

BSQ201 - Projet 2

Optimisation du placement de cloches de dons de vêtements dans Sherbrooke



Ludovic Marcotte

Sahar Saoudi

Louis-Félix Vigneux

7 décembre 2024

RÉCUPEX

PASQAL

UDS Université de
Sherbrooke

Table des matières

1	Introduction	2
2	Objectifs	2
2.1	Conditions RÉCUPEX	2
3	Théorie	3
3.1	Graphes	3
3.1.1	Introduction aux graphes	3
3.1.2	Ensemble indépendant maximal	4
3.2	Grapher Sherbrooke	4
3.3	Ordinateur quantique à atome neutre	5
3.4	Trouver l'ensemble indépendant maximal à l'aide de l'ordinateur quantique à atome neutre	6
3.4.1	Algorithme quantique adiabatique	6
3.4.2	Algorithme d'optimisation approximative quantique	8
3.5	Ensemble maximal indépendant en sous-graphe	8
4	Méthodologie	9
4.1	Comparer les méthodes trouvant le MIS	9
4.1.1	Choisir la méthode quantique la plus prometteuse	9
4.2	Détermination du pulse	9
4.2.1	Évaluer la performance de l'algorithme de recombinaison de sous-graphe .	10
4.3	Résoudre le problème de Récupex	10
4.3.1	Tri de l'emplacement actuel des bacs	10
4.3.2	Raffiner la liste des endroits possibles	10
4.3.3	Trouver les nouveaux endroits des bacs retirés	10
5	Résultats	11
6	Discussion	13
6.1	Algorithme d'optimisation approximative quantique	13
6.2	Analyse du pulse	14
6.3	Performance de l'algorithme de recombinaison de graphe	14
6.4	Performance pour la résolution du problème de Recupex	14
7	Pistes d'amélioration	15
8	Conclusion	15
9	Références	16
10	Annexe	18

Abstract

Nous proposons un algorithme adiabatique quantique (QAA) et d'optimisation approximative quantique (QAOA). Leurs performances seront comparées à l'implémentation classique actuelle fournie dans la librairie *networkx* en python. L'algorithme adiabatique et classique permettra de régler la problématique de Récupex consistant à remplacer leurs cloches récoltant les vêtements usagers dans une distribution optimale pour couvrir le territoire de la ville de Sherbrooke, Québec, Canada. Une recombinaison déterministe pour trouver une approximation d'un ensemble indépendant maximal à l'aide de sous-graphes est aussi présentée. Finalement, il sera déterminé s'il est pertinent actuellement ou dans un futur rapproché d'envisager les méthodes quantiques analogues pour résoudre ce problème.

1 Introduction

Récupex est un organisme à but non lucratif dédié à l'insertion socioprofessionnelle des personnes en difficulté d'employabilité. L'organisme gère un vaste réseau de collecte de vêtements, avec une centaine de bacs répartis principalement à Sherbrooke et dans la région de l'Estrie. En partenariat avec des friperies et d'autres organismes communautaires, Récupex contribue activement à la valorisation des textiles usagés, sensibilisant la population aux enjeux environnementaux et recyclant environ 3,5 millions de livres de textiles chaque année.

La gestion des bacs de récupération de vêtements à Sherbrooke présente des défis importants pour Récupex. Les performances varient selon les emplacements en termes de volume de dons, de qualité des textiles et de nuisances (dépôts sauvages, vandalisme). La logistique de collecte demande des ressources significatives (chauffeurs, camions, matériel), rendant l'entretien complexe. Récupex cherche donc à optimiser l'emplacement de ses bacs pour améliorer la collecte, minimiser les nuisances et assurer une gestion efficace des ressources.

2 Objectifs

- Aider l'organisation Récupex à améliorer leur gestion de bacs de récupération en utilisant différentes approches quantiques. - Évaluer à quel point les approches quantiques sont pertinentes lorsqu'elles sont comparées à leur analogue classique. - Répondre aux conditions de Récupex mentionnées dans la sous-section suivante.

2.1 Conditions RÉCUPEX

Récupex applique plusieurs critères pour optimiser l'emplacement de ses bacs de récupération de vêtements, en tenant compte des aspects de couverture, d'accessibilité, et de performance :

- Couverture des territoires non desservis** : Récupex cherche à s'assurer que chaque région a accès à un bac, en priorisant les territoires non encore desservis. Cela vise à améliorer l'accessibilité pour tous.
- Proximité et accessibilité** : Plus un bac est proche des habitants, plus il est accessible et utilisé. Récupex souhaite donc placer les bacs dans des zones faciles d'accès pour maximiser la collecte.

3. **Contrôle de la densité de bacs** : Bien qu'il soit important d'avoir des bacs à proximité, Recupex évite de multiplier les bacs dans la même zone pour éviter la redondance et les coûts inutiles.
4. **Qualité des dons** : La qualité des vêtements collectés varie selon les quartiers. Dans les zones plus aisées, les vêtements ont tendance à être de meilleure qualité. Cela peut influencer le placement des bacs en fonction des priorités de collecte de qualité.
5. **Densité de population** : Les secteurs densément peuplés sont plus propices à accueillir plusieurs bacs, car ils génèrent un volume de dons plus élevé.
6. **Pertinence et fonctionnalité des bacs** : Récupex suit la performance de chaque bac (s'il est régulièrement utilisé ou non) pour ajuster leur distribution, en ajoutant, déplaçant ou retirant des bacs selon leur pertinence dans chaque zone.
7. **Prendre en considération les autres associations** : Récupex prend en compte la présence d'autres associations, comme Estrie Aide, pour éviter une concurrence directe et mieux répartir les services.
8. **Autorisation pour le placement** : Le placement de chaque bac nécessite une autorisation, et il est plus facile d'obtenir cette autorisation dans des zones où les propriétaires sont plus ouverts au projet.

3 Théorie

3.1 Graphes

3.1.1 Introduction aux graphes

Un graphe est un objet mathématique très utile lorsqu'une carte doit être représentée dans un ordinateur [1][2]. Ce dernier est représenté par un ensemble $G = (V, E)$ où V est un ensemble de sommets et E l'ensemble des arrêtés du graphe. Un sommet est un point dans l'espace qui sera connecté à un autre grâce à une arrête. Voici la manière usuelle de représenter un graphe.

