練習問題 4.1

問題 1〜12 は 4 つの部分空間を表す図 4.2 と図 4.3 について問うものである．

1 階数が 1 である任意の 2×3 行列を作れ．図 4.2 を写し，それぞれの部分空間に 1 つずつ（零空間には 2 つ）ベクトルを配置せよ．どのベクトルが直交するか？

$\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$。行解約階段行列を求めると

$\begin{bmatrix}1&2&3\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2-b_1\end{bmatrix}$

x_1はピボット変数、x_2,x_3は自由変数。自由変数は任意の値とすることができる。

特殊解は$Ax_p=b$の解である。$x_2=0,x_3=0$としてもとめる。特殊解は$x_1=b_1$

特解は$Ax_n=0$の解である。

$x_2=1,x_3=0$のとき、$x_1=-2$

$x_2=0,x_3=1$のとき、$x_1=-3$

となる。特解は$s_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}$、$s_2=\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}$となり、これらは零空間にある。

これらは行空間のベクトル$[1\quad 2\quad 3]$と直交する。

一般解は$x=x_p+x_n=\begin{bmatrix}b_1\\0\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}$

列空間は$A^Ty=\begin{bmatrix}1&1\\2&2\\3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$。$y_1$はピボット変数、$y_2$は自由変数。自由変数は任意の値とすることができる。

$$\begin{bmatrix}1&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1\\c_2-2c_1\\c_3-3c_1\end{bmatrix}$$

特殊解は$Ay_p=c$の解である。$y_2=0$としてもとめる。特殊解は$y_1=c_1$

特解は$y_2=-1$のとき、$y_1=1$

となる。一般解は$\begin{bmatrix}c_1\\0\end{bmatrix}+y_2\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

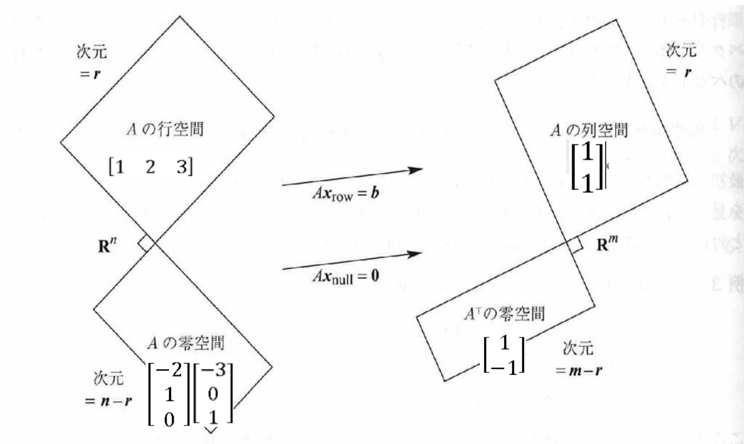


図 4.2 直交部分空間の 2 つの対．次元を足すと，それぞれ n と m になる．**これは重要な絵である．** 一方の対は，$\mathbf{R}^n$ の部分空間であり，もう一方の対は，$\mathbf{R}^m$ の部分空間である．

$[1\quad 1]$

$R=[I\quad F]$ で考えるとA の列空間は$[1\quad 1]$と書いてもいい。

1 $\mathbf{R}^3$ において，零空間の 2 つのベクトルはいずれも行空間のベクトルと直交する．列空間は A^{T} の零空間と直交する（階数が 1 なので，$\mathbf{R}^2$ における 2 つの直線となる）．

2 階数が $r=2$ である 3×2 行列に対して，図 4.3 を書き換えよ．どの部分空間が Z（零ベクトルのみ）となるか？$\mathbf{R}^2$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ の零空間成分は $\boldsymbol{x}_n =$ ＿＿＿ である．

$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$, x_1,x_2はピボット変数、自由変数はない。特殊解は$Ax_p=b$の解である。

$x_1=b_1, x_2=b_2, b_3=0$, $x_p=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\0\end{bmatrix}$である。

