金融財務研究会　セミナー

時系列データ分析・シミュレーション入門

（エクセル編）

2021 年 02 月 05 日

13:30～16:30

講師：森谷博之

内容：

1. 乱数の性質
2. 乱数を使ったシミュレーション
3. モンテカルロシミュレーションをつかった精度の向上
4. オプションプライシングへの応用
5. バリューアットリスクへの応用
6. 複雑なペイオフをもつ金融商品開発への応用

1. 乱数の性質

解析的に解けない問題に解を与える方法の１つとしてモンテカルロシミュレーションがあります。窓口に並ぶ顧客の行動のシミュレーション、生産過程や交通量のシミュレーションなどの他に、経済時系列の分析にも用いられます。

サイコロを投げるとき、硬貨を投げるときなどのように、その結果が偶然に左右されるような行為を試行といいます。そして、その結果の集合を事象、それ以上に分けられない事象を根元事象、すべての根元事象を標本空間、このような行為から得られる事象の起こりやすさを確率といいます。

- 試行
試行とは、そのそれぞれの結果が偶然に左右される観測、または実験のことです。
- 根元事象
試行によって起こる結果のことです。
- 事象
根元事象の集合のことです。
- 標本空間
すべての根元事象の集合のことです。
- 確率
事象の起こりやすさのことです。

事象

- **試行**
  - 試行とは、そのそれぞれの結果が偶然に左右される観測、または実験のことです。
- **根元事象**
  - 試行によって起こる個々の結果のことです。
- **事象**
  - 根元事象の集合のことです。
- **標本空間**
  - すべての根元事象の集合のことです。
- **確率**
  - 事象の起こりやすさのことです。

１．　一般に確率は０以上、１以下です。

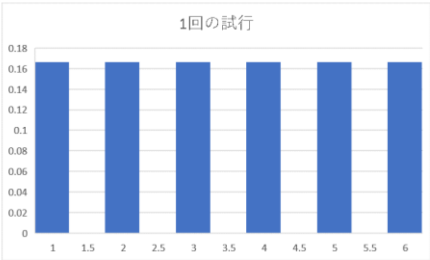
２．　生起する可能性が全くない時の確率はゼロです。

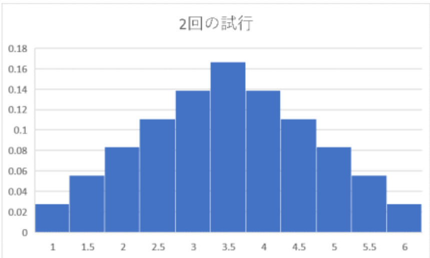
３．　必ず起こる事象の確率は１です。

4．　全ての事象の確率の和は１です。

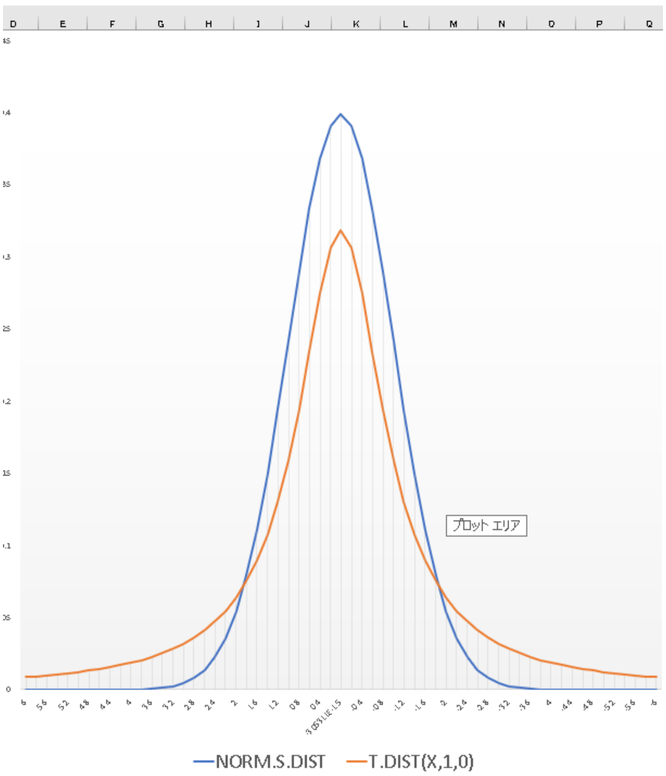
事象を実数値で表現するとき、この値を取る変数を確率変数といいます。この確率変数が取りうるすべての値に対して確率を対応させたものを確率分布といいます。現実の分布は無数にありますが、いくつかの典型的な形に置き換えることができます。それを離散型の分布と連続型の分布に分けることができます。

＊ 離散型の分布：確率関数





＊ 連続型の分布：確率密度関数



確率変数は、変数Xがどのような値を取るかは事前には予測不可能なのですが、その値の確率が与えられるとき、その変数Xを確率変数といいます。確率変数の特徴は、期待値、分散、尖度、歪度などの要約統計量で表現されます。

期待値：分布の重心を表します。

分散：期待値からどれだけ散らばっているかを表現します。

歪度：分布の散らばりの非対称性を表します。

尖度：分布のとがり具合を表します。

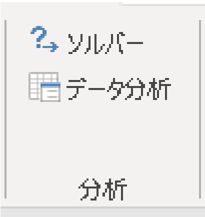
乱数の種類

- 真の乱数：実現できない
- 疑似乱数：
  - 線形合同法：$X_{n+1}=aX_n+c$をMで割ったあまり
  - M系列乱数：フィードバックレジスター法
    - メルセンヌツイスター(早くて周期が長い)
- 準乱数：超一様分布列(次元が多いと生成が難しい)
- 物理乱数：自然現象を利用

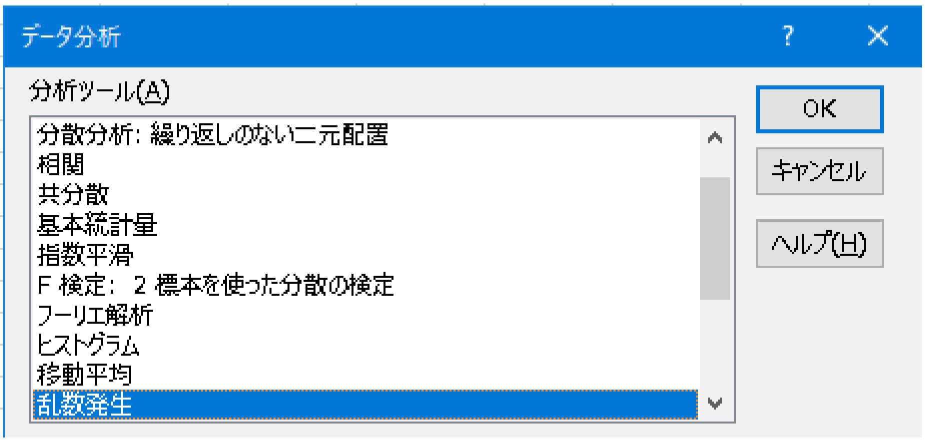
エクセルによる乱数生成

一様分布は離散型と連続型がありますが、モンテカルロシミュレーションでは、まず一様乱数を生成してから目的とするシミュレーションにあった分布の乱数を

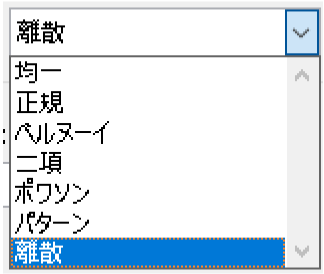
発生するという役割をになっています。しかし、エクセルではこのような難し問題を考えることなく”データ分析”メニュー



