8.3 マルコフ行列，人口，経済学

p.459-466

本節は，すべての要素が $a_{ij}>0$ である**正行列**を扱う．鍵となる事実を先に述べておこう：**最大の固有値は実数かつ正であり，その固有ベクトルも同様である．**経済学や生態学，人口動態やランダムウォークにおいて，その事実はずっと奥深いところまで続く：

$$\text{マルコフ}\quad \lambda_{\max}=1 \qquad \text{人口}\quad \lambda_{\max}>1 \qquad \text{消費}\quad \lambda_{\max}<1$$

$\lambda_{\max}$ は A のベキを支配する．このことを，まず $\lambda_{\max}=1$ について見ていこう．

マルコフ行列

ある正のベクトル $\boldsymbol{u}_0=(a,1-a)$ に，以下の A を何度も掛けるとする：

$$\text{マルコフ行列}\quad A=\begin{bmatrix}0.8 & 0.3\\ 0.2 & 0.7\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{u}_1=A\boldsymbol{u}_0 \qquad \boldsymbol{u}_2=A\boldsymbol{u}_1=A^2\boldsymbol{u}_0$$

k ステップ行うと，$A^k\boldsymbol{u}_0$ となる．ベクトル列 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\ldots$ は,「**定常状態**」$\boldsymbol{u}_\infty=(0.6,0.4)$ へと近づく．この最終結果は最初のベクトルに依らない．すなわち，**すべての** $\boldsymbol{u}_0$ **に対して同じ** $\boldsymbol{u}_\infty$ **へと収束する**．なぜそうなるかが問題である．

定常状態の等式 $A\boldsymbol{u}_\infty=\boldsymbol{u}_\infty$ により，$\boldsymbol{u}_\infty$ **は固有値 1 の固有ベクトルである**：

$$\text{定常状態}\qquad \begin{bmatrix}0.8 & 0.3\\ 0.2 & 0.7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.6\\ 0.4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.6\\ 0.4\end{bmatrix}.$$

A を掛けても，$\boldsymbol{u}_\infty$ は変化しない．しかしこれだけでは，すべてのベクトル $\boldsymbol{u}_0$ から $\boldsymbol{u}_\infty$ へ至ることを示していない．別の行列の例でも定常状態が存在するかもしれないが，それが魅力的なものになるとは限らない：

$$\text{マルコフでない}\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\quad \text{には魅力的でない定常状態がある}\quad B\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}.$$

この場合，開始ベクトル $\boldsymbol{u}_0=(0,1)$ から $\boldsymbol{u}_1=(0,2)$ および $\boldsymbol{u}_2=(0,4)$ を得る．第 2 要素が 2 倍されている．固有値の言葉を用いると，B の固有値は $\lambda=1$ だけでなく $\lambda=2$ もそうである．これが不安定になる理由である．その不安定な固有ベクトルに沿った $\boldsymbol{u}$ の成分に λ が掛けられ，$|\lambda|>1$ により発散する．

本節は，安定した定常状態を保証する，A の特別な性質を 2 つ扱う．これらの性質により**マルコフ行列**が定義され，上記の A はその一例である：

マルコフ行列	**1.** A のすべての要素は非負である．
	2. A のすべての列において，その要素の和は $\mathbf{1}$ である．

B は，性質 **2** を満たさない．A がマルコフ行列のとき，次の 2 つの事実はすぐにわかる：

1. 非負の $\boldsymbol{u}_0$ に A を掛けると，非負の $\boldsymbol{u}_1=A\boldsymbol{u}_0$ が得られる．
2. $\boldsymbol{u}_0$ の要素の和が 1 であるとき，$\boldsymbol{u}_1=A\boldsymbol{u}_0$ の要素の和も同様に 1 となる．

理由： $\boldsymbol{u}_0$ の要素の和が 1 であるならば，$\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}_0=1$ である．性質 2 より，A の各列について，その要素の和は 1 である．行列積から，$[1\ \ldots\ 1]A=[1\ \ldots\ 1]$ である：

$$A\boldsymbol{u}_0\ \textbf{の要素の和は 1 である}\qquad [\mathbf{1}\ \cdots\ \mathbf{1}]A\boldsymbol{u}_0=[\mathbf{1}\ \cdots\ \mathbf{1}]\boldsymbol{u}_0=\mathbf{1}.$$