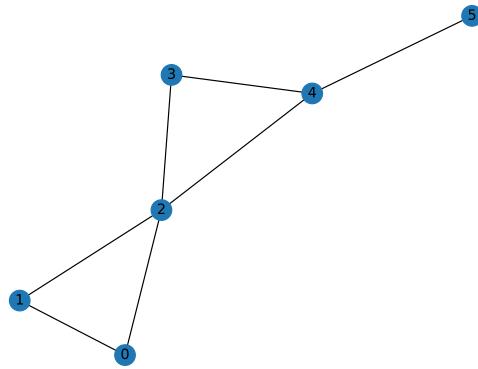


FIGURE 2 – Exemple de graphe

Par contre, l'utilisation de graphes par disques unitaires sera plus appropriée pour le projet. Dans ce type de graphe, on note la position des sommets dans l'espace et non leur relation

entre eux. Pour définir les opérations, nous traçons un disque de rayon arbitrairement défini plutôt auparavant. Ensuite, si deux cercles de deux sommets distincts se croisent, il y a alors une interaction entre ces deux sommets. Voici la comparaison entre un graphe de disque unitaire et son analogue de représentation plus «classique». **Ajouter image disque unitaire et graphe**

3.1.2 Ensemble indépendant maximal

Un ensemble indépendant maximal est un ensemble de sommets qui ne sont pas connectés par une arête. Cet ensemble doit contenir le plus de sommets possible afin d'être complet. Par exemple, le graphe de la figure 1 comporte 6 noeuds et son ensemble indépendant maximal en comporte 3.

Il peut y avoir plusieurs ensembles indépendants maximaux pour un seul graphe comme c'est le cas avec le graphe précédent. Les ensembles correspondants seraient 1, 4, 6 et 2, 4, 6 comme illustrés par la figure 2.

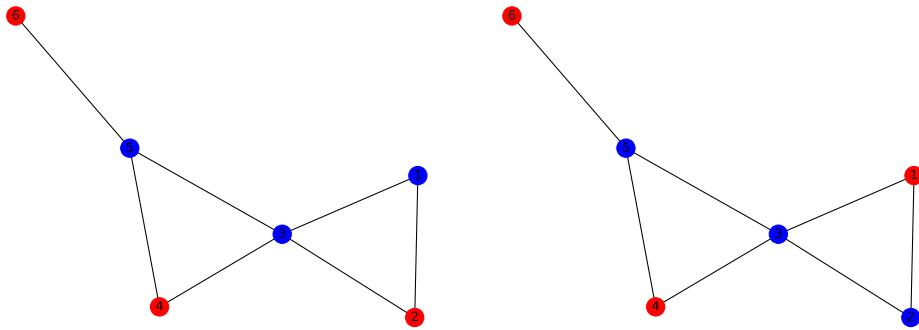


FIGURE 3 – Ensembles indépendants maximaux pour le graphe de la figure 1.

3.2 Grapher Sherbrooke

Récupex se doit de couvrir l'ensemble de Sherbrooke au meilleur de ses possibilités avec ses 60 bacs. Il faut alors trouver une manière de représenter la ville dans l'ordinateur quantique. Pour ce faire, nous allons utiliser un graphe.

Pour utiliser cet objet mathématique dans notre problématique, nous allons représenter tous les emplacements possibles des bacs par un sommet du graphe. Ces emplacements ont été définis grâce à une base de données des édifices commerciaux et industriels de la ville de Sherbrooke [3]. Nous avons raffiné cette base de données en gardant seulement les commerces, les institutions et lieux publics. En effet, les bacs ne peuvent pas être situés sur un terrain résidentiel ou industriel pour encourager les dons. Nous allons représenter le graphe de la ville selon un graphe de disque unitaire. Les sommets du graphe sont donc ces emplacements possibles et nous notons leur position dans l'espace par leur longitude sur l'axe des x et leur latitude sur l'axe des y. Par la suite, pour définir les arrêtes du graphe, il suffit de définir un rayon pour lequel les endroits possibles sont connectés. Par la suite, un algorithme d'ensemble indépendant maximal pourra être utilisé pour faire ressortir le nombre maximal d'emplacements qui ne sont pas trop proches des autres pour mettre des bacs.

Puisque les ordinateurs quantiques utilisés dans ce projet ont une limite de 25 atomes, nous devons alors simplifier ces graphes. Pour ce faire, nous avons utilisé un algorithme d'ensemble

indépendant maximal classique pour réduire le nombre de données d'environ 3000 à 125 en utilisant un rayon de 1km. Cette opération crée déjà un pré tri des endroits possibles en retirant des emplacements déjà trop près l'un de l'autre. Voici la simplification sous forme d'image.

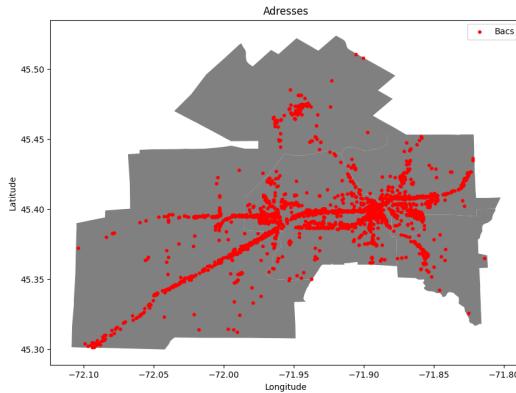


FIGURE 4 – Emplacements possibles des bacs dans la ville de Sherbrooke

Cette carte de simplification sera utilisée pour le reste des calculs.

3.3 Ordinateur quantique à atome neutre

L'ordinateur quantique à atome neutre est un ordinateur quantique analogique. Les calculs nécessitent des manipulations afin d'être effectués. Pour ce projet, nous utiliserons les appareils développés par Pasqal [4]. Le qubit de cet ordinateur quantique est un atome de Rydberg. Cet atome peut se trouver dans l'état fondamental $|g\rangle$ ou dans son état excité $|R\rangle$ [5]. L'intrication entre les qubits est créée à l'aide du rayon de blocage de Rydberg. Quand un atome atteint l'état $|r\rangle$, les atomes dans un certain rayon autour ont besoin de plus d'énergie afin d'eux aussi s'exciter. La première étape du calcul quantique à l'aide d'un ordinateur quantique à atome neutre est de créer un registre contenant des atomes à certaines positions afin de représenter notre problème dans l'ordinateur. Pour ce projet, nous ne considérerons seulement que des registres en deux dimensions. Des pinces optiques sont positionnées [6] aux endroits déterminés afin de capturer les atomes. Puisque le taux de capture des pinces optiques est d'environ 50%, le double du nombre de pinces optiques est placé dans le registre. Après la capture des atomes, on vérifie la position des atomes capturés et les atomes sont replacés un à un afin de créer le registre voulu. Tout ce processus est fait directement par Pulser [7] lors de la création d'un registre. Le calcul quantique se fait à l'aide d'un pulse. Le pulse peut avoir plusieurs formes et atteint une certaine valeur maximale Ω_{max} qui définit le rayon de blocage. Les atomes se tenant à l'intérieur de ce cercle demandent une valeur de désaccord beaucoup plus grande afin de s'exciter. Le désaccord est une valeur qui influe sur le pulse envoyé. Un désaccord négatif pousse les atomes dans l'état fondamental alors qu'un désaccord positif pousse les atomes dans l'état excité. Le désaccord doit