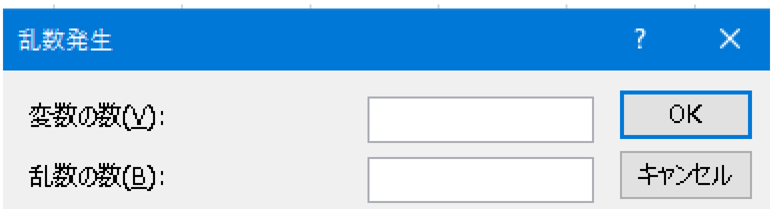
から乱数発生を選択することで



7つの乱数を発生させることができます。



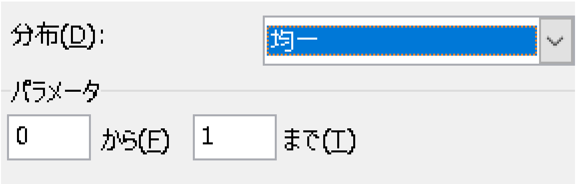
どの乱数でもまず



変数の数と乱数の数を指定します。また、’パターン’と’離散’以外はシードを指定することができます。

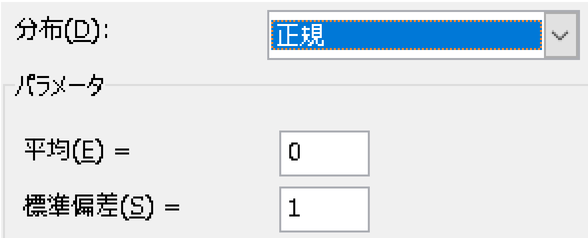
シードを指定することで、同じ乱数を生成できます。

‘均一’は一様分布を発生します。



パラメータとして発生させる乱数の範囲を選択できます。

‘正規’は正規分布を発生します。



パラメータとして平均と標準偏差を指定します。その他に

- ベルヌーイ分布
- ２項分布
- ポアソン分布
- パターン分布：完全に周期的に繰り返す数列を生成
- 離散分布：ユーザー定義の確率変数

を発生させることができます。

またエクセルのシート上でエクセル関数を用いれば rand()を利用して、

- CHISQ.INV
- BETA.INV
- F.INV
- GAMMA.INV
- LOGNORM.INV

- T.INV

関数から乱数を発生させることができます。

RAND 関数のアルゴリズムと精度

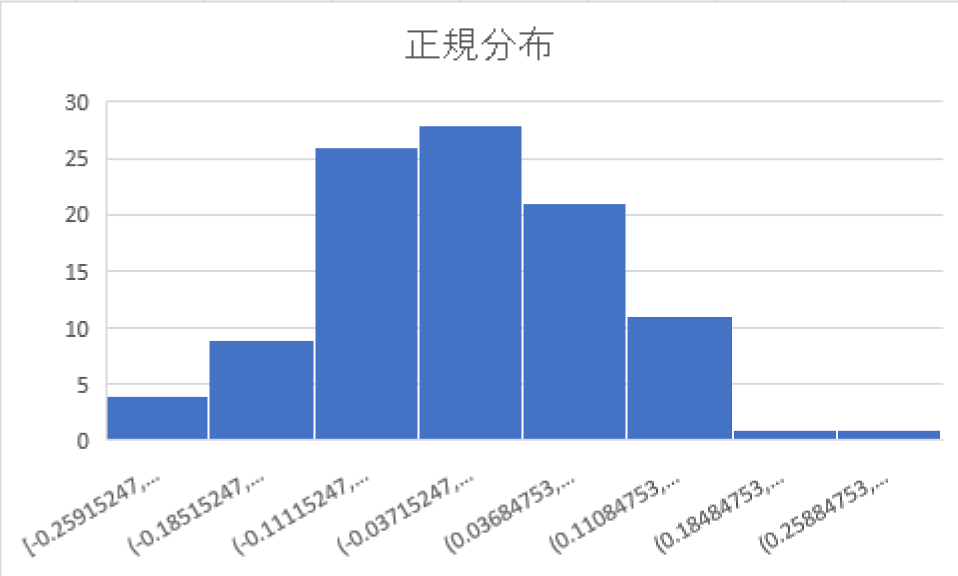
エクセル 2010 より、エクセルはメルセンヌツイスターアルゴリズム(MT19937)を乱数発生に使っています。これは Wichman & Hill アルゴリズムよりも優れています。

参考：https://support.microsoft.com/en-us/office/rand-function-4cbfa695-8869-4788-8d90-021ea9f5be73?ui=en-us&rs=en-us&ad=us

演習

エクセル関数を用いてさまざまな乱数を生成してヒストグラムを描いてみましょう。rand.xlsx

	A	B
1	平均	0
2	標準偏差	0.09531
3		
4		正規分布
5		−0.03592
6		0.018688
7		−0.05309
8		0.016214
9		0.169475
10		−0.10494
11		0.091888
12		−0.00429
13		−0.02376
14		0.005037
15		−0.12109
16		0.138663
17		0.113251
18		0.12445
19		0.004942
20		0.066791
21		−0.01584
22		−0.02433
23		−0.04209
24		0.086692
25		−0.0204
26		0.007986
27		0.050256
28		−0.19634
29		0.031005
30		−0.01457
31		0.035628
32		0.138628
33		0.047393
34		−0.01412
35		0.048195
36		0.019549
37		−0.01172
38		0.140283
39		0.003901
40		−0.05609
41		0.090266
42		0.017491



NORM.INV 関数

指定した平均と標準偏差に対する正規分布の累積分布関数の逆関数の値を返します。

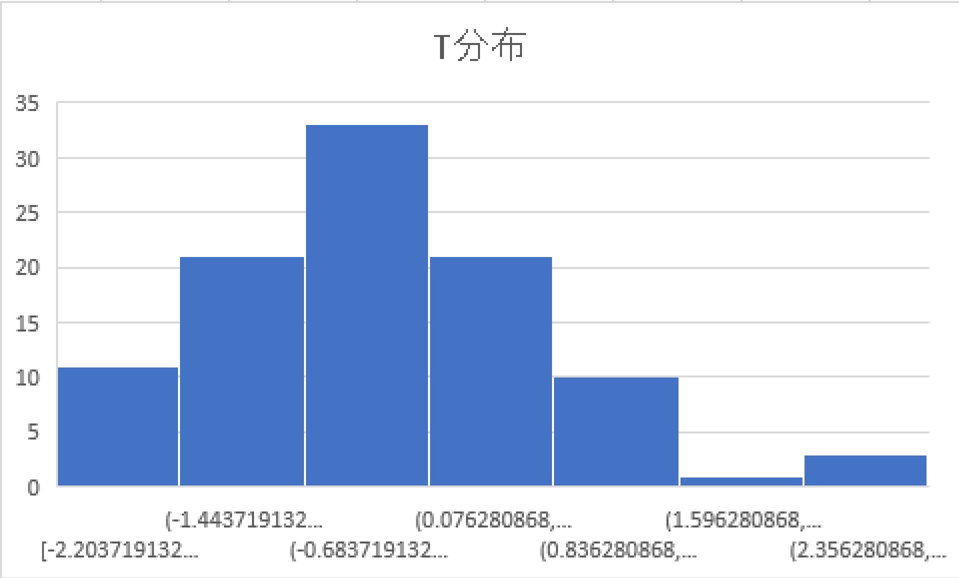
書式

NORM.INV(確率,平均,標準偏差)

NORM.INV 関数の書式には、次の引数があります。

- **確率**　必ず指定します。 正規分布における確率を指定します。
- **平均**　必ず指定します。 対象となる分布の算術平均 (相加平均) を指定します。
- **標準偏差**　必ず指定します。 対象となる分布の標準偏差を指定します。

	A	B
1	自由度	10
2		
3		T分布
4		−1.54245
5		0.251245
6		1.064007
7		−0.79031
8		−0.28182
9		1.147037
10		−1.23857
11		−1.23782
12		0.185325
13		−0.67804
14		−1.24902
15		0.432314
16		−0.45159
17		0.8221
18		−0.6358
19		−0.50578
20		0.219347
21		0.626615
22		−1.18589
23		−0.89032
24		0.472226
25		−0.78568
26		−1.09844
27		−1.70131
28		−0.20896
29		−1.43201
30		−0.13382
31		−0.55121
32		−0.04747
33		1.034746
34		0.659704
35		−1.62898
36		0.16095
37		0.199034
38		−1.83181
39		−1.84184
40		−0.63673



