Решение задачи о ветвящемся процессе

Условие задачи:

Дано:

- Каждая частица с вероятностью `p` производит **одного** потомка
- С вероятностью `1-p` погибает **без** потомков
- `p ∈ (0,1)`

Требуется найти производящую функцию $F_n(z)$ для общего числа частиц в первых `n` поколениях.

1. Производящая функция потомков одной частицы

Для одной частицы производящая функция имеет вид:

```
G(z) = p z + (1 - p)
```

2. Рекуррентное соотношение

Общее число частиц в первых `n` поколениях выражается через:

```
Fn(z) = z \cdot G(F_{n-1}(z))
```

где:

- `z` - исходная частица
- `G(F_{n-1}(z))` - вклад всех её потомков

3. Подстановка конкретной G(z)

```
Fn(z) = z \left[ p F_{n-1}(z) + (1 - p) \right]
```

4. Решение рекуррентного соотношения

Для малых n:

- $F_1(z) = z$
- $F_2(z) = z(pz + (1-p))$
- $F_3(z) = p^2z^3 + p(1-p)z^2 + (1-p)z$

Общее решение:

$$F_n(z) = \sum_{k=1}^n (1-p)p^{k-1}z^k + p^n z^{n+1}$$

5. Замкнутая форма

$$F_n(z) = \frac{(1-p)z(1-(pz)^n)}{1-pz} + p^n z^{n+1}$$

Проверка

Для $n=1$:

$$F_1(z) = \frac{(1-p)z(1-pz)}{1-pz} + p z^2 = (1-p)z + p z^2 = z$$

что соответствует ожидаемому результату.

Итоговый ответ:

$$F_n(z) = \boxed{\frac{(1-p)z(1-(pz)^n)}{1-pz} + p^n z^{n+1}}$$