同じ事実が，$\boldsymbol{u}_2=A\boldsymbol{u}_1$ や $\boldsymbol{u}_3=A\boldsymbol{u}_2$ にもあてはまる．**すべてのベクトル** $A^k\boldsymbol{u}_0$ **は非負であり，その要素の和は** 1 である．これらは「**確率ベクトル**」である．その極限 $\boldsymbol{u}_\infty$ もまた確率ベクトルであるが，極限が存在することを証明しなければならない．正のマルコフ行列において，$\lambda_{\max}=1$ であることを示そう．

産業連関表

出典: フリー百科事典『ウィキペディア（Wikipedia）』

産業連関表（さんぎょうれんかんひょう、英: Input Output Table）は、産業ごとの生産・販売等の取引額を行列形式にした指標。英語の頭文字を取ってI-O表とも。アメリカの経済学者であるワシリー・レオンチェフが、1936年にアメリカを対象として作成したものが最初である。一般均衡理論を現実の経済に適用しようとする試みであり、レオンチェフ自身によればカール・マルクスの再生産表式から着想したとされる[1][2][3]。

ワシリー・ワシーリエヴィチ・レオンチェフ（ロシア語: Василий Васильевич Леонтьев, 英語: Wassily Leontief, 1905年8月5日 - 1999年2月5日）はソビエト連邦出身の経済学者。1973年に投入産出分析（産業連関分析）の研究でノーベル経済学賞受賞。

例 1　デンバー内にあるレンタカーの割合がはじめ $\frac{1}{50}=0.02$，デンバー外にある割合が 0.98 であるとする．毎月，デンバー内の車の 80% はデンバーに留まる（20% は外に出る）．また，デンバー外の車の 5% はデンバーに入る（95% は外に留まる）．すなわち，割合 $\boldsymbol{u}_0=(0.02,0.98)$ に次の A が掛けられる．

$$\textbf{1ヶ月後}\qquad A=\begin{bmatrix}0.80 & 0.05\\0.20 & 0.95\end{bmatrix}\quad \text{より}\quad \boldsymbol{u}_1=A\boldsymbol{u}_0=A\begin{bmatrix}0.02\\0.98\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.065\\0.935\end{bmatrix}.$$

$0.065+0.935=1$ であり，すべての車が数えられていることに注意せよ．毎月，A が掛けられる：

$$\textbf{2ヶ月後}\qquad \boldsymbol{u}_2=A\boldsymbol{u}_1=(0.09875,\ 0.90125).\ \text{これは}\ A^2\boldsymbol{u}_0\text{である}$$

A が正であるため，これらのベクトルはすべて正である．ベクトル $\boldsymbol{u}_k$ の要素の和はいずれも 1 となる．第 1 要素は 0.02 から増え，車がデンバーへと移動する．長時間経つとどうなるか？

本節は，行列のベキを対象とする．A^k の理解は，対角化の最初の適用対象であり最適な対象でもある．A^k は複雑になりうるが，対角行列 Λ^k は単純である．固有ベクトルからなる行列 S により A^k と Λ^k が関連づけられ，A^k は $S\Lambda^kS^{-1}$ に等しい．マルコフ行列の新しい応用では，（Λ に含まれる）固有値と（S に含まれる）固有ベクトルを用いる．$\boldsymbol{u}_\infty$ が $\lambda=1$ に対応する固有ベクトルであることを示そう．

A のすべての列はその要素の和が 1 であるので，失われるものも増えるものもない．レンタカーや人口を動かしているが，車や人が突然現れる（または消える）ことはない．その割合の和は 1 であり，行列 A もそれを維持する．問題は k 期間後にそれらがどのように分布しているかであり，そこから A^k に至る．

解　$A^k\boldsymbol{u}_0$ は，k 期間後のデンバーの内と外にあるレンタカーの割合を与える．A^k を理解するために，A を対角化する．固有値は $\lambda=1$ と 0.75 である（そのトレースは 1.75 である）．

$$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}\qquad A\begin{bmatrix}0.2\\0.8\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}0.2\\0.8\end{bmatrix}\quad \text{と}\quad A\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=0.75\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}.$$

開始ベクトル $\boldsymbol{u}_0$ は $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ とを線形結合したものであり，この場合その係数は 1 と 0.18 である：

$$\textbf{固有ベクトルの線形結合}\qquad \boldsymbol{u}_0=\begin{bmatrix}0.02\\0.98\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.2\\0.8\end{bmatrix}+0.18\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}.$$