特解は$Ax_n=0$の解である。$x_n=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$. 行空間のベクトルは$x_1=0, x_2=0$と直交する。

$$A\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=0$$

列空間は$A^Ty=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}y=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}$.

y_1,y_2はピボット変数。y_3は自由変数。自由変数は任意の値とすることができる。特殊解は$A^Ty_p=c$の解である。

$y_1=c_1, y_2=c_2, y_p=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\0\end{bmatrix}$

特解は$A^Ty_n=0$の解である。$y_n=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$. 列空間のベクトルは$y_1=0, y_2=0, y_3=1$と直交する。

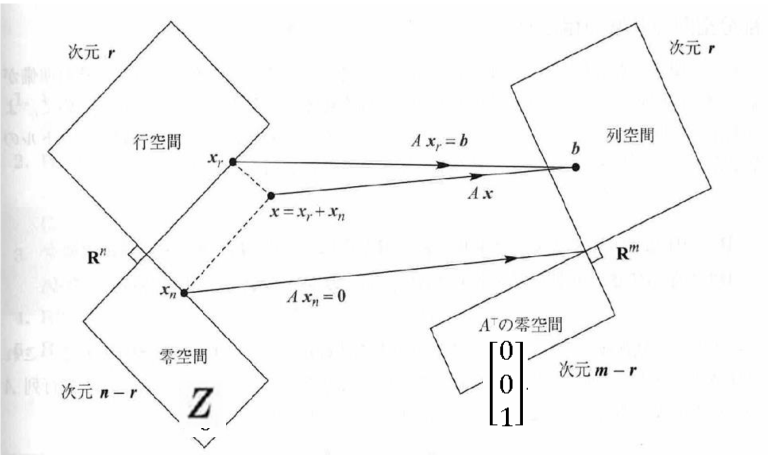
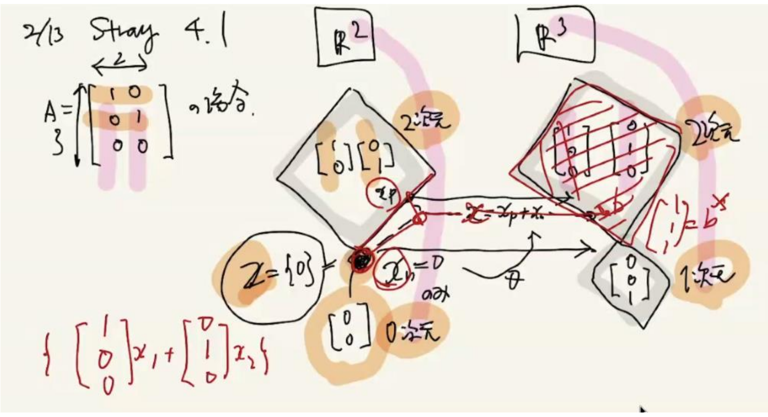


図 4.3 この図は図 4.2 を更新したもので，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_r+\boldsymbol{x}_n$ に対する A の本当の作用を表す．行空間のベクトル $\boldsymbol{x}_r$ は列空間へと移り，零空間のベクトル $\boldsymbol{x}_n$ は零へと移る．



$x=x_p+x_n=x_p$となります。x_nは零空間に存在します。零空間は零ベクトルからのみなります。

3 要求された性質を持つ行列を作れ．それが不可能なときにはその理由を示せ：

(a) 列空間が $\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix}2\\-3\\5\end{bmatrix}$ を含み，零空間が $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ を含む．

(b) 行空間が $\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix}2\\-3\\5\end{bmatrix}$ を含み，零空間が $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ を含む．

(c) $A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ が解を持ち，$A^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ である．

