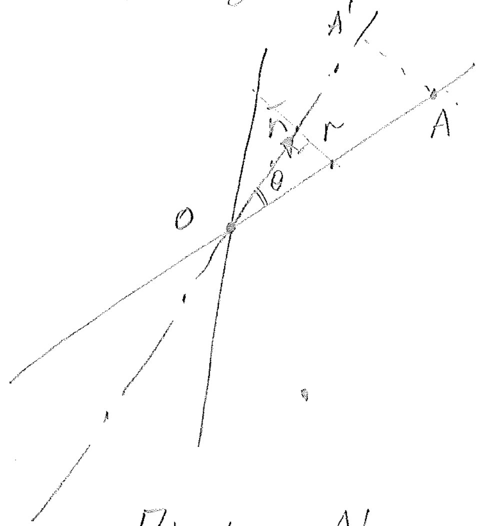
Вывод для конуса

Конус определяется фокусом O, направлением оси $\bar n$ и радиусом сечения на расстоянии 1 от фокуса r.



Некоторая (·) A с коорд (x, y, z) лежит на поверхности конуса, если вектор ее проекции на ось имеет длину:

$$\left|R_A - R_{A'}\right| = r\cdot\left|\bar R_{A'} - \bar R_0\right|.$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\theta = \frac{r}{1} = r.}$$

$$1 + r^2 = 1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

Проекция A' на ось ~~цилиндра~~ конуса:

$$\bar R_{A'} = \bar R_0 + \alpha\bar n, \quad \text{где}$$

$$\alpha = (\bar R_A, \bar n) - (\bar R_0, \bar n).$$

$$\bar R_0 + \alpha\bar n + \bar p = \bar R_A$$
$$(\bar R_0, \bar n) + \alpha = (\bar R_A, \bar n)$$
$$\alpha =$$

Уравнение для конуса:

единичный вектор

$$\left|R_A - \bar R_0 - \alpha\bar n\right|^2 = r^2\left|\cancel{\bar R_0} + \alpha\bar n - \cancel{\bar R_0}\right|^2$$

$$\left|R_A - \bar R_0 - \alpha\bar n\right|^2 = r^2\alpha^2 = r^2\left(\left(\bar R_A, \bar n\right)^2 + \left(\bar R_0, \bar n\right)^2 - 2\left(R_A, \bar n\right)\left(\bar R_0, \bar n\right)\right)$$

$$\left(\bar R_A - \bar R_0 - \alpha\bar n\right)\left(\bar R_A - \bar R_0 - \alpha\bar n\right) =$$

$$= \bar R_A^2 - 2(\bar R_A, \bar R_0) - 2\alpha(\bar R_A, \bar n) + \bar R_0^2 + 2\alpha(\bar R_0, \bar n) + \alpha^2 =$$

$$= r^2\left[(\bar R_A, \bar n)^2 + (\bar R_0, \bar n)^2 - 2(\bar R_A, \bar n)(\bar R_0, \bar n)\right].$$

$$= \bar R_A^2 - 2(\bar R_A, \bar R_0 + \alpha\bar n) + \bar R_0^2 + 2(\bar R_A, \bar n)(\bar R_0, \bar n) - 2(\bar R_0, \bar n)^2 +$$

$$+ (\bar R_A, \bar n)^2 + (\bar R_0, \bar n)^2 - 2(\bar R_A, n)(\bar R_0, \bar n) =$$

$$= (\bar R_A, \bar n)^2 r^2 + (\bar R_0, \bar n)^2 r^2 - 2r^2(\bar R_A, \bar n)(\bar R_0, \bar n) \Longrightarrow$$

должен быть r^2!

$$\cancel{= R_A^2}$$

$$(R_A, R_0 + \alpha \bar n) = (R_A, R_0) + \alpha (R_A, \bar n) =$$

$$= (\bar R_A, \bar R_0) + (\bar R_A, \bar n)^2 - (\bar R_0, \bar n)(\bar R_A, \bar n)$$

$$\Rightarrow \bar R_A^2 - 2(\bar R_A, \bar R_0) - 2(\bar R_A, \bar n)^2 + 2(\bar R_0, \bar n)(\bar R_A, \bar n) +$$
$$+ R_0^2 + 2(\bar R_A, \bar n)(\bar R_0, \bar n) - 2(\bar R_0, \bar n)^2 + (\bar R_A, \bar n)^2 + (\bar R_0, \bar n)^2 -$$
$$- 2(\bar R_A, \bar n)(\bar R_0, \bar n) - r^2(\bar R_A, \bar n)^2 - r^2(\bar R_0, \bar n)^2 + 2r^2(\bar R_A, \bar n)(\bar R_0, \bar n) = 0.$$

$$R_A^2 - 2(\bar R_A, \bar R_0) - (1+r^2)(\bar R_A, \bar n)^2 - (1+r^2)(\bar R_0, \bar n)^2 + R_0^2 + 2(\bar R_A, \bar n)(\bar R_0, \bar n)(1+r^2) = 0$$

