

# 確率・統計学入門

午前の部（エクセル編）

zoom ミーティング

2022 年 6 月 20 日 (木)

9:30-12:30

講師：森谷博之 Quasars22

テレビや新聞、雑誌、インターネットには表やグラフが溢れています。自由にダウンロードできるデータも日に日に増えています。また、企業内では豊富なデータが蓄積されています。身の回りにある表やグラフを適切に解釈でき、手元にあるデータを効果的、効率よく、そして論理的に処理できる人材が求められています。

本セミナーでは、エクセルを用いて、確率・統計と呼ばれる分野の知識を身に付けていきます。午前の部では確率・統計の基本的な考え方と活用方法、身の回りの表やグラフの解釈の仕方、得られたデータを散布図、頻度図などに変換して表現する方法などを学びます。また、確率がどのように統計学で活用され、各種分布を利用する際にどのように影響を与えるかを理解します。

## 第1部： 記述統計入門 9:30~11:00

- ・ データの種類と収集方法：質的変数、量的変数、全数調査と標本調査
- ・ 基本的な統計グラフ：度数分布表と散布図
- ・ 基本的な統計量：平均、分散、標準偏差、偏差、相関など
- ・ 相関と因果関係

## 第2部： 確率の基礎 11:10~12:30

- ・ 確率の基礎：同様に確からしい、事象と確率、確率変数とモデル
- ・ 確率分布：場合の数、順列、組み合わせ、一様分布、ベルヌーイ分布、2項分布、

正規分布などの確率分布

### ■本セミナーに参加して修得できること

発生した問題についてデータをとおして理解する基本的な態度、得られた表やグラフの正しい解釈の仕方、手元のデータを表やグラフを用いて表現する方法がわかります。また、エクセルの活用方法がわかります。演習を多く取り入れ、理解を深めます。

### ■受講対象者

統計に関して「超初心者」の方を対象としています。

学生時代に確率・統計を学んだが覚えていない、確率・統計学が日々の仕事、研究にどのように役立つのかわからない、統計分析をしたいがどうすれば良いかわからない、部下の統計分析を理解したい、データ分析の本質を理解したい方など。

### ■使用ソフト：Excel。

### ■PCには事前にExcelがインストールされている必要があります。

### 参考文献：

「データの活用」（日本統計学会編）東京図書、  
「データの分析」（日本統計学会編）東京図書、  
「統計学基礎」（日本統計学会編）東京図書

# 第1章 統計データ

統計データとはどのようなものなのでしょうか？政府統計の総合窓口のウェブサイト(<https://www.e-stat.go.jp/>)では、「統計データを探す」というページがあり、様々な統計データを得ることができます。それらは国税調査、経済センサス、人口推計などに分類されています。データを探す→分野→企業・家計・経済とクリックし小売物価統計調査をみていくと東京都区部のマグロやイワシの平均価格を見ることができます。また、データを探す→分野別→人口・世帯とクリックしファイル→月次→2021年11月のエクセルファイルをみていくと年齢別人口構成を見ることができます。日本の国土の広さ、人口、経済規模を表す国内総生産などは統計データです。これらの統計データは、ある目的をもってデータを集め集計することで出来上がっています。データは過去の記録から得たものや、新たに実験・調査・測定を行ったりして集められています。これらのデータは数値とは限りません。性別、居住地、職業、天気などのデータは文字列です。調査される対象を一般的に、個体またはケース、その項目を変数といいます。本章では、与えられたデータのもつ集団の性質を記述し、要約する方法を学びます。これを記述統計といいます。

## 1.1. 変数の分類

データはその性質や特性を表す文字列であったり、数値であったりします。私たちの身の回りはデータであふれています。これらのデータを統計的に分析するためには文字列で表された属性が数値に変換されていると便利なことがあります。たとえば、居住地をコンピュータで処理するために数値化することが良くあります。しかし、この数値の平均を求めても何の意味もありません。このようにデータを数値で表すときには、その尺度を理解しておく必要があります。一般に、このような尺度は4つに分類されます。

- **名義尺度**：同じ値のときだけに意味をもち、それ以外では意味をもたない尺度。  
名字、名前、血液型、性別、好きな株式銘柄など
- **順序尺度**：名義尺度のすべての性質に加えて順序(大小関係)が意味をもつ尺度。  
5段階評価の成績、レストランのランキング、信用評価(AAA, AA, A, , ,)など
- **間隔尺度**：順序尺度のすべての性質に加えて、0が相対的な意味をもち、等間隔の大小関係をもち、値の差が意味をもつ尺度。温度、偏差値、西暦など
- **比例尺度**：間隔尺度のすべての性質に加えて、単位をもち、ゼロが絶対的な意味をもつ尺度。距離、時間、測度、体重、年齢、身長、収入、絶対温度など。また、乗除の演算が意味をもち、40kgは20kgの2倍ですし、距離を時間で割ると速度という意味をもちます。ほとんどの物理的な量は比例尺度です。

これらの尺度・変数は質的変数と量的変数に分類されます。性別、血液型、レストランのランキングなどは質的変数です。名義尺度と順序尺度は質的変数となり、それらの性質は文字列で表現されます。また、質的変数は2値変数や多値変数で表現できます。一方で、温度や体重などは量的変数です。間隔尺度と比例尺度は量的変数となります。量的変数は離散変数と連続変数に分けることができます。

つぎの表は、ポルトガルのミーニョ地方（北西部）ヴィーニョ・ヴェルデのアルコール度数中程度の赤ワインの評価と物理化学的検査の結果です。データは2004年5月から2007年2月にかけて収集され公式認証機関（CVRV）で検査されています。CVRVは、ヴィーニョ・ヴェルデの品質の向上とマーケティング強化を目的とした専門組織です。ワインのサンプル検査はプロセスを自動的に管理するコンピュータシステムによって記録され

ました。また、評価については、各サンプルを最低3人の専門家が評価しています。評価は、0（非常に悪い）から10（素晴らしい）までのブラインドテイスティングの結果です。これからこのデータベースを活用して、データ分析の手法を学んでいきます。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	比例尺度											順序尺度
2	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	評価
3	7.4	0.70	0.00	1.9	0.076	11	34	0.9978	3.51	0.56	9.4	5
4	7.8	0.88	0.00	2.6	0.098	25	67	0.9968	3.20	0.68	9.8	5
5	7.8	0.76	0.04	2.3	0.092	15	54	0.997	3.26	0.65	9.8	5
6	11.2	0.28	0.56	1.9	0.075	17	60	0.998	3.16	0.58	9.8	6
7	7.4	0.70	0.00	1.9	0.076	11	34	0.9978	3.51	0.56	9.4	5
8	7.4	0.66	0.00	1.8	0.075	13	40	0.9978	3.51	0.56	9.4	5
9	7.9	0.60	0.06	1.6	0.069	15	59	0.9964	3.30	0.46	9.4	5
10	7.3	0.65	0.00	1.2	0.065	15	21	0.9946	3.39	0.47	10	7

表 1.1 ワインデータ

データの出所：<http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/Wine+Quality>

## 統計データ

### データの性質の表現方法による分類

- 質的変数
  - － 名義尺度：ワインの銘柄、職業、性別など
  - － 順序尺度：ワインの好み、成績評価など
- 量的変数
  - － 間隔尺度：アルコール度数、温度など
  - － 比例尺度：身長、体重、年齢、絶対温度など

図 1.1 データの性質

厳密なデータの分類は、統計的分析手法の選択の原点です。

## 1.2. 記述統計

実際の調査や観測で得られたデータを観測値といいます。実験や観測では複数のデータを集めます。しかし、大量のデータ、1つ1つの観測値を見ても、なかなかそのデータのもつ特徴はとらえられません。グラフを用いると直感的に特徴をとらえられたりします。また、その特徴を1つの数値で表すとデータのもつイメージがつかみやすくすることがあります。

### 1.2.1. データの可視化

データをグラフとして視覚的に要約することで、全体の特徴をとらえることができます。

#### A) ヒストグラム(頻度図)の作成

頻度図は、横軸に変数を、その大きさ、または階級などに応じて並べ、縦軸にそれらの頻度を表したグラフです。

例題 1.1 : ワインデータの評価、化学成分 K と B の頻度図を作ってみましょう。

このデータベースは、赤ワインを10段階の評価結果とワインの特徴の科学的分析結果を集めたものです。図 1.2 は赤ワインの10段階評価を頻度図にしたものです。

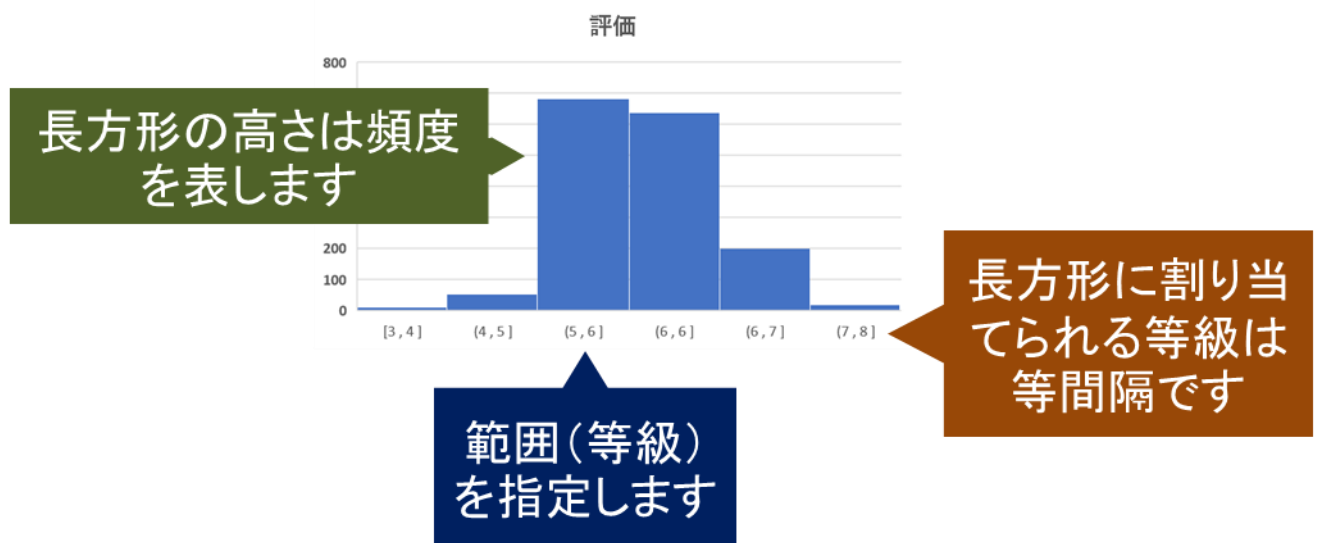


図 1.2 頻度図の製作ヒント

横軸は10段階評価、縦軸はその頻度です。最も頻度の多い評価は5です。つぎが6です。最も高い評価は8で最も低い評価は3です。頻度が評価の中央に位置していて単峰の山のようなのが分かります。頻度の分布はおおよそ左右対称ですので、このような頻度図をベル型と呼びます。

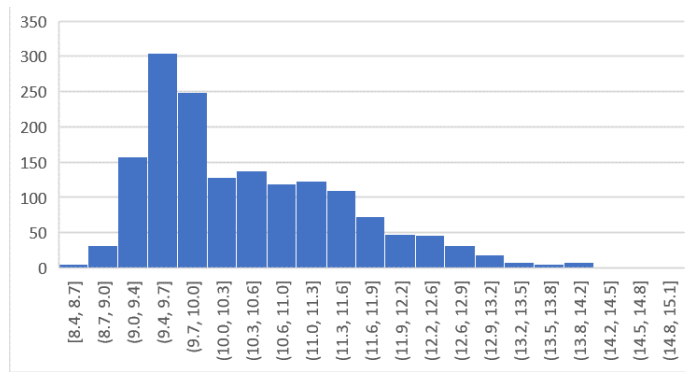


図 1.3 頻度図 化学成分 K

図 1.3 の横軸は化学成分 K です。最も頻度の高い K は 9.5 近辺です。すそ野は右に長くなっています。頻度図の度数は左によっています。これは右にひずんでいます。

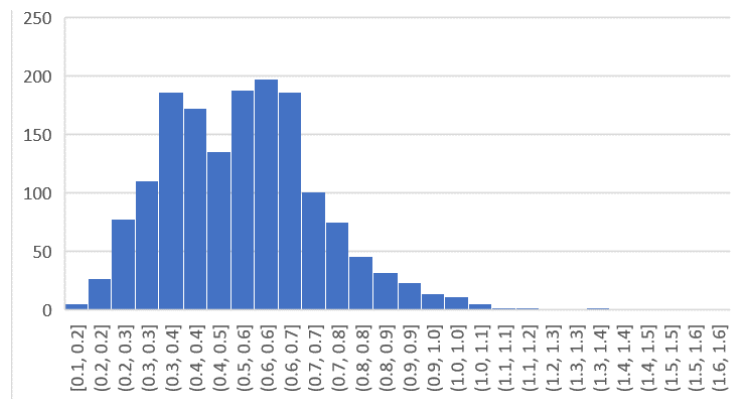


図 1.4 頻度図 化学成分 B

図 1.4 の横軸は化学成分 B です。最も頻度の高い B は 0.6 近辺です。頻度図の形状は天井が平らで、左右のすそ野はなだらかに減少している台形にも見えますし、2つの単峰の頻度図が混じっているようにも見えます。図 1.5 は化学成分 B についてのものです。一番上の図は図 1.4 と同じものです。2 番目は、それよりも等級を細かくしています。一番下は等級を荒くしています。2 こぶが消えてしまっています。幅の大きさによって、頻度図から受けるイメージが変わります。