(d) すべての行がすべての列に直交する（A は零行列ではない）．

(e) 列の和が零列になり，行の和が全要素1からなる行となる．

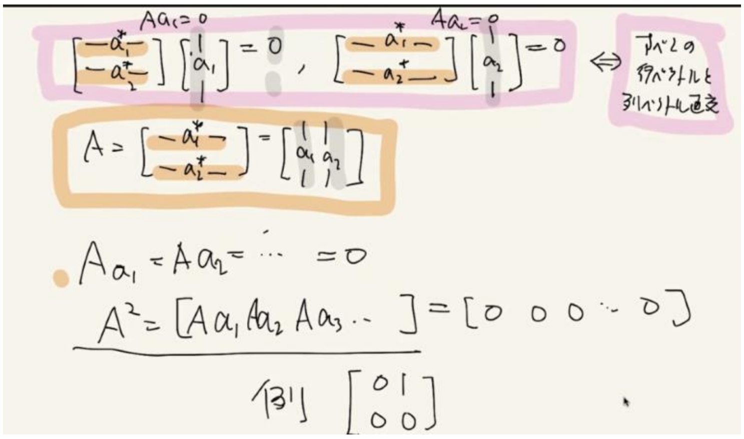
a) $\begin{bmatrix}1 & 2 & a\\ 2 & -3 & b\\ -3 & 5 & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$、よって$\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & -3 & 1\\ -3 & 5 & -2\end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & -3 & 5\\ a & b & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\4\\0\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$、よって不可能。

c) $[1\quad 0\quad 0]A = [0\quad 0\quad 0]$

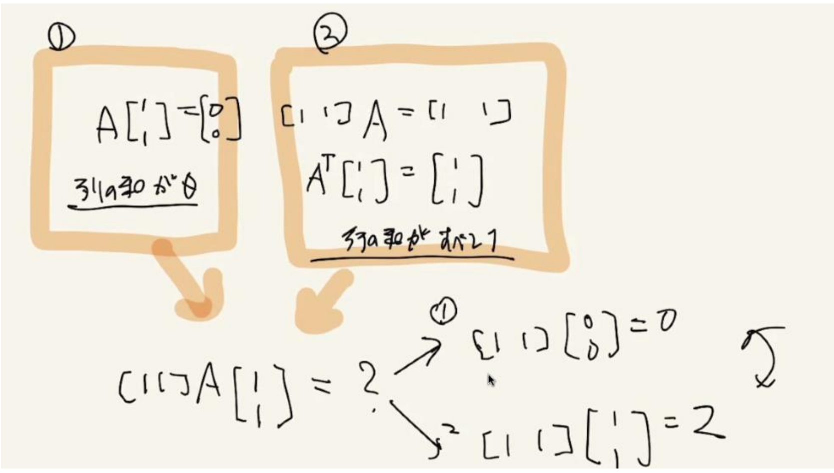
$[1\quad 0\quad 0]Ax = [1\quad 0\quad 0]\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = 1 = [0\quad 0\quad 0]x = 0$ よってAは不可能。

d) Aは



e) $Ax = 0,\ A^Ty = \begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}, (A^Ty)^T = y^TA = [1\quad \cdots\quad 1], (A^Ty)^Tx = y^TAx = [1\quad \cdots\quad 1]x = 0$。