T.INV 関数

ここでは、Microsoft Excel の **T.INV** 関数の書式および使用法について説明します。

スチューデントの t 分布の左側逆関数の値を返します。

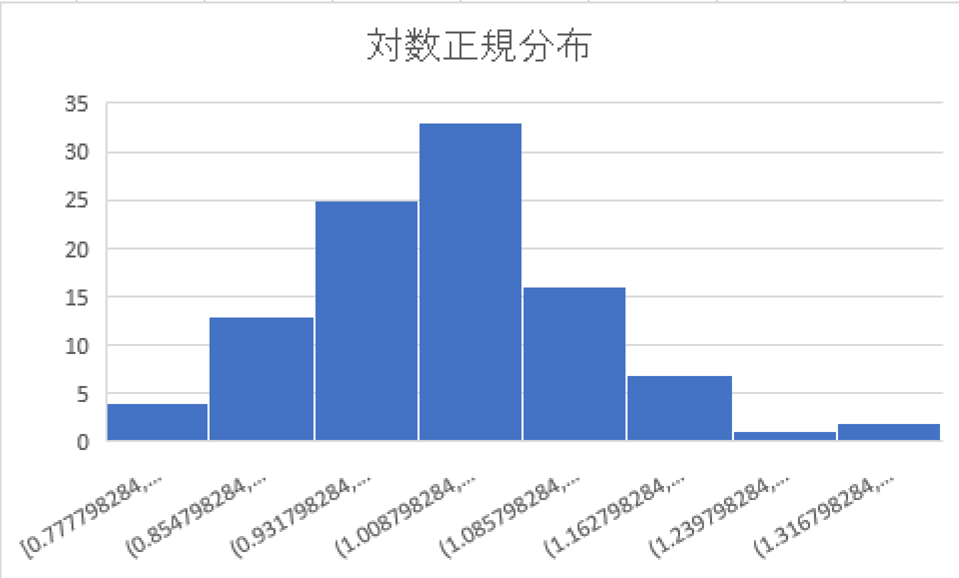
書式

T.INV(確率,自由度)

T.INV 関数の書式には、次の引数があります。

- **確率**　必ず指定します。 スチューデントの t 分布に従う確率を指定します。
- **自由度**　必ず指定します。 分布の自由度を指定します。

	A	B
1	平均	0
2	標準偏差	0.09531
3		
4		対数正規分布
5		0.964892
6		0.777798
7		0.839796
8		1.014875
9		0.965432
10		1.158057
11		1.038688
12		0.976814
13		0.833536
14		0.969854
15		0.989133
16		0.937885
17		0.953152
18		1.093745
19		1.026871
20		0.863653
21		1.344124
22		1.066401
23		1.030733
24		0.927142
25		1.059537
26		1.050404
27		0.972296
28		1.117321
29		1.036216
30		1.043299
31		0.956246
32		0.940022
33		0.942798
34		1.016407
35		0.926552
36		1.1233
37		0.915745
38		0.947722
39		0.973722
40		1.029136
41		1.019248
42		0.99262
43		1.065066
44		0.964918
45		1.241129
46		1.03818



LOGNORM.INV 関数

ここでは、Microsoft Excel の **LOGNORM.INV** 関数の書式および使用法について説明します。

説明

x の対数正規型の累積分布関数の逆関数を返します。ln(x) は、引数平均と標準偏差による正規型分布です。 p = LOGNORM.DIST (x,...) であるとき、LOGNORM.INV(p,...) = x となります。

対数正規型分布は、対数的に変換されたデータを分析する場合に使用します。

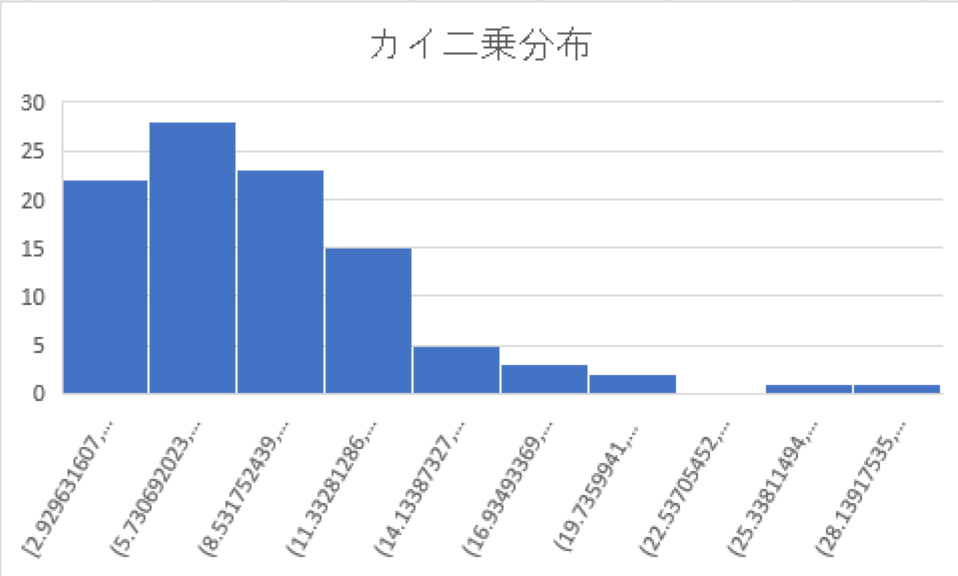
書式

LOGNORM.INV(確率, 平均値, 標準偏差)

LOGNORM.INV 関数の書式には、次の引数があります。

- **確率**　必ず指定します。 対数正規型分布に伴う確率を指定します。
- **平均**　必ず指定します。 ln(x) の平均値を指定します。
- **標準偏差**　必ず指定します。 ln(x) の標準偏差を指定します。

	A	B
1	自由度	10
2		カイ二乗分布
3		6.813975
4		21.05485
5		13.20125
6		8.34707
7		6.566679
8		6.035497
9		3.364088
10		13.16705
11		13.78608
12		12.89195
13		4.355104
14		5.257932
15		9.26096
16		5.739929
17		9.889965
18		5.522588
19		9.165018
20		8.394981
21		19.08858
22		8.544799
23		13.36742
24		14.69419
25		4.601426
26		8.520628
27		10.45427
28		5.924797
29		4.184484
30		6.898889
31		6.686844
32		4.736708
33		7.885354
34		4.493862
35		5.479541
36		9.171711
37		3.485662
38		10.92209
39		6.580216
40		14.62653
41		7.82491
42		11.27697
43		12.51334



CHISQ.INV 関数

ここでは、Microsoft Excel の **CHISQ.INV** 関数の書式および使用法について説明します。

カイ 2 乗分布の左側確率の逆関数の値を返します。

カイ 2 乗分布は、複数の標本を対象に割合の変化を分析する場合などに使用します (たとえば、複数の人が 1 日のうちにテレビを見ている時間の割合を算出するときは、この関数を使用します)。

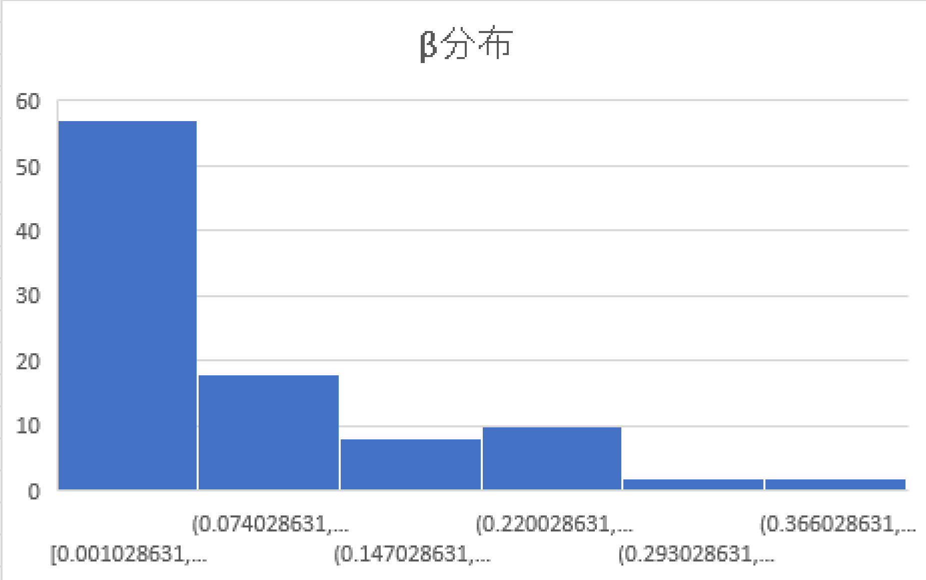
書式

CHISQ.INV(確率,自由度)

