エキゾチックオプション入門（Excel編)

2021/1/22(金)13:30-16:30

講師：森谷博之　Quasars22 Private Limited, Director

金融財務研究会

エキゾチックオプション

プレインバニラのコールとプット以外の複雑なオプション

- **経路独立型**

外国株式＋通貨ヘッジ合成オプション
ヘッジ金額調整通貨ヘッジ付き外国為替オプション、
株価・株式指数連動型通貨オプション

- **経路依存型**

ルックバックオプションモデル
アジアオプションモデル
バリアーオプションモデル
バイナリーオプションモデル

- **その他**

フォワードスタートオプション
エグゼクティブ・ストックオプション
パワーコントラクト
コーラブルオプション

ルックバックオプション

オプション期間での最高値で売り(プット)、最安値で買う(コール)権利を取引

- 行使価格変動ルックバックオプション
  - $c(S,S_{min},T)=max(S-S_{min},0)=S-S_{min}$
    - 期間中の最安値で買う権利
  - $p(S,S_{max},T)=max(S_{max}-S,0)=S_{max}-S$
    - 期間中の最高値で売る権利
- 行使価格固定ルックバックオプション
  - $c(S_{max},X,T)=max(S_{max}-X,0)$
    - 期間中の最高値で売り、権利行使価格で買う権利
  - $p(S_{min},X,T)=max(X-S_{min},0)$
    - 期間中の最安値で買い、権利行使価格で売る権利
- 期間限定ルックバックオプション

ルックバックオプション

- 行使価格変動ルックバックオプション (b≠0)
  - $c(S,S_{min},T)=\max(S-S_{min},0)=S-S_{min}$
    - 期間中の最安値で買う権利
  - $p(S,S_{max},T)=\max(S_{max}-S,0)=S_{max}-S$
    - 期間中の最高値で売る権利

$$C=S\,e^{(b-r)T}N(a_1)-S_{min}\,e^{-rT}N(a_2)$$
$$+\,Se^{-rT}\,\frac{\sigma^2}{2b}\left[\left(\frac{S}{S_{min}}\right)^{-\frac{2b}{\sigma^2}}N\left(-a_1+\frac{2b}{\sigma}\sqrt{T}\right)-e^{bT}N(-a_1)\right]$$

$$P=S_{max}\,e^{-rT}N(-a_2)-\,Se^{(b-r)T}N(-a_1)$$
$$+\,Se^{-rT}\,\frac{\sigma^2}{2b}\left[-\left(\frac{S}{S_{max}}\right)^{-\frac{2b}{\sigma^2}}N\left(a_1-\frac{2b}{\sigma}\sqrt{T}\right)+e^{bT}N(a_1)\right]$$

$$a_1=\frac{\log\frac{S}{m}+(b+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\qquad a_2=\frac{\log\frac{S}{m}+(b-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}=a_1-\sigma\sqrt{T}$$

ここで、コールではm=max, プットではm=min

ルックバックオプション

- 行使価格変動ルックバックオプション (b≠0)
  - $c(S,S_{min},T)=\max(S-S_{min},0)=S-S_{min}$
    - 期間中の最安値で買う権利

	A	B	C	D	E
1	ルックバックオプション		変動行使価格		
2		r	0.1		
3		q	0	b	0.1
4		vol	0.1		
5		Smin	70.0		
6			コール価値		
7			Spot/time	0.00	0.10
8			70.0	0.06	2.12
9			73.0	3.00	3.81

D8
```
=$C8*EXP(-$C$3*(D$7))*NORMSDIST(D54)-$C$5*EXP(-$C$2*(D$7))*NORMSDIST(D77)+D31
```

	A	B	C	D
31				0.03

D31
```
=+$C8*EXP(-$C$2*D$7)*$C$4^2/2/($E$3)*((($C8/$C$5)^(-2*($E$3)/$C$4^2))*NORMSDIST(-D54+2*($E$3)/$C$4*SQRT(D$7))-EXP(($E$3)*D$7)*NORMSDIST(-D54))
```