ここで A を掛けて $\boldsymbol{u}_1$ を求める．固有ベクトルに $\lambda_1=1$ と $\lambda_2=0.75$ が掛けられる：

$$\textbf{各}\ \boldsymbol{x}\ \textbf{に}\ \lambda\ \textbf{が掛けられる}\qquad \boldsymbol{u}_1=1\begin{bmatrix}0.2\\0.8\end{bmatrix}+(0.75)(0.18)\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}.$$

毎月，0.75 がベクトル $\boldsymbol{x}_2$ に掛けられる．固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ は変化しない：

$$k\ \textbf{期間後}\qquad \boldsymbol{u}_k=A^k\boldsymbol{u}_0=\begin{bmatrix}0.2\\0.8\end{bmatrix}+(0.75)^k(0.18)\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}.$$

この式から，何が起こるかが明らかになる．**固有値 $\lambda=1$ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ が定常状態である**．$|\lambda|<1$ であるので，もう 1 つの固有ベクトル $\boldsymbol{x}_2$ は消える．時間を経ると，$\boldsymbol{u}_\infty=(0.2,0.8)$ へより近づく．その極限をとると，$\frac{2}{10}$ の車がデンバー内にあり，$\frac{8}{10}$ が外にある．これがマルコフ連鎖のパターンであり，たとえ $\boldsymbol{u}_0=(0,1)$ から始まったとしても結果は同じである：

A が正のマルコフ行列（要素が $a_{ij} > 0$ であり，各列の要素の和が **1**）であるならば，$\lambda_1 = 1$ は最大の固有値である．固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ が**定常状態**である：

$$\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{x}_1 + c_2(\lambda_2)^k \boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_n(\lambda_n)^k \boldsymbol{x}_n \quad \text{は常に} \quad \boldsymbol{u}_\infty = \boldsymbol{x}_1 \quad \text{へ近づく．}$$

要点の 1 つ目は，A の固有値の 1 つが $\lambda = 1$ であることだ．**理由**：$A - I$ のすべての列はその要素の和が $1 - 1 = 0$ であり，$A - I$ の行の和は零行である．行が線形従属であるので，$A - I$ は非可逆行列である．その行列式は零であり，$\lambda = 1$ は固有値の 1 つである．

要点の 2 つ目は，$|\lambda| > 1$ となる固有値が存在しないことだ．そのような固有値があると，ベキ A^k が発散する．しかし，A^k もまたマルコフ行列である．A^k の要素は非負であり，その列の要素の和は 1 である．したがって，要素が大きくなる余地はない．

別の固有値が $|\lambda| = 1$ となる可能性については，さらに注意しなければならない．

例 2　$A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ には，定常状態がない．なぜならば，$\lambda_2 = -1$ であるからだ．

この行列は，デンバー内のすべての車を外に出し，外の車を中に入れる．ベキ A^k は，A と I を交互に繰り返す．2 つ目の固有ベクトル $\boldsymbol{x}_2 = (-1, 1)$ には $\lambda_2 = -1$ が毎ステップ掛けられ，小さくならない．したがって，定常状態がない．

A や A の任意のベキの要素がすべて**正**であるとし，零がないと仮定する．この「好ましい」または「原始的」な場合，$\lambda = 1$ は他の任意の固有値よりも真に大きい．ベキ A^k は，定常状態を各列に持つランク 1 行列へと近づく．

例 3　（「**全員が移動する**」）3 つのグループから始める．各時間ステップにおいて，グループ 1 の半分の人はグループ 2 へと移動し，残りの半分の人はグループ 3 へ移動する．その他のグループも，**半分に分かれて移動を行う**．最初の人口 p_1, p_2, p_3 から始めて 1 時間ステップ経つと次のようになる：

$$\textbf{新しい人口} \qquad \boldsymbol{u}_1 = A\boldsymbol{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_3 \\ \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_3 \\ \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2 \end{bmatrix}.$$

A はマルコフ行列である．生まれる人もいなくなる人もいない．A は，例 2 において問題となった零を含んでいる．しかし，この例では 2 ステップ後に A^2 から零が消える：

$$\textbf{2 ステップの行列} \qquad \boldsymbol{u}_2 = A^2\boldsymbol{u}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}.$$