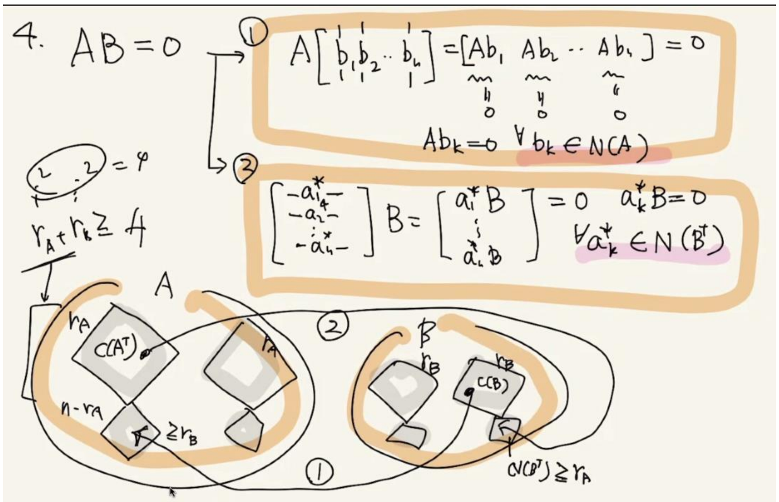
このような行列は存在しない。



3 (a) $\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & -3 & 1\\ -3 & 5 & -2\end{bmatrix}$. (b) 不可能．$\begin{bmatrix}2\\-3\\5\end{bmatrix}$ が $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ に直交しない．(c) $\boldsymbol{C}(A)$ と $\boldsymbol{N}(A^{\mathrm{T}})$ が $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ を含むことは不可能．直交しない． (d) $A^2 = 0$ が必要である．$A = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ とする．
(e) $(1, 1, 1)$ が零空間に含まれ（列の要素の和が零），行空間にも含まれる．そのような行列はない．

4　$AB=0$ のとき，B の列は A の ____ に含まれる．A の行は B の ____ に含まれる．
A と B の両方が階数 2 の 3×3 行列となることがありえないのはなぜか？

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$は$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}=0$と$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix}=0$の 2 つの連立方程式の解をもとめていることになる。よって、Bの列は Aの零空間に含まれる。Aの行は Bの左零空間に含まれる。



$n\times n$の行空間と列空間の次元は同じでそれをrとすると、零空間の次元を$n-r$となる。よって、3×3、の行列でAとBの両方の階数が 2 になることはない。
零空間の次元は m-r です。左零空間の次元は n-r

5　(a) $Ax=b$ が解を持ち $A^{T}y=0$ であるとき，($y^{T}x=0$　・　$y^{T}b=0$) が成り立つ．
(b) $A^{T}y=(1,1,1)$ が解を持ち，$Ax=0$ であるとき，____ である．

a)　$(A^Ty)^T=0^T$から$(A^Ty)^Tx=y^TAx=y^Tb=0$。また、$(A^Ty)^TA^{-1}x=y^TAA^{-1}x=y^Tx=0$.

$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$とし、$Ax=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}x=b$のとき、$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, x=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

$A^Ty=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}y=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$、よって$y=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$。

$y^Tb=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}=0,\ y^Tx=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$=0

5 版では$y^Tb=0$またはy^Tx=0 と修正されいるが、$y^Tb=0$かつy^Tx=0 でも可。
典型的な間違いをしました。以下参照。

5 (a) $Ax = b$ が解を持ち $A^{\mathrm{T}}y = 0$ であるとき，($y^{\mathrm{T}}x = 0$ ・ $y^{\mathrm{T}}b = 0$) が成り立つ．
(b) $A^{\mathrm{T}}y = (1,1,1)$ が解を持ち，$Ax = 0$ であるとき，____ である．

逆行列の存在保証はどこから?
$Ax=b$が解をもつことからは導けない。

a) $(A^Ty)^T = 0^T$から$(A^Ty)^Tx = y^TAx = y^Tb = 0$。OK また、$(A^Ty)^TA^{-1}x = y^TAA^{-1}x = y^Tx = 0$. NG

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$とし、$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}x = b$のとき、$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

$A^Ty = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$、よって$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$。

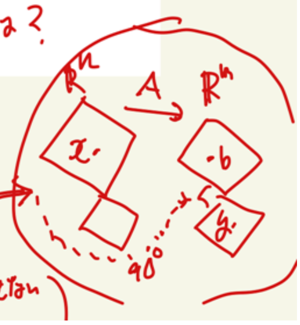
$y^Tb = [1 \quad 1 \quad 1]\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$, $y^Tx = [1 \quad 1 \quad 1]\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$

問題としては、どちらかから選べ なのでは?