	A	B	C	D
53				a1
54				0.0105

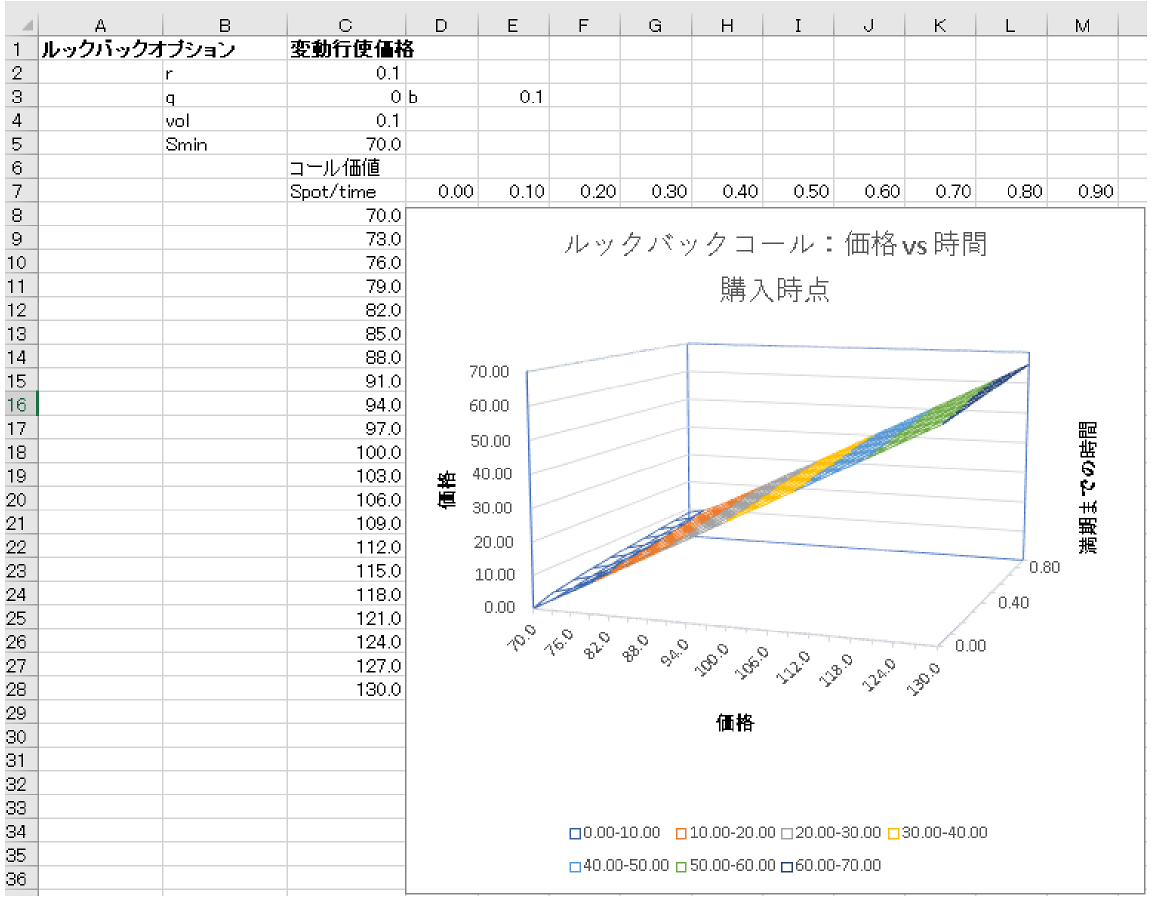
D54
```
=+(LN($C8/$C$5)+($E$3+0.5*$C$4^2)*D$7)/$C$4/SQRT(D$7)
```

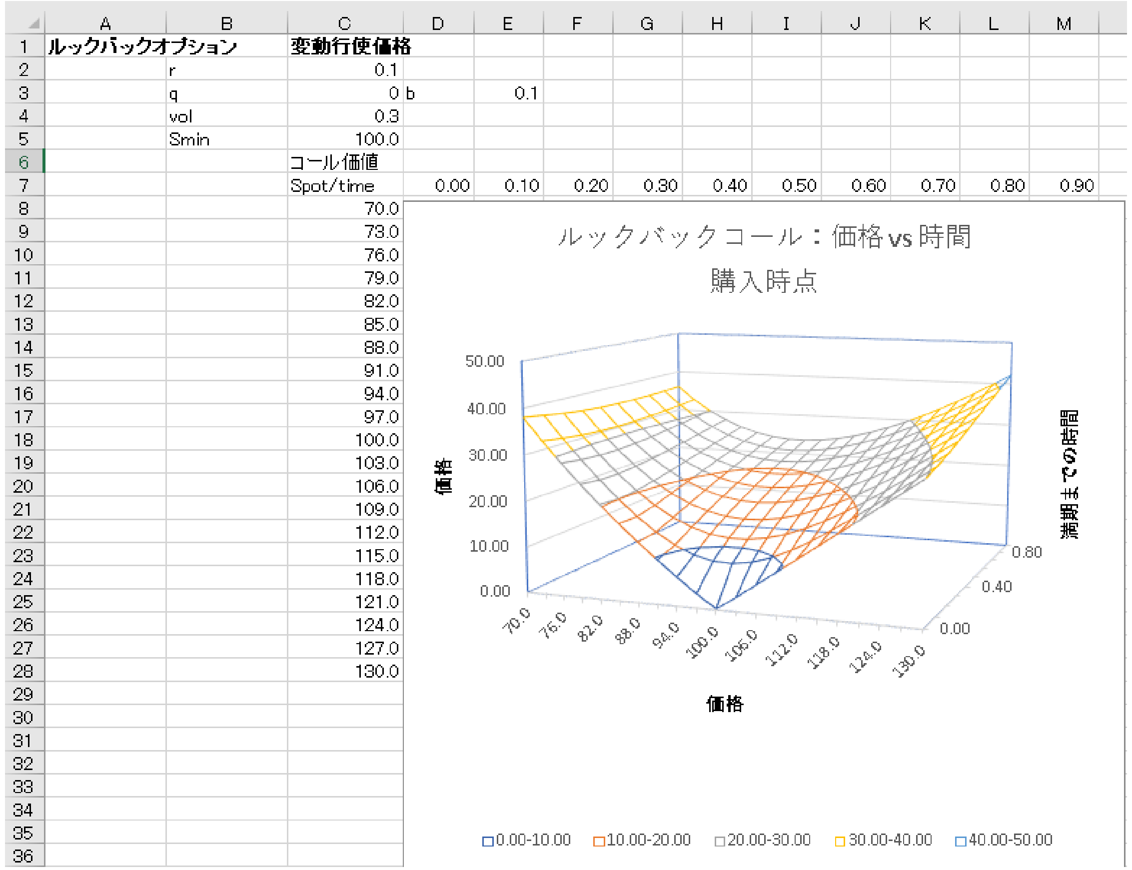
	A	B	C	D
76				a2
77				0.0095

D77
```
=D54-$C$4*SQRT(D$7)
```

ルックバックオプション

- 行使価格変動ルックバックオプション (b≠0)
  - $c(S,S_{min},T)=\max(S-S_{min},0)=S-S_{min}$
    - 期間中の最安値で買う権利