donc être négatif au début afin d'initialiser les atomes dans leur état fondamental. La valeur augmente au fur et à mesure du calcul et atteint une valeur positive afin de pousser les atomes à l'état excité. Durant le pulse, certains atomes vont s'exciter et seront éjectés du registre avant la mesure. On mesure donc par fluorescence les atomes dans l'état fondamental présents dans le registre à la suite du pulse pour déduire que les atomes manquants sont les atomes qui ont été excités. Cette mesure est aussi effectuée par Pulser directement. Ainsi, pour utiliser l'ordinateur quantique à atome neutre de Pasqal, l'utilisateur doit simplement définir une séquence contenant la forme du registre et le Pulse en fonction du temps.

3.4 Trouver l'ensemble indépendant maximal à l'aide de l'ordinateur quantique à atome neutre

Maintenant que nous savons utiliser l'ordinateur quantique à atome neutre, nous allons résoudre le problème np complet [8] qu'est de trouver l'ensemble maximal indépendant d'un graphe géométrique [9]. Deux méthodes s'offrent à nous, l'algorithme quantique adiabatique ou bien l'algorithme d'optimisation approximative quantique [10].

3.4.1 Algorithme quantique adiabatique

La première étape est de créer le registre en fonction du graphe. La clé est de ne considérer que les interactions entre les noeuds du graphe. Ces interactions sont reliées directement au rayon de blocage dans le registre. On doit alors positionner les atomes afin que s'il devait y avoir une arête entre les deux atomes, les atomes soient couverts par le rayon de blocage de l'autre atome. Cette étape est la plus compliquée en terme d'implémentation au niveau du code. Le registre doit respecter des contraintes physique de placement entre les atomes en fonction de l'appareil utilisé. Il est donc difficile de créer un bon registre pour un graphe géométrique en général. Pour simplifier la création des registres, nous avons utilisé un algorithme qui sépare les graphes en composantes connexes, puisque l'ensemble indépendant maximal d'un graphe contenant plusieurs composantes connexes est tout simplement la somme des ensembles indépendants maximaux des composantes connexes. Il ne reste plus qu'à construire un pulse avec une valeur de Ω_{max} , appelée fréquence de Rabi, en fonction du rayon de blocage souhaité, comme en exemple à la figure 5. Encore là, le pulse doit valoir 0 au départ et atteindre Ω_{max} avant de redescendre à 0. Plusieurs types de pulse sont possibles.

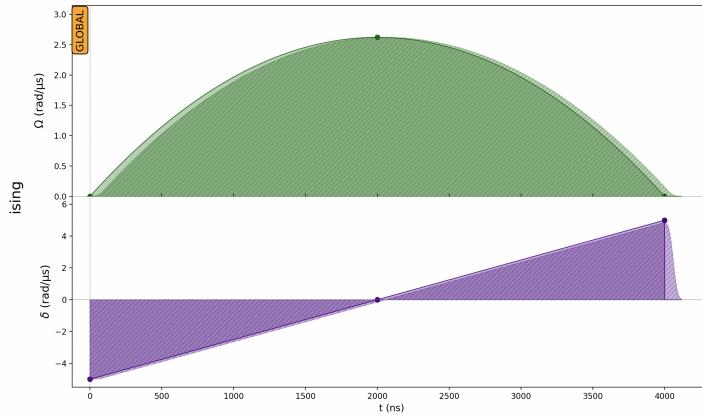


FIGURE 5 – Exemple de Pulse adiabatique

L'algorithme quantique adiabatique tente de transformer un hamiltonien initial en un hamiltonien final en lui appliquant le pulse pendant le plus de temps possible. L'hamiltonien initial du système est ici représenté par le registre initial que l'on crée. En lui appliquant le Pulse pendant assez longtemps, on trouve notre hamiltonien final qui encode la solution. En fait, on a vu que le rayon de blocage va empêcher les atomes qui sont dans ce rayon de s'exciter. Puisque les noeuds qui sont liés par une arête sont contenus dans le rayon de blocage, un seul des deux va pouvoir s'exciter. Ainsi, notre hamiltonien final ne contiendra que des atomes excités qui forment un ensemble indépendant maximal. Le calcul quantique ne donne pas toujours le même résultat et ne donne pas toujours l'ensemble indépendant maximal. En fait, puisque nous sommes limités par le temps durant lequel nous pouvons appliquer le pulse. Nous n'obtenons pas la meilleure réponse à chaque fois. Si le pulse pouvait s'appliquer beaucoup plus longtemps, il nous faudrait théoriquement un seul calcul pour trouver directement l'ensemble indépendant maximal par le théorème adiabatique [11]. On effectue donc le calcul un certain nombre de fois afin d'obtenir un histogramme contenant plusieurs résultats. Les résultats qui sortent le plus souvent dans l'histogramme sont des ensembles indépendants maximaux. Par exemple, on pourrait prendre le graphe de la figure 1 et trouver l'ensemble indépendant maximal avec les étapes expliquées ci-dessus afin d'obtenir le registre et l'histogramme de la figure 6.

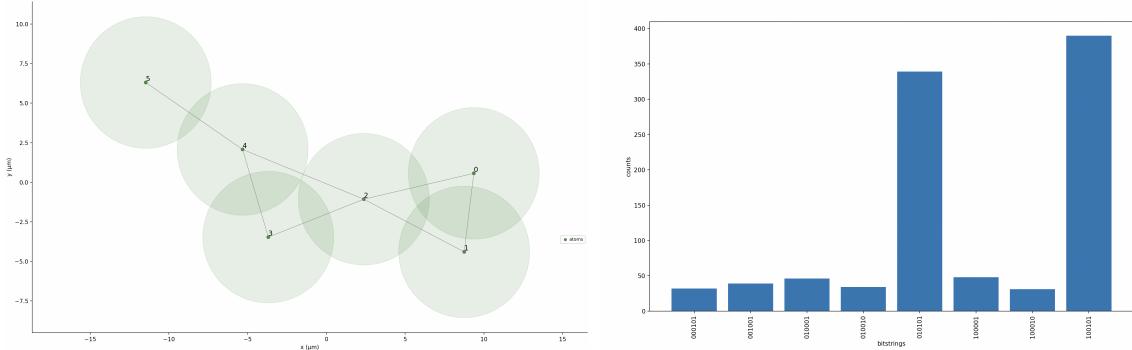


FIGURE 6 – Registre quantique et l'histogramme associé à ce registre après 1000 tentatives

On trouve donc les deux solutions : $\{0, 3, 5\}$, $\{1, 3, 5\}$ qui correspondent bien aux deux solutions admises de ce graphe à la figure 2.