CHISQ.INV 関数の書式には、次の引数があります。

- **確率**　必ず指定します。 カイ 2 乗分布における確率を指定します。
- **自由度**　必ず指定します。 自由度を表す数値を指定します。

	A	B
1	α	1
2	β	10
3		β分布
4		0.01629
5		0.254906
6		0.289264
7		0.071976
8		0.130085
9		0.231237
10		0.223005
11		0.179777
12		0.132826
13		0.017664
14		0.01263
15		0.020074
16		0.13415
17		0.008419
18		0.014663
19		0.023294
20		0.009151
21		0.169849
22		0.259793
23		0.038821
24		0.057105
25		0.060388
26		0.097123
27		0.103673
28		0.049625
29		0.045619
30		0.072927
31		0.05095
32		0.006164
33		0.005105
34		0.140195
35		0.088804
36		0.007484
37		0.061289
38		0.428964
39		0.027744
40		0.107285
41		0.177886
42		0.396941
43		0.110834
44		0.270231
45		[illegible]



BETA.INV 関数

β累積確率密度関数 (BETA.DIST) の逆関数の値を返します。

つまり、確率 = BETA.DIST(x,...TRUE) の場合は、BETA.INV(確率,...) = x となります。 β分布は、プロジェクト計画などで、期待される完了時間と公差を指定して予想完了時間をモデル化する場合に使用できます。

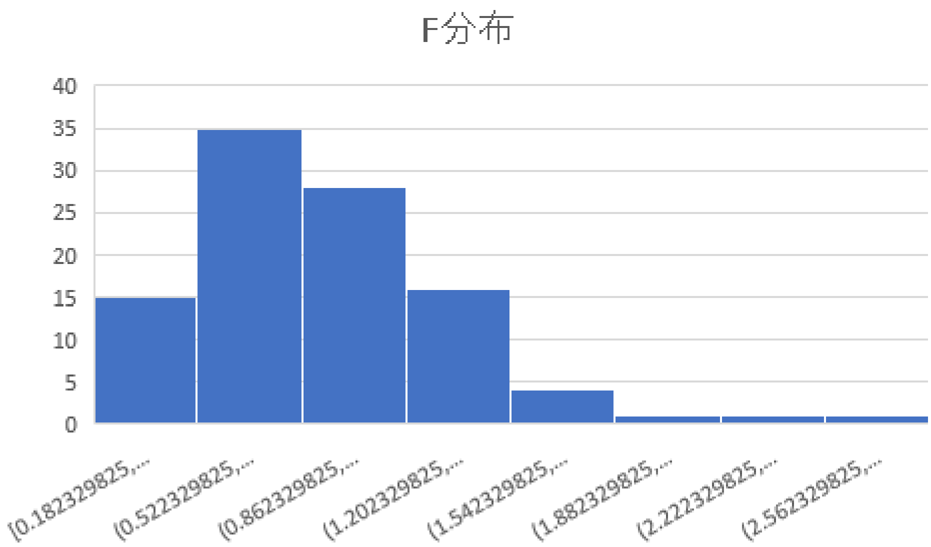
書式

BETA.INV(確率,α,β,[A],[B])

BETA.INV 関数の書式には、次の引数があります。

- **確率**　必ず指定します。 β分布における確率を指定します。
- α　必ず指定します。 確率分布のパラメーターを指定します。
- β　必ず指定します。 確率分布のパラメーターを指定します。
- A　省略可能です。 x の区間の下限を指定します。
- B　省略可能です。 x の区間の上限を指定します。

	A	B
1	自由度1	10
2	自由度2	100
3		
4		1.0903
5		0.68231
6		0.519804
7		0.804921
8		0.67623
9		0.656128
10		0.919862
11		2.19237
12		1.111672
13		0.934977
14		0.945636
15		0.589375
16		0.651345
17		0.618852
18		0.500781
19		0.815218
20		2.897287
21		1.236908
22		0.542551
23		1.145822
24		0.585689
25		0.970836
26		0.643124
27		0.291371
28		1.254562
29		1.158488
30		1.323424
31		2.503782
32		1.311687
33		0.874494
34		1.000642
35		0.954176
36		1.030742
37		0.491906
38		1.51452
39		1.804244
40		1.246871
41		1.048317
42		1.117024
43		0.626578
44		1.420218



F.INV 関数

ここでは、F 関数の書式および使用法について説明し ます。 関数を返します。

説明

F 分布の確率関数の逆関数値を返します。 確率 = F.DIST(x,...) であるとき、F.INV(確率,...) = x という関係が成り立ちます。 F 確率分布は、2 組のデータのばらつきを比較する F 検定で使用されます。 たとえば、米国と日本の労働者の年収を比較し、両国で年収の分布に類似性があるかどうかを分析することができます。

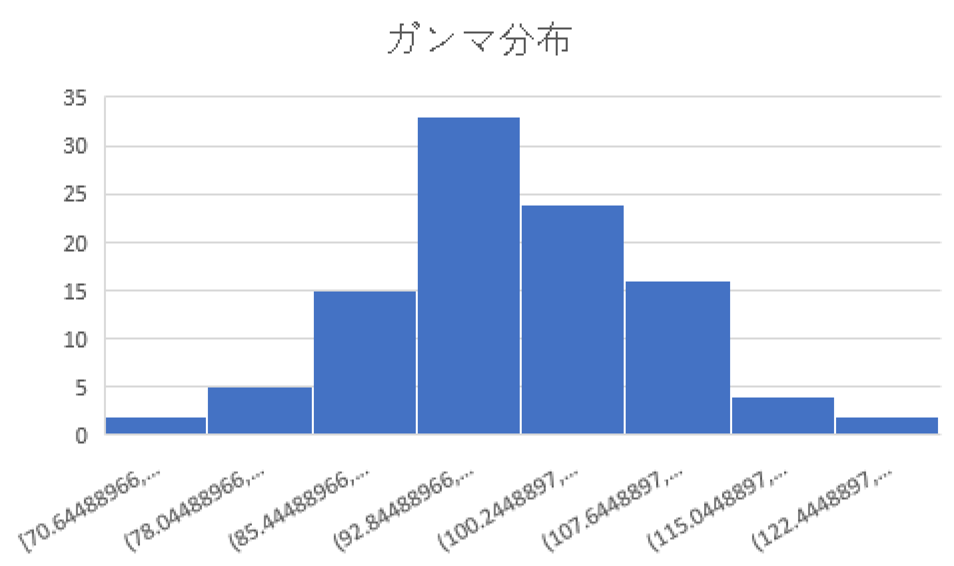
書式

F.INV(確率,自由度 1,自由度 2)

F.INV 関数の書式には、次の引数があります。

- **確率**　必ず指定します。 F 累積分布における確率を指定します。
- **自由度 1**　必ず指定します。 自由度の分子を指定します。
- **自由度 2**　必ず指定します。 自由度の分母を指定します。

	A	B
1	α	100
2	β	1
3		
4		
5		ガンマ分布
6		92.44044
7		113.522
8		96.52144
9		103.9261
10		119.7686
11		104.1789
12		81.96237
13		110.8973
14		91.08037
15		101.8944
16		92.92304
17		97.32969
18		96.50247
19		97.71887
20		114.2121
21		101.6722
22		103.4084
23		122.6242
24		108.8284
25		121.8058
26		112.0304
27		99.69614
28		106.3244
29		117.9608
30		91.89299
31		101.1321
32		94.36985
33		102.0934
34		93.43397
35		93.48333
36		90.61654
37		91.23983
38		92.53852
39		74.66762
40		91.76531
41		107.8078
42		101.6299
43		94.97916
44		97.75507
45		97.65149
46		70.64489
47		93.74478