ルックバックオプション

- 行使価格固定ルックバックオプション (X≤S_{max} or X≥S_{min})
  - c(S_{max},X,T)=max(S_{max}-X,0)
    - 期間中の最高値で売り、権利行使価格で買う権利
  - p(S_{min},X,T)=max(X-S_{min},0)
    - 期間中の最安値で買い、権利行使価格で売る権利

$$c=e^{-rT}(S_{max}-X)+Se^{(b-r)T}N(e_1)-S_{max}e^{-rT}\,N(e_2)$$

$$+\,Se^{-rT}\ \frac{\sigma^2}{2b}\left[-\left(\frac{S}{S_{max}}\right)^{-\frac{2b}{\sigma^2}}N\left(e_1-\frac{2b}{\sigma}\sqrt{T}\right)+e^{bT}N(e_1)\right]$$

$$p=e^{-rT}(X-S_{min})-\ Se^{(b-r)T}\,N(-e_1)+S_{min}e^{-rT}\,N(-e_2)$$

$$+\,Se^{-rT}\ \frac{\sigma^2}{2b}\left[\left(\frac{S}{S_{min}}\right)^{-\frac{2b}{\sigma^2}}N\left(-e_1+\frac{2b}{\sigma}\sqrt{T}\right)-e^{bT}N(-e_1)\right]$$

$$e_1=\frac{\log\frac{S}{S_m}+(b+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\qquad e_2=\frac{\log\frac{S}{S_m}+(b-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}=e_1-\sigma\sqrt{T}$$

ここで、コールではm=max, プットではm=min

ルックバックオプション

- 行使価格固定ルックバックオプション (X>S_{max} or X<S_{min})
  - c(S_{max},X,T)=max(S_{max}-X,0)
    - 期間中の最高値で売り、権利行使価格で買う権利
  - p(S_{min},X,T)=max(X-S_{min},0)
    - 期間中の最安値で買い、権利行使価格で売る権利

$$C = S\, e^{(b-r)T}\, N(d_1) - X\, e^{-rT}\, N(d_2) + Se^{-rT}\, \frac{\sigma^2}{2b}\left[\left(\frac{S}{X}\right)^{-\frac{2b}{\sigma^2}} N\left(d_1 - \frac{2b}{\sigma}\sqrt{T}\right) + e^{bT} N(d_1)\right]$$

$$P = Xe^{-rT}\, N(-d_2) - Se^{(b-r)T}\, N(-d_1) + Se^{-rT}\, \frac{\sigma^2}{2b}\left[\left(\frac{S}{X}\right)^{-\frac{2b}{\sigma^2}} N\left(-d_1 + \frac{2b}{\sigma}\sqrt{T}\right) - e^{bT} N(-d_1)\right]$$

$$d_1 = \frac{\log\frac{S}{X} + (b + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad d_2 = \frac{\log\frac{S}{X} + (b - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