同じデータでも等級のとりかたでイメージが変わる

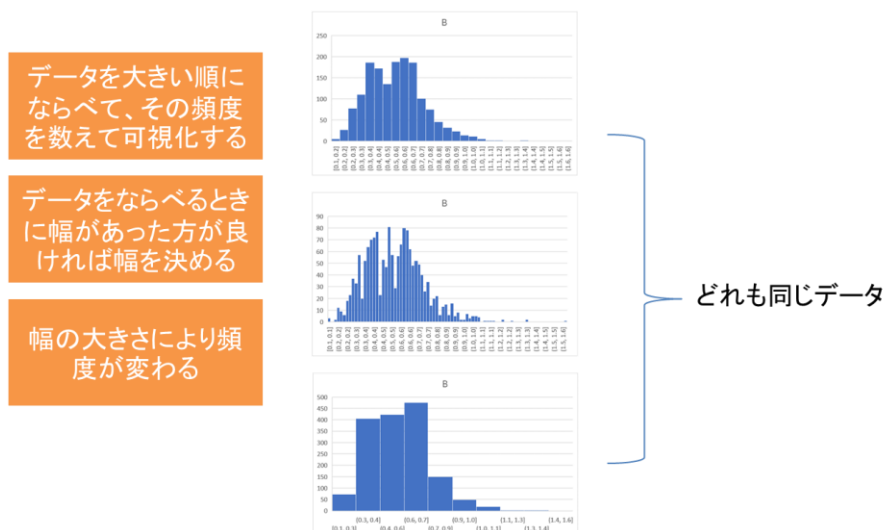


図 1.5 頻度図の等級と与える印象

頻度図の形状は大まかに

- － 一様：頻度が横軸の値に対してほぼ均等。

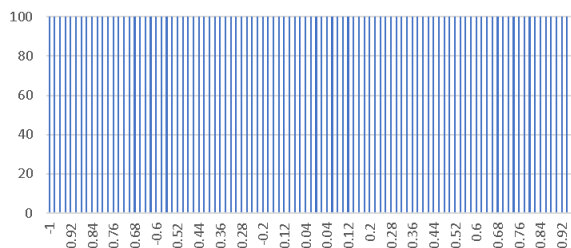


図 1.6 一様な頻度図(例題 2.6)

- － ベル型：頻度の高さは横軸に対してベル型。

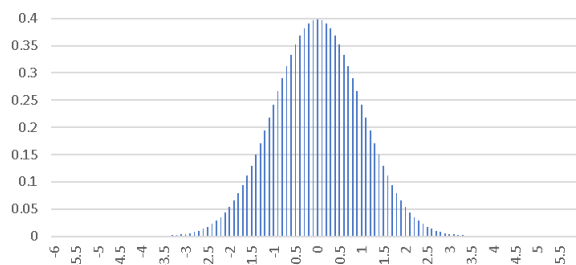


図 1.7 ベル型の頻度図(例題 2.7)

- － 右に裾長：右にすそ野が長く、頻度が左寄り。

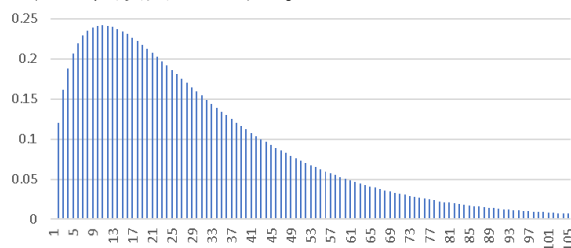


図 1.8 右にすそ長

- － 左に裾長：左にすそ野が長く、頻度が右に寄り。

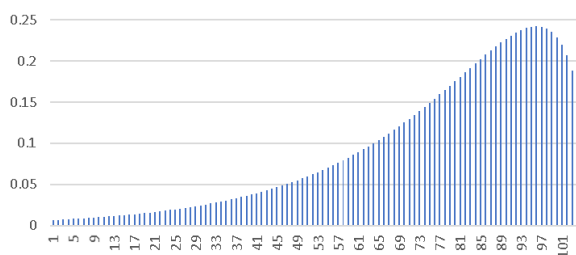


図 1.9 左にすそ長

- － 複数のこぶ：複数頻度の山やコブ。

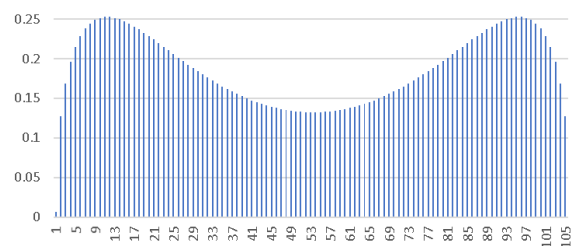


図 1.10 複数頻度の山に分けられます。

頻度図により変数の幅、ばらつき具合、頻度の高低などの大まかな傾向が一目でつかめます。

## B) 散布図の作成

散布図は横軸と縦軸に二つの異なるデータを割り当て、観測値を打点して作るグラフです。2つのデータの関係と散らばり具合を大まかにつかむことができます。

例題 1.2：ワインデータの評価と化学成分 K、化学成分 K と化学成分 B、評価と化学成分 B の散布図を作ってみましょう。

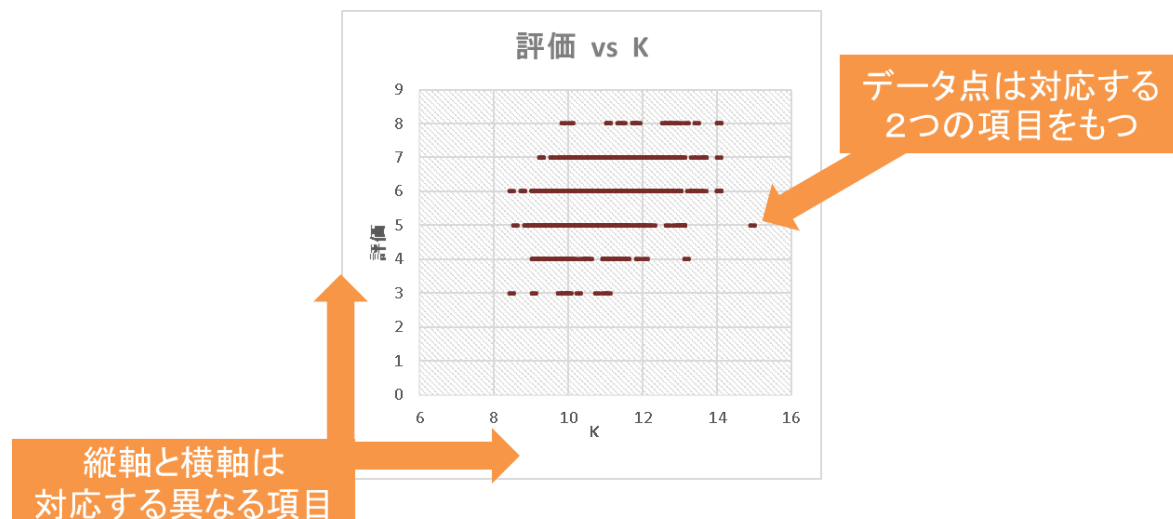


図 1.11 散布図

図 1.11 は、横軸に化学成分 K、縦軸に赤ワインの評価を目盛っています。化学成分 K が増えると評価が高くなる傾向がありそうです。しかし、それはかなり大まかな傾向です。また、データ点は横に並んでいる線が平行に 6 本あります。これは評価が離散値であるためです。

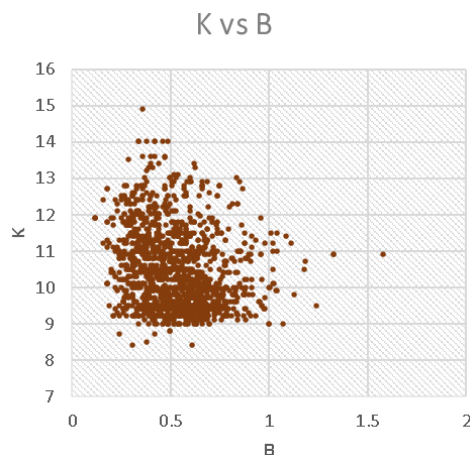


図 1.12 散布図：化学成分 K vs B

図 1.12 は、横軸に化学成分 B、縦軸に化学成分 K を取っています。この散布図から大きな傾向は見られません。化学成分 B が高くなると化学成分 K の幅が狭まり、9 から 12 の中に納まっているように見えます。しかし、化学成分 B は高くなると頻度が低くなるので、ただ単にデータ点の数が少なくなりこのように見える可能性があります。



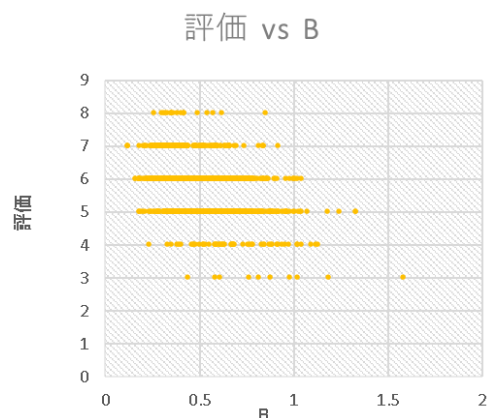


図 1.13 散布図: 評価 vs 化学成分 B

図 1.13 は、横軸に化学成分 B、縦軸に評価を取りました。化学成分 B が上がると評価が下がる傾向がありそうです。しかし、化学成分 B の頻度は両端に行くほど低くなっているため、その影響を考慮する必要があります。

3つの散布図を見ましたが、このような可視化は2つの変数の大まかな傾向をとらえるときに有効です。



図 1.14 可視化

## 1.2.2. 要約統計量

データの特徴を1つの数値として表現すると便利なきときもあります。記述統計量、基本統計量、代表値ともいいます。要約統計量ですが、4つのタイプに大きく分けることができます。1つ目はどの辺にデータが集中しているか、2つ目はどの程度のばらつきがあるのかを示すものです。そして3つ目はデータ間の関係をとらえる指標です。最後の4つ目は頻度図(分布)の形状に関するものです。

### 1.2.2.1. 1変量要約統計量

まずはなじみの深い平均を見ていきます。

#### A) 平均(算術平均)

平均は日常生活でもっともなじみの深い基本統計量の1つです。平均にもいろいろな計算方法がありますが、通常は算術平均のことです。その計算を1から5までの数値を用いて行ってみましょう。

$$\frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{5} = 3$$

となります。これは何を表しているのでしょうか？平均は与えられた数値のある特定の位置を表す統計量で



す。まずは元の数値をみてみましょう。

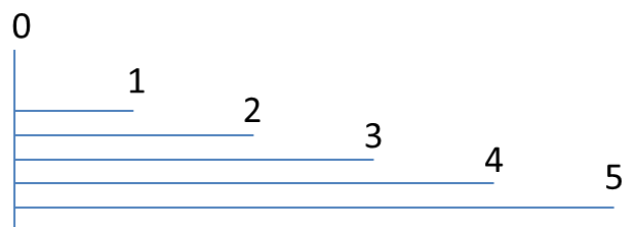


図 1.15 5つの数値

図 1.15 は1から5までの数値を、0を起点に並べてみたものです。数値の大きさを比較するには便利です。つぎに平均の使い方をみてみましょう。1から5までのそれぞれの値から平均を引いてみましょう。

$$1-3=-2$$

$$2-3=-1$$

$$3-3=0$$

$$4-3=1$$

$$5-3=2$$

それぞれの計算結果は1から5までの数と平均との差です。差は距離とも考えられます。つぎにこの計算結果を足し合わせてみましょう。 $-2-1+0+1+2=0$ になります。これは何を意味しているのでしょうか？結果はマイナスのものとプラスのものに分かれました。それらを足し合わせるとゼロになるのですから、平均は与えられた数値全体の中心の位置を表しています。図 1.16 を見てください。