3.4.2 Algorithme d'optimisation approximative quantique

L'algorithme d'optimisation approximative quantique (*QAOA*) est une méthode largement utilisée pour résoudre des problèmes d'optimisation combinatoire tels que le problème de l'ensemble indépendant maximal [12]. Le QAOA utilise des circuits quantiques pour approximer les solutions optimales des problèmes. Il repose sur la définition de deux hamiltoniens : l'hamiltonien de coût (H_c), dont l'état fondamental encode la solution du problème d'optimisation, et l'hamiltonien de mélange (H_m), conçu pour explorer l'espace des états quantiques. L'algorithme alterne ensuite l'application de ces deux hamiltoniens sur un état initial. À chaque étape, l'hamiltonien de coût est appliqué pendant un temps α , et l'hamiltonien de mélange pendant un temps β . Ces paramètres α et β sont ensuite optimisés à l'aide de méthodes d'optimisation classique pour maximiser la probabilité de mesurer une solution optimale. Avec un nombre élevé d'étapes (représentées par la profondeur p), le QAOA peut théoriquement s'approcher de plus en plus de la solution optimale. Il s'impose donc comme une technique prometteuse pour aborder des problèmes complexes, notamment ceux liés aux graphes, ainsi que des problèmes industriels et logistiques.

3.5 Ensemble maximal indépendant en sous-graphe

Sachant que le simulateur quantique ne peut traiter que des problèmes à 25 atomes (équivalent à un graphe d'au plus 25 sommets que l'on tente de trouver l'ensemble indépendant maximal), le graphe contenant beaucoup plus de point doit être traité en sous-instance de graphe. Pour ce faire, l'algorithme MÉTIS est utilisé [13]. Il permet de séparer un graphe en n sous-graphes contenant environ le même nombre de sommets tout en minimisant le nombre d'arêtes perdus dans la somme des sous-graphes. Cet algorithme sera utile puisqu'il permet de créer juste le nombre d'instances de sous-graphe nécessaire pour faire le moins de calcul quantique possible tout en gardant le plus d'information possible.

Par la suite, pour recombiner les ensembles indépendants maximale des sous-graphes, nous allons effectuer un algorithme permettant de fusionner une paire de ceux-ci. Selon Michael Blondin, professeur en algorithme à l'Université de Sherbrooke [14], il est possible de créer un ensemble indépendant maximal rapidement en prenant simplement les noeuds impliqués dans les MIS et la connexion entre les graphes. Autrement dit, en créant le graphe reliant les points du MIS des sous-graphes A et B selon les arêtes du graphe initial. Nous n'incluons pas les sommets qui n'ont pas d'arêtes reliant un sommet de l'autre sous-graphe.

Le graphe obtenu est acyclique et nommé forêt. Il est possible de trouver l'ensemble maximal indépendant de ce type de graphe par un algorithme classique inspiré de la programmation dynamique. Même s'il n'existe pas de garantie que la solution ne sera pas un ensemble indépendant maximal, il restera tout de même indépendant et cette recombinaison permet d'utiliser le simulateur quantique avec une bonne approximation de la réponse.

4 Méthodologie

4.1 Comparer les méthodes trouvant le MIS

4.1.1 Choisir la méthode quantique la plus prometteuse

L'algorithme adiabatique et d'optimisation approximative seront testés sur le registre suivant :

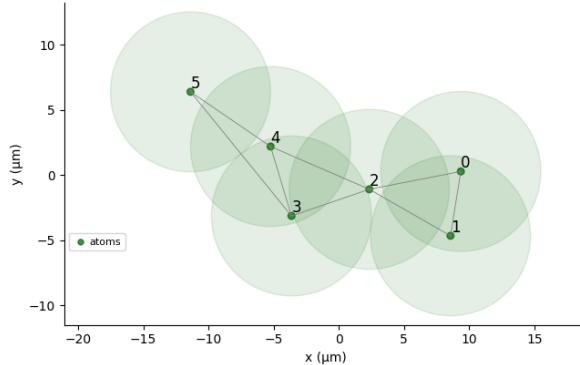


FIGURE 7 – Registre pour lequel les deux algorithmes quantiques seront testés sur un simulateur

Les performances des algorithmes seront comparées pour déterminer la méthode à employer pour résoudre de plus gros problèmes. En effet, les ressources pour tester les algorithmes sont limitées. Ainsi, une seule méthode se doit d'être explorée en détail pour avoir des résultats intéressants.

4.2 Détermination du pulse

Après avoir établi la méthode quantique la plus prometteuse, les pulses seront testés pour déterminer celui qui donne les meilleurs résultats. En effet les pulses suivants appliqués pendant $4\mu\text{s}$ seront appliqués sur le registre de la figure 12.

- "Rise_sweep_fall" : Ce pulse commence à 0, augmente jusqu'à la valeur de Omega spécifiée pendant le quart du temps, reste constant à cette valeur pendant la moitié du temps et finalement redescend à 0 pour le dernier quart du temps. Les changements se font linéairement.
- "Pyramid" : Ce pulse commence à une valeur spécifiée de Omega moins un certain delta. Le pulse reste à cette valeur durant le quart du temps total. Le pulse fait ensuite un pulse de type "Rise_fall" pendant la moitié du temps total pour monter à Omega et redescendre à Omega - delta. Le pulse reste finalement constant pour le dernier quart du temps total à la valeur de Omega - delta.
- "Blackman" : Ce pulse est un pulse de forme normal avec comme aire total la valeur donnée de Omega.
- "Rise_fall" : Ce pulse est simplement la partie "Rise_fall" du pulse de type "Rise_sweep_fall". Le pulse commence à 0 et monte jusqu'à Omega pendant la moitié du temps. Le pulse redescend jusqu'à 0 pour la dernière moitié du temps. Les changements sont aussi linéaires.
- "Waveform" : Ce pulse commence à 0, atteint Omega à la moitié du temps total et vaut de nouveau 0 à la fin du temps. La forme du changement suit une courbe qui ressemble le

plus possible à une parabole.

La proportion de résultats valides du dictionnaire de retour sera évaluée. L'appareil *Analog-Device* sera utilisé pour cette prise de données.