ここで、コールではm=max, プットではm=min

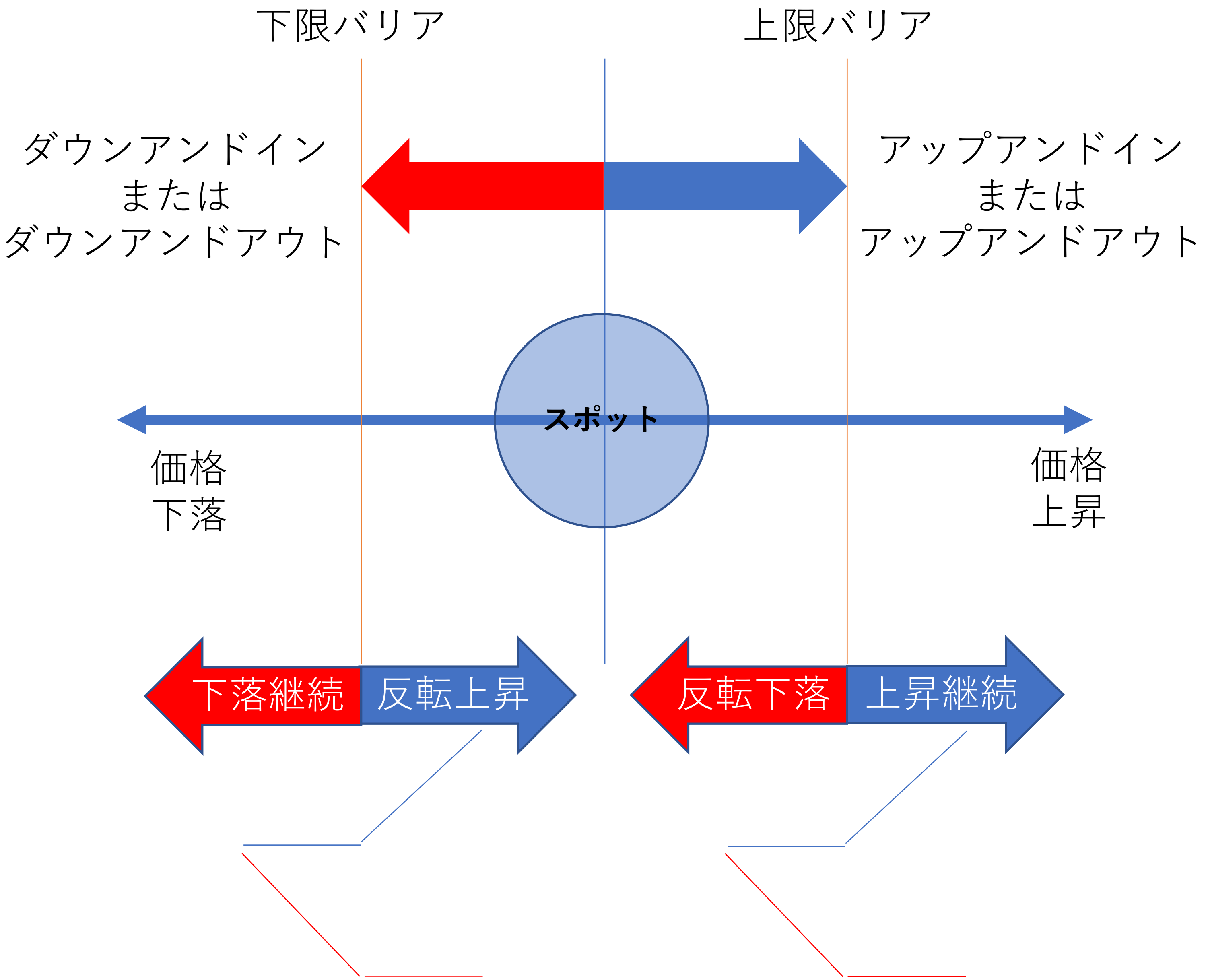
バリアオプション

原資産の価格がある一定の価格を上回るか下回るかで権利が発生したり、消滅したりするオプション

- 標準バリアオプション
  - インバリア、アウトバリアに分かれさらにそれぞれに４つのオプションに分かれる。
- 標準アメリカンバリアオプション
  - バリアイン、バリアアウトするアメリカンオプション
- ダブルバリアオプション
  - バリアが上限と下限の２つあるオプション

バリアオプション

- 標準バリアオプション
  - インバリア
    - ダウンアンドインコール
    - アップアンドインコール
    - ダウンアンドインプット
    - アップアンドインプット
  - アウトバリア
    - ダウンアンドアウトコール
    - アップアンドアウトコール
    - ダウンアンドアウトプット
    - アップアンドアウトプット



バリアオプション

- 標準バリアオプション：モデルの６つの構成要素

$$A=\emptyset Se^{(b-r)T}\,N(\emptyset x_1)\text{-}\emptyset X\;e^{-rT}\,N\left(\emptyset x_1-\emptyset\sigma\sqrt{T}\right)$$
$$B=\emptyset Se^{(b-r)T}\,N(\emptyset x_2)\text{-}\emptyset X\;e^{-rT}\,N\left(\emptyset x_2-\emptyset\sigma\sqrt{T}\right)$$
$$C=\emptyset Se^{(b-r)T}(H/S)^{2(\mu+1)}\,N(\eta y_1)\text{-}\emptyset X\;e^{-rT}(H/S)^{2\mu}N\left(\eta y_1-\eta\sigma\sqrt{T}\right)$$
$$D=\emptyset Se^{(b-r)T}(H/S)^{2(\mu+1)}\,N(\eta y_2)\text{-}\emptyset X\;e^{-rT}(H/S)^{2\mu}N\left(\eta y_2-\eta\sigma\sqrt{T}\right)$$
$$E=Ke^{-rT}\left[N(\eta x_2-\eta\sigma\sqrt{T})-(H/S)^{2\mu}N\left(\eta y_2-\eta\sigma\sqrt{T}\right)\right]$$
$$F=K\left[(H/S)^{\mu+\lambda}N(\eta z)+(H/S)^{\mu-\lambda}N\left(\eta z-2\eta\lambda\sigma\sqrt{T}\right)\right]$$

