Канонические уравнения:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = \pm d$$

эллипсоид, гиперболоида, конус

$\begin{cases} d = 0 & \text{— конус} \\ a^2, b^2 > 0 \text{ и } c^2 < 0 \end{cases}$

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

параболоида

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = d$$

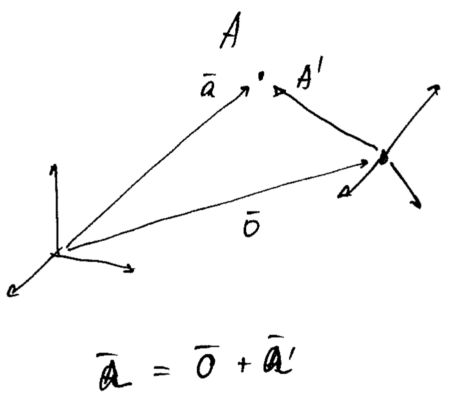
цилиндра, где d м. быть 0.

Каноническое ур-ние:

$$\boxed{a^2x^2 + b^2y^2 \pm C z^2 = \pm d \\ = d}$$

c, d — могут быть $>$ и <0.

В некоторой С.К с центром в О и базисом $\{i\, j\, k\}$, координаты произвольной точки (.) А:



$$xi + yj + zk = x'i' + y'j' + z'k'.$$

Координаты в-ров i', j' и k':

$\cancel{x(i,i)} + y$

$x\,(\cancel{i,i}) = x\,(i', i).$

$$\bar{A} = \bar{O} + \bar{A}'$$

$$x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = \bar{O} + x'\bar{i}' + y'\bar{j}' + z'\bar{k}'$$

$$x\,(i\,i) = (\bar{O}, \bar{i}) + x'(i'i) + y'(j'i) + z'(\bar{k}', \bar{k}).$$

$$y\,(j,j) = (\bar{O}, \bar{j}) + x'(i'j) + y(j'j) + z'(k'j).$$

$$z\,(k,k) = (\bar{O}, \bar{k}) + x'(i'k) + y\,(j'k) + z'(k'k).$$

$$\begin{pmatrix} i'i & j'i & k'i \\ i'j & j'j & k'j \\ i'k & j'k & k'k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$i'i$
$i'j$ — координата вектора i' в исходной С.К.
$i'k$

Т.о. координата в системе $\{\bar{o}, i' j' k'\}$ находятся из линейной система

$$\underbrace{\left[\bar{i}' \ \bar{j}' \ \bar{k}'\right]}_{\shortparallel} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} i_1 & j_1 & k_1 \\ i_2 & j_2 & k_2 \\ i_3 & j_3 & k_3 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t \end{matrix}$$

координата точки в исходной С.К

координата центра СК'

Из этой системы легко выражение x, y и z. Т.е. Зная координаты (x', y', z') и положение $(\bar{o}, i' j' k')$ СК' в исходной, можно найти коорд. в исходной.

$$x = x_0 + x' i_1 + y' j_1 + z' k_1$$

$$y = y_0 + x' i_2 + y' j_2 + z' k_2$$

$$z = z_0 + x' i_3 + y' j_3 + z' k_3.$$

Подставляем в каноническое уравнение:
(~~уберем~~ штрихи не пишем)!

$$a^2 (x_0 + x i_1 + y j_1 + z k_1)^2 + b^2 (y_0 + x i_2 + y j_2 + z k_2)^2 + c^2 (z_0 + x i_3 + y j_3 + z k_3)^2$$

$$(x_0 + x i_1 + y j_1 + z k_1)^2 =$$

$$= x_0^2 + \underline{x^2 i_1^2} + \underline{y^2 j_1^2} + \underline{z^2 k_1^2} + \underline{2x_0 x i_1} + \underline{2x_0 y j_1} + \underline{2x_0 z k_1} + \underline{2xy\, i_1 j_1} + \underline{2xz\, i_1 k_1} + \underline{2yz\, j_1 k_1}$$

$$= x^2 [i_1^2] + y^2 [j_1^2] + z^2 [k_1^2] +$$
$$+ x [2x_0 i_1] +$$
$$+ y [2x_0 j_1] +$$
$$+ z [2x_0 k_1] +$$
$$+ xy [2 i_1 j_1] +$$
$$+ xz [2 i_1 k_1] +$$
$$+ yz [2 j_1 k_1] + x_0^2 .$$