A の固有値は $\lambda_1 = 1$ （A がマルコフ行列のため）と $\lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{1}{2}$ である．$\lambda = 1$ に対する**固有ベクトル** $\boldsymbol{x}_1 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ **は定常状態となる**．3 つの同人口の集団が半分に分かれて移動すると，集団の人口は再び等しくなる．$\boldsymbol{u}_0 = (8, 16, 32)$ から始めると，マルコフ連鎖はその定常状態へと近づく：

$$\boldsymbol{u}_0 = \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ 32 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 24 \\ 20 \\ 12 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 16 \\ 18 \\ 22 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 20 \\ 19 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{u}_4$ へのステップでは，ある人を半分に分けなければならないが，これは避けられない．各ステップにおいて総人口は $8 + 16 + 32 = 56$ であり，定常状態は $56 \times (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ である．よって，3 グループの人口は極限値 $56/3$ へと近づくが，それに到達することはない．

第 6.7 節の挑戦問題 16 では，ウェブサイトのリンクの数からマルコフ行列 A を作った．その定常状態 $\boldsymbol{u}$ は，Google のランキングを与える．**Google は，リンクをたどるランダムウォークによって $\boldsymbol{u}_\infty$ を求めた（ランダムサーフィン）**．各ウェブサイトを訪問した割合を数えることでその固有ベクトルが求められ，それにより定常状態を手早く計算できる．

2 番目に大きな固有値の大きさ $|\lambda_2|$ によって，定常状態への収束の速さが決まる．

ペロン – フロベニウスの定理

本節のテーマに影響を及ぼす行列の定理が 1 つある．すべての要素が $a_{ij} \geq 0$ であるとき，ペロン – フロベニウスの定理を適用できる．列の要素和が 1 であることは必要としない．すべての要素が $a_{ij} > 0$ であるという最もやりやすい場合について証明する．

> **$\boldsymbol{A} > 0$ の場合のペロン – フロベニウスの定理**
> **$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda_{\max}\boldsymbol{x}$ におけるすべての数は真に正である．**

証明　鍵となる考え方は，ある（$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 以外の）非負ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $A\boldsymbol{x} \geq t\boldsymbol{x}$ となるような，すべての数 t を考えることである．多くの正の候補 t をとれるように，$A\boldsymbol{x} \geq t\boldsymbol{x}$ において不等の場合も許している．(取りうる）最大値 $t_{\max}$ において，**等式 $A\boldsymbol{x} = t_{\max}\boldsymbol{x}$ が成り立つ**ことを示す．

そうでない，すなわち $A\boldsymbol{x} \geq t_{\max}\boldsymbol{x}$ の等号が成り立たないと仮定する．それらに A を掛ける．A は正であるので，真に不等号が成り立ち $A^2\boldsymbol{x} > t_{\max}A\boldsymbol{x}$ となる．したがって，正のベクトル $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ は $A\boldsymbol{y} > t_{\max}\boldsymbol{y}$ を満たし，$t_{\max}$ をさらに増やすことができる．この矛盾により，等号が成り立つ $A\boldsymbol{x} = t_{\max}\boldsymbol{x}$ でなければならず，固有値が存在する．その固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ は正である．なぜならば，等式の左辺において $A\boldsymbol{x}$ は正でなければならないからだ．

$t_{\max}$ よりも大きな固有値がないことを示すには，$A\boldsymbol{z} = \lambda\boldsymbol{z}$ であると仮定する．λ と $\boldsymbol{z}$ は負の数や複素数を含んでもよいので，その絶対値を取る．すると，「三角不等式」より $|\lambda||\boldsymbol{z}| = |A\boldsymbol{z}| \leq A|\boldsymbol{z}|$ である．この $|\boldsymbol{z}|$ は，非負ベクトルであるので，$|\lambda|$ は t の候補の 1 つである．したがって，$|\lambda|$ は $t_{\max}$ を超えることはなく，$\lambda_{\max}$ でなければならない．

人口増加

人口を，20 歳未満，20 歳から 39 歳，および 40 歳から 59 歳の，3 つの年齢層に分ける．ある年 T において，それぞれの年齢層に属す人数は n_1, n_2, n_3 である．20 年後，それぞれに属す人数は 2 つの理由で変わる．

1. 繁殖　新しい世代の人数は $n_1^{\mathbf{new}} = F_1 n_1 + F_2 n_2 + F_3 n_3$ で与えられる
2. 生存　古い世代の人数は $n_2^{\mathbf{new}} = P_1 n_1$ と $n_3^{\mathbf{new}} = P_2 n_2$ で与えられる