∅とηはオプションのタイプにより決まります。

$$x_1=\frac{\log(\mathrm{S/X})}{\sigma\sqrt{T}}+(1+\mu)\sigma\sqrt{T}$$

$$x_2=\frac{\log(\mathrm{S/H})}{\sigma\sqrt{T}}+(1+\mu)\sigma\sqrt{T}$$

$$y_1=\frac{\log(H^2/(\mathrm{SX}))}{\sigma\sqrt{T}}+(1+\mu)\sigma\sqrt{T}$$

$$y_2=\frac{\log(\mathrm{H/S})}{\sigma\sqrt{T}}+(1+\mu)\sigma\sqrt{T}$$

$$z=\frac{\log(\mathrm{H/S})}{\sigma\sqrt{T}}+\sigma\lambda\sqrt{T}$$

$$\mu=\frac{\mathrm{b}-\sigma^2/2}{\sigma^2}$$

$$\lambda=\sqrt{\mu^2+2r/\sigma^2}$$

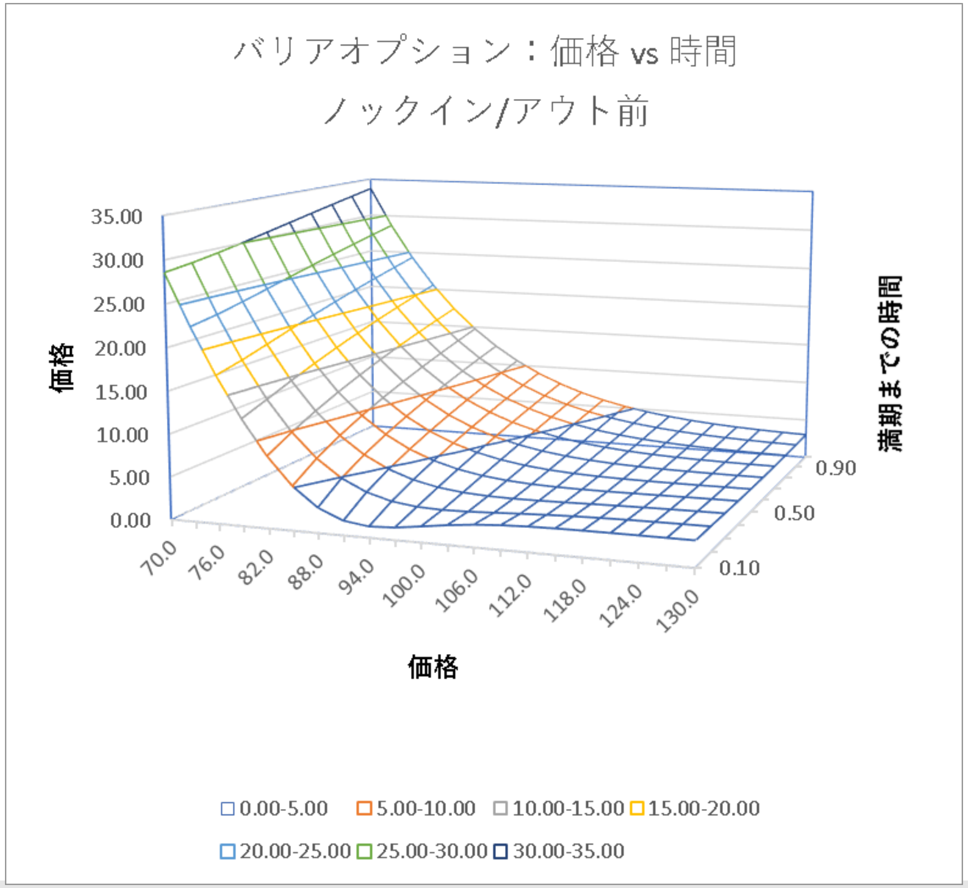
バリアオプション

	A	B
1	**バリアオプション**	
2		
3		
4		
5		
6	インバリア	
7	コール	
8	ダウンアンドイン	
9	X>H	C+E, ф=1, η=1
10	X<H	A-B+D+E, ф=1, η=1
11	アップアンドイン	
12	X>H	A+E, ф=1, η=-1
13	X<H	B-C+D+E, ф=1, η=-1
14	プット	
15	ダウンアンドイン	
16	X>H	B-C+D+E, ф=-1, η=1
17	X<H	A+E, ф=-1, η=1
18	アップアンドイン	
19	X>H	A-B+D+E, ф=-1, η=-1
20	X<H	C+E, ф=-1, η=-1
23	アウトバリア	
24	コール	
25	ダウンアンドアウト	
26	X>H	A-C+F, ф=1, η=1
27	X<H	B-D+F, ф=1, η=1
28	アップアンドアウト	
29	X>H	F, ф=1, η=-1
30	X<H	A-B+C-D+F, ф=1, η=-1
31	プット	
32	ダウンアンドアウト	
33	X>H	A-B+C-D+F, ф=-1, η=1
34	X<H	F, ф=-1, η=1
35	アップアンドアウト	
36	X>H	B-D+F, ф=-1, η=-1
37	X<H	A-C+F, ф=-1, η=-1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**バリアオプション**			**インバリア**	**ダウンアンドイン(X>H)**				**S>H**
2			r	0.08			ф	1	
3			q	0.04	b	0.04	η	1	
4			vol	0.25	mu	0.14	バリア	95	
5			strike	100	lamda	1.6061	リベート	3	
6	インバリア			コール価値					
7	コール			Spot/time	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
8	ダウンアンドイン			70.0	28.58	28.97	29.47	30.05	30.67
9	X>H	C+E, ф=1, η=1	0.00	73.0	22.57	23.09	23.76	24.49	25.24

バリアオプション

C	D	E	F	G	H	I
	インバリア	ダウンアンドイン(X>H)				S>H
r	0.08			Φ	1	
q	0.04	b	0.04	η	1	
vol	0.25	mu	0.14	バリア	95	
strike	100	lamda	1.6061	リベート	3	
	コール価値					
	Spot/time	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
	70.0	28.58	28.97	29.47	30.05	30.67



E8 `=+E77+E100`

E77 `=$H$2*$D8*EXP(($F$3-$D$2)*E$7)*($H$4/$D8)^(2*($F$4+1))*NORMSDIST($H$3*AA31)-$H$2*$D$5*EXP(-$D$2*E$7)*($H$4/$D8)^(2*$F$4)*NORMSDIST($H$3*AA31-$H$3*$D$4*SQRT(E$7))`

AA31 `=+(LN($H$4^2/$D8/$D$5))/$D$4/SQRT(E$7)+(1+$F$4)*$D$4*SQRT(E$7)`

E100 `=$H$5*EXP(-$D$2*E$7)*(NORMSDIST($H$3*P31-$H$3*$D$4*SQRT(E$7))-($H$4/$D8)^(2*$F$4)*NORMSDIST($H$3*AL31-$H$3*$D$4*SQRT(E$7)))`

