité le 08/12/2024).
- [9] H. SILVÉRIO, S. GRIJALVA, C. DALYAC et al., "Pulser : An open-source package for the design of pulse sequences in programmable neutral-atom arrays," en, *Quantum*, t. 6, p. 629, jan. 2022, arXiv :2104.15044 [quant-ph], ISSN : 2521-327X. DOI : 10.22331/q-2022-01-24-629. adresse : <http://arxiv.org/abs/2104.15044> (visité le 20/11/2024).

- [10] R. E. TARJAN et A. E. TROJANOWSKI, “Finding a Maximum Independent Set,” English, *SIAM Journal on Computing*, t. 6, n° 3, p. 10, sept. 1977, Num Pages : 10 Place : Philadelphia, United States Publisher : Society for Industrial and Applied Mathematics, ISSN : 00975397. DOI : 10.1137/0206038. adresse : <https://www.proquest.com/docview/918487890/abstract/47A9ABD86D0F4B3CPQ/1> (visité le 20/11/2024).
- [11] C. P. DETTMANN et O. GEORGIOU, “Random geometric graphs with general connection functions,” en, *Physical Review E*, t. 93, n° 3, p. 032313, mars 2016, ISSN : 2470-0045, 2470-0053. DOI : 10.1103/PhysRevE.93.032313. adresse : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.93.032313> (visité le 20/11/2024).
- [12] S. EBADI, A. KEESLING, M. CAIN et al., *Quantum Optimization of Maximum Independent Set using Rydberg Atom Arrays*, arXiv :2202.09372, fév. 2022. adresse : <http://arxiv.org/abs/2202.09372> (visité le 20/11/2024).
- [13] M. H. S. AMIN, “Consistency of the Adiabatic Theorem,” en, *Physical Review Letters*, t. 102, n° 22, p. 220401, juin 2009, ISSN : 0031-9007, 1079-7114. DOI : 10.1103/PhysRevLett.102.220401. adresse : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.102.220401> (visité le 20/11/2024).
- [14] E. FARHI, J. GOLDSTONE et S. GUTMANN, *A Quantum Approximate Optimization Algorithm*, arXiv :1411.4028, nov. 2014. DOI : 10.48550/arXiv.1411.4028. adresse : <http://arxiv.org/abs/1411.4028> (visité le 22/11/2024).
- [15] G. KARYPIS et V. KUMAR, “Multilevelk-way Partitioning Scheme for Irregular Graphs,” en, *Journal of Parallel and Distributed Computing*, t. 48, n° 1, p. 96-129, jan. 1998, ISSN : 07437315. DOI : 10.1006/jpdc.1997.1404. adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0743731597914040> (visité le 27/11/2024).
- [16] M. BLONDIN, *Entretien avec Michael Blondin à propos de la division et de la recombinaison de graphes*, Français, nov. 2024.
- [17] *QAOA and QAA to solve a QUBO problem — Pulser 1.1.1 documentation*. adresse : <https://pulser.readthedocs.io/en/stable/tutorials/qubo.html> (visité le 09/12/2024).
- [18] *Pasqal exceeds 1,000 Atoms in Quantum Processor*, en-US. adresse : <https://www.pasqal.com/news/pasqal-exceeds-1000-atoms-in-quantum-processor/> (visité le 20/11/2024).
- [19] *Our Quantum Roadmap*, en-US. adresse : <https://www.pasqal.com/our-technology/our-roadmap/> (visité le 20/11/2024).
- [20] K. KIM, M. KIM, J. PARK, A. BYUN et J. AHN, *Quantum Computing Dataset of Maximum Independent Set Problem on King’s Lattice of over Hundred Rydberg Atoms*, arXiv :2311.13803, nov. 2023. DOI : 10.48550/arXiv.2311.13803. adresse : <http://arxiv.org/abs/2311.13803> (visité le 22/11/2024).

10 Annexe

10.1 Comparaison des distributions de bacs obtenue par la méthode classique et quantique

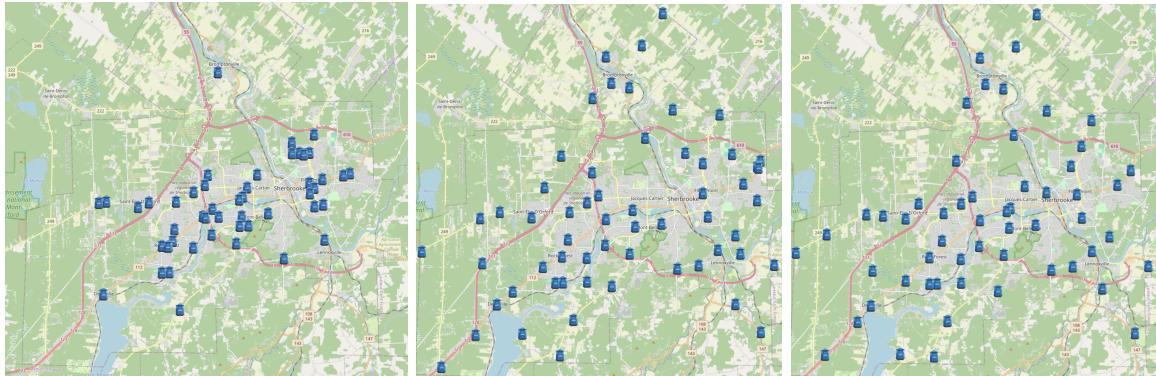


FIGURE 15 – Distribution optimale des bacs obtenue par la méthode classique et quantique comparée à leur disposition initiale. À gauche, la répartition originale des bacs. Au centre, la répartition obtenue avec la méthode quantique. À droite, la répartition obtenue avec la méthode classique.