电子科技大学研究生入学考试 高等代数 835

模拟（八）

满分：150 分　　用时：210 分钟

填空题 (10*3’ = 30’)

1. 若多项式 $f(x)$ 除以 $x-2$ 的余式为 3，除以 $x-3$ 的余式为 4，则除以 x^2-5x+6 的余式为?
2. 四阶行列式 D_4 的第三行元素为 $-1,0,2,3$, 其第四行对应的余子式分别为 $5,10,a,5$, 则 $a=$?.
3. 设 $\alpha,\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 均为四维行向量，四阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}\alpha\\2\gamma_2\\\gamma_3\\3\gamma_4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}\beta\\\gamma_2\\\gamma_3\\2\gamma_4\end{pmatrix}$，且 $|A|=2,|B|=1$。求 $|2A-B|=$?.
4. 若实对称阵 A 与矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&2\\0&2&0\end{pmatrix}$ 合同，则二次型 x^TAx 的正惯性指数为?
5. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3 是三维向量空间的两组基，若向量 γ 在这两组基下的坐标分别为 $(x_1,x_2,x_3)^T,(y_1,y_2,y_3)^T$，且 $y_1=x_1,y_2=x_1+x_2,y_3=x_1+x_2+x_3$。求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到 β_1,β_2,β_3 的过度矩阵?
6. 已知 P 是数域，向量空间 P^3 的线性变换 σ 为：
$$\sigma(a,b,c)=(a+2b-c,b+c,a+b-2c).$$
则该线性变换的秩为？其是否可以对角化?
7. 在 $\mathbb{R}^2$ 中定义内积：
$$\forall X=(x_1,x_2),Y=(y_1,y_2),<X,Y>=3x_1y_1+x_2y_2$$
求向量 $\alpha=(1,1),\beta=(0,2)$ 的夹角余弦值 $\cos<\alpha,\beta>=$?
8. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&a\\1&0&1\end{pmatrix}$ 可对角化，求 $a=$? 以及 A 的最小多项式?

解答题

1. (15) 矩阵:
$$A_{n+1}=\begin{pmatrix}(a_0+b_0)^n&(a_0+b_1)^n&\cdots&(a_0+b_n)^n\\(a_1+b_0)^n&(a_1+b_1)^n&\cdots&(a_1+b_n)^n\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\(a_n+b_0)^n&(a_n+b_1)^n&\cdots&(a_n+b_n)^n\end{pmatrix}$$

   1). 证明:
$$A_{n+1}=\begin{pmatrix}a_0^n&a_0^{n-1}&\cdots&1\\a_1^n&a_1^{n-1}&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_n^n&a_n^{n-1}&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_n^0&&&\\&C_n^1&&\\&&\cdots&\\&&&C_n^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\b_0&b_1&\cdots&b_n\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\b_0^n&b_1^n&\cdots&b_n^n\end{pmatrix}$$

.

2). 求行列式 $|A_{n+1}|$.

2. (20) 设 n 阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，若线性方程组 $AX=b$ 有通解：

$$X=\eta_0+k_1\xi_1+\cdots+k_s\xi_s$$

其中 $\eta_0=(1,1,\cdots,1)^T$,$\xi_i=(1,1,\cdots,1,0,\cdots,0)^T$(前面 i 个 1，$i=1,2,\cdots,s$)。设：

$$B=(n\alpha_n,(n-1)\alpha_{n-1},\cdots,2\alpha_2,\alpha_1)$$

1). 若 B 可以写为 $B=AC$，写出矩阵 C；

2). 求 $BX=b$ 的通解；

3. (20) 已知二次曲面 $x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$ 可经正交变换化为椭圆柱面方程 $y_1^2+4z_1^2=4$，求 a,b 及所作正交变换。

4. (15) 在二阶复矩阵上定义线性变换：

$$\sigma(X)=AX, A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

求 σ 的特征值，特征向量以及若尔当标准型。

5. (15) 已知 A 为 n 阶矩阵，多项式 $f(x)=\sum_{k=1}^{2021}\frac{x^k}{(k-1)!}$ 为矩阵 A 的零化多项式。证明：

1). 记 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，则 $g(x)$ 无重根；

2). A 可对角化；

6. (15) 设 σ 为 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换，ϵ 为恒等变换。σ 的特征多项式为 λ^3-1，记：$V_1=\{\alpha|(\sigma-\epsilon)\alpha=0\},V_2=\{\alpha|(\sigma^2+\sigma+\epsilon)\alpha=0\}$。证明：

1). V_1,V_2 均是 σ 的不变子空间；

2). $\mathbb{R}^3=V_1\oplus V_2$；

7. (20) 已知 A,B 均为 n 阶矩阵，$n=2k+1$ 为奇数，且 $A^2=O$。证明：

1). $2r(A)\le n$;

2). $AB-BA$ 不可逆;