电子科技大学研究生入学考试 数学分析 601

模拟（八）
满分：150 分　　用时：180 分钟

1　填空题

1. (5) 求极限：
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k!}{n!}$$
.
2. (5) 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}x^n$ 的收敛区间。
3. (5) 求导数：
$$\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi^2 t)dt$$
.
4. (5) 已知：$\frac{x}{z}=\ln(\frac{z}{y})$，求二阶全微分 d^2z.
5. (5) 叙述函数项级数一致收敛的定义.

2　计算题

1. (10) 求不定积分 $\int\frac{dx}{1+\sin x}$.
2. (10) 求椭圆 $5x^2+4xy+2y^2=1$ 的长半轴 a 和短半轴 b.
3. (10) 已知 $X=ax+by, Y=cx+dy, (ad-bc\neq 0)$，$C$ 为包含原点的任意封闭曲线，计算曲线积分：
$$I=\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{XdY-YdX}{X^2+Y^2}$$
4. (10) 已知 S 为 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$ 的外表面，计算曲面积分：
$$\iint_S|x-y+z|dydz+|y-z+x|dzdx+|z-x+y|dxdy$$
.

3　证明题

1. (10) 已知 $f\in C^1_{[0,1]}, f(0)=0, \forall x\in(0,1), f(x)\neq 0$，证明：$\forall n\in\mathbb{N}^+, \exists\xi\in(0,1)$, s.t.
$$\frac{nf'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$$
.
2. (15) $f\in C^2_{[a,b]}, f(a)=0, M=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$，证明：
$$M^2\leq(b-a)\int_a^b(f'(x))^2dx$$
.

3. (10) 数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x_{n+1}) = 0$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n} = 0$$

.

4. (10) 证明函数项级数：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n \sin \pi t dt$$

在 $[0,1]$ 上一致收敛。

5. (10) 讨论反常积分：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}dx$$

的敛散性和绝对收敛性.

6. (15) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是正项级数，$\{b_n\}$ 单增，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$。证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}{b_n} = 0$$

.

7. (15) 已知：

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

证明：$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处偏导数存在但不可微.