4.2.1 Évaluer la performance de l'algorithme de recombinaison de sous-graphe

Ensuite, la performance de l'algorithme de recombinaison de graphe sera testée sur un graphe de 35 sommets. Avec l'aide du puissant simulateur de Pascal permettant de rouler des algorithmes de calculs analogiques quantiques à environ 35 atomes, il sera possible d'appeler directement l'algorithme quantique ayant le mieux performé à l'étape précédente une seule fois pour le graphe. Ainsi, en exécutant l'algorithme classique n'ayant pas de limitations, l'algorithme quantique, nous allons pouvoir comparer la performance de ces algorithmes. Il sera aussi possible de voir si la recombinaison de sous-graphe donne une bonne approximation d'avoir rouler le graphe au complet dans un seul appel de MIS.

4.3 Résoudre le problème de Récupex

La réattribution des bacs plus efficace dans la ville se sépare dans les 3 grandes sections suivantes.

4.3.1 Tri de l'emplacement actuel des bacs

La première étape consiste à retirer des bacs dans leur répartition actuelle. En effet, en utilisant l'algorithme du stable maximum (MIS), des bacs seront enlevés. Le graphe sera construit comme suit :

- Les bacs représenteront les sommets du graphe.
- Deux sommets du graphe sont reliés si les bacs en question sont à 1,5 km ou moins de distance. Par contre, cette arête est retiré si le volume moyen annuel de vêtement reçu de chacun des bacs impliqués est de plus de 27754 (ce nombre est la somme de la moyenne des volumes et l'écart-type). Les données de volumes récoltés annuels sont directement fournies par Récupex.

Des solutions données, nous prenons celle maximisant le volume de don total. Notons n le nombre de bacs retirés par le MIS.

4.3.2 Raffiner la liste des endroits possibles

Avec les données de l'ensemble indépendant maximal résultant, les commerces à un rayon de 1,5 km d'un bac seront retirés de la base de données des emplacements possibles de bacs. Les emplacements possibles sont discutés dans la théorie.

4.3.3 Trouver les nouveaux endroits des bacs retirés

Par la suite, un graphe sera créé avec la liste raffinée des endroits possibles pour mettre les bacs.

- Les sommets seront les endroits possibles.
- Deux sommets seront reliés par une arête si la distance entre leur endroit possible associé est moins de 2,8 km. Par la suite, un algorithme de MIS sera utilisé pour obtenir la nouvelle distribution des bacs.

Le choix des distances est arbitraire. Le choix a été fait dans le but d'obtenir une nouvelle distribution d'environ 60 bacs. Cette méthodologie sera exécutée pour la méthode classique où chacun des MIS sera exécuté 100 fois pour obtenir le résultat approprié selon l'étape (décrit plus haut). Elle sera aussi exécutée avec la méthode trouvant des MIS en divisant en sous-graphes où chacun des sous-mis est exécuté 100 fois avec le pulse "Rise-Fall" de $4000\mu s$ avec la méthode quantique adiabatique. La première étape sera faite avec des sous-graphe d'au plus 10 atomes et la deuxième avec au plus 7 atomes. Ces paramètres ont été choisis après plusieurs tests parcqu'ils donnaient la meilleure distribution. De plus, le *device DigitalAnalogDevice* a été utilisé pour traiter de plus gros graphe plus facilement.

5 Résultats

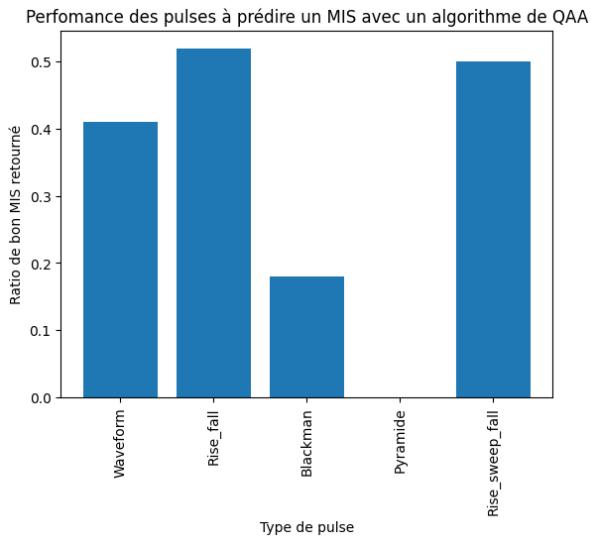


FIGURE 8 – Comparaison de la performance des pulses sur le graphe de la figure 3. Le *device Analogdevice* a été utilisé pour les pulses durant $4000\mu s$.

Résultat Recupex		
	Quantum	Classique
Nombre de bacs gardés	26	28
Places possibles filtrées	245	244
Nombre de bacs finaux	59	56
Nombre de bacs communs	34	NA

FIGURE 9 – Statistiques de placement des bacs pour le problème de Recupex

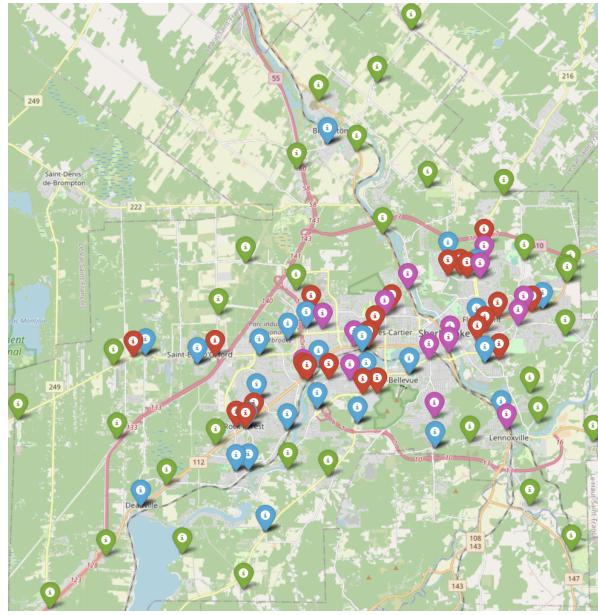


FIGURE 10 – Carte des cloches après l’usage de notre algorithme quantique (les points violettes représentent les bacs d’Estrie-Aide, les points vertes représentent les bacs ajoutés, les points rouges représentent les bacs enlevés les points bleus représentent les bacs conservés).