Еще раз, аккуратно:

$$R_A^2 + R_0^2 - 2(\bar R_A, \bar R_0) - (1+r^2)\left[(\bar R_A, \bar n)^2 + (\bar R_0, \bar n)^2\right] + 2(1+r^2)(\bar R_A, \bar n)(\bar R_0, \bar n) = 0 \quad (A)$$

$$R_A^2 = x^2 + y^2 + z^2$$
$$R_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$$
$$(\bar R_A, \bar R_0) = x x_0 + y y_0 + z z_0 \qquad (B)$$
$$(\bar R_A, \bar n)^2 = (x x_n + y y_n + z z_n)^2 = x^2 x_n^2 + y^2 y_n^2 + z^2 z_n^2 +$$
$$+ 2xy\, x_n y_n + 2yz\, y_n z_n + 2zx\, z_n x_n.$$

$$(\bar R_A, \bar n) = x x_n + y y_n + z z_n.$$

Подставляем (B) в (A):

$$x^2 + y^2 + z^2 + R_0^2 - 2(x x_0 + y y_0 + z z_0) - (1+r^2)\big(x^2 x_n^2 + y^2 y_n^2 + z^2 z_n^2 +$$
$$+ 2xy\, x_n y_n + 2yz\, y_n z_n + 2zx\, z_n x_n\big) - (1+r^2)(\bar R_0, \bar n)^2 +$$
$$+ 2(1+r^2)(\bar R_0, \bar n)(x x_n + y y_n + z z_n) = 0$$

Собираем коэф-ты: (3)

$$x^2\left(1-x_n^2(1+r^2)\right)+y^2\left(1-y_n^2(1+r^2)\right)+z^2\left(1-z_n^2(1+r^2)\right)+$$
$$+xy\left[-(1+r^2)2x_ny_n\right]+yz\left[-(1+r^2)2y_nz_n\right]+zx\left[-(1+r^2)2z_nx_n\right]+$$
$$+x\left[-2x_0+x_n2(r-1)(\bar{R}_0,\bar{n})\right]+y\left[-2y_0+y_n2(r-1)(\bar{R}_0,\bar{n})\right]+$$
$$+z\left[-2z_0+z_n2(r-1)(\bar{R}_0,\bar{n})\right]+$$
$$+R_0^2-(1+r^2)(\bar{R}_0,\bar{n})^2=0$$

Уравнения:

$$(\bar{R}_0,\bar{n})=x_0x_n+y_0y_n+z_0z_n$$

x^2: $A=1-x_n^2(1+r^2)$.

y^2: $B=1-y_n^2(1+r^2)$.

z^2: $C=1-z_n^2(1+r^2)$.

$$\left(r=\operatorname{tg}\theta,\ \text{т.е.}\ 1+r^2=\frac{1}{\cos^2\theta}\right).$$

$$\Rightarrow A+B+C=3-(1+r^2)(x_n^2+y_n^2+z_n^2)=3-1-r^2.$$

$$r^2=2-(A+B+C).$$

$$1+r^2=3-(A+B+C).$$

xy: $D=-2(1+r^2)x_ny_n$

yz: $E=-2(1+r^2)y_nz_n$

zx: $F=-2(1+r^2)z_nx_n$

Проверка: $D^2(C-1)\overset{?}{=}E^2(A-1)$. и т.д.

x: $G=2x_n(1+r^2)(\bar{R}_0,\bar{n})-2x_0$

y: $H=2y_n(1+r^2)(\bar{R}_0,\bar{n})-2y_0$

z: $J=2z_n(1+r^2)(\bar{R}_0,\bar{n})-2z_0$

0: $K=R_0^2-(1+r^2)(\bar{R}_0,\bar{n})^2$

Как эти уравнения решать?

Т.е. как найти $x_n\,y_n\,z_n$, r, $\bar{R}_0$ по заданным $A-K$?