GAMMA.INV 関数

ここでは、Microsoft Excel の **GAMMA.INV** 関数の書式および使用法について説明します。

ガンマ分布の累積分布関数の逆関数の値を返します。 p = GAMMA.DIST(x,...) の場合、GAMMA.INV(p,...) = x になります。 この関数は、正規分布に従わないと見られる変数を分析する場合に使います。

書式

GAMMA.INV(確率,α,β)

GAMMA.INV 関数の書式には、次の引数があります。

- **確率**　必ず指定します。 ガンマ分布における確率を指定します。
- **α**　必ず指定します。 分布に対するパラメーターを指定します。
- **β**　必ず指定します。 分布に対するパラメーターを指定します。 β= 1 の場合、標準ガンマ分布の値が返されます。

2．乱数を使ったシミュレーション

証券価格の変動をシミュレーション stock_return.xlsx

オプション価格モデルで有名なブラックショールズモデルは幾何ブラウン運動を株価変動の前提条件としています。株価がマイナスにならないように株価の対数の差分が正規分布にしたがいます。

$dS = rSdt + \sigma SdW$

S: 株価

r: 無リスク金利

dS:　株価の微小変化

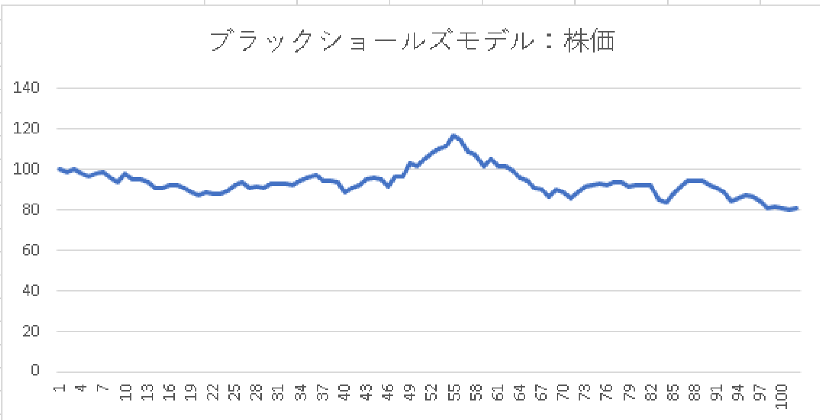
dt:　時刻の微小変化

W:　標準ブラウン運動

dW:　標準ブラウン運動の微小変化

σ:　株価のボラティリティ

	A	B	C	D	E	F	G
1						生成時系列の要約統計量	
2	平均	0	株価の初期値	100		平均(対数価格の差分)	-0.00214
3	標準偏差	0.025298	無リスク金利	0.01		分散(対数差分の分散)	0.000686
4						標準偏差(対数差分の分散)	0.026183
5		正規分布	dS	株価			
6				100			
7		-0.01481	-0.014769259	98.53393	-0.01477		
8		0.014414	0.014454459	99.96852	0.014454		
9		-0.01958	-0.019541081	98.03399	-0.01954		
10		-0.01512	-0.015078401	96.56689	-0.01508		
11		0.016903	0.016943376	98.217	0.016943		
12		0.003047	0.003087099	98.52067	0.003087		
13		-0.02422	-0.024183469	96.16668	-0.02418		
14		-0.02255	-0.022511064	94.02605	-0.02251		
15		0.040971	0.041010536	97.96227	0.041011		
16		-0.0283	-0.02825501	95.23308	-0.02826		
17		-0.00134	-0.001298235	95.10953	-0.0013		
18		-0.01539	-0.015349221	93.66082	-0.01535		
19		-0.02918	-0.02913953	90.97096	-0.02914		
20		-0.00028	-0.000235883	90.94951	-0.00024		
21		0.013484	0.013523666	92.18783	0.013524		
22		0.001356	0.001396347	92.31665	0.001396		
23		-0.01385	-0.01381308	91.05024	-0.01381		



生成される時系列の要約統計量が一定でないことに注目してください。

AR（1）にしたがう時系列データの生成 stock_return.xlsx

単純な時系列の生成ですので、b=1 とするとデータがマイナスになる可能性もあります。

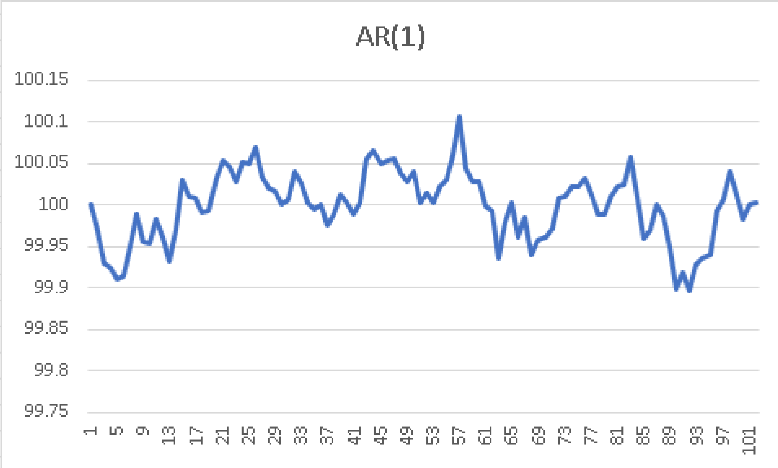
$S_t=a+bS_{t-1}+v_t$

S_t: 時刻 t のデータの値

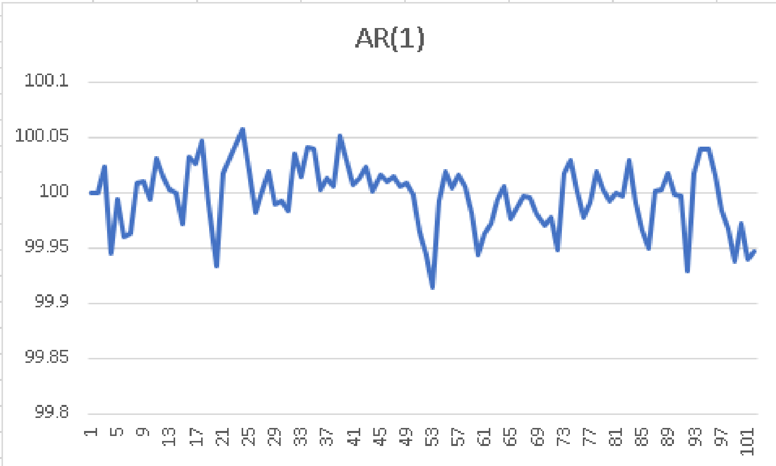
S_{t-1}: 時刻 t-1 のデータの値

vt: 時刻 t の擾乱項

	A	B	C	D	E	F	G
1					生成時系列の要約統計量		
2		擾乱項				価格	価格差
3	平均	0	株価の初期値	100	平均	99.9988	3.21E-05
4	標準偏差	0.025298	a	0.1	分散	0.001706	0.000704
5			b	0.9	標準偏差	0.041307	0.026535
6		正規分布	dS	株価	差分		
7				100			
8		-0.03096	9.969035277	99.96904	-0.03096		
9		-0.04116	9.958836633	99.93097	-0.03807		
10		-0.01256	9.987441671	99.92531	-0.00566		
11		-0.02141	9.978589799	99.91137	-0.01394		
12		-0.00512	9.994880161	99.91511	0.003743		
13		0.025641	10.02564137	99.94924	0.03413		
14		0.035137	10.03513673	99.98946	0.040212		
15		-0.03462	9.965375347	99.95589	-0.03357		
16		-0.00578	9.994223074	99.95452	-0.00137		
17		0.02355	10.02355008	99.98262	0.028098		
18		-0.02203	9.977966855	99.96232	-0.0203		
19		-0.0344	9.965597752	99.93169	-0.03063		
20		0.030333	10.03033313	99.96885	0.037164		
21		0.058517	10.0585174	100.0305	0.061632		
22		-0.01703	9.982969702	100.0104	-0.02008		
23		-0.00058	9.999422963	100.0088	-0.00162		
24		-0.01764	9.982356453	99.99027	-0.01852		