P31 `=+(LN($D8/$H$4))/$D$4/SQRT(E$7)+(1+$F$4)*$D$4*SQRT(E$7)`

AL31 `=+(LN($H$4/$D8))/$D$4/SQRT(E$7)+(1+$F$4)*$D$4*SQRT(E$7)`

バイナリオプション

オールオアナッシング、デジタルオプション、FROs(fixed return options)と呼ばれるオプション。現在、EU,イギリス、カナダでギャンブルと区別がつかないとして取引が停止されている。

- ギャップオプション
- 現金ー損失オプション
- 資産ー損失オプション
- バイナリ・バリアオプション
- ダブルバイナリ・バリアオプション

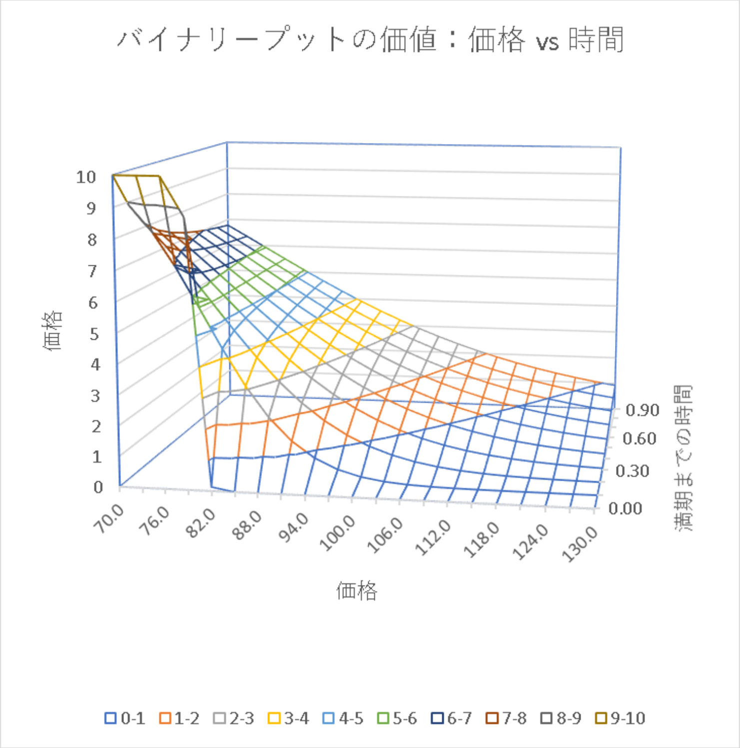
バイナリオプション

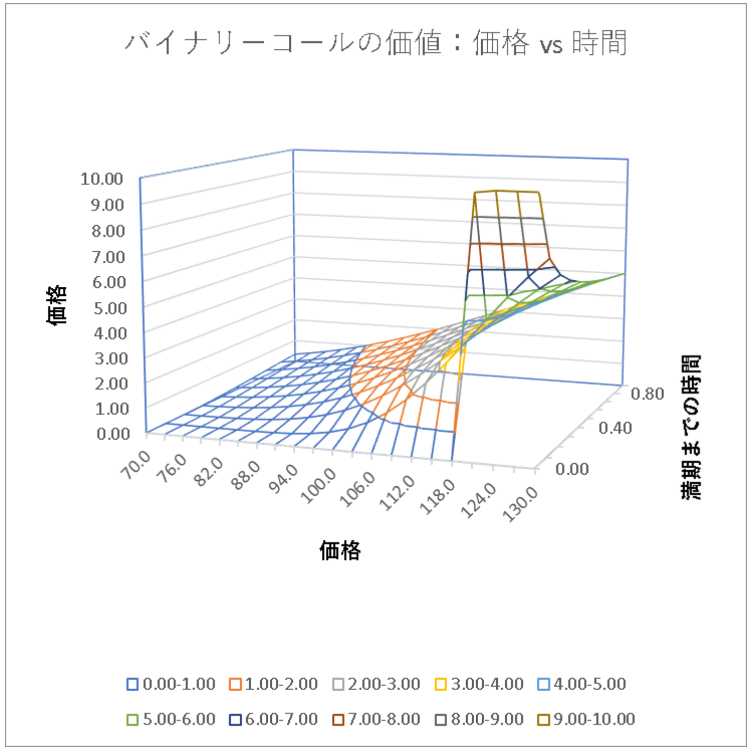
- 現金ー損失オプション(Cash-or-nothing)

$$c = Ke^{-rT}N(d)$$

$$P = Ke^{-rT}N(-d)$$

$$d = \frac{\log\left(\frac{S}{X}\right) + \left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$





アジアオプション

- 平均原資産価格
  - $c = \max(S_{s(0,T)} - k, 0)$
  - $p = \max(k - S_{s(0,T)}, 0)$
- 平均行使価格
  - $c = \max(s - K_{s(0,T)}, 0)$
  - $p = \max(K_{s(0,T)} - s, 0)$