5 版では$y^Tb = 0$または$y^Tx = 0$と修正されいるが、$y^Tb = 0$かつ$y^Tx = 0$でも可。

例 このAで:
$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ は $Ax = b$ をみたし、$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ は $A^Ty = 0$ をみたす。

この場合 $\underbrace{y^Tb = 0}_{①}$ だが $\underbrace{y^Tx \neq 0}_{②}$。この絵から①は言える。
②は言えない。(そもそも $m=n$ でないと計算できない)



b) $(Ax)^Ty = x^TA^Ty = x^T(1,1,1) = 0$。このような行列は存在しない。

6 次の方程式 $Ax = b$ は解を持たない（解を持つとすると $0 = 1$ が導かれる）:

$$x + 2y + 2z = 5$$
$$2x + 2y + 3z = 5$$
$$3x + 4y + 5z = 9$$

等式にそれぞれ y_1, y_2, y_3 を掛けて足すと $0 = 1$ となる数 y_1, y_2, y_3 を求めよ．どの部分空間のベクトル y を求めたことになるか？その内積 $y^{\mathrm{T}}b$ が 1 であるため，解 x がない．

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}x = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$は解をもたない。

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, よって$y_1 + y_3 = 0$、$y_2 + y_3 = 0$、$y_3$は自由変数。

$y_3 = -1$とすると、$y_1 = 1$、$y_2 = 1$となる。したがって、$\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$.これは左零空間のベクトル$y$をもとめたことになり、その内積が 1 であるために解xがない。

7 解がないすべての方程式は，問題 6 と同じようにできる．m 個の等式に掛けて足すと $0 = 1$ となる数 $y_1, \ldots, y_m$ が存在する．これは**フレドホルムの交代定理**と呼ばれる：

これらの問題のうちいずれか一方のみが解を持つ

$$Ax = b \quad \text{または} \quad A^{\mathrm{T}}y = 0 \quad \text{と} \quad y^{\mathrm{T}}b = 1.$$

b が A の列空間にないとき，それは A^{T} の零空間と直交でない．等式 $x_1 - x_2 = 1$ と $x_2 - x_3 = 1$ と $x_1 - x_3 = 1$ に数 y_1, y_2, y_3 を掛け，それらを足して $0 = 1$ とせよ．

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, よって$y_1 + y_3 = 0$、$y_2 + y_3 = 0$、$y_3$は自由変数。$y_3 = -1$とすると、$y_1 = 1$、$y_2 = 1$となる。$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$

8 図 4.3 において，Ax_r が Ax に等しいのはなぜか？このベクトルが列空間にあるのはなぜか？$A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ と $x = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ について，x_r を求めよ．

rはAの次元である。Aを$n \times n$の行列とすると、$n - r$個の解が零空間にある。それらをゼロとした場合Ax_rは列空

間にあり、$Ax_r = b$となる解x_rをもつ。したがって、$Ax_r = Ax = b$となる。$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$をとくと$x_1 + x_2 = 0$、$x_2$は自由解であるから$x_r = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$とすると$b = 1$、よって$x_r = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$となる。

9 $A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ のとき，$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ である．理由：$A\boldsymbol{x}$ は A^{T} の零空間にあり，また，A の _____ にある．それらの空間は _____ である．結論：$A^{\mathrm{T}}A$ は A と同じ零空間を持つ．この重要な事実を，次節でもう一度述べる．

列ベクトルの線形結合は、Axとして取りうるものすべてで列空間を張る。Aの零空間は$Ax = 0$の解からなる。AxはA^TとAの零空間にある。したがって、A^TAxはAの零空間にある。

10 A が対称行列 $(A^{\mathrm{T}} = A)$ であるとする．

(a) A の列空間が零空間に直交する理由を示せ．

(b) $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ および $A\boldsymbol{z} = 5\boldsymbol{z}$ であるとき，これらの「固有ベクトル」$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{z}$ を含む部分空間はどれか？対称行列は直交する固有ベクトルを持つ，すなわち $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} = 0$.