	A	B	C	D	E	F	G
1					生成時系列の要約統計量		
2		擾乱項				価格	価格差
3	平均	0	株価の初期値	100	平均	99.99759	-0.00052
4	標準偏差	0.025298	a	0.5	分散	0.000844	0.000933
5			b	0.5	標準偏差	0.029056	0.030542
6		正規分布	dS	株価	差分		
7				100			
8		0.000516	50.00051564	100.0005	0.000516		
9		0.022497	50.02249719	100.0228	0.022239		
10		-0.06569	49.93431201	99.94569	-0.07707		
11		0.021624	50.02162378	99.99447	0.048779		
12		-0.03675	49.96324861	99.96048	-0.03399		
13		-0.01638	49.98362328	99.96386	0.003382		
14		0.026596	50.02659589	100.0085	0.044664		
15		0.00527	50.00527048	100.0095	0.001006		
16		-0.0111	49.98889546	99.99366	-0.01587		
17		0.033884	50.0338843	100.0307	0.037053		
18		-0.0002	49.99980043	100.0152	-0.01556		
19		-0.00488	49.99512294	100.0027	-0.01246		
20		-0.0011	49.99889819	100.0002	-0.00245		
21		-0.02788	49.97211916	99.97224	-0.02801		
22		0.046605	50.04660544	100.0327	0.060484		
23		0.009755	50.00975453	100.0261	-0.00661		
24		0.033858	50.03385797	100.0469	0.020799		



生成される時系列の要約統計量が一定でないことに注目してください。

３．モンテカルロシミュレーションの精度の向上

- 試行回数の増加：真の乱数の場合には推定誤差の大きさは乱数の発生回数の平方根、シミュレーション回数の平方根に逆比例します。
- 良い乱数の使用：真の乱数は実現できません。疑似乱数を用います。線形合同法とシフトレジスター法があります。シフトレジスター法のメルセンヌツイスターはエクセルの RAND 関数に採用されています。準乱数を使う方法もあります。特許が成立しています。最後の物理乱数は保存しておく必要があります。

https://www.ism.ac.jp/ism_info_j/labo/visit/108-2.html（数理統計研究所）

The Institute of Statistical Mathematics
大学共同利用機関法人　情報・システム研究機構
統計数理研究所

文字サイズ｜小｜中｜太

Research Front Line
No.108

研究室訪問

Research Front Line

パーフェクトな乱数創造を目指す物理乱数発生装置の研究

「私の専攻ですか？乱数です。科学の研究に不可欠なもの。そして、数学者にとって永遠の問い…。」では、乱数（random number）とは何なのか。言葉が意味する絶対的な無作為とは、どのような状態を指すのか。「いかなる規則にも周期性にも拘束されないという意味かな。つまり純粋に乱れた世界ですよ。」

田村さんとの会話は哲学的だ。統数研2階の副所長室と5階の研究室を行き来しながら、刻み込むように単語を重ね、自分の学問の特質を語る。その姿には、古代ギリシアからの「数に憑かれた人」の伝統が折り重なるようだ。

田村　義保

-

信念としての「物理乱数こそ真の乱数」

乱数は社会調査のサンプリングや統計モデルのシミュレーションに「欠くべからざるもの」とされる。それを人為的に作り出すことが、計算科学の重要なテーマだ。偶然に依拠するのではなく、理論に従って作られる乱数の数列。しかし、完全無欠の乱数の状態にたどり着くことが可能なのだろうか。

シミュレーション計算が大規模化する現代においては実用的に周期の長い乱数が要求される。優れた擬似乱数発生法が多く提案されるが、田村さんは「数式を用いて発生させられている以上、真の乱数ということはできない」と一蹴する。そして、「物理乱数こそ真の乱数と呼ぶにふさわしいものである」と指摘する。

その物理乱数を発生させるには、何らかのランダムな物理現象を用いる必要がある。例えば、微小電流を流した時に発生するノイズ（熱雑音）源。生成信号を増幅し、ランダムな電圧変動をミキシングする技法などを用い、無作為なビット列を得る。貴重性は認められるが、「コストが高くつき、まだ気軽に導入できるものではない」といわれることが多い。また、乱数発生器として形状が大きいと、小型製品への応用ができずに市場を広げられない。「小型で低価格」の乱数発生装置の研究成果が喫緊の課題として求められる所以だ。

- 分散減少法(wiki 参照)
  - 対称変量法：乱数に偏りがある場合に、平均値に対して対称な乱数を加えれば真の平均値になります。
  - モーメント照合法：平均値だけではなく、分散も調整します。

分散減少法

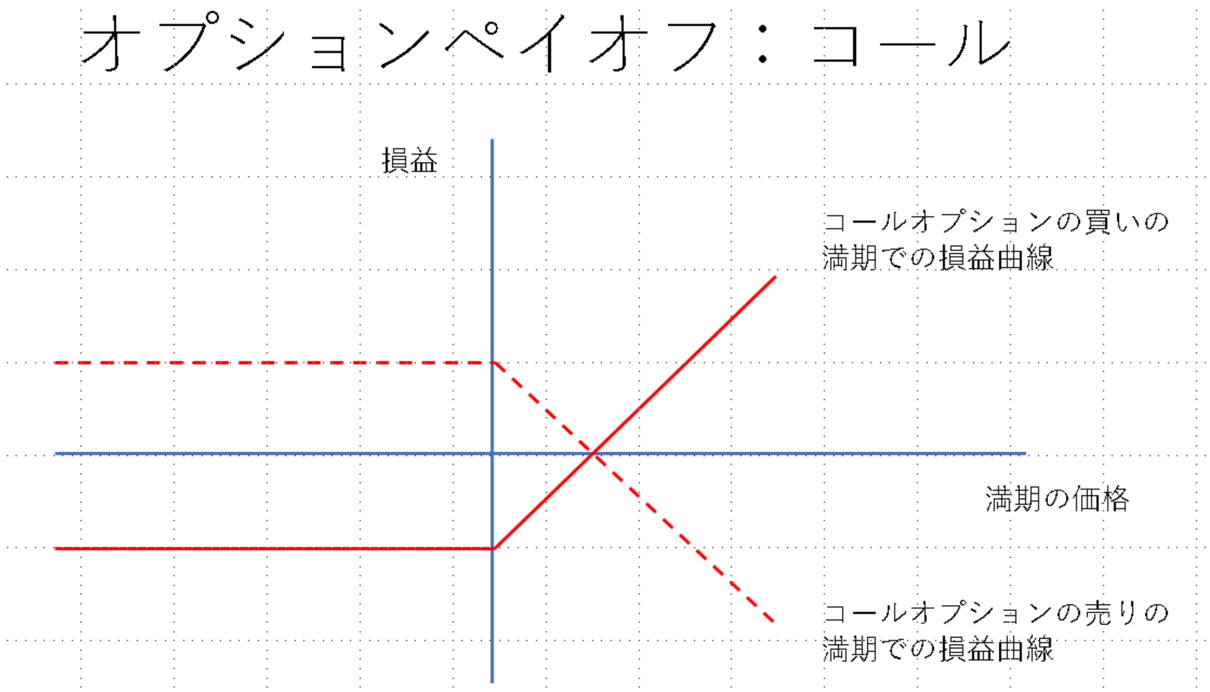
出典: フリー百科事典『ウィキペディア（Wikipedia）』

数学、特にモンテカルロ法の理論における**分散減少法**（ぶんさんげんしょうほう、英: variance reduction）は推定の精度を改善するのに用いられる手法であり、与えられたシミュレーション、計算量（computational effort）に応じて適用し得る[1]。シミュレーションの出力値となる確率変数は、その結果の精度を左右する量である分散と結び付いている。シミュレーションを統計上効果的に、つまり、注目している確率変数の出力がより高い精度・より狭い信頼区間となるようにするために、分散減少法が利用できる場合がある。代表的なものに共通乱数法、対称変量法（英語版）、制御変量法（英語版）、重点サンプリング法（英語版）、層化抽出法がある。ブラックボックスモデルを使ったシミュレーションに対しては、部分空間シミュレーション法（英語版）やラインサンプリング法（英語版）が用いられることもある。これらの項目の下位区分に、様々な特化型の技法が存在する。例えば、粒子輸送シミュレーションでは広範にわたって「ウェイト・ウインドウ法（weight windows）」や「セルインポータンス法（splitting/Russian roulette）」の技法が用いられるが、これらは重点サンプリング法の一形式である。