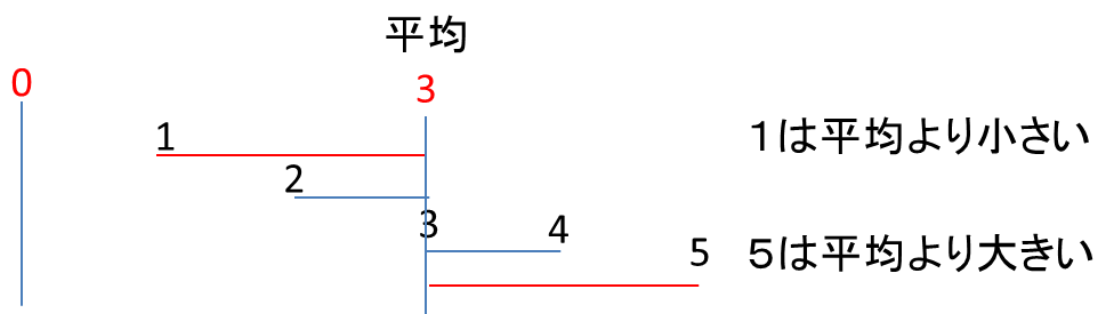


図 1.16 平均の分析

となります。比較の基準を0から3に変更するだけで見方がだいぶ違ってきます。

$n$ 個の数値の平均は、 $a_i$ を*i*番目の数とすると、その計算方法は

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

となります。これはさらに

$$\bar{a} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}$$

と書くことができます。 $\bar{a}$ は $a$ の平均を意味します。

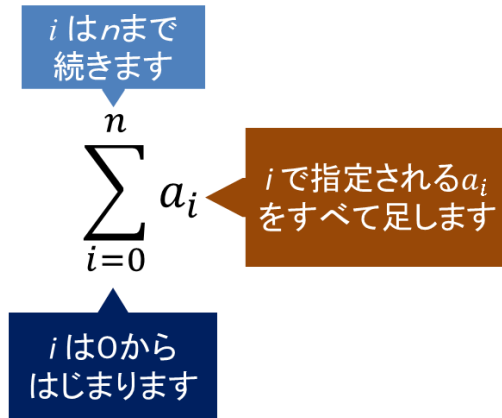


図 1.17 シグマの意味

つぎにデータの散らばりについて見てみましょう。たとえば、1 から 5 の整数をまずならべてみます。

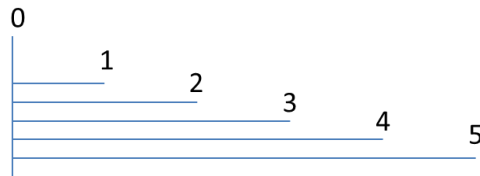


図 1.18 5つの数値

1 から 5 までの数値のばらつきを考えると、それぞれの数値とその平均との差、つまり偏差をとります。これもばらつきの尺度になります。グリーンの数値は偏差を表しています。

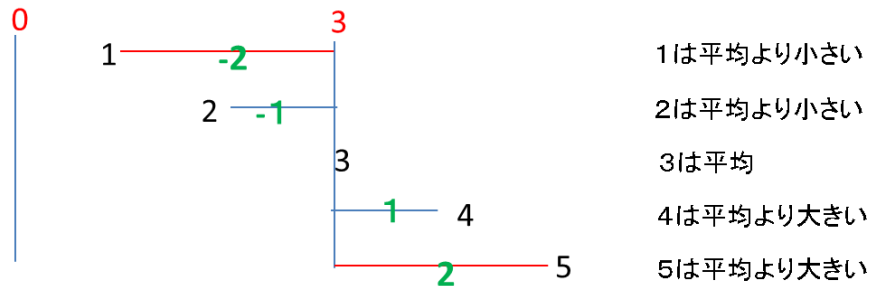


図 1.19 偏差

この偏差を足し合わせるとゼロになってしまうので、ばらつきの尺度としては適当ではありません。

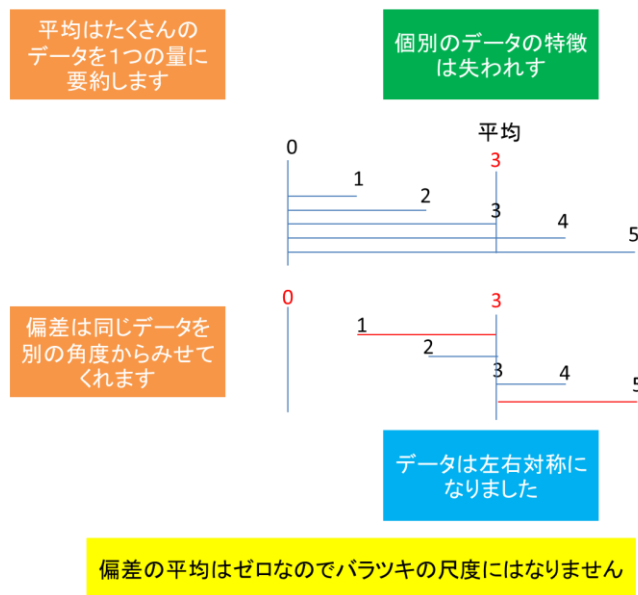


図 1.20 平均と偏差

B) 分散

統計学の分散は、数値の集団の散らばり具合を表します。それぞれの数値と平均との差を取り、それを2乗して総和をとり、数値の数で割ったものです。つぎのように定義されます。

$$\text{var}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

ここで、 $\bar{x}$ は $x$ の平均です。 $n$ は数値の数です。つまり、 $x_i$ の偏差の2乗の平均として定義されます。分散がゼロであれば、ばらつきはありません。分散が大きくなるとばらつきも大きくなります。

偏差を求めて2乗して総和を求め、総数で割るという方法が何を意味するのか考えてみましょう。まず、2乗することで負の偏差を正の値に変えることができます。したがって、偏差の2乗を足し合わせてもゼロになることはありません。しかし、2乗して足し合わせただけではデータの数が多くなれば、2乗和はどんどん大きくなってしまいます。そこでその平均を求めて、データの影響を排除しているのです。

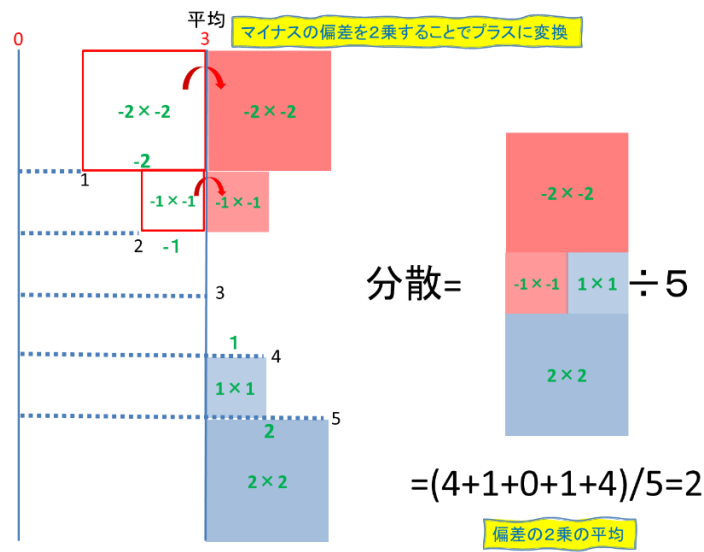


図 1.21 分散の理解

分散は偏差の2乗の平均です。しかし、分散は偏差を2乗しているためにデータの平均とは次元が違うことに注意してください。



図 1.22 平均と偏差と分散の理解

### C) 標準偏差

分散の正の平方根を標準偏差と呼びます。分散同様に、数の集団の散らばり具合を表す指標です。

$$\sigma_x = \sqrt{\text{var}(x)}$$

標準偏差の意味を考えてみましょう。分散は元のデータの2乗を用いて計算しています。したがって、2次元です。その平方根を取ることで、次元をもとの数値の1次元にもどしているのです。標準偏差は分散の弱点を克服しています。図 1.23, 図 1.24 は標準偏差の意味のイメージ図です。

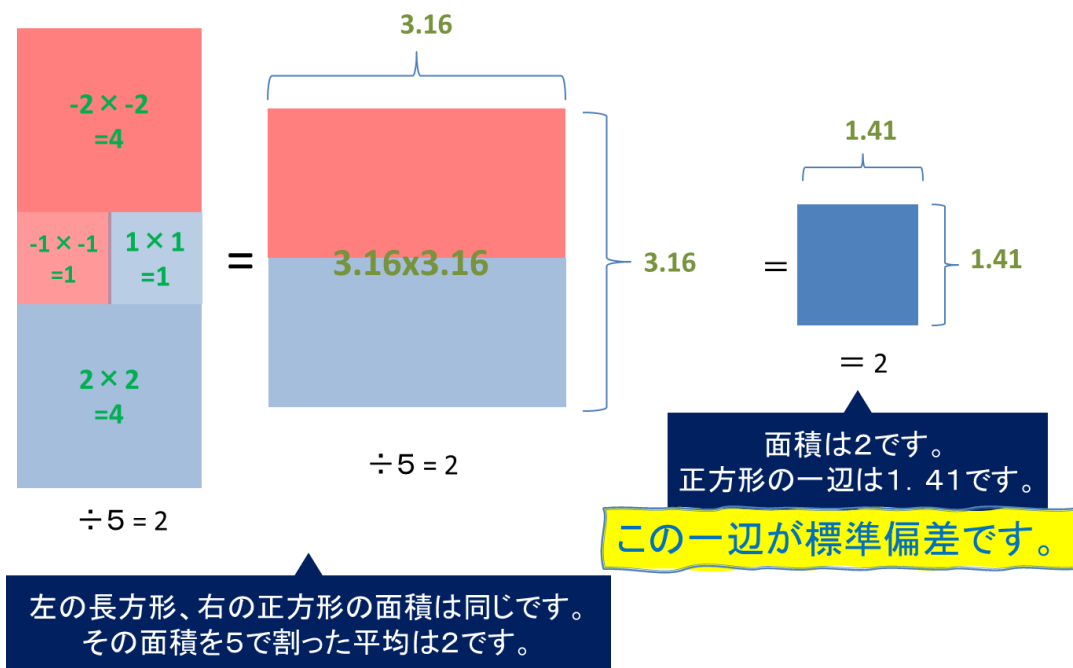


図 1.23 標準偏差のイメージ図

標準偏差はここで求めた面積の一边だと考えることができます。したがって、分散と違い元のデータの次元と同じです。

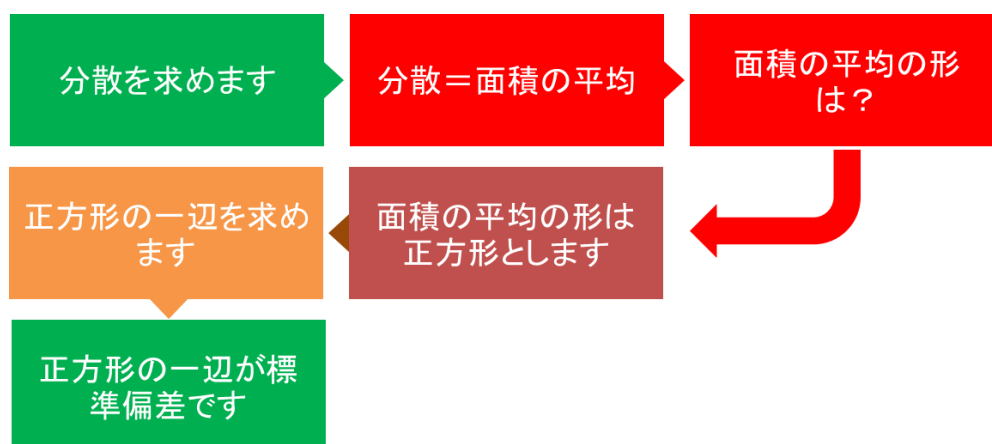


図 1.24 分散と標準偏差

### 1.2.2.2. 2変量要約統計量

平均、中央値、分散、標準偏差は、一変量の統計的な性質を説明しています。つぎは対となる2組(または、それ以上の組)のデータの間の特徴をとらえる要約統計量を説明します。

#### A) 共分散

2組のデータ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ の共分散は、つぎのように定義されます。

$$\text{Cov}(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n}$$

ここで、 $\bar{x}, \bar{y}$ はそれぞれ $x, y$ の平均を表します。共分散は2組のデータの平均からの偏差の積の単純平均です。 $x$ と $y$ が同じであると、共分散は分散になります。表 1-2 のように共分散は表(行列)として表現されます。 $a, b, c, d$ は要素を表しています。対角線上の $\text{Cov}(a, a), \text{Cov}(b, b), \text{Cov}(c, c), \text{Cov}(d, d)$ は分散を表しています。対角線を境に対称で同じ色のセルの共分散は同じものです。

表 1-1 共分散

	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	$\text{Cov}(a, a)$	$\text{Cov}(b, a)$	$\text{Cov}(c, a)$	$\text{Cov}(d, a)$
$b$	$\text{Cov}(a, b)$	$\text{Cov}(b, b)$	$\text{Cov}(c, b)$	$\text{Cov}(d, b)$
$c$	$\text{Cov}(a, c)$	$\text{Cov}(b, c)$	$\text{Cov}(c, c)$	$\text{Cov}(d, c)$
$d$	$\text{Cov}(a, d)$	$\text{Cov}(b, d)$	$\text{Cov}(c, d)$	$\text{Cov}(d, d)$

#### B) 相関

共分散は2組のデータ $(x, y)$ のもつ特徴をとらえようとしているのですが、図 1.25にあるように、その計算結果は対となるデータのそれぞれの平均からの偏差の大きさ(標準偏差)に大きな影響を受けます。何らかの判断の材料にするためには経験を要します。そこで、共分散を各標準偏差で割ることで、-1から+1までの数値に収まるようにします。

$$\rho_{xy} = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

これが相関です。このようにすることで、相関が1に近ければ2組のデータは同じような動きになり、ゼロに近ければ、関係がなく、-1に近ければ逆の動きをしていることになります。相関が1のときを正の完全相関、-1のときを負の完全相関といいます。

