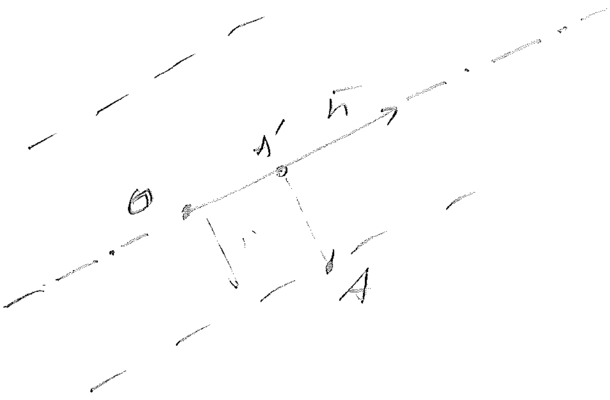
20.10.17

(1)

...ение для цилиндра заданного через точку
...ка его оси, направления оси и радиуса



Рассмотрим некоторую точку A с координатами (x, y, z). Она лежит на поверхности цилиндра, если вектор, соединяющий A с ее проекцией на ось цилиндра имеет длину r.

Обозначения: $\bar R_A$ – радиус-вектор (·) A.

Проекция A на ось цилиндра:

$$(\cdot)\ A': \begin{cases} (\bar R_A - \bar R_{A'}, \bar n) = 0 \\ \bar R_{A'} = \bar R_0 + \alpha \bar n \end{cases}$$

$$(\bar R_A - \bar R_0 - \alpha \bar n, \bar n) = (\bar R_A, n) - (\bar R_0, \bar n) - \alpha = 0$$

Отсюда для произвольной A находим α:

$$\alpha = (\bar R_A - \bar R_0, \bar n)$$

или в декартовых координатах:

$$\alpha = (x - x_0)x_n + (y - y_0)y_n + (z - z_0)z_n$$

Далее будем считать что α известна, но продолжим использовать для упрощения записи. Уравнение, выполняющееся если A лежит на поверхности цилиндра $\{O, \bar n, r\}$:

$$|\bar R_A - \bar R_0 - \alpha \bar n| = r$$

В декартовых координатах:

$$(x - x_0 - \alpha x_n)^2 + (y - y_0 - \alpha y_n)^2 + (z - z_0 - \alpha z_n)^2 = r^2$$

Раскрываем квадраты, чтобы получить коэф-ты перед $x^2 y^2 z^2$ и $xy\ yz\ zx$ и $x, y\ z$:

$$x^2 + (x_0+\alpha x_n)^2 - 2x(x_0+\alpha x_n) + y^2 + (y_0+\alpha y_n)^2 - 2y(y_0+\alpha y_n) +$$
$$+ z^2 + (z_0+\alpha z_n)^2 - 2z(z_0+\alpha z_n)^2 - r^2 = 0 \quad =$$

$$(x_0+\alpha x_n)^2 = x_0^2 + \alpha^2 x_n^2 + 2x_0\alpha x_n$$
$$+\ (y_0+\alpha y_n)^2 = y_0^2 + \alpha^2 y_n^2 + 2y_0\alpha y_n$$
$$+\ (z_0+\alpha z_n)^2 = z_0^2 + \alpha^2 z_n^2 + 2z_0\alpha z_n.$$

$$x_0^2+y_0^2+z_0^2 + \alpha^2\underbrace{(x_n^2+y_n^2+z_n^2)}_{=1} + 2\alpha\underbrace{(x_0x_n+y_0y_n+z_0z_n)}_{(\bar{R}_0,\bar{n})}.$$

$$x(x_0+\alpha x_n) =$$

$$\alpha = \underbrace{xx_n + yy_n + zz_n}_{\text{зависит от (.) A и направления оси цилиндра}} \underbrace{- x_0x_n - y_0y_n - z_0z_n}_{\text