4. オプションプライシングへの応用

mont_application.xlsx>オプションプレミアム

ヨーロピアンのコールオプションの価格は、現在の原系列の価格、行使価格、ボラティリティ、無リスク金利、満期までの時間を用いてブラックショールズモデルを用いて算出します。オプションの価格はモンテカルロシミュレーションを用いても算出することができます。ここでは満期の時系列を生成して、オプションの価格を算出します。



オプション取引

オプション・プレミアム

買い方と売り方の需給でオプション・プレミアムは決まる。
そのもとになる価値は理論的に**5**つの要素で決まる。

原資産価格

一般的に原資産価格が上昇すればコールが高くなり、プットは安くなる。
逆に原資産価格が下降すればコールは安くなり、プットは高くなる。

権利行使価格

コールもプットもOTMならば権利行使価格に近づくほど高くなる。
逆に権利行使価格から離れるほど低くなる。ITMに入ると逆になる。

満期までの時間

満期までの時間が長ければ、原資産が権利行使価格に達する確率が高くなり、プレミアムは高くなる。

金利・配当(外国金利)

金利が上がればプレミアムは下がり、配当が高ければプレミアムは上がる。

ボラティリティ

ボラティリティが高ければ、プレミアムは高くなる。

ブラック・ショールズ・モデル

一般化

スポット価格	s
行使価格	k
ボラティリティ	σ
資金調達費用	r
配当、外国金利等	q
キャリーコスト	b=r-q
満期・行使日までの期間	T

b=r	ブラック株価オプション
b=r-q	連続配当付き株価オプション
b=0	先物オプション
b=0,r=0	マージン先物オプション
$b=r-r_f$	通貨オプション

ブラック・ショールズ・モデル

$$C(s,k,\sigma,r,b,T)=se^{(b-r)T}N(d_1)-ke^{-rT}N(d_2)$$

$$P(s,k,\sigma,r,b,T)=ke^{-rT}N(-d_2)-se^{(b-r)T}N(-d_1)$$

$$N(z)=z=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

$$d_1=\frac{\log\frac{s}{k}+(b+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

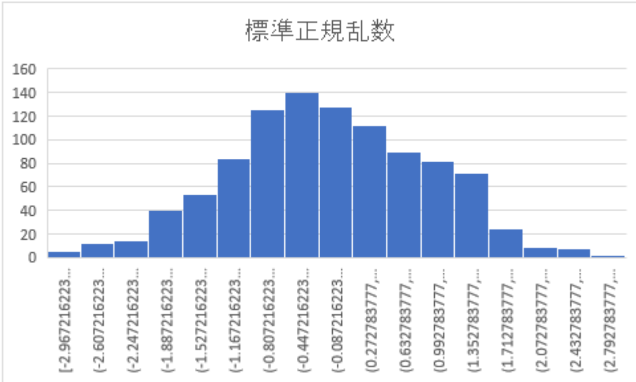
$$d_2=\frac{\log\frac{s}{k}+(b-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}=d_1-\sigma\sqrt{T}$$

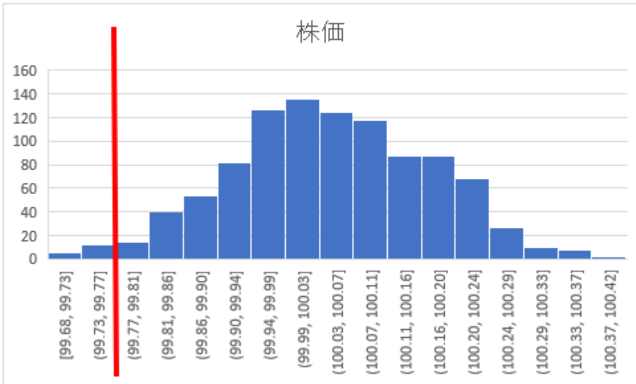
	A	B	C	D	E	F	G
1	コールオプション価格の算出						
2	オプションの構成要素			生成時系列のペイオフ			
3	株価	S=	100	平均	20.39	乱数の要約統計量	
4	行使価格	K=	100	平均の現在価値	18.45026	平均	-0.011063
5	オプション満期	T=	1			標準偏差	0.9825646
6	金利	r=	0.1			尖度	0.0303288
7	ボラティリティー	σ=	0.3			歪度	0.0708536
8	シナリオ発生						
9	No.	標準正規乱数	株価	オプションのペイオフ			
10				=MAX(株価-行使価格,0)			
11	1	1.010062449	143.05	43.05			
12	2	-0.706164807	85.48	0.00			
13	3	2.507577436	224.18	124.18			

5． バリューアットリスクへの応用

mont_application.xlsx>VaR

	A	B	C	D	E
1	コールオプション価格の算出				
2	オプションの構成要素				
3	株価	S=	100	乱数の要約統計量	
4	ボラティリティー	σ=	0.3	平均	0.0200136
5	満期	T=	0.004	標準偏差	1.0319089
6	金利	r=	0.1	尖度	−0.237692
7	標準偏差	v=	0.018974	歪度	−0.018796
8	シナリオ発生			第1四分位数	−0.662028
9	No.	標準正規乱数	株価	第3四分位数	0.7819949
10					
11	1	1.640571843	100.24	株価の要約統計量	
12	2	1.498952458	100.22	第1四分位数	99.960492
13	3	0.932108256	100.15	第3四分位数	100.13386
14	4	−0.961679396	99.92		
15	5	1.564686283	100.23		
16	6	0.357875746	100.08		
17	7	1.017550067	100.16		
18	8	−0.348416347	100.00		
19	9	0.776474841	100.13		
20	10	0.137667989	100.06		
21	11	−1.306039152	99.88		
22	12	0.181593197	100.06		
23	13	−0.302608451	100.00		
24	14	−0.010366008	100.04		
25	15	−0.177301136	100.02		
26	16	−0.344426023	100.00		
27	17	−0.123782223	100.03		
28	18	−0.457711716	99.99		
29	19	−1.607669103	99.85		
30	20	1.036422582	100.16		
31	21	0.145426567	100.06		
32	22	0.217895153	100.07		
33	23	−0.177406767	100.02		
34	24	−1.565920559	99.85		