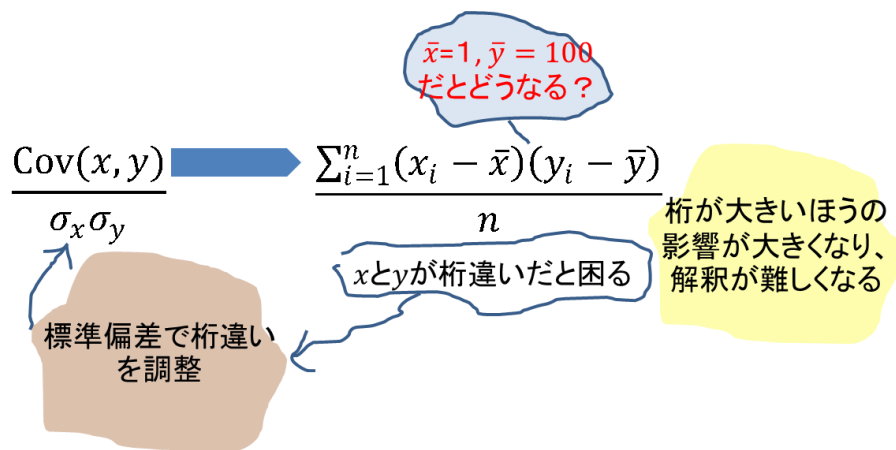


図 1.25 標準偏差と共分散

共分散同様に、相関も行列(マトリックス)を用いて表現すると便利なことがあります。

相関を、散布図を用いて可視化してみましょう。図 1.26~図 1.30 は乱数を用いて確率変数の列を 2 つ生成し、正の完全相関、正の相関、無相関。負の相関、負の完全相関を散布図として表現したものです。(練習問題 1.9)

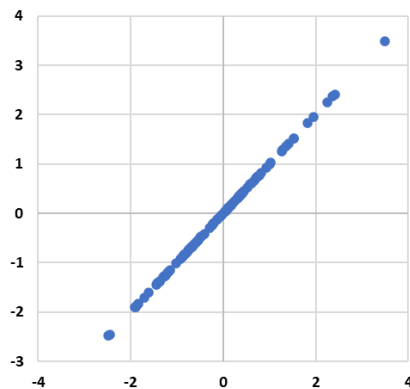


図 1.26 正の完全相関：相関=1

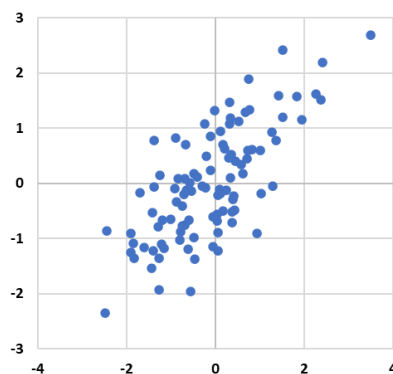


図 1.27 正の相関：相関=0.7

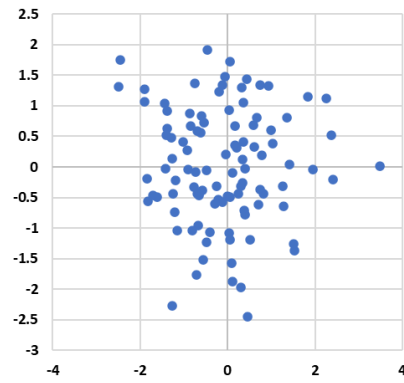


図 1.28 無相関：相関 = 0

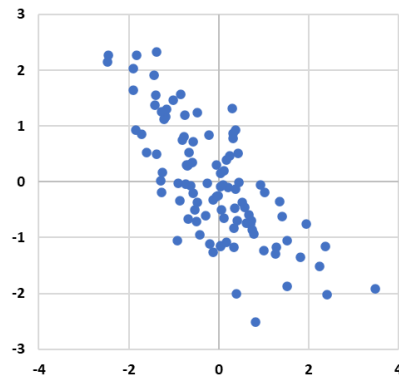


図 1.29 負の相関：相関 = -0.7

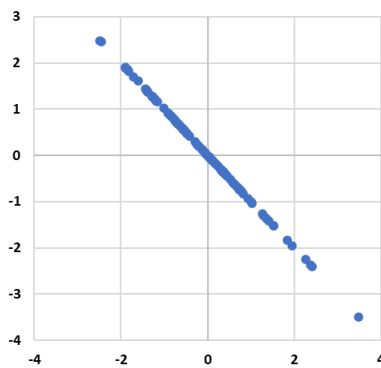


図 1.30 負の完全相関：相関 = -1

散布図は相関を明確に表現してくれますが、正の相関、負の相関、無相関の境界はそれぞれの状況で判断する必要があります。

相関は便利で使いやすいのですが、使い方に注意が必要です。相関は単なる平均的な関係を示すだけで、たとえば $A$ と $B$ の相関が高いからといって、それが、 $A$ が $B$ の原因であるとか、 $B$ が $A$ の原因であるとか、事象の因果関係を示すことにはなりません。この点には注意が必要です。



## 相関係数

- ペアーとなる2つの確率変数の間の関係の強さを
- -1から1までの数値で表します。
- 相関は平均的な関係の強さを示しているだけです。
- AとBの相関が高いからといって、  
AがBの原因であるとか  
BがAの原因であるとか  
という因果関係を示しているものではありません。

図 1.31 相関係数

例題 1.3 : ワインデータの相関マトリックスを作成してみましょう。

表 1-2 相関行列

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	評価
A	1.00											
B	-0.25	1.00										
C	0.67	-0.55	1.00									
D	0.11	0.00	0.14	1.00								
E	0.09	0.06	0.20	0.05	1.00							
F	-0.15	-0.01	-0.06	0.19	0.01	1.00						
G	-0.11	0.08	0.03	0.20	0.05	0.67	1.00					
H	0.67	0.02	0.37	0.36	0.20	-0.02	0.07	1.00				
I	-0.68	0.23	-0.54	-0.08	-0.26	0.07	-0.06	-0.34	1.00			
J	0.18	-0.26	0.31	0.00	0.37	0.05	0.04	0.15	-0.20	1.00		
K	-0.06	-0.20	0.11	0.04	-0.22	-0.07	-0.21	-0.50	0.21	0.09	1.00	
評価	0.12	-0.39	0.23	0.01	-0.13	-0.05	-0.18	-0.17	-0.06	0.25	0.48	1.00

エクセルの分析ツールを用いると簡単に相関行列が作れます。

### 1.2.2.3. 頻度図の形状に関する要約統計量

観測値の頻度の形状を頻度図によりイメージする方法を紹介しましたが、基本統計量でもつかむことができます。

#### A) 歪度(わいど)

頻度図の歪の度合いを表す歪度(skew)は

$$\text{歪度} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{n} / \sqrt{\left[ \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} \right]^3}$$

で表すことができます。歪度がゼロであると左右対称の頻度図(分布)となります。歪度が正の値ですと、右にすそ野が長くなります。これは  $x_i$  の平均との差の3乗が正となることから平均よりも大きいほうに偏りがあること

が分かります。負の値ですと平均よりも小さいほうに偏りがあります。

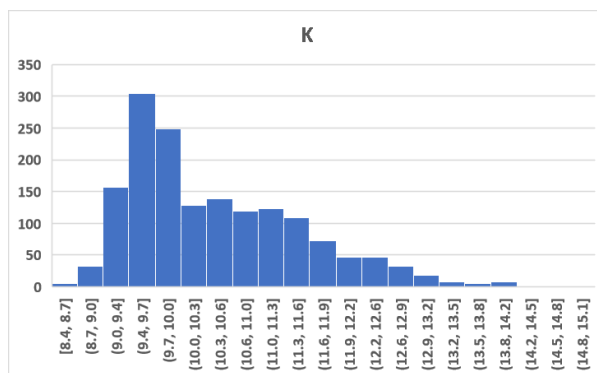


図 1.28 歪度=0.86 (練習問題 1.1)

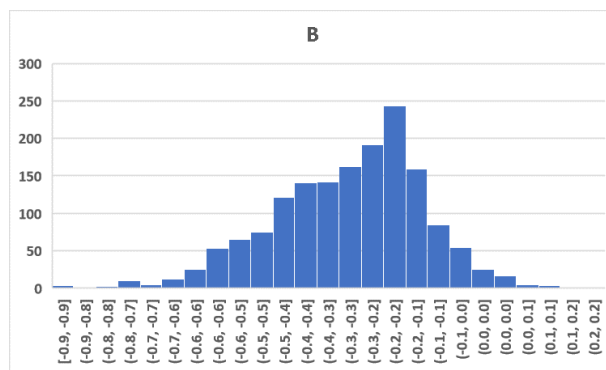


図 1.29 歪度=-0.43 (練習問題 4.3)

## B) 尖度

尖度(kurt)は分布の中心の尖り具合、すそ野の厚さを表します。

$$\text{尖度} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{n}}{\left[ \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} \right]^2} - 3$$

正規分布の尖度は3です。これは発案者であるカール・ピアソンの提案にしています。また、エクセルなどではゼロになります。注意をしましょう。尖度が正の値になると分布は正規分布よりも、中心の尖り具合が強く、すそ野が厚くなります。

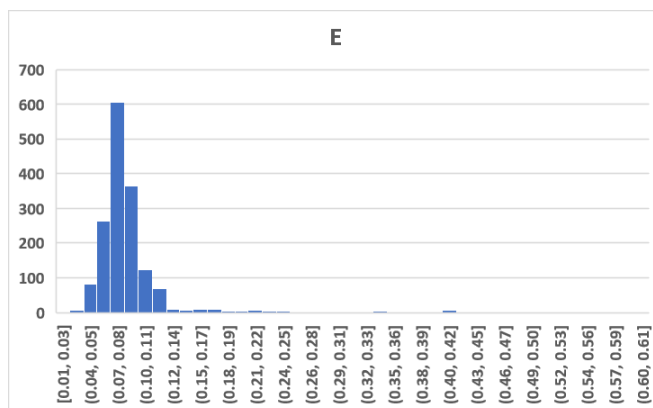


図 1.30 尖度=1.1 (練習問題 1.1)

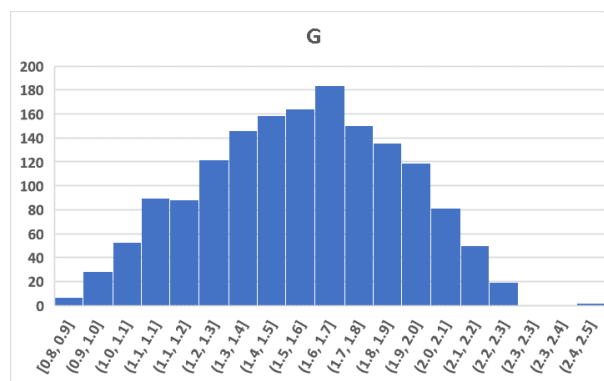


図 1.31 尖度-0.67 (練習問題 4.3 データの対数)

例題 1.4 : ワインデータの歪度と尖度を計算してみましょう。

表 1-4 歪度と尖度

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	歪度	0.98	0.67	0.32	4.54	5.68	1.25	1.52	0.07	0.19	2.43	0.86	0.22
2	尖度	1.13	1.23	-0.79	28.62	41.72	2.02	3.81	0.93	0.81	11.72	0.20	0.30
3		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	評価
4		7.4	0.7	0	1.9	0.076	11	34	0.9978	3.51	0.56	9.4	5

練習問題 1.1: ワインデータから適当に化学成分を選び、頻度図を描いてみましょう。

練習問題 1.2: ワインデータから適当に化学成分を選び、その評価との関係を散布図として描いてみましょう。

練習問題 1.3: ワインデータのそれぞれの化学成分にはローマ字が割り当てられています。実際の化学成分を使わずに記号を用いている理由は何でしょうか？

練習問題 1.4: 分散は要約統計量、基本統計量の 1 つだと紹介しました。それは量なのでしょうか？割合なののでしょうか？それとも何か別のものなののでしょうか？

練習問題 1.5: 分散と標準偏差を比べて分散を用いる利点は何でしょうか？

練習問題 1.6: 共分散と相関を比べて共分散を用いる利点は何でしょうか？

練習問題 1.7: 歪度は偏差の 3 乗、尖度は偏差の 4 乗を用いています。それはなぜでしょうか？また、これは平均、分散と何か共通点があるのでしょうか？

練習問題 1.8: 要約統計量を用いる利点と欠点は何でしょうか？

練習問題 1.9: 乱数を用いて正の完全相関、正の相関、無相関、負の相関、負の完全相関を、散布図を用いて可視化してみましょう。

## 第2章 確率変数: 確率と確率分布

本章の主役は確率変数です。確率変数というと予測が不可能は特徴を持った変数というイメージがありませんか？そのイメージを払しょくするために、まず確率と確率分布について学びます。`確率`は通常の会話でもよく使われ、なじみのある単語です。分布も同様で、何となく日常で思い浮かべるイメージがあるのではないのでしょうか。本章では、統計学という確率と分布、そして確率変数についてサイコロを用いて学んでいきます。これはデータの背後にある集団について理論的に推測するための下準備です。