a) $A^T = A$であるので、Aは対称行列である。$Ax = \lambda_1 x$および$Ax = \lambda_2 x$でかつ$\lambda_1 \neq \lambda_2$であるとする。１つ目の式とyとの内積を取り、２つ目に式とxとの内積を取る。$(\lambda_1 x)^T y = (Ax)^T y = x^T A^T y = x^T \lambda_2 y$より$x^T \lambda_1 y = x^T \lambda_2 y$となる。$\lambda_1 \neq \lambda_2$より$x^T y = 0$. Axは列空間に含まれるのでその列空間は零空間と直交する。

b) xは零空間に含まれ、対称行列の列空間と行空間は等しいので、zは列空間と行空間に含まれる。したがって、これらの固有ベクトルは$x^T z = 0$を満たす。？

11 （推奨） 次の行列について図 4.2 を描き，各部分空間を正確に示せ．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad と \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

列空間 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} x$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} x$

行空間$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} y$, $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y$

零空間$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} x = 0$の解は$x_n = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} x = 0$の解は$x_n = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$, tは自由変数。

左零空間$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} y$=0 の解は$y_n = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$,, $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y = 0$の解は$y_n = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

12 次の行列とベクトルについて，成分 $\boldsymbol{x}_r$ と $\boldsymbol{x}_n$ を求め，図 4.3 を正確に描け．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad と \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$Ax = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$、 x_2は自由変数。$x_2 = 1$とすると$x_1 = 1$。$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$より $Ax = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

よって、$x_r = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $x_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

問題 13〜23 は直交部分空間に関するものである．

13 部分空間 $\boldsymbol{V}$ と $\boldsymbol{W}$ の基底を行列 V と W の列とする．直交部分空間の判定を，$V^{\mathrm{T}}W =$ 零行列 と記述できる理由を説明せよ．これは，直交ベクトルに対する $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} = 0$ に対応する．

V^TW =零行列であることから、Vの各基底ベクトルはWの各基底ベクトルに直交する。すると、Vに含まれる任

意のvはWに含まれる任意のwと直交する。

14 床 $\boldsymbol{V}$ と壁 $\boldsymbol{W}$ は直交部分空間ではない．なぜならば，それらは（それらが交わる直線に沿った）非零ベクトルを共有するからである．$\mathbf{R}^3$ における平面 $\boldsymbol{V}$ と $\boldsymbol{W}$ が直交することはない．次の両方の行列の列空間に含まれるベクトルを求めよ．

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\\1&2\end{bmatrix} \quad と \quad B=\begin{bmatrix}5&4\\6&3\\5&1\end{bmatrix}$$

そのベクトルは，ベクトル $A\boldsymbol{x}$ であり $B\widehat{\boldsymbol{x}}$ でもある．3×4 の行列 $[A\ \ B]$ を考えよ．

Aの列空間はAx, Bの列空間は$B\hat{x}$であるので両方に含まれるベクトルは$Ax=B\hat{x}$。これは$Ax-B\hat{x}=$

$[A \quad -B]\begin{bmatrix}x\\\hat{x}\end{bmatrix}=0$。$[A \quad -B]\begin{bmatrix}x\\\hat{x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&-5&-4\\1&3&-6&-3\\1&2&-5&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\hat{x}_1\\\hat{x}_2\end{bmatrix}=0$よりｓ、

$x_1+2x_2-5\hat{x}_1-4\hat{x}_2=0, x_2-\hat{x}_1+\hat{x}_2=0, 3\hat{x}_2=0$

$x_1, x_2, \hat{x}_2$はピボット変数、$\hat{x}_1$は自由変数。よって、$x_n=\begin{bmatrix}3\\1\\1\\0\end{bmatrix}$

15 問題 14 を $\mathbf{R}^n$ における p 次元部分空間 $\boldsymbol{V}$ と q 次元部分空間 $\boldsymbol{W}$ に拡張せよ．$\boldsymbol{V}$ と $\boldsymbol{W}$ の共通集合が非零ベクトルとなることが保証できるのは，$p+q$ についてどのような不等式が成り立つときか？そのとき，これらの部分空間は直交することはありえない．