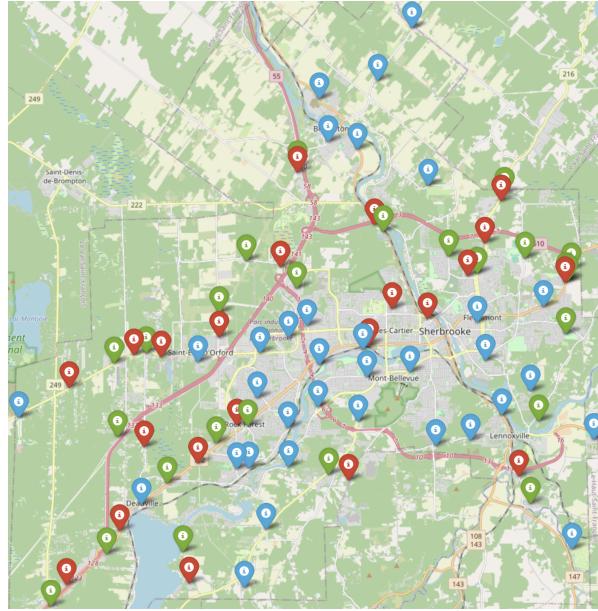


FIGURE 11 – Carte de la comparaison des emplacements choisis par la méthode classique et quantique (les points vertes représentent les bacs seulement dans la distribution des bacs obtenus par la méthode quantique, les points rouges représentent les bacs seulement dans la distribution des bacs obtenus par la méthode classique et les points bleus représentent les bacs observés dans les deux distributions).

6 Discussion

Pertinence de notre solution obtenue...

6.1 Algorithme d'optimisation approximative quantique

En plus de l'algorithme quantique adiabatique (*Quantum Adiabatic Algorithm*) , nous avons également évalué l'efficacité de l'algorithme d'optimisation approximative quantique (*Quantum Approximate Optimization Algorithm*) avec un problème MIS (*Ensemble Independant Maximal*) dans ce projet. [| On a commencé par la création d'un registre où les interactions entre les qubits sont déterminées par les positions des noeuds du graphe et le rayon de blocage. Ce rayon correspond à la distance minimale entre deux qubits pour éviter les interactions non souhaitées. (déjà, explique dans le paragraphe précédent .. Est-ce que je dois le refaire .. ?) |]

L'algorithme QAOA alterne entre deux pulses sur p couches, chacun représentant un Hamiltonien spécifique. Le premier, appelé *Hamiltonien de mélange (mixing Hamiltonian)*, est paramétré par Ω et T_{mixer} et est conçu pour permettre l'exploration de l'espace des solutions. Le second, appelé *Hamiltonien de coût (H_q)*, encode la fonction objectif à optimiser. Ce deuxième pulse, paramétré par Ω et T_{cost} , oriente l'évolution du système vers des états correspondant aux solutions optimales.

En appliquant cette méthode sur le graphe de la figure 1, les résultats obtenus sont présentés dans l'histogramme ci-dessous. On peut observer que les bitstrings correspondant aux solutions optimales sont présents, mais pas avec la fréquence la plus élevée. Cela s'explique par la profondeur limitée du circuit QAOA, qui empêche l'algorithme de converger pleinement vers les solutions optimales. De plus, d'autres bitstrings non optimaux apparaissent avec des fréquences significatives, ce qui reflète une exploration plus variée de l'espace des solutions. En comparaison, les résultats obtenus avec la méthode QAA (*Quantum Adiabatic Algorithm*) montrent une concentration beaucoup plus marquée sur les solutions optimales, ce qui est représentée l'histogramme correspondant. Cela prouve que, bien que le QAOA permette une exploration plus large, il est moins déterministe que le QAA.

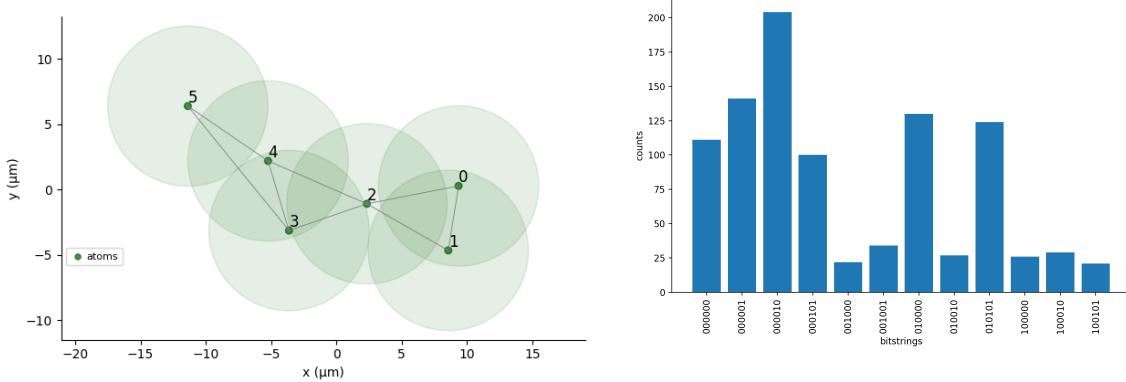


FIGURE 12 – Registre quantique et l'histogramme associé à ce registre

Ainsi, bien que cette méthode soit moins limitée en termes de coût, elle nécessite une profondeur de circuit importante pour obtenir des résultats satisfaisants, ce qui rend l'optimisation

plus complexe. Une conclusion similaire a été observée dans le tutoriel de Pasqal (citer ici) avec un problème QUBO (*Quadratic Unconstrained Binary Optimization*).

En conclusion, bien que l'algorithme d'optimisation approximative quantique ne soit pas la méthode optimale pour un problème comme le MIS, il constitue néanmoins une approche alternative intéressante à explorer pour d'autres types de problèmes, où il pourrait offrir de meilleures performances.

6.2 Analyse du pulse

La figure 8 indique que certains pulses fonctionne mieux avec le QAA (méthode quantique préférable). Il est normal de remarquer que le pulse pyramide n'a pas de bons résultats puisqu'il passe peu de temps à la fréquence de Rabi, fréquence à laquelle les atomes peuvent devenir excités.

Nous avons utilisé le *device AnalogDevice* puisqu'il présentait des meilleurs résultats pour des plus petits graphes. En effet, pour le graphe en exemple, en utilisant le *DigitalAnalogDevice*, des résultats très faibles étaient présentés. Par contre, la même tendance entre les pulse était présente. Par contre, pour rouler des graphes plus grands, le *DigitalAnalogDevice* sera utilisé.

Ainsi, pour le reste des résultats le pulse *Rise_fall* a été utilisé avec un temps de $4000\mu s$.

6.3 Performance de l'algorithme de recombinaison de graphe

Comme montre la compilation des résultats de la table **XXXX**, nous remarquons que l'algorithme de recombinaison de graphe quantique donne un MIS près des solutions données par la méthode classique et la version quantique avec plus d'atomes. Il est évident que l'ensemble indépendant retourné n'est pas maximal. Par contre, il donne une bonne approximation du résultat final. Il est donc pertinent de l'utiliser pour le plus grand problème de Récupex dû aux graphes ayant trop de sommets pour le simulateur. Dans un monde idéal où le nombre d'atomes sur l'ordinateur ne serait pas limité, la division du graphe en sous-graphe ne serait pas pertinente. En effet, un MIS serait directement calculé sur le grand graphe. Cette recombinaison de graphe permet d'utiliser l'information quantique sur un grand problème même avec ses limitations actuelles.