$S_{s(0,T)}$:満期までの原資産の平均価格が満期の価格
$K_{s(0,T)}$:満期までの原資産の平均価格が行使価格

- 幾何平均オプション
- 算術平均オプション
- 離散算術平均オプション

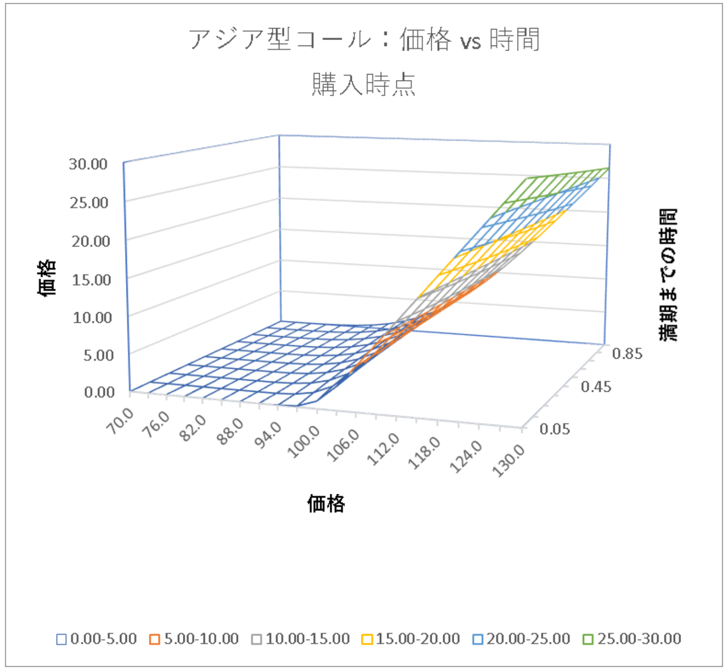
アジアオプション

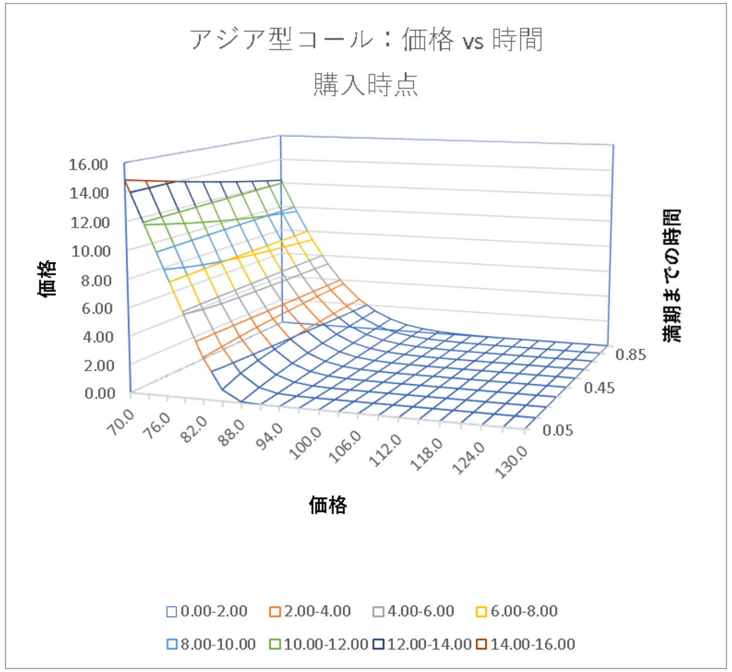
- 幾何平均原資産価格オプション
  - c=max($S_{s(0,T)}$-k,0)
  - p=max(k-$S_{s(0,T)}$,0)

$$c=Se^{(b_A-r)T}N(d_1)-Xe^{-rT}N(d_2)$$
$$p= Xe^{-rT}N(-d_2)-Se^{(b_A-r)T}N(-d_1)$$

$$d_1=\frac{\log\left(\frac{S}{X}\right)+\left(b_A-\frac{\sigma_A^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad d_2=\frac{\log\left(\frac{S}{X}\right)+\left(b_A+\frac{\sigma_A^2}{2}\right)T}{\sigma_A\sqrt{T}}=d_1-\sigma_A\sqrt{T}$$

$$\sigma_A=\frac{\sigma}{\sqrt{3}} \qquad b_A=\frac{1}{2}\left(b-\frac{\sigma^2}{6}\right)$$





通貨変換オプション

- 自国建て行使価格($)の外国株(¥)オプション
  - $c_{(\$/株)} = \max(e_{(\$/¥)} s^*_{(¥/株)} - k_{(\$/株)}, 0)$
  - $p_{(\$/株)} = \max(k_{(\$/株)} - e_{(\$/¥)} s^*_{(¥/株)}, 0)$
- 固定為替レート外国株(¥)オプション
  - $c_{(\$/株)} = e_{p(\$/¥)} \max(s^*_{(¥/株)} - k^*_{(¥/株)}, 0)$
  - $p_{(\$/株)} = e_{p(\$/¥)} \max(k^*_{(¥/株)} - s^*_{(¥/株)}, 0)$
- 株価指数(¥)連動通貨オプション
  - $c_{(\$/株)} = s^*_{(¥/株)} \max(e_{(\$/¥)} - k_{(\$/¥)}, 0)$
  - $p_{(\$/株)} = e^*_{(¥/株)} \max(k_{(\$/¥)} - e_{(\$/¥)}, 0)$

通貨変換オプション

- 固定為替レート外国株(¥)オプション
  - $c_{(\$/株)}$= $e_{p(\$/¥)}$ max($s^*_{(¥/株)}$ – $k^*_{(¥/株)}$,0)
  - $p_{(\$/株)}$= $e_{p(\$/¥)}$ max($k^*_{(¥/株)}$ －$s^*_{(¥/株)}$,0)