16 $\boldsymbol{N}(A^{\mathrm{T}})$ にあるすべての $\boldsymbol{y}$ が，列空間にあるすべての $A\boldsymbol{x}$ と直交することを，式 (2) の行列を用いた短縮表現を用いて証明せよ．$A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ から始めよ．

式(2)は零空間の任意のベクトルxと行空間の行の線形結合からなるベクトルの内積の直交性に関するものである。それは$x^T(A^Ty)=(Ax)^Ty=0^Ty=0$。

零空間にあるすべてのyは$A^Ty=0$を満たす。列空間にあるベクトルは列の線形結合の結果でありAxで表される。したがってAxとyの内積が 0 であればよい。$(Ax)^Ty=x^T(A^Ty)=0$.よって、$N(A^T)$にあるすべてのyが、列空間にあるすべてのAxと直交する。

17 $\mathbf{R}^3$ の部分空間で零ベクトルのみからなるものを $\boldsymbol{S}$ とするとき，$\boldsymbol{S}^\perp$ を求めよ．$\boldsymbol{S}$ が $(1,1,1)$ によって張られるとき，$\boldsymbol{S}^\perp$ を求めよ．$\boldsymbol{S}$ が $(1,1,1)$ と $(1,1,-1)$ によって張らえるとき，$\boldsymbol{S}^\perp$ の基底を求めよ．

$Ax=(1 \quad 1 \quad 1)x=S$のとき、$Ax=(1 \quad 1 \quad 1)x=0$ の零空間が$S^\perp$になる。それは$x_1+x_2+x_3=0$, x_2, x_3は自由変数である。よって、$x_n=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$

$Ax=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}x=0$ の零空間が$S^\perp$になる。それは$x_1+x_2+x_3=0$、$-2x_3=0$, x_1, x_3はピボット変数、x_2は自由変数。よって、$x_n=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$

18 $\boldsymbol{S}$ が 2 つのベクトル $(1,5,1)$ と $(2,2,2)$ のみからなるとする（部分空間ではない）．そのとき $\boldsymbol{S}^\perp$ は行列 $A=$ ＿＿ の零空間である．$\boldsymbol{S}$ が部分空間でなくても，$\boldsymbol{S}^\perp$ は部分空間である．

$A=\begin{bmatrix}1&5&1\\2&2&2\end{bmatrix}$

19 $\boldsymbol{L}$ が $\mathbf{R}^3$ における 1 次元部分空間（直線）であるとする．その直交補空間 $\boldsymbol{L}^\perp$ は，$\boldsymbol{L}$ に直交する ＿＿ である．さらに，$(\boldsymbol{L}^\perp)^\perp$ は $\boldsymbol{L}^\perp$ に直交する ＿＿ である．実際，$(\boldsymbol{L}^\perp)^\perp$ は ＿＿ と同一である．

20 $\boldsymbol{V}$ が $\mathbf{R}^4$ 全体であるとする．そのとき，$\boldsymbol{V}^\perp$ は ____ ベクトルのみからなる．さらに，$(\boldsymbol{V}^\perp)^\perp$ は ____ である．よって，$(\boldsymbol{V}^\perp)^\perp$ は ____ と同一である．

21 $\boldsymbol{S}$ がベクトル $(1,2,2,3)$ と $(1,3,3,2)$ によって張られるとする．$\boldsymbol{S}^\perp$ を張る 2 つのベクトルを求めよ．これは，どのような A について $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解くのと同じか？

$S^\perp$は$A=\begin{bmatrix}1&2&2&3\\1&3&3&2\end{bmatrix}$の零空間である。$Ax=\begin{bmatrix}1&2&2&3\\1&3&3&2\end{bmatrix}x=0$より、$x_1+2x_2+2x_3+3x_4=0,\ x_2+x_3-x_4=0$　x_1, x_2はピボット変数、x_3, x_4は自由変数。よって、$x_n=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-5\\1\\0\\1\end{bmatrix}$