De plus, la performance du simulateur est assez similaire à celle de la méthode classique. **À VOIR SI C'EST MÊME MEILLEUR....**

6.4 Performance pour la résolution du problème de Recupex

Pour résoudre le problème de Recupex, la méthode QAA et classique ont été utilisés. En effet, comme mentionné plus tôt, la méthode de "QAOA" ne donnait pas des résultats satisfaisants sur des petits graphes.

Il est possible de remarquer que la méthode classique donne des résultats beaucoup plus rapidement que le QAA. Effectivement, le fait de rouler plusieurs simulations quantiques prend beaucoup de temps. Même si sur un ordinateur quantique le temps de calcul sera moindre, le fait de préparer le système d'atome neutre 100 fois par sous-graphe prend aussi beaucoup de temps. Il y a donc un avantage d'utiliser la méthode classique lorsque plus d'emplacements possibles seront considérés. De plus, la figure 11 indique que les deux méthodes font tout de même une bonne distribution des bacs en choisissant une majorité de mêmes bacs. En effet, cela indique que le premier ensemble indépendant trouvé maximisant le volume est semblable pour les deux méthodes. Par la suite, à l'ajout des nouveaux bacs, quelques différences sont notées par la grandeur du réseau d'emplacement possible et leur interconnexion. Dans les deux cas, les deux

méthodes ont réussi à bien couvrir la surface de Sherbrooke en entier. Par contre, le résultat proposé par la version quantique est limité à des sous-graphes traités par la méthode quantique à 10 sommets pour la première partie et la dernière partie à 7 sommets. En faisant cela, les MIS résultant des sous-graphes ne sont pas autant significatifs que souhaité puisque la majorité des calculs se fait par la recombinaison de plusieurs petits sous-graphes ayant une réponse triviale qui ne nécessiterait pas le quantique. Des avenues pour résoudre ce problème seront présentées dans la prochaine section. Il est important aussi de prendre en compte les ressources nécessaires afin d'obtenir la solution quantique. Disons qu'hypothétiquement, une entreprise donne accès à un ordinateur quantique à atome neutre au coût d'une cent par calcul. Puisque l'algorithme est probabiliste et que nous devons effectuer plusieurs algorithmes sur différents graphes, les coûts peuvent vite monter. En effet, la détermination d'un seul ensemble indépendant maximal coûte environ 100 calculs, c'est-à-dire 1\$. Supposons maintenant qu'on souhaite plus de précision et qu'on décide d'effectuer 1000 calculs au lieu de 100. On arrive donc à 10\$ par ensemble indépendant maximal. Cependant, notre algorithme nécessite plusieurs ensembles indépendants maximaux (on approxime le nombre à 100). Ainsi, le coût total pour avoir une bonne réponse sans revérification serait environ de $100 * 10 = 10\,000$ \$.

7 Pistes d'amélioration

On peut espérer que dans le futur, l'ordinateur quantique à atome neutre continue d'évoluer et nous permette d'utiliser un plus grand registre contenant plus d'atomes [15]. De cette façon, nous n'aurions plus besoin d'approximer le graphe total en plusieurs sous-graphes et obtenir seulement un ensemble indépendant maximal approximatif à cause de la recombinaison. Nous trouverions plutôt les ensembles indépendants maximales et nous pourrions obtenir une meilleure solution plus simplement. Si on suit la feuille de route de Pasqal, le problème devrait être soluble sans avoir à couper le graphe dans les prochaines années [16].

Aussi, même si le QAOA ne performait pas autant bien sûr des plus petits graphes, il aurait été intéressant d'explorer son utilisation sur de plus gros graphes. Peut-être que cette méthode aurait été plus facile à simuler ou offre de meilleurs résultats pour de gros systèmes.

D'autres méthodes de création d'un registre devraient être explorées. C'est le registre qui limite notre algorithme d'ensemble indépendant maximal quantique pour le futur, puisqu'il est difficile de mettre en registre n'importe quel graph en général. Une méthode intéressante de création de registre à explorer est le "king's lattice" [17].

Aussi, une fonction de coût pourrait être utilisée afin de déterminer si le registre construit représente bien le graph. On pourrait alors utiliser une méthode d'optimisation afin de créer un meilleur registre.

8 Conclusion

En conclusion, l'algorithme quantique présente peu d'avantages lorsqu'il est comparé à la méthode classique. En effet, les limitations actuelles des ressources font en sorte que seulement des petits systèmes peuvent être traités. De ce fait, seulement des réponses approximatives à des problèmes de plus grande taille. Alors, plusieurs répétitions de l'algorithme classique sont suggérées pour résoudre des problèmes d'ensemble indépendant maximal.

Aussi, une solution au problème de Recupex a été fournie. Peu de différences entre les deux méthodes ont été observées. Par contre, la méthode quantique a tendance à moins respecter les contraintes en plus de prendre plus de temps à exécuter au simulateur. Si l'algorithme était roulé sur un vrai ordinateur quantique, le coût serait aussi plus élevé.

Ainsi, avec les infrastructures quantiques actuelles ne permettent pas d'observer un réel avantage d'utiliser l'information quantique pour trouver des ensembles indépendants maximaux. En effet, l'utilisation de simulateurs limités en nombres d'atomes ne donne pas de meilleurs résultats. Il serait intéressant de tester le plus grand problème sur une technologie mature. En effet, sans avoir besoin de subdiviser les graphes, de meilleurs résultats pourraient être observés. Aussi d'autres pistes d'optimisation de pulse et de registre ont été proposées.

En bref, la méthode classique pour déterminer un MIS est encore plus puissante que la méthode quantique tant que les infrastructures quantiques ne sont pas plus développées, il est difficile de justifier leur utilisation et leur performance sur des problèmes de taille substantielle.