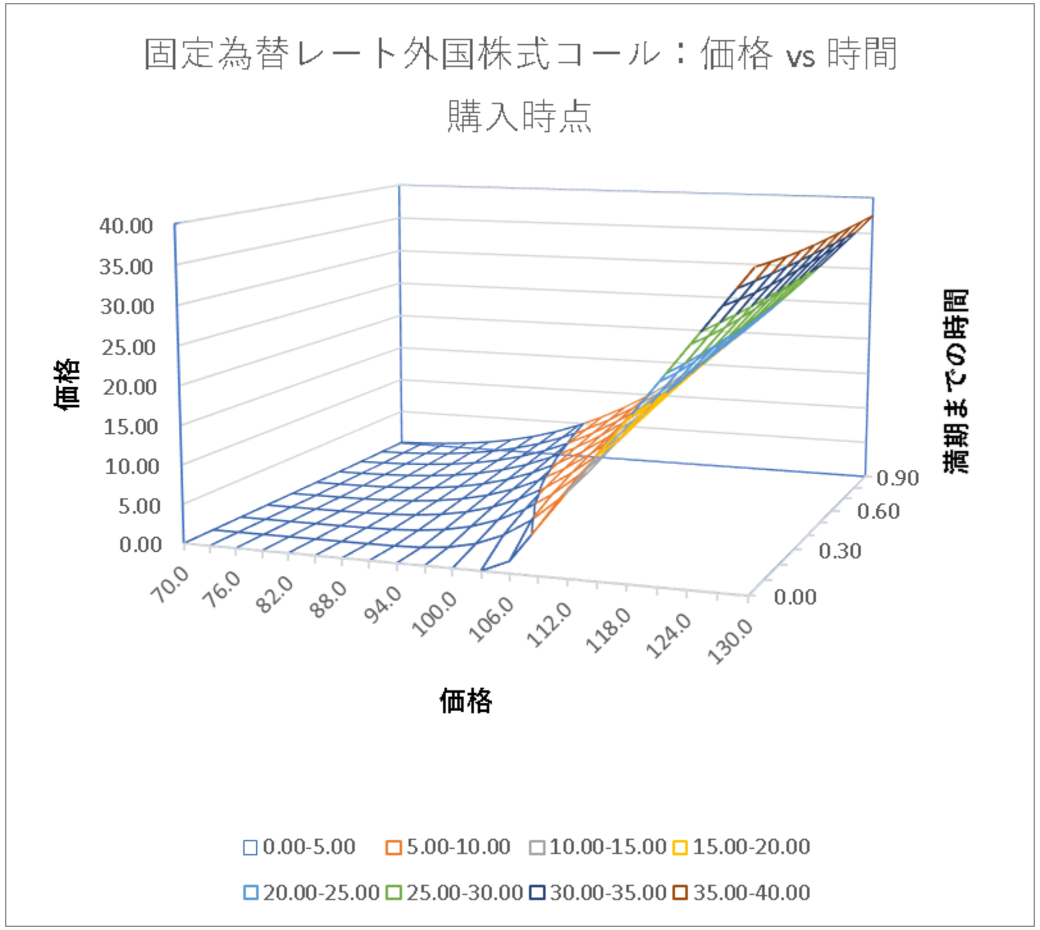
$$c = E^* E_p\left[S^* e^{-(r_f - r - q - \rho\sigma_{S^*}\sigma_E)T} N(d_1) - X^* e^{-rT} N(d_2)\right]$$
$$p = E^* E_p\left[X^* e^{-rT} N(-d_2) - S^* e^{-(r_f - r - q - \rho\sigma_{S^*}\sigma_E)T} N(-d_1)\right]$$

$$d_1 = \frac{\log(S^*/X^*) + \left(r_f - q - \rho\sigma_{S^*}\sigma_E + \frac{\sigma_{S^*}^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}},\ d_2 = d_1 \text{-} \sigma_{S^*}\sqrt{T}$$

通貨変換オプション

- 固定為替レート外国株(¥)オプション

	A	B	C	D	E	F	G
1	通貨換算オプション		固定為替レート外国株式オプション				
2		rf	0.05	c	0.3		
3		q	0.04	E*	1	Ep	1.5
4		vS*	0.2	r	0.08		
5		X*	105	vE	0.1		
6			コール価値				
7	S*	外国通貨建て原資産	Spot/time	0.00	0.10	0.20	0.30
8	X*	外国通貨建て行使価格	70.0	0.00	0.00	0.00	0.00
9		為替市場	73.0	0.00	0.00	0.00	0.00
10		外国株式	76.0	0.00	0.00	0.00	0.01
11	r	自国の無リスク金利	79.0	0.00	0.00	0.00	0.02
12	rf	外国金利	82.0	0.00	0.00	0.01	0.06
13	q	外国株の配当	85.0	0.00	0.00	0.04	0.16
14	Ep	事前に決められた自国通貨建てによる	88.0	0.00	0.01	0.12	0.36
15		外貨一単位の為替レート	91.0	0.00	0.04	0.31	0.72
16	E*	外国通貨の単位で示された	94.0	0.00	0.15	0.69	1.33
17		自国通貨一単位の為替レート	97.0	0.00	0.48	1.40	2.26
18	vS*	原資産のボラティリティ	100.0	0.00	1.23	2.53	3.60
19	vE	為替レートのボラティリティ	103.0	0.00	2.62	4.18	5.37
20	c	自国通貨と原資産の相関	106.0	1.50	4.79	6.40	7.61



エグゼクティブストックオプション

- 労働者や役員はオプションの満期以前に退職してしまう。その際にはストックオプションを失うことになる。役員が会社に残る確率を$e^{-\lambda T}$としてオプションの価値を求める。

$$c = e^{-\lambda T}\left[Se^{-(b-r)T}N(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2)\right]$$
$$p = e^{-\lambda T}\left[Xe^{-rT}N(-d_2) - Se^{-(b-r)T}N(-d_1)\right]$$

$$d_1 = \frac{\log(S/X)+\left(b+\sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}},\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$