$$a^2(..)^2 + b^2(..)^2 + c(...)^2 =$$

$$= x^2 [a^2 i_1^2 + b^2 i_2^2 + c i_3^2] +$$
$$+ y^2 [a^2 j_1^2 + b^2 j_2^2 + c j_3^2] +$$
$$+ z^2 [a^2 k_1^2 + b^2 k_2^2 + c k_3^2] +$$
$$+ x [2x_0 i_1 a^2 + 2y_0 i_2 b^2 + 2 z_0 i_3 c] +$$
$$+ 2y [x_0 j_1 a^2 + y_0 j_2 b^2 + z_0 j_3 c] +$$
$$+ 2z [x_0 k_1 a^2 + y_0 k_2 b^2 + z_0 k_3 c] +$$
$$+ 2xy [i_1 j_1 a^2 + i_2 j_2 b^2 + i_3 j_3 c] +$$
$$+ 2xz [i_1 k_1 a^2 + i_2 k_2 b^2 + i_3 k_3 c] +$$
$$+ 2yz [j_1 k_1 a^2 + j_2 k_2 b^2 + j_3 k_3 c] +$$
$$+ x_0^2 a^2 + y_0^2 b^2 + z_0^2 c - d = 0.$$

Параметры в GQ картее — большие буквы A, B, C … K. (4)

По ним следует найти маленькие буквы a, b, c и d; и все i_{123}, j_{123}, k_{123}! и $x_0 y_0 z_0$. Всего 10 уравнений, ~~и~~ к ним следует прибавить: еще 6:

$$i_1^2 + i_2^2 + i_3^2 = 1.$$
$$j_1^2 + j_2^2 + j_3^2 = 1.$$
$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 1$$

~~$i_1 j_1$~~

$|i| = 1$

$|j| = 1$

$|k| = 1$

$(i, j) = 0$

$(i, k) = 0$

$(j, k) = 0.$

$[\cancel{i, j}] \cancel{=} k.$

А неизвестных: $4 + \cancel{4}\times 3 = 1\cancel{8}$ штук. Т.е. уравнений ~~на 3 больше~~. столько-же, сколько и неизвестных!

$$K = x_0^2 a^2 + y_0^2 b^2 + z_0^2 c - d.$$

$$A = a^2 i_1^2 + b^2 i_2^2 + c i_3^2$$
$$B = a^2 j_1^2 + b^2 j_2^2 + c j_3^2$$
$$C = a^2 k_1^2 + b^2 k_2^2 + c k_3^2$$

$$\frac{1}{2} D = a^2 i_1 j_1 + b^2 i_2 j_2 + c i_3 j_3$$
$$\frac{1}{2} E = a^2 j_1 k_1 + b^2 j_2 k_2 + c j_3 k_3$$
$$\frac{1}{2} F = a^2 i_1 k_1 + b^2 i_2 k_2 + c i_3 k_3.$$

$$\frac{1}{2} G = a^2 i_1 x_0 + b^2 i_2 y_0 + c i_3 z_0$$
$$\frac{1}{2} H = a^2 j_1 x_0 + b^2 j_2 y_0 + c j_3 z_0$$
$$\frac{1}{2} J = a^2 k_1 x_0 + b^2 k_2 y_0 + c k_3 z_0$$

$$\begin{pmatrix} i_1^2 & i_2^2 & i_3^2 \\ j_1^2 & j_2^2 & j_3^2 \\ k_1^2 & k_2^2 & k_3^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A\\ B\\ C\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i_1 j_1 & i_2 j_2 & i_3 j_3 \\ j_1 k_1 & j_2 k_2 & j_3 k_3 \\ i_1 k_1 & i_2 k_2 & i_3 k_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}D\\ E\\ F\end{pmatrix}$$

$$i_1^2 + i_2^2 + i_3^2 = 1 .$$

$$A+B+C = a^2\left(i_1^2+j_1^2+k_1^2\right) + b^2\left(i_2^2+j_2^2+k_2^2\right) + c\left(i_3^2+j_3^2+k_3^2\right).$$

$$A\cdot B = a^4 i_1^2 j_1^2 + a^2b^2 i_1^2 j_2^2 + a^2c\, i_1^2 j_3^2 + b^2a^2 i_2^2 j_1^2 + b^4 i_2^2 j_2^2 + b^2c\, i_2^2 j_3^2 + ca^2 i_3^2 j_1^2 + cb^2 i_3^2 j_2^2 + c^2 i_3^2 j_3^2 .$$

$$= a^4 i_1^2 j_1^2 + b^4 i_2^2 j_2^2 + c^2 i_3^2 j_3^2 + a^2b^2\left[i_1^2 j_2^2 + i_2^2 j_1^2\right] + a^2c\left[i_1^2 j_3^2 + i_3^2 j_1^2\right] + b^2c\left[i_2^2 j_3^2 + i_3^2 j_2^2\right].$$

$$DE = a^4 i_1 j_1^2 k_1 + a^2b^2 i_1 j_1 j_2 k_2 + a^2c\, i_1 j_1 j_3 k_3$$