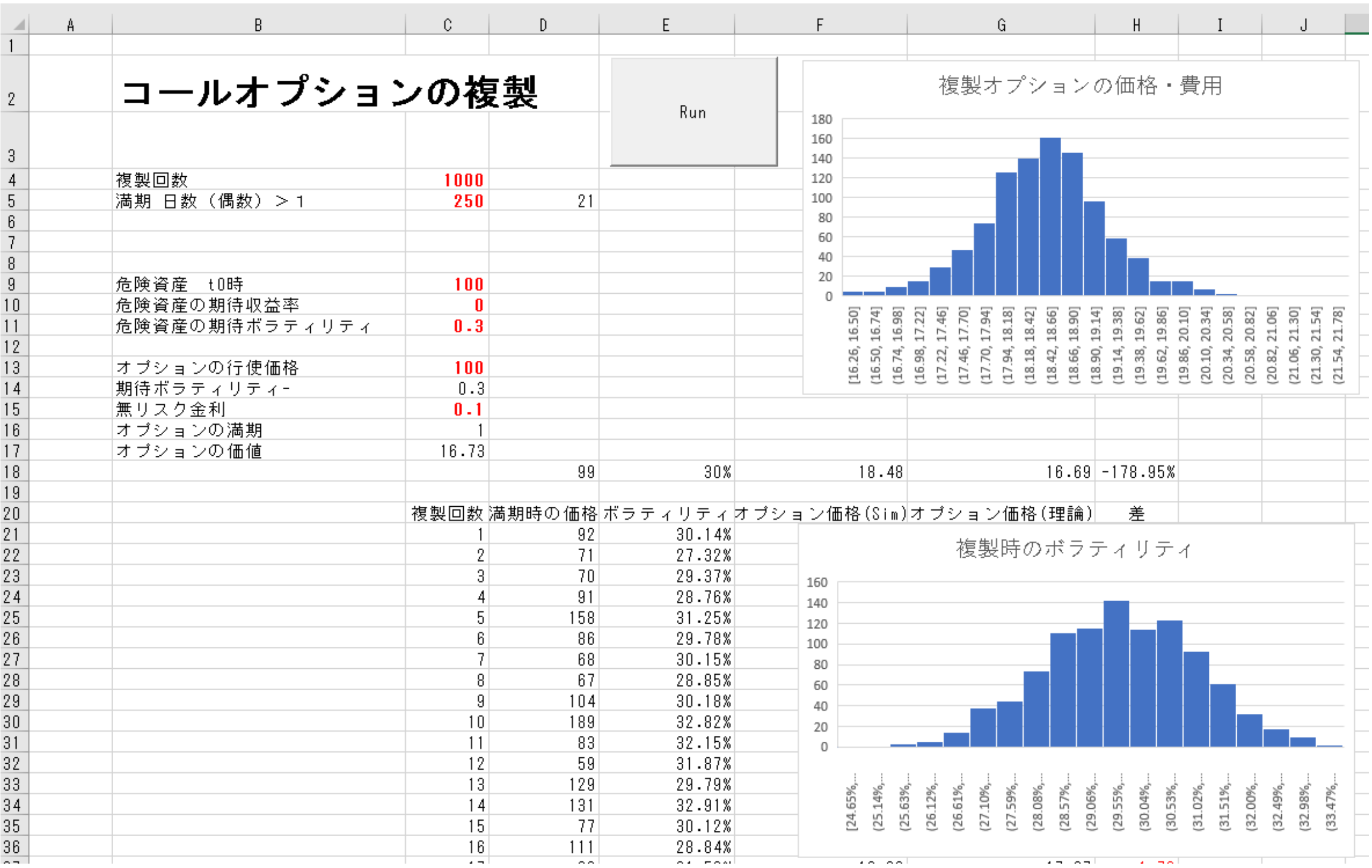


シナリオの数は１０００ですが、F9 を何度も押して、結果を確かめてください。また、乱数を生成する分布を変更することで、ファットテイルに対応したり、分布を混合したりすることもできます。

6． 複雑なペイオフをもつ金融商品の開発への応用　option_replication.xlsm

オプションプライシングとバリューアットリスクの応用では満期の価格にだけ注目しました。しかし、例えば代表的な仕組み債にはコーラブルやプッタブルのオプションを埋め込んだものがあります。投資家は複雑な市場分析でこれらのオプションを行使してきます。その際のシナリオは複雑なものになります。また、エキゾチックオプションの中には解析解が得られないものが

ありますし、経路に依存したペイオフをもつオプションもあります。その際にはやはり、満期だけではなく、満期までの期間すべてについて分析をする必要が生じてきます。そのような際にはエクセルシートを利用するだけではなく、VBA の利用も考慮に入れる必要があります。そのような例としてコールオプションを複製するシミュレーションを試みてみます。コールオプションの複製にはデルタという価格の微小変化に対してオプションプレミアムがどの程度変化するかという感応度を理解している必要があります。コールオプションの場合、その価値は原資産と現金のポートフォリオを変化させることでコールのペイオフと同じ価値を生み出すことができます。最終的なオプションの価値はブラックショールズモデルのものと同じなりますし、4．のシミュレーションの結果とも同じになります。



オプション複製のプログラムコードです。エクセルシートからオプションの情報を取得しています。

```
Sub RA_One()
    Application.ScreenUpdating = False 'スクリーンのオフ

    Dim n, DaysToMat As Long
    Dim mu, vol, v, s0 As Double
    DaysToMat = ActiveSheet.Cells(5, 3) '満期までの日数の取得
    s0 = ActiveSheet.Cells(9, 3) '初期値の取得
    mu = ActiveSheet.Cells(10, 3) '平均値の取得
    vol = ActiveSheet.Cells(11, 3) 'ボラティリティの取得
    v = vol / Sqr(250)


    '------------オプションの複製-----------------
    Dim s, deltA, vv, r, b, tt, k As Double
    Dim deltA0, dDelta, Position, RepCost, PL As Double
    s = s0
    k = ActiveSheet.Cells(13, 3) '行使価格の取得
    vv = ActiveSheet.Cells(14, 3) 'ボラティリティの取得
    r = ActiveSheet.Cells(15, 3) '無リスク金利の取得
    b = r - 0

    tt = ActiveSheet.Cells(16, 3) '満期までの時間
    ActiveSheet.Cells(17, 3) = calls(s0, k, vv, r, b, tt) 'コールプレミアムの取得

    Dim ss(), lnss() As Double '危険資産の価格系列の生成
    ReDim ss(DaysToMat), lnss(DaysToMat)
```

乱数を生成し、デルタを算出してオプションの複製を行います。乱数はエクセルシートときと同じように、NormSInv(Rnd())で生成しています。

```
    Randomize
    ss(1) = s0
    For n = 2 To DaysToMat '対数正規分布にしたがう価格の生成
        ss(n) = ss(n - 1) * Exp(mu - 0.5 * (v ^ 2) + v * WorksheetFunction.NormSInv(Rnd()))
        lnss(n) = Log(ss(n) / ss(n - 1))
        ActiveSheet.Cells(20 + n, 3) = n
        ActiveSheet.Cells(20 + n, 4) = ss(n)
    Next
    Dim mu1, vol1 As Double '生成時系列の統計分析
    mu1 = WorksheetFunction.Average(lnss) * 250
    vol1 = WorksheetFunction.StDev(lnss) * Sqr(250)
    ActiveSheet.Cells(18, 4) = mu1
    ActiveSheet.Cells(19, 4) = vol1

    deltA0 = 0
    Position = 0 '在庫
    For n = 1 To DaysToMat
        s = ss(n)
        deltA = dcalls(s, k, vv, r, b, tt) 'デルタの算出
        dDelta = deltA - deltA0 'デルタと在庫の差
        deltA0 = deltA 'デルタの保存
        Position = Position + dDelta * s 'デルタの調整の伴う在庫調整の記帳
        Position = Position * (1 + r / 250) '在庫の
        ActiveSheet.Cells(20 + n, 5) = deltA
        ActiveSheet.Cells(20 + n, 6) = -Position + deltA * s + s0 '在庫の価値
        tt = tt - 1 / 250 '時間の更新
    Next
    PL = deltA * s - Position
    If s > k Then RepCost = s - s0 - PL Else RepCost = k - s0 - PL

    ActiveSheet.Cells(13, 6) = RepCost '複製費用
    Application.ScreenUpdating = True 'スクリーンのオン
End Sub
```

つぎのプログラムコード calls はブラックショールズモデルでコールオプションのプレミアムを算出しています。ここでもエクセル関数の NormSDist が用いられています。また、dcalls はコールオプションのデルタを算出しています。

```
Function calls(s, k, v, r, b, t)
    Dim N1, N2 As Double
    If t <= 0 Then
       If s > k Then calls = s - k Else calls = 0
    Else
       N1 = (Log(s / k) + (b + v * v / 2) * t) / v / Sqr(t)
       N2 = N1 - v * Sqr(t)
       N1 = WorksheetFunction.NormSDist(N1)
       N2 = WorksheetFunction.NormSDist(N2)
       calls = Exp((b - r) * t) * s * N1 - Exp(-r * t) * k * N2
    End If
End Function
```

```
Function dcalls(s, k, v, r, b, t)
    Dim N1 As Double
    If t <= 0 Then
       If s > k Then dcalls = 1 Else dcalls = 0
    Else
       N1 = (Log(s / k) + (b + v * v / 2) * t) / v / Sqr(t)
       N1 = WorksheetFunction.NormSDist(N1)
       dcalls = N1
    End If
End Function
```