Chaînes de Markov : Travaux dirigés

Exercice 1 (Lancers de pièce)
On lance une pièce équilibrée : les résultats des lancers sont des variables aléatoires indépendantes $Y_0, Y_1 \ldots$ à va urs 0 ou 1. Pour tout $n \geq 1$, n note $X_n = Y_n + Y_{n-1}$.

1. Calculer $\mathrm{P}(X_3 = 0 | X_1 = 0, X_2 = 1)$ et $\mathrm{P}(X_3 = 0 | X_2 = 1)$.
2. Est-ce que (X_n) est une chaîne de Markov ?

Exercice 2 (Classification d'états)
On considère la matrice de transition suivante :

$$P = \begin{bmatrix} .4 & .3 & .3 & 0 & 0 \\ 0 & .5 & 0 & .5 & 0 \\ .5 & 0 & .5 & 0 & 0 \\ 0 & .5 & 0 & .5 & 0 \\ 0 & .3 & 0 & .3 & .4 \end{bmatrix}$$

1. Quels sont les états récurrents, quels sont les états transitoires ?
2. Déterminer la (ou les) loi(s) stationnaire(s).

Exercice 3 (Trafic routier)
Sur une route, en moyenne, trois camions sur quatre sont suivis par une voiture, tandis que seule une voiture sur cinq est suivie par un camion. Déterminer les proportions de voitures et de camions sur cette route.

Exercice 4
Soit l'espace d'états $E = \{1, 2, 3, 4\}$ d'une chaîne de Markov homogène.

1. Compléter la matrice suivante pour qu'elle soit une matrice de transition :

$$P = \begin{bmatrix} . & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ . & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & . & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & . & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

2. Représenter le graphe associé.
3. La chaîne est-elle irréductible ? Indécomposable ?
4. Déterminer la (ou les) loi(s) stationnaire(s).
5. On considère qu'au temps 0, on est dans l'état 3. Pour un grand nombre d'unité de temps n, quelles sont les probabilités qu'on soit dans chacun des quatre états ?

Exercice 5 (Le coup du parapluie)
Un employé X, se rend chaque matin de son appartement à son bureau et fait le contraire le soir. Il dispose en tout de 3 parapluies, certains chez lui, les autres au bureau. A Douala, ville très ensoleillée au delà du raisonnable, il pleut 2 fois sur 3 lorsqu'il fait le trajet, et ce indépendamment du passé. Soit X_n le nombre de parapluies à son domicile lorsqu'il le quitte le matin.

1. Déterminer la matrice de transition de la chaîne de Markov associée.
2. Quelle est la proportion du temps où X est mouillé ?
3. Généraliser avec n parapluies.