9 Références

- [1] W. A. MACKANESS et K. M. BEARD, “Use of Graph Theory to Support Map Generalization,” *Cartography and Geographic Information Systems*, t. 20, n° 4, p. 210-221, jan. 1993, Publisher : Taylor & Francis _eprint : <https://doi.org/10.1559/152304093782637479>, ISSN : 1050-9844. DOI : 10.1559/152304093782637479. adresse : <https://doi.org/10.1559/152304093782637479> (visité le 27/11/2024).
- [2] F. RIAZ et K. M. ALI, “Applications of Graph Theory in Computer Science,” in *2011 Third International Conference on Computational Intelligence, Communication Systems and Networks*, juill. 2011, p. 142-145. DOI : 10.1109/CICSyN.2011.40. adresse : <https://ieeexplore.ieee.org/document/6005872/?arnumber=6005872> (visité le 27/11/2024).
- [3] *Répertoire des locaux et entreprises du territoire de Sherbrooke - Liste des locaux et entreprises du territoire de Sherbrooke - Données Québec*, fr. adresse : <https://www.donneesquebec.ca/recherche/dataset/repertoire-des-entreprises/resource/93cb0f78-50bc-431b-a2ba-f66511450441> (visité le 27/11/2024).
- [4] A. BROWAEYS, “Quantum computing and simulation with arrays of Rydberg atoms : from proof-of-principle experiments to the startup PASQAL,” in *Quantum Computing Workshop CEA-LETI*, Grenoble, France, mai 2019. adresse : <https://hal.science/hal-04334541> (visité le 20/11/2024).
- [5] *Learn / QuEra*. adresse : <https://qbook.quera.com/learn/?course=6630211af30e7d0013c66147&file=66da2107d33a247c664fecf4> (visité le 07/12/2024).
- [6] A. BROWAEYS, “Des pinces optiques pour piéger des atomes un par un...,” fr, *Reflets de la physique*, n° 47-48, p. 36-40, mars 2016, ISSN : 1953-793X, 2102-6777. DOI : 10.1051/refdp/20164748036. adresse : <http://www.refletsdelaphysique.fr/10.1051/refdp/20164748036> (visité le 20/11/2024).
- [7] H. SILVÉRIO, S. GRIJALVA, C. DALYAC et al., “Pulser : An open-source package for the design of pulse sequences in programmable neutral-atom arrays,” en, *Quantum*, t. 6, p. 629, jan. 2022, arXiv :2104.15044 [quant-ph], ISSN : 2521-327X. DOI : 10.22331/q-2022-01-24-629. adresse : <http://arxiv.org/abs/2104.15044> (visité le 20/11/2024).

- [8] R. E. TARJAN et A. E. TROJANOWSKI, “Finding a Maximum Independent Set,” English, *SIAM Journal on Computing*, t. 6, n° 3, p. 10, sept. 1977, Num Pages : 10 Place : Philadelphia, United States Publisher : Society for Industrial and Applied Mathematics, ISSN : 00975397. DOI : 10.1137/0206038. adresse : <https://www.proquest.com/docview/918487890/abstract/47A9ABD86D0F4B3CPQ/1> (visité le 20/11/2024).
- [9] C. P. DETTMANN et O. GEORGIOU, “Random geometric graphs with general connection functions,” en, *Physical Review E*, t. 93, n° 3, p. 032313, mars 2016, ISSN : 2470-0045, 2470-0053. DOI : 10.1103/PhysRevE.93.032313. adresse : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.93.032313> (visité le 20/11/2024).
- [10] S. EBADI, A. KEESLING, M. CAIN et al., *Quantum Optimization of Maximum Independent Set using Rydberg Atom Arrays*, arXiv :2202.09372, fév. 2022. adresse : <http://arxiv.org/abs/2202.09372> (visité le 20/11/2024).
- [11] M. H. S. AMIN, “Consistency of the Adiabatic Theorem,” en, *Physical Review Letters*, t. 102, n° 22, p. 220401, juin 2009, ISSN : 0031-9007, 1079-7114. DOI : 10.1103/PhysRevLett.102.220401. adresse : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.102.220401> (visité le 20/11/2024).
- [12] E. FARHI, J. GOLDSTONE et S. GUTMANN, *A Quantum Approximate Optimization Algorithm*, arXiv :1411.4028, nov. 2014. DOI : 10.48550/arXiv.1411.4028. adresse : <http://arxiv.org/abs/1411.4028> (visité le 22/11/2024).
- [13] G. KARYPIS et V. KUMAR, “Multilevelk-way Partitioning Scheme for Irregular Graphs,” en, *Journal of Parallel and Distributed Computing*, t. 48, n° 1, p. 96-129, jan. 1998, ISSN : 07437315. DOI : 10.1006/jpdc.1997.1404. adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0743731597914040> (visité le 27/11/2024).
- [14] M. BLONDIN, *Entretien avec Michael Blondin à propos de la division et de la recombinaison de graphes*, Français, nov. 2024.
- [15] *Pasqal exceeds 1,000 Atoms in Quantum Processor*, en-US. adresse : <https://www.pasqal.com/news/pasqal-exceeds-1000-atoms-in-quantum-processor/> (visité le 20/11/2024).
- [16] *Our Quantum Roadmap*, en-US. adresse : <https://www.pasqal.com/our-technology/our-roadmap/> (visité le 20/11/2024).
- [17] K. KIM, M. KIM, J. PARK, A. BYUN et J. AHN, *Quantum Computing Dataset of Maximum Independent Set Problem on King’s Lattice of over Hundred Rydberg Atoms*, arXiv :2311.13803, nov. 2023. DOI : 10.48550/arXiv.2311.13803. adresse : <http://arxiv.org/abs/2311.13803> (visité le 22/11/2024).

10 Annexe

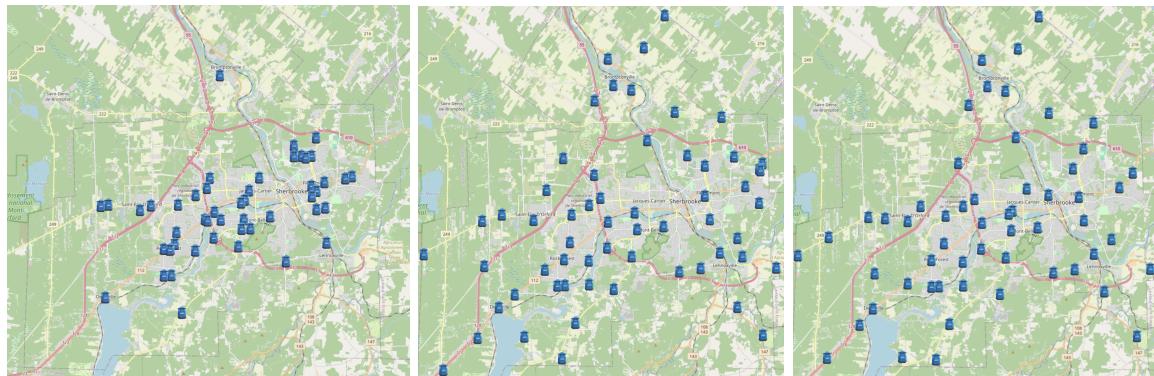


FIGURE 13 – À gauche, la répartition originale des bacs. Au centre, la répartition obtenue avec la méthode quantique. À droite, la répartition obtenue avec la méthode classique.