繁殖の比率は F_1, F_2, F_3（F_2 が最大）である．**レスリー行列** A は，以下のようになるだろう：

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}^{\mathbf{new}} = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.04 & \mathbf{1.1} & 0.01 \\ 0.98 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0.92} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ \boldsymbol{n_2} \\ n_3 \end{bmatrix}.$$

この最も単純な人口予測では，各ステップで同じ行列 A を用いる．現実的なモデルでは，(環境もしくは内部的要因により）A は時間とともに変化する．年齢 ≥ 60 とする 4 番目の年齢層を加えたいと思う大学教授もいるだろうが，それは認めない．

この行列は $A \geq 0$ であるが，$A > 0$ ではない．ペロン – フロベニウスの定理はこの場合も成り立つ．なぜならば，$A^3 > 0$ であるからだ．最大の固有値は $\lambda_{\max} \approx 1.06$ である．中間の世代が $n_2 = 1$ であるところから始めて，世代がどのように変化するかを見る：

$$\mathbf{eig}(A) = \begin{matrix} \mathbf{1.06} \\ -1.01 \\ -0.01 \end{matrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1.08 & \mathbf{0.05} & 0.00 \\ 0.04 & \mathbf{1.08} & 0.01 \\ 0.90 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0.10 & \mathbf{1.19} & 0.01 \\ 0.06 & \mathbf{0.05} & 0.00 \\ 0.04 & \mathbf{0.99} & 0.01 \end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{u}_0 = (0, 1, 0)$ とするのが手っ取り早い．この中間の年齢層は，1.1 だけ生み，また 0.92 だけ生存する．その若い世代と年長の世代は，$\boldsymbol{u}_1 = (1.1, 0, 0.92) =$ A の第 2 列である．さらに，$\boldsymbol{u}_2 = A\boldsymbol{u}_1 = A^2\boldsymbol{u}_0$ は A^2 の第 2 列である．最初のうち（過渡期）は，その数は $\boldsymbol{u}_0$ に大きく依存する．しかし，**漸近的な増加率 $\lambda_{\max}$ は，どのような $\boldsymbol{u}_0$ から開始しても同じである．** その固有ベクトル $\boldsymbol{x} = (0.63, 0.58, 0.51)$ から，3 つすべての世代の人数が徐々に増えることがわかる．

Caswell による本 *Matrix Population Models*[訳注] では，感度解析に重きを置いている．モデルがまさに正確であることはありえない．行列における F や P が 10% 変化したとき，$\lambda_{\max}$ が 1 を下回る（これは絶滅を意味する）ことがあるだろうか．問題 19 では，行列が ΔA だけ変化したとき，固有値が $\Delta\lambda = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\Delta A)\boldsymbol{x}$ だけ変化することを示す．ここで，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}$ はそれぞれ A の右固有ベクトルと左固有ベクトルである．すなわち，$\boldsymbol{x}$ は S の列であり，$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}$ は S^{-1} の行である．

[訳注] H.Caswell: *Matrix Population Models : Construction, Analysis, and Interpretation.*

経済における線形代数：消費行列

経済における線形代数についてここで長く書くのは場違いであり，1つの行列を使って簡単に説明するほうがよいだろう．**消費行列**は，各入力がどれだけ各出力に転ずるかを示し，経済の中でも製造の側面を表すものである．

消費行列 化学，食品，石油のような n 産業がある．1単位の化学製品を製造するには，0.2単位の化学製品，0.3単位の食品，0.4の石油が必要である．これらの数は，消費行列 A の第1行に入る：

$$\begin{bmatrix} \text{化学製品の出力} \\ \text{食品の出力} \\ \text{石油の出力} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.4 & 0.1 \\ 0.5 & 0.1 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{化学製品の入力} \\ \text{食品の入力} \\ \text{石油の入力} \end{bmatrix}.$$

第2行は，食品を製造するために必要な入力を表す．化学製品と食品を多く必要とするが，石油はそれほど必要としない．A の第3行は，1単位の石油を精製するのに必要な入力を表す．1958年の米国における実際の消費行列は，83産業からなる．1990年のモデルはもっと大きく，より正確である．ここでは，扱いやすい固有ベクトルを持つような消費行列を選んだ．