22 $\mathbf{R}^4$ において $x_1+x_2+x_3+x_4=0$ を満たすベクトルからなる平面を $\boldsymbol{P}$ とするとき，$\boldsymbol{P}^\perp$ の基底を書け．$\boldsymbol{P}$ をその零空間に持つような行列を作れ．

23 部分空間 $\boldsymbol{S}$ が部分空間 $\boldsymbol{V}$ に含まれるとき，$\boldsymbol{S}^\perp$ が $\boldsymbol{V}^\perp$ を含むことを証明せよ．

$V^\perp$に含まれるxはVに含まれる任意のベクトルに直交する。Sに含まれるベクトルはすべてVに含まれるので、xはSに含まれる任意のベクトルに直交する。したがって、$V^\perp$に含まれるxはすべて$S^\perp$に含まれる。

問題 24〜30 は直交する列と行に関するものである．

24 $n\times n$ 行列が可逆であるとする，すなわち，$AA^{-1}=I$．そのとき，A^{-1} の第 1 列は，A のどの行によって張られる空間に直交するか？

25 A の列が互いに直交する単位ベクトルであるとき，$A^{\mathrm{T}}A$ を求めよ．

26 要素が非零である 3×3 行列で，その列ベクトルが互いに直交する行列 A を作れ．$A^{\mathrm{T}}A$ を計算せよ．それが対角行列となる理由を示せ．

27 直線 $3x+y=b_1$ と $6x+2y=b_2$ は ____ である．____ であるとき，それらは同じ直線となる．その場合，(b_1,b_2) はベクトル ____ に直交する．その行列の零空間は，直線 $3x+y=$ ____ である．その零空間にあるベクトルの 1 つは ____ である．

28 以下の命題がいずれも偽である理由を示せ．

(a) $(1,1,1)$ は $(1,1,-2)$ に直交するので，平面 $x+y+z=0$ と $x+y-2z=0$ は直交部分空間である．
(b) $(1,1,0,0,0)$ と $(0,0,0,1,1)$ によって張られる空間は，$(1,-1,0,0,0)$ と $(2,-2,3,4,-4)$ によって張られる部分空間の直交補空間である．
(c) 零ベクトルのみで交わる 2 つの部分空間は直交する部分空間である．

29 $\boldsymbol{v}=(1,2,3)$ を行空間と列空間に含む行列を求めよ．$\boldsymbol{v}$ を零空間と列空間に含む行列を求めよ．$\boldsymbol{v}$ をともに含むことができない部分空間の対はどれか？

挑戦問題

30 A が 3×4 行列，B が 4×5 行列であり，$AB=0$ であるとする．$\boldsymbol{N}(A)$ は $\boldsymbol{C}(B)$ を含む．$\boldsymbol{N}(A)$ の次元と $\boldsymbol{C}(B)$ の次元から，$\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)\le 4$ であることを証明せよ．

31 コマンド $N=\mathsf{null}(A)$ により A の零空間の基底が作られる．そのとき，コマンド $B=\mathsf{null}(N')$ により，A の ____ の基底が作られる．

32 $\mathbf{R}^2$ における 4 つの非零ベクトル $\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\boldsymbol{c},\boldsymbol{l}$ を考える．

(a) これらが，ある 2×2 行列の 4 つの基本部分空間 $C(A^{\mathrm{T}}),N(A),C(A),N(A^{\mathrm{T}})$ の基底となるための条件を示せ．
(b) その行列 A の例を示せ．

33 $\mathbf{R}^4$ における 8 つのベクトル $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{l}_2$ を考える．

(a) それらの対が，ある 4×4 行列の 4 つの基本部分空間の基底となるための条件を示せ．
(b) その行列 A の例を示せ．