### 2.1. 確率

サイコロを投げるとき、その結果は偶然に左右されます。1が出るときもあれば6が出るときもあります。サイコロには6つの面があり、1つ1つの目には1から6までの数字が書き込まれています。この6面に書き込まれた数のように、これ以上分けるこのできない結果を根元事象といいます。サイコロの根元事象は $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$ です。サイコロが賭けに使われるときは、目の数よりは、目が偶数であるか奇数であるかに興味があるかもしれません。奇数の目は $\{1, 3, 5\}$ で、偶数の目は $\{2, 4, 6\}$ です。これは出た目をグループとしてまとめているので、偶数の目、奇数の目は根元事象ではありません。これらは事象です。事象は根元事象で構成されています。サイコロを振って結果を観察することを試行といいます。根元事象とは、試行によって起こる、それ以上に分けられない結果です。事象は、根元事象の特定の集合を指します。標本空間はすべての根元事象の集合です。根元事象全体 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ を標本空間と呼びます。つまりこれらはサイコロを振る前から確定しています。そして、このような事象の起こりやすさが確率です。サイコロが作られた時点でこの確率も定まっています。サイコロをなんども振っているうちに、角がわずかに欠け、サイコロの目の出方が変わってしまったとします。その際には確率も変わってしまいます。振っているうちに目の出方が変わってしまうようなサイコロは分析の対象にはなりません。

### 模型(モデル)

- **試行**
  - 試行とは、そのそれぞれの結果が偶然に左右される観測、または実験のことです。
- **根元事象**
  - 試行によって起こる個々の結果のことです。
- **事象**
  - 根元事象の集合のことです。
- **標本空間**
  - すべての根元事象の集合のことです。
- **確率**
  - 事象の起こりやすさのことです。

図 2.1 統計モデル

確率には、どれも同じような確からしきで起こるとする古典的な定義、事象の頻度に基づく定義、そして日常的に用いる確率という意味に近い、感覚、主観に基づく定義などがあります。

### 2.1.1 確率の定義

古典的な確率では、根元事象が生じる確率は等しいと置いて、事象の確率を求めます。この良い例はサイコロの目の出方であるとか、コインの裏表の出方です。根元事象が生じる確率が同様に確からしいとしても、その事象の確率は等しいとは限りません。また、根元事象の生じる確率が等しくない場合もあります。大雨になる確率と小雨の確率は同じであるとは限りません。したがって、発生の頻度に重点を置く考え方もあります。それが頻度確率です。実験や観測により得られた根元事象の相対頻度をもとに確率を求めます。

数学的には、確率は

- 任意の事象 $A$ に対して  $0 \leq P(A) \leq 1$
- 全事象 $\Omega$ に対して  $P(\Omega) = 1$

と定義されます。少し難しく表現しましたが、確率は0から1までの数値であり、何も起こらなければゼロ、全事象の確率を足し合わせると1になることを表現したのです。

### 2.1.2. 事象と確率

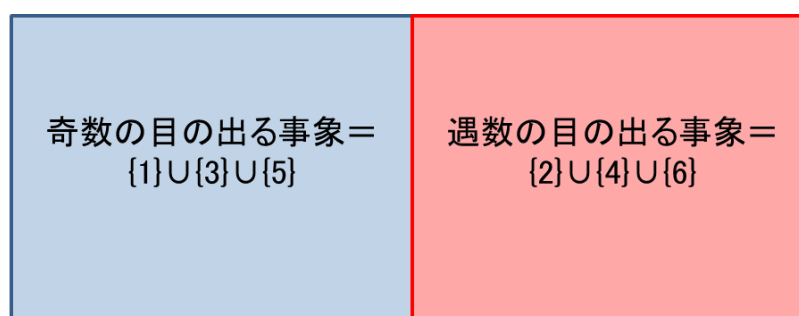
2つの事象 $A$ と $B$ の関係について考えてみましょう。典型的な例を2つ紹介します。

#### A) 和事象

$A$ と $B$ の少なくとも一方が起こる事象を和事象といい、 $A \cup B$ と書きます。これを「 $A$ または $B$ 」と読みます。

例 2.1: サイコロを一回振って偶数と奇数の目の出る確率を求めましょう。サイコロの目の出方は等確率とします。

偶数の目は $\{2,4,6\}$ です。奇数の目は $\{1,3,5\}$ です。サイコロの目は全部で6つあるので、 $P(1 \cup 3 \cup 5) = 3/6 = 1/2$ 、 $P(2 \cup 4 \cup 6) = 3/6 = 1/2$ となります。 $P(\cdot)$ は確率を表します。奇数の目の出る事象と偶数の目の出る事象は重なり合うものがないため排反事象といいます。排反事象の和事象の確率はそれぞれの事象の和となります。



$$P(\text{奇数})=P(1)+P(3)+P(5)=1/6+1/6+1/6=1/2 \quad P(\text{偶数})=P(2)+P(4)+P(6)=1/6+1/6+1/6=1/2$$

図 2.2 奇数の目と偶数の目

#### B) 積事象

同時に起こる事象を積事象といい、 $A$ と $B$ が同時に起こるとき $A \cap B$ と書きます。「 $A$ かつ $B$ 」と読みます。

例題 2.2:  $A$ を奇数の目の出る事象、 $B$ を3の倍数の目の出る事象とすると $A \cap B$ の確率を求めましょう。サイコロの目の出方は等確率とします。

$A = (1 \cup 3 \cup 5)$ 、 $B = (3 \cup 6)$ となります。 $A \cap B$ は $A$ と $B$ に含まれる事象ですから $\{3\}$ となります。 $P(A \cap B) = 1/6$ です。

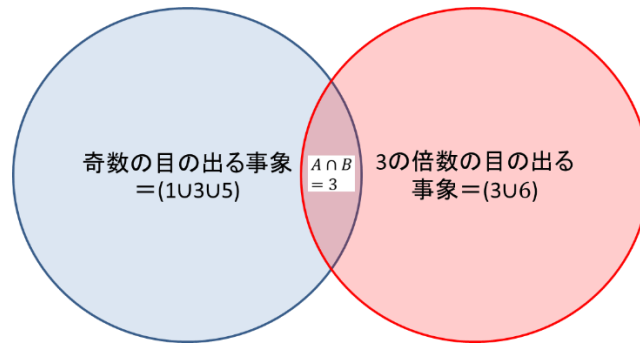


図 2.3 積事象

### C) 2つの事象 $A$ と $B$ の関係

- 和事象( $A \cup B$ ) :  $A$ と $B$ の少なくとも一方が起こる
- 積事象( $A \cap B$ ) :  $A$ と $B$ が同時に起こる
- 余事象( $\complement$ ) :  $A^c$ 、 $A$ が起こらない事象 ;  $B^c$ 、 $B$ が起こらない事象
- 全事象( $\Omega$ ) : 標本空間全体の事象
- 空事象( $\emptyset$ ) : 何も起こらない事象
- 排反な事象( $A \cap B = \emptyset$ ) :  $A$ と $B$ が同時に起こらない事象

例題 2.3:  $A$ を奇数の目の出る事象、 $B$ を 3 の倍数の目の出る事象とすると $A \cup B$ の確率を求めましょう。サイコロの目の出方は等確率とします。

$A$ を奇数の目の出る事象 :  $A = (1 \cup 3 \cup 5)$

$B$ は 3 の倍数の目の出る事象 :  $B = (3 \cup 6)$

ですから、重なり合う事象があります。それは $\{3\}$ です。したがって、排反事象ではありません。排反事象でない事象の和事象の確率をそれぞれの事象の和としてしまうと、重なり合う事象が二重に加算されてしまいます。したがって、その分を差し引く必要があります。一般の和事象は、それぞれの事象の和の確率から、重なり合う積事象の確率を差し引きます。この場合は

$$P(A) = P(1) + P(3) + P(5) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = P(3) + P(6) = 2/6 = 1/3$$

$$P(A \cap B) = P(3) = 1/6$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 3/6 + 2/6 - 1/6 = 4/6 = 2/3$$

となります。

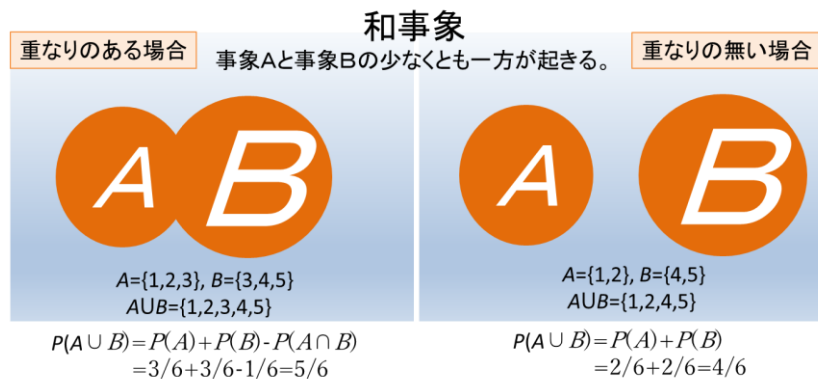


図 2.4 和事象：重なりのある場合とない場合

### 2.1.3. 条件付確率

例題 2.4:  $A$ を奇数の目の出る事象、 $B$ を偶数の目の出る事象、 $C$ を3の倍数の目の出る事象、 $D$ を $C$ の余事象とします。 $B$ の目が出たときにそれが $D$ に含まれる目でもある確率はいくらでしょうか？これを $P(D|B)$ と書き、条件付確率といいます。サイコロの目の出方は等確率とします。

$A$ を奇数の目の出る事象： $A = (1 \cup 3 \cup 5)$ 、 $P(A) = P(1) + P(3) + P(5) = 1/2$

$B$ を偶数の目の出る事象： $B = (2 \cup 4 \cup 6)$ 、 $P(B) = P(2) + P(4) + P(6) = 1/2$

$C$ を3の倍数の目の出る事象： $C = (3 \cup 6)$ 、 $P(C) = P(3) + P(6) = 1/3$

$D$ を $C$ の余事象： $D = (1 \cup 2 \cup 4 \cup 5)$ 、 $P(D) = P(1) + P(2) + P(4) + P(5) = 2/3$

となります。

$P(B \cap D)$ は、事象 $B$ と事象 $D$ に含まれるサイコロの目の確率ですから、 $B \cap D = \{2,4\}$ となります。よって、

$$P(B \cap D) = \frac{2}{6} = 1/3$$

です。これは、つぎのようにも考えられます。事象 $B$ と $D$ に含まれるサイコロの目は事象 $D$ の一部が事象 $B$ に含まれると考えることもできます。そこで、つぎのように確率を考えます。

- 事象 $B = \{2,4,6\}$ の確率 $P(B) = \frac{3}{6} = 1/2$ です。
- 事象 $B = \{2,4,6\}$ の目がでたときに、その目が $D = \{1,2,4,5\}$ にも含まれるのは $\{2,4\}$ でその確率は $P(D|B) = 2/3$ となります。これは、 $P(D|B) = 2/6 / (1/2) = 2/3$ とも計算できます。
- つまり、事象 $B$ と事象 $D$ に含まれるサイコロの目の確率は、確率 $P(B)$ の事象と確率 $P(D|B)$ の事象が同時に起こる確率なので、これらの確率の積になります。よって、

$$P(B \cap D) = P(B) P(D|B)$$

となります。 $P(B \cap D) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{6} = 1/3$ です。ここまでくると、事象の関係が明確になったのではないのでしょうか？実は、すでにお気づきになった方もいると思うのですが、この議論は逆でも成り立ちます。すなわち、

- 事象 $D = \{1,2,4,5\}$ の確率 $P(D) = \frac{4}{6} = 2/3$ です。
- 事象 $D = \{1,2,4,5\}$ の目がでたときに、その目が $B = \{2,4,6\}$ にも含まれるのは $\{2,4\}$ でその確率は $P(B|D) = 1/2$ となります。これは、 $P(B|D) = 2/6 / (4/6) = 1/2$ とも計算できます。
- つまり、事象 $D$ と $B$ に含まれるサイコロの目の確率は、確率 $P(D)$ の事象と確率 $P(B|D)$ の事象が同時に起こる確率なので、これらの確率の積になります。よって、



$$P(B \cap D) = P(D) P(B|D)$$

と等しくなります。 $P(B \cap D) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = 1/3$ です。どちらの方法でも結果は同じになりました。したがって、

$$P(B)P(D|B) = P(D) P(B|D)$$

つまり、 $P(B)P(D|B) = P(D)P(B|D) = P(B)P(D)$ となります。

図 2.5 にあるように、クロス表を用いると見通しが良くなります。

目の数			
	3の倍数の目	3の倍数以外の目	合計
偶数の目	1	2	3
奇数の目	1	2	3
合計	2	4	6

図 2.5 は、サイコロの目の数に関するクロス表と、それに関連する集合の図解を示しています。中央のクロス表は、行が「偶数の目」「奇数の目」「合計」、列が「3の倍数の目」「3の倍数以外の目」「合計」で構成されています。表の値は、偶数の目は3の倍数が1、非3の倍数が2、合計3；奇数の目は3の倍数が1、非3の倍数が2、合計3；合計は3の倍数が2、非3の倍数が4、総数6です。表の周囲には、これらのデータをまとめた集合の図解が配置されています。例えば、「3の倍数で偶数の目の数 {6}」は、偶数の目と3の倍数の目の交点（値1）と、偶数の目の合計（値3）と、3の倍数の目の合計（値2）の積で計算されます。同様に、「サイコロの目の総数」は、偶数の目の合計（3）と奇数の目の合計（3）の和で計算されます。図解は、集合の包含関係や、確率計算に必要な要素を視覚的に示しています。

図 2.5 クロス表  
確率

- ・ 確率はゼロから1までの値をとります。
- ・ すべての事象の確率の和は1になります。
- ・ 事象が互いに排反なとき、その和集合の確率は  
おのおのの事象の確率の和になります。

図 2.6 確率とは？

#### 2.1.4. 事象と試行

サイコロの目の出方をいくつかの事象に分類し、その確率を求めてきました。その中で和事象と積事象の確率を扱いました。 $A$ を奇数の目の出る事象、 $B$ を3の倍数の目の出る事象とするととき $A \cap B$ の確率を求めました。この際の事象 $A$ も事象 $B$ も試行の回数は1回です。また、 $A \cap B$ の意味はサイコロを1回振った時に出る目が奇数という性質と3の倍数であるという2つの性質をあわせもつ結果ということでした。したがって、試行回数はやはり1回です。

しかし、事象は必ずしもこのような形であるとは限りません。たとえば、 $x$ を赤と青のサイコロの目の和とします。 $x$ が5になる事象の確率を求めなさいといったときには、実は試行の回数は2回です。赤のサイコロを振るという試行と青のサイコロを振るという試行の2つから成り立っています。このように事象の確率を求めるとき

には、事象の意味をよく理解しておく必要があります。

例題 2.5： 2つのサイコロを同時に振った時に両方とも偶数の目の出る確率を求めてみましょう。サイコロの目の出方は等確率とします。

2つのサイコロの目の出る組み合わせをすべて書き出してみます。図 2.7 の横軸は1つ目のサイコロ、縦軸は2つ目のサイコロの目とします。1つ目のサイコロの目が偶数となるのは出た目が{2,4,6}のときです。{2}が出たとしましょう。その際に2つ目のサイコロの出た目が偶数となるのは{2, 4, 6}の目が出たときです。つまり、両方のサイコロの目が偶数であるのは

$$\{2,2\}, \{2,4\}, \{2,6\}, \{4,2\}, \{4,4\}, \{4,6\}, \{6,2\}, \{6,4\}, \{6,6\}$$

となるときです。クロス表で表現してみましょう。両方のサイコロの目が偶数のものを●としました。

		1 番目のサイコロの目					
		1	2	3	4	5	6
2 番目のサイコロの目	1						
	2		●		●		●
	3						
	4		●		●		●
	5						
	6		●		●		●
● 2つサイコロとも偶数の目							

図 2.7 2つのサイコロも目

2つのサイコロの目の組み合わせは全部で36通りあります。この中で両方のサイコロの目が偶数のもの、●の数は9個です。したがって、両方で偶数の目が出る確率は $\frac{9}{36} = 1/4$ です。

例題 2.6： サイコロを振って偶数の目の出る事象をA、奇数の目の出る事象をBとしたとき、青と赤のサイコロを振って起こるすべての事象の確率を求めてみましょう。サイコロの目の出方は等確率とします。

		青のサイコロの目					
		1	2	3	4	5	6
赤のサイコロの目	1	△▲	△●	△▲	△●	△▲	△●
	2	○▲	○●	○▲	○●	○▲	○●
	3	△▲	△●	△▲	△●	△▲	△●
	4	○▲	○●	○▲	○●	○▲	○●
	5	△▲	△●	△▲	△●	△▲	△●
	6	○▲	○●	○▲	○●	○▲	○●
●青の偶数の目；▲青の奇数の目 ○赤の偶数の目；△赤の奇数の目 △▲9個；△●9個；○▲9個；○●9個							

図 2.8 2つのサイコロの目：奇数と偶数の目

どの事象も確率は $9/36 = 1/4$ です。

### 2.1.5. 事象と独立性

サイコロの目の出方から、いくつかの事象の確率を求めてきました。その中で積事象の確率がそれぞれの事象の確率の積であるものがありました。たとえば、例題 2.2 では、 $A$  を奇数の目の出る事象、 $B$  を 3 の倍数の目の出る事象とすると  $A \cap B$  の確率をもとめました。 $P(A \cap B)$  は  $1/6$  です。これは  $P(A) = 1/2$ 、 $P(B) = 1/3$  の積としても求められます。

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

が成り立つとき、2つの事象 $A$ と $B$ は独立であるといいます。事象 $A$ と事象 $B$ はお互いに影響することなく生起することによります。奇数の目の出る事象は、3の倍数の目の出る事象とは無縁です。同じことが例題 2.4、2.5、2.6 でもいえます。では、どのようなときに

$$P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$$

となるのでしょうか。

例題 2.7: 青と赤の色の2つのサイコロがあります。青いサイコロの目が奇数であるときそれを事象 $A$ とします。また、赤いサイコロと青いサイコロの目の積が奇数であるときそれを事象  $B$  とします。 $A \cap B$ の確率をもとめてみましょう。サイコロの目の出方は等確率とします。

事象 $A$ の起こる確率は  $1/2$  です。事象 $B$ は2つの試行から構成されています。赤いサイコロの目を横軸、青いサイコロの目を縦軸とします。

		赤のサイコロの目					
青のサイコロの目	積	1	2	3	4	5	6
	1	1	2	3	4	5	6
	2	2	4	6	8	10	12
	3	3	6	9	12	15	18
	4	4	8	12	16	20	24
	5	5	10	15	20	25	30
	6	6	12	18	24	30	36
赤字: 赤と青のサイコロの目の積が奇数							

図 2.9 2つのサイコロの目：独立ではない例

青のサイコロと赤のサイコロの目の積が奇数であるためには、両方の目が奇数である必要があります。 $P(A \cap B) = 9/36 = 1/4$ となります。 $B$ となる条件に $A$ が含まれています。このような場合、 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ とはなりません。 $P(A)P(B) = 1/2 \cdot 9/36 = 1/8$ となってしまいます。

## 2.2. 確率変数

変数 $X$ がどのような値を取るかは事前にはわからないのですが、その値の確率が与えられているとき、その変数 $X$ は確率変数です。サイコロを振って出た目を観察する試行においてその結果を変数 $X$ とします。 $X$ の根元事象は $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$ で、その全体 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ は標本空間です。それぞれの根元事象には確率が割り当てられます。したがって、この変数 $X$ は確率変数です。この際にサイコロの出る目はとびとびの値でした。このような確率変数を離散型確率変数といいます。サイコロの生成する乱数は1から6までの整数です。

### 模型(モデル)

- 試行
  - サイコロを振る
- 根元事象
  - $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$
- 事象
  - $A = \{1, 3, 5\}$ など
- 標本空間(全事象)
  - $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- 確率
  - $\{P(A) = 3/6 = 1/2\}$

図 2.10 統計モデル：サイコロの例

通常のサイコロは6つの4角形からなる6面体です。それぞれの面は正方形で、サイコロは立方体でもあります。6面体ダイズと呼ばれたりします。この面の数を増やしていくと、それを多面体ダイズといいます。たとえ



ば、12面ダイズは1から12までの乱数を等確率で生成します。それぞれの面の確率は $1/12$ となります。



ます。さらに面の数を増やしていき120面体とするとそれぞれの面の出る確率は $1/120$ となります。面の数を無限大に増やすとそれぞれの面の出る確率はゼロになってしまいます。

確率変数は

- 離散型確率変数
  - とびとびの値をとる確率変数
- 連続型確率変数
  - 連続的な値(実数値)をとる確率変数

に分類されます。

今後、**確率変数に大文字( $X, Y$ など)を使い、実現値に小文字( $x, y$ など)を用います。**

## 2.2.2. 独立な確率変数

一方の事象の起こる確率が、もう一方の事象の起こる確率に影響されないとき、それぞれの事象は独立であるといえます。これは事象 $A, B$ について $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ が成り立つということです。 $\cap$ は $A$ と $B$ が同時に起こることを表しています。たとえば、確率変数 $X$ と $Y$ が独立であると、その分散では $\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y)$ が成り立ちます。 $X$ と $Y$ が独立でなければ $\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$ となります。

独立と無相関は混同されやすいのですが、独立は関係のことであり、無相関は平均的な性質のことです。したがって、独立ならば無相関になりますが、無相関であれば独立というわけではありません。

例題 2.8: サイコロをふる試行が独立だとします。サイコロを2回投げたときに事象 $A, B$ を  $A \in \{1,2,3\}$ 、 $B \in \{3,4,5\}$ とすると2回とも $A \cap B$ となる確率はいくらでしょうか？

1回目の試行の結果は1,2,3,4,5,6のどれかです。したがってそれぞれの試行が独立であれば、その確率はそれぞれ1/6です。1が出れば事象 $A$ です。3が出れば $A \cap B$ です。6が出れば $\emptyset$ となります。1,2,3,4,5,6のどれかが出た場合、それぞれの試行は左から $A, A, A \cap B, B, B, \emptyset$ となります。したがって $A \cap B$ の確率は1/6です。つぎに1回目の試行が3として、2回目の試行で出る目を考えてみます。これは1,2,3,4,5,6のどれかです。したがって、2回目に $A \cap B$ が出る確率も1/6です。したがって、 $A \cap B$ が2回続けて出る確率は $1/6 \cdot 1/6 = 1/36$ となります。これをさらに確かめてみましょう。すべての組み合わせを書いてみます。(1回目の結果, 2回目の結果)とします。

( $A, A$ ), ( $A, A$ ), ( $A, A \cap B$ ), ( $A, B$ ), ( $A, B$ ), ( $A, \emptyset$ )

( $A, A$ ), ( $A, A$ ), ( $A, A \cap B$ ), ( $A, B$ ), ( $A, B$ ), ( $A, \emptyset$ )

( $A \cap B, A$ ), ( $A \cap B, A$ ), ( $A \cap B, A \cap B$ ), ( $A \cap B, B$ ), ( $A \cap B, B$ ), ( $A \cap B, \emptyset$ )

( $B, A$ ), ( $B, A$ ), ( $B, A \cap B$ ), ( $B, B$ ), ( $B, B$ ), ( $B, \emptyset$ )

( $B, A$ ), ( $B, A$ ), ( $B, A \cap B$ ), ( $B, B$ ), ( $B, B$ ), ( $B, \emptyset$ )

( $\emptyset, A$ ), ( $\emptyset, A$ ), ( $\emptyset, A \cap B$ ), ( $\emptyset, B$ ), ( $\emptyset, B$ ), ( $\emptyset, \emptyset$ )

すべてで36組あります。この中で( $A \cap B, A \cap B$ )となっているのは1つなのでその確率は1/36です。

## 2.3. 確率分布

確率変数のとりえる値とそれらの確率との対応を示したものが確率分布です。このような分布は、実際には無数にあります。しかし、それらをいくつかの形に分類すると考えやすくなります。

### 2.3.1 主な離散型確率分布

離散型確率変数の作る分布を離散型確率分布といいます。

#### A) 離散一様分布

確率変数が離散値 $X = 1, 2, 3, \dots, N$ で、それぞれが一様に同じ確率をもつとき、それらは離散一様分布にしたがうといいます。その確率は

$$P(X = x) = \frac{1}{N}, x = 1, 2, 3, \dots, N$$

となります。サイコロの目では $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ですから確率は $1/6 = 0.167$  となります。

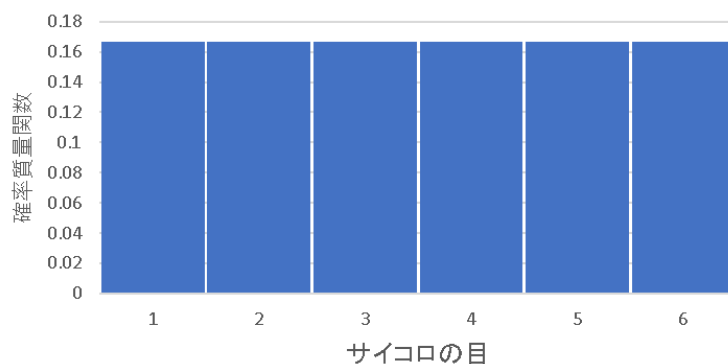


図 2.11 離散一様分布 (例題 3.5)

すべての事象の確率を足すと $1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1$ になります。

## B) ベルヌーイ分布

サイコロを投げたとき、その出る目を偶数と奇数に分けることができます。このような2値で表される事象が起こる行為をベルヌーイ試行といいます。この場合に、確率 $p$ で奇数が出て、確率 $1 - p$ で偶数が出ます。その分布はベルヌーイ分布となります。結果が起こる確率は、一定かつ独立である必要があります。

[表,裏]、[1,0]、[上がる,下がる]など試行の結果が2値になるものはベルヌーイ試行です。

[1,0]のベルヌーイ分布の確率分布は

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p$$

で与えられます。平均は $p$ 、分散は $p(1 - p)$ となります。サイコロの目の偶数、奇数がそれぞれ0.6と0.4とするとベルヌーイ分布は

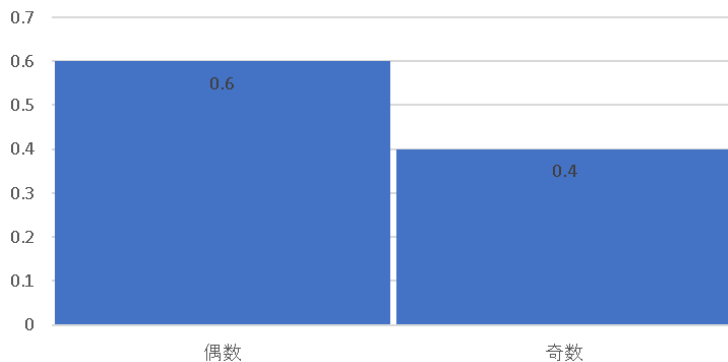


図 2.12 ベルヌーイ分布(練習問題 2.8)

となります。全ての確率を足すと $0.6 + 0.4 = 1$ になります。

ベルヌーイ分布にしたがう事象をくり返すと2項分布になります。

### C) 二項分布

サイコロの出る目を偶数と奇数に分ける場合を考えてみましょう。

サイコロを一回投げたときの結果は、つぎのようになります。奇数と偶数が出る確率をそれぞれ $p$ と $1-p$ とします。赤●が偶数、青●が奇数とします。まず一番下の赤●と、青●に到達する経路の数を数えます。

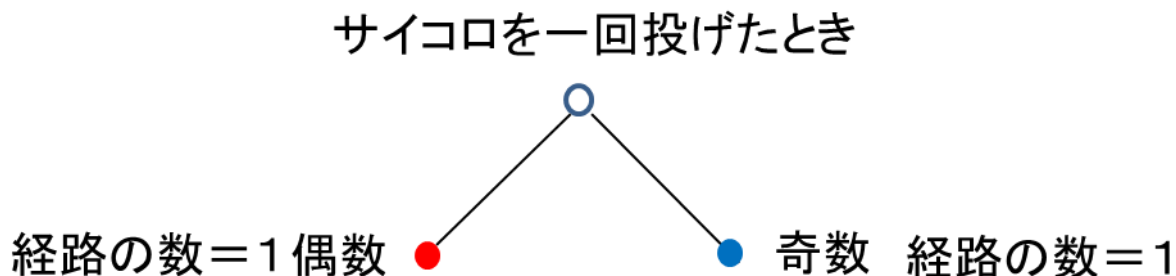


図 2.13 2項分布

それぞれ1です。○と赤●と、○と青●を結ぶ線が経路です。

つぎに再度サイコロを投げてみましょう。まず、一回目の結果が偶数の場合を考えます。その結果は

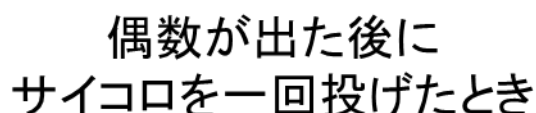


図 2.14 2項分布

となります。赤●から赤●と赤●から青●の2つの可能性があります。赤●と、青●に到達する経路の数は1ずつです。

つぎに一回目の結果が奇数の場合を考えます。

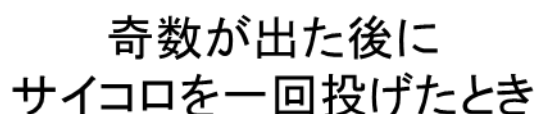


図 2.15 2項分布

となります。青●から赤●と青●から青●の2つの可能性があります。赤●と、青●に到達する経路の数は1ずつです。

この2つの分岐を最初のグラフに書き加えます。



## サイコロを二回投げたとき

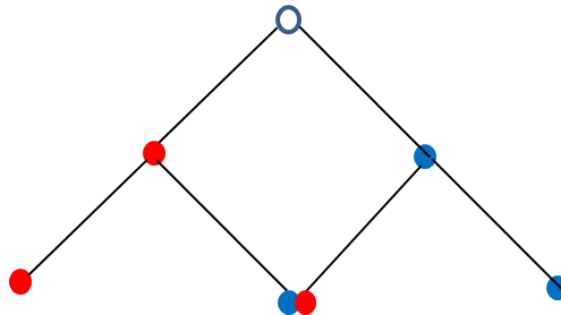


図 2.16 2 項分布

一番下の左赤●に到達する経路：○ → ● → ●

一番下の中央青●に到達する経路：○ → ● → ●

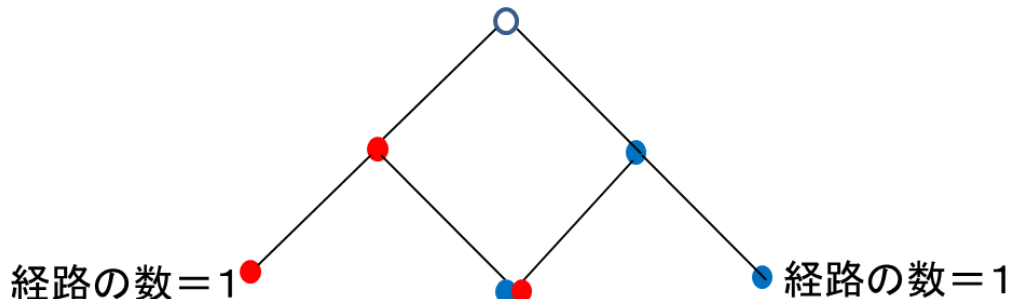
一番下の中央赤●に到達する経路：○ → ● → ●

一番下の左青●に到達する経路：○ → ● → ●

それぞれに至る経路は1つずつです。

しかし、○ → ● → ●と○ → ● → ●は出る順番は違いますが、赤丸と青丸の数は同じですので、同じと考えたと経路の数は2つです。

それぞれに到達する経路の数を数えます。



経路の数=2

図 2.17 2 項分布

つぎに確率についても同様に考えてみましょう。同じグラフが使えます。サイコロを一回投げたときの結果はつぎのようになります。

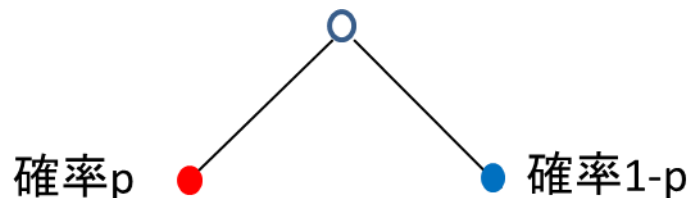


図 2.18 2 項分布：確率

サイコロを二回投げたときの結果はつぎのようになります。

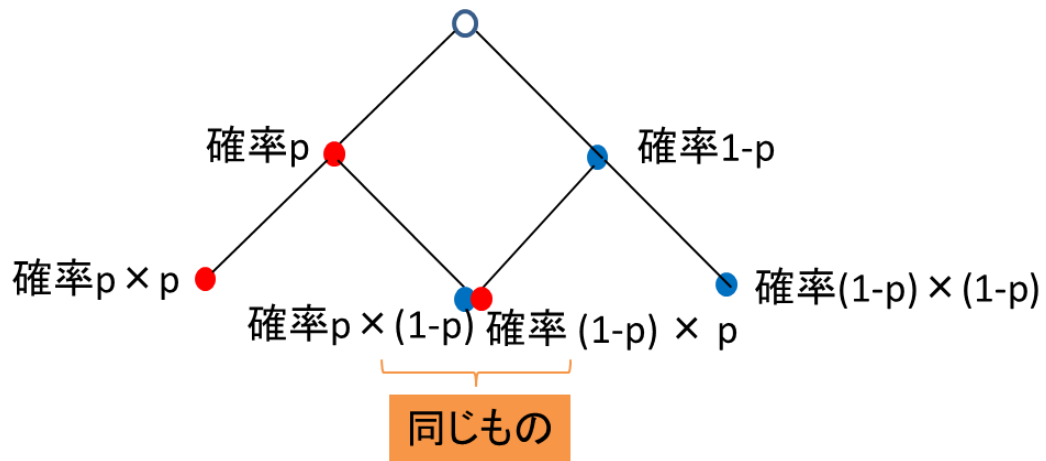


図 2.19 2 項分布：確率

サイコロを一回投げると

偶数の出る確率は

経路の数×確率 $p$

奇数が出る確率は

経路の数×確率 $1-p$

となります。

サイコロを二回投げると

偶数→偶数と出る確率は

経路の数×確率 $p \times p$

偶数→奇数または奇数→偶数と出る確率は

経路の数×確率 $p \times (1-p)$

奇数→奇数と出る確率は

経路の数× $(1-p) \times (1-p)$

となります。 $p = 0.5$ とすると

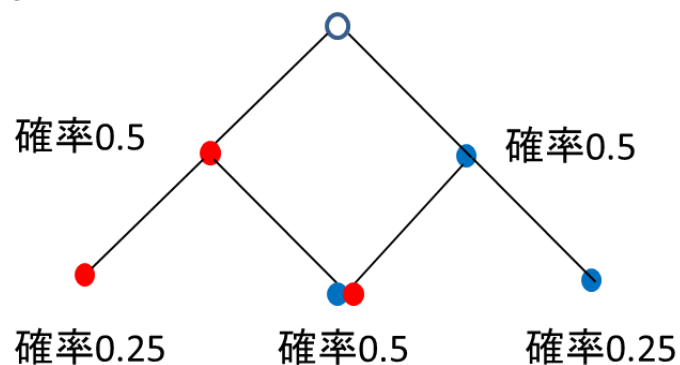


図 2.20 2 項分布：確率

となります。これがサイコロを2回投げたときの二項分布です。

二項分布とは、結果が成功か失敗、裏か表、上昇か下落というような2値で表される試行を $n$ 回行ったときに得られる離散型確率分布です。それぞれの試行は独立でなければなりません。 $p$ と $n$ について確率質量関

数は

$$\begin{aligned} P(X = x) &= {}_n C_x p^x (1 - p)^{(n-x)} \\ &= \frac{n!}{k! (n - x)!} p^x (1 - p)^{(n-x)} \end{aligned}$$

となります。ここで、 ${}_n C_x$ は $n$ 個から $k$ 個を選ぶ組み合わせの数です。2項係数を表しています。 $p$ は成功確率です。これを反復試行の確率ともいいます。

二項分布は統計学でも非常に重要な分布の1つです。この係数を $n$ 枚の札の並べ方として考えてみましょう。最初の札は $n$ 枚の札の中から一枚を選ぶので、その選び方は $n$ 通りあります。つぎに2番目の札は一枚をすでに使ってしまったので $n - 1$ 枚の札の中から一枚を選ぶので、その選び方は $n - 1$ 通りあります。3番目の札も同様に考えるとその選び方は $n - 2$ 通りあります。このように続けていくと最後には一枚の札が残りその選び方は1通りになります。つまり札の並べ方は $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ 通りとなります。これを $n!$ で表します。札は赤と青に色付けされていて、その並べ方を数えるとなると、この数え方では赤と青の札の並べ方を重複して数えてしまっています。そこで赤の札を $k$ 枚とすると青の札は $n - k$ 枚となります。赤の $k$ 枚分の札と青の $n - k$ 枚分の札は重複して数えてしまっています。その場合の数はそれぞれ $k!$ 通りと $(n - k)!$ 通りです。これらを調整すると赤と青の札の並べ方は

$${}_n C_x = \frac{n!}{k! (n - x)!}$$

通りとなります。

$n$ 回の試行( $n \geq 0$ )の二項分布では平均 $E(X)$ は $np$ 、分散 $\text{var}(X)$ は $np(1 - p)$ となります。 $n = 1$ のとき、2項分布はベルヌーイ分布になります。

例題 2.9  $n = 5$ で $p = 0.5$ の場合の分布を計算してみましょう。

$$x = 0, {}_5 C_0 = 5!/0!/(5 - 0)! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 / (0!)/(1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5) = 1$$

$$x = 1, {}_5 C_1 = 5!/1!/(5 - 1)! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 / (1!)/(1 \times 2 \times 3 \times 4) = 5$$

$$x = 2, {}_5 C_2 = 5!/2!/(5 - 2)! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 / (1 \times 2)/(1 \times 2 \times 3) = 10$$

$$x = 3, {}_5 C_3 = 5!/3!/(5 - 3)! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 / (1 \times 2 \times 3)/(1 \times 2) = 10$$

$$x = 4, {}_5 C_4 = 5!/4!/(5 - 4)! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 / (1 \times 2 \times 3 \times 4)/1 = 5$$

$$x = 5, {}_5 C_5 = 5!/5!/(5 - 5)! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 / (1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5)/0! = 1$$

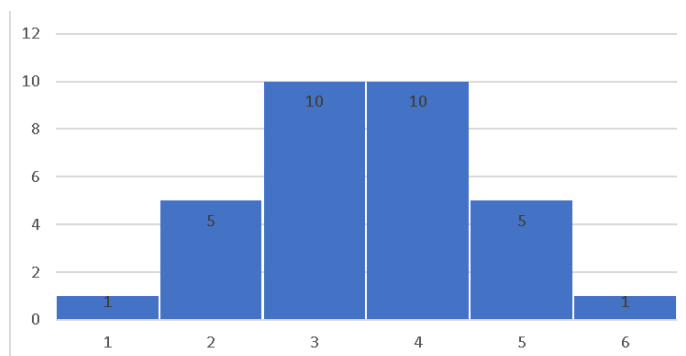


図 2.21 2項分布：  $p=0.5, n=5$

例題 2.10: 二項分布を試行回数を1000 回に固定して、成功確率を0.1から0.9まで変化させてグラフにしてその変化の度合いを確認してみましょう。

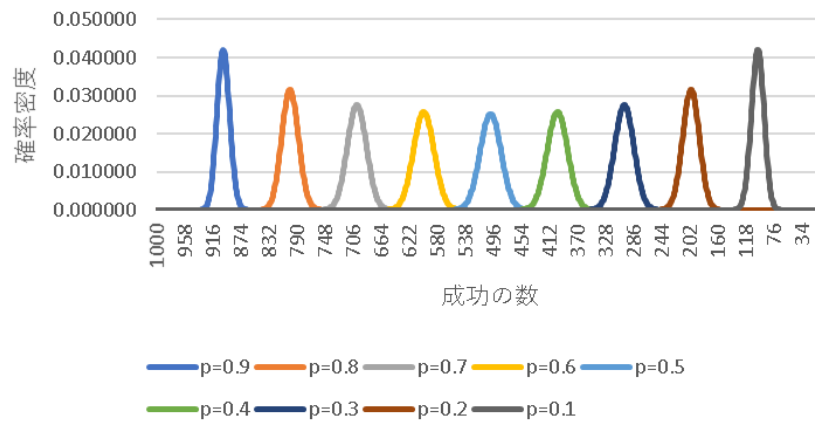


図 2.22 2 項分布：p=0.1~0.9, 試行回数=1000

$p = 0.9$ のときと $p = 0.1$ のときの分布の幅が狭く、 $p = 0.5$ のときの分布の幅が一番広がっています。これは分散が $np(1-p)$ であることから明確です。

### 2.3.2. 主な連続型確率分布

確率変数 $X$ が連続な値をとるとき、その分布は連続型確率分布となります。

#### A) 連続一様分布

確率変数の最小値と最大値を $a, b$ としたときに、この区間で確率変数の生起する確率は等しいので、連続一様分布の確率密度関数は

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

となります。図 2.23 は連続一様分布の様子です。

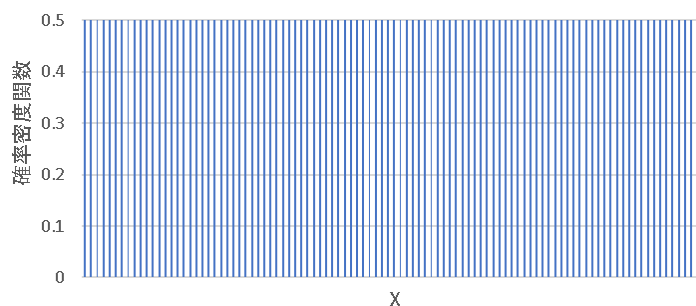


図 2.23 一様分布(練習問題 2.11)

多面体のサイコロで説明したように、面の数を無限にすると、出る面の確率はゼロになってしまいます。したがって、連続型の確率分布では離散型のように、 $f(X=x)$ のような書き方をしません。図 2.23 の確率変数の最大値は $b$ 、最小値は $a$ で、確率変数の生起する確率は一定ですから、確率の定義から青い部分の面積を 1 とすると、 $f(x) \cdot (b-a) = 1$ となり、 $f(x) = 1/(b-a)$ が得られます。これを $x$ の確率密度関数とします。

## B) 正規分布

平均に対して分布の形が対象で釣鐘の型をしていて、確率変数  $X$  がとびとびの値ではなく連続となる確率分布が正規分布です。正規分布では、分散は山のすその広がり具合を表し、平均は分布の中心を示しています。正規分布の確率密度関数は平均と分散の関数として表されます。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right]$$

ここで  $\mu$  は平均を、 $\sigma^2$  は分散を表します。平均ゼロ、分散 1 のとき標準正規分布といいます。

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{z^2}{2} \right)$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

とすると、 $Z$  は標準正規分布 ( $N(0,1)$ ) にしたがいいます。

例題 2.11：標準正規分布を描いてみましょう。また、2 項分布が正規分布で近似できる自由度はどの程度か図で確かめてみましょう。

標準正規分布は図 2.24 を参照してください。

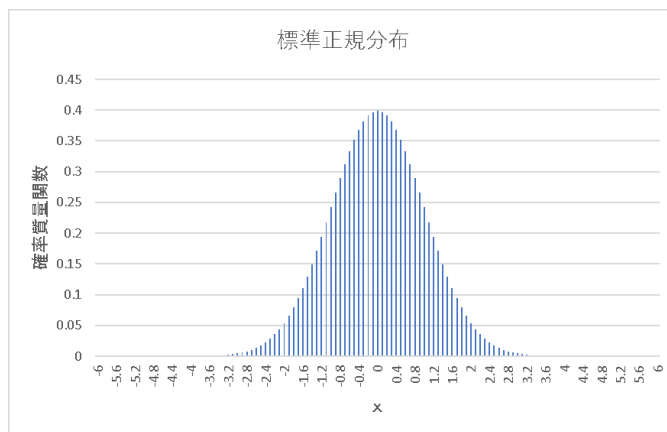


図 2.24 標準正規分布

2 項分布が正規分布で近似できる自由度はどの程度かは図 2.25 を参照してください。

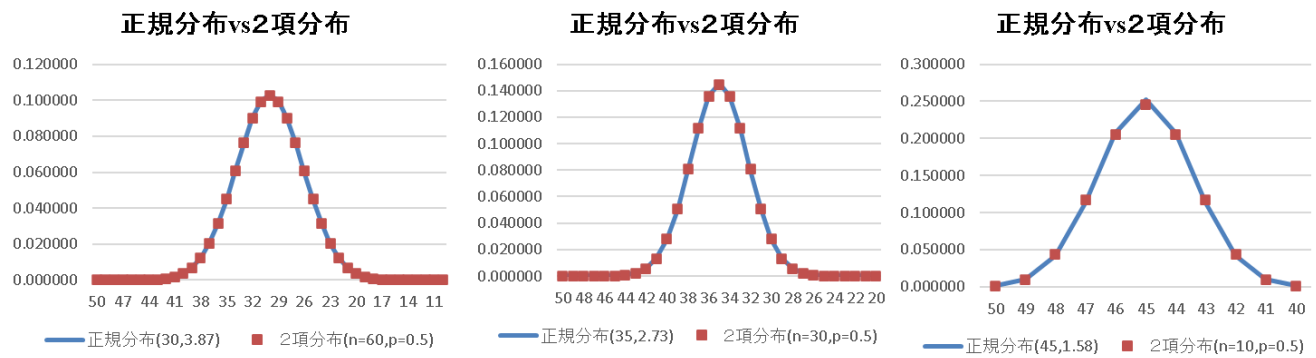


図 2.25 標準正規分布と二項分布

例題 2.12: 平均を $-10$ から $10$ まで変化させ、分散を $1$ に固定して、正規分布を描いてみましょう。また、平均を $0$ に固定して、分散を $0.1$ から $100$ まで変化させ正規分布を描いてみましょう。

分散を固定した正規分布は図 2.26 を、平均を固定した正規分布は図 2.27 を参照してください。

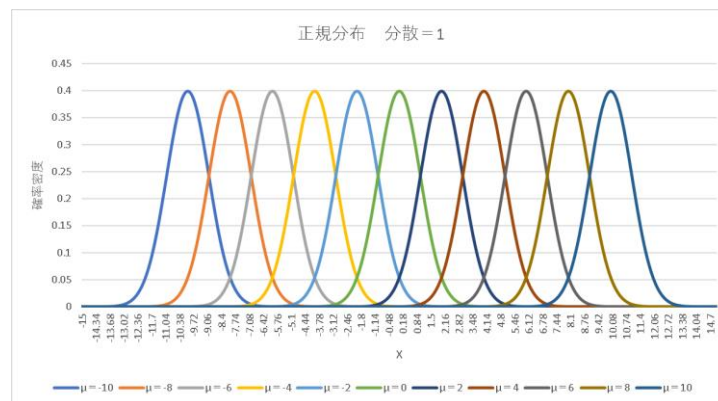


図 2.26 正規分布：平均を変化

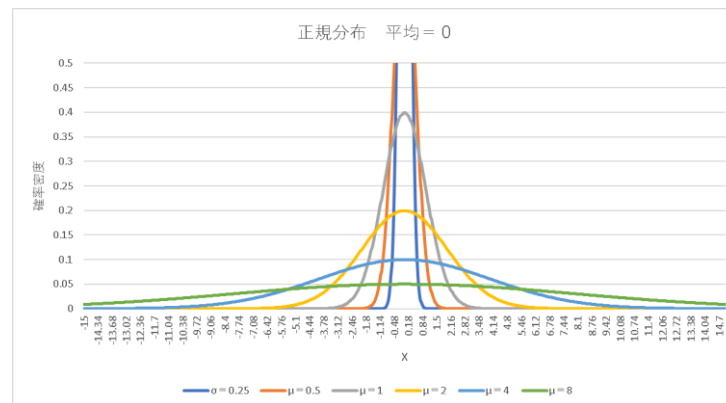


図 2.27 正規分布：分散を変化

## 2.4. 期待値

離散値 $x_1, x_2, x_3, \dots$ の集合から得られる確率変数 $X$ の期待値は、

$$E(x) = \sum_{j=0}^J x_j P(X = x_j)$$

で表されます。 $j$ は根元事象の番号です。 $x_j$ は根元事象の値で、 $f(x_j)$ は $x_j$ の確率を表します。

離散型確率分布にしたがう確率変数について考えてみましょう。 $x_j$ の相対度数を $N_j/N$ 、その確率を $p_j$ とすると、その平均は

$$\bar{x}_l = \sum_{j=1}^J x_j \frac{N_j}{N}$$

で、期待値は

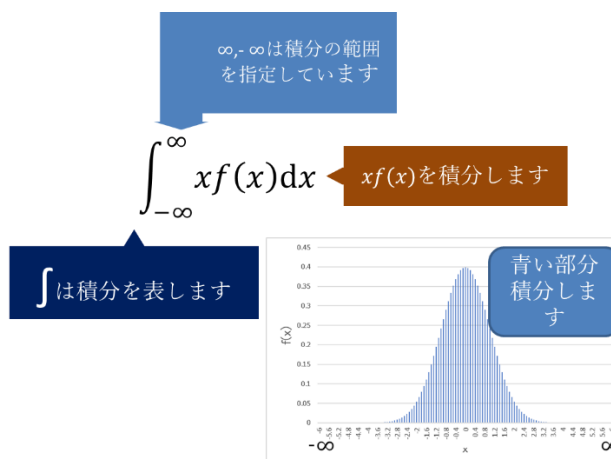
$$E(X) = \sum_{j=1}^J x_j p_j$$

です。

連続型の場合は、

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

として定義されます。 $f$ は確率密度関数です。





期待値には「期待される」値という意味もあり、予測に近い意味の場合もあります。また、期待値は推測統計で重要な役割を担います。宝くじを買うときも、株式に投資するときも、売り上げを予測するときも期待値を計算しているのです。

練習問題 2.1: エクセルを用いて乱数を発生させ、頻度図を描きましょう。乱数は一様分布、ベルヌーイ分布、2 項分布、正規分布から発生させてみましょう。その際にデータ数を  $n = 10, 500, 1599$  と変化させてみましょう。

練習問題 2.2: 化学成分  $I$  について評価別分布を作成してみましょう。

練習問題 2.3: 赤ワインデータの 10 段階評価の標本空間と根元事象を示してみましょう。また、その違いを説明して見ましょう。標本空間と根元事象の概念を使って統計分析ができる条件は何でしょうか？

練習問題 2.4: トランプの標本空間はなんでしょうか？

練習問題 2.5: 赤ワインデータについてどれが確率変数であるかを考察してみましょう。

練習問題 2.6:  $A$  と  $B$  という事象があって、それが独立である場合と相関のない場合の違いについて説明してみましょう。

練習問題 2.7: 上限を 2, 下限を  $-2$  として、連続一様分布を図で描いてみましょう。

練習問題 2.8: 一様分布、正規分布についてバラツキとは何かについて考察してみましょう。

練習問題 2.9: ベルヌーイ分布の例をあげてみましょう。

練習問題 2.10: 離散確率データの確率については理解しやすいです。(頻度 ÷ 頻度の総数) で得られます。連続確率変数の場合には分母の頻度の総数は無限になってしまいます。そう考えると確率はゼロになってしまいます。正しいでしょうか？