ここで問だ．この経済において，化学製品，食品，石油の需要 y_1, y_2, y_3 を満たすことは可能か？そのためには，入力 p_1, p_2, p_3 はより多くなければならない．なぜならば，$\boldsymbol{p}$ の一部が消費されて $\boldsymbol{y}$ が製造されるからだ．入力は $\boldsymbol{p}$ であり，消費量は $A\boldsymbol{p}$ である．これから，出力は $\boldsymbol{p} - A\boldsymbol{p}$ となる．この純生産量が，需要 $\boldsymbol{y}$ を満たすものとなる：

問 $\boldsymbol{p} - A\boldsymbol{p} = \boldsymbol{y}$ すなわち $\boldsymbol{p} = (I - A)^{-1}\boldsymbol{y}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{p}$ を求めよ．

一見したところ，線形代数における問題は，$I - A$ が可逆かどうかである．しかし，問題はより深い．需要ベクトル $\boldsymbol{y}$ は非負であり，A も非負である．**$\boldsymbol{p} = (I - A)^{-1}\boldsymbol{y}$ における製造水準もまた非負でなければならない**．本当の問は以下のものである：

$(I - A)^{-1}$ が非負行列となるのはどのような場合か

これは，任意の正の需要を満たせるかどうか，$(I - A)^{-1}$ を判別するものである．I と比較して A が小さければ，$\boldsymbol{p}$ と比較して $A\boldsymbol{p}$ は小さい．出力は豊富である．A があまりに大きければ，製造において生産よりも消費が多くなる．この場合，外部からの需要 $\boldsymbol{y}$ を満たすことができない．

「小さい」か「大きい」かは，A の最大の固有値 λ_1（これは正である）によって決まる：

$\lambda_1 > 1$ のとき， $(I - A)^{-1}$ には負の要素がある
$\lambda_1 = 1$ のとき， $(I - A)^{-1}$ は存在しない
$\lambda_1 < 1$ のとき， $(I - A)^{-1}$ は非負であり，要望どおりである．

上記の最後が最も重要である．その推論において用いる $(I - A)^{-1}$ についての素晴らしい公式をこれから示す．数学における最も重要な無限級数は，**等比級数** $1 + x + x^2 + \cdots$ である．x が -1 と 1 の間にあるとき，その級数は $1/(1 - x)$ である．$x = 1$ のとき，その級数は $1 + 1 + 1 + \cdots = \infty$ である．$|x| \geq 1$ のとき，項 x^n は零に近づかず，級数が収束しない．

$(I - A)^{-1}$ についての素晴らしい公式とは，**行列の等比級数**である：

等比級数 $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + \cdots.$

級数 $S = I + A + A^2 + \cdots$ に A を掛けると，I を除いて同じ級数を得る．したがって，$S - AS = I$ であり，これから $(I - A)S = I$ を得る．級数が収束すれば，$S = (I - A)^{-1}$ である．**A のすべての固有値が $|\lambda| < 1$ であるとき，級数は収束する**．

ここでの場合，$A \geq 0$ であり，級数のすべての項が非負である．その和は $(I - A)^{-1} \geq 0$ である．

例 4 $A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.4 & 0.1 \\ 0.5 & 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}$ において $\lambda_{\max} = 0.9$ であり $(I - A)^{-1} = \frac{1}{93}\begin{bmatrix} 41 & 25 & 27 \\ 33 & 36 & 24 \\ 34 & 23 & 36 \end{bmatrix}$.

この経済は生産的である．$\lambda_{\max}$ が 0.9 であるので，I と比較して A が小さい．需要 $\boldsymbol{y}$ を満たすには，$\boldsymbol{p} = (I - A)^{-1}\boldsymbol{y}$ とする．すると，製造において $A\boldsymbol{p}$ だけ消費され，$\boldsymbol{p} - A\boldsymbol{p}$ だけ残る．これは $(I - A)\boldsymbol{p} = \boldsymbol{y}$ であり，需要が満たされる．

例 5 $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ において $\lambda_{\max} = 2$ であり $(I - A)^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

この消費行列 A は大きすぎ，需要を満たすことはできない．なぜならば，製造するにあたって，生産よりも消費のほうが多いからである．$\lambda_{\max} > 1$ であるので，級数 $I + A + A^2 + \ldots$ が $(I - A)^{-1}$ へと収束することはない．$(I - A)^{-1}$ が実際には負であるにもかかわらず，級数は増大し続ける．

$1 + 2 + 4 + \cdots$ が $1/(1-2) = -1$ と等しくないのと同じだ．しかし，完全に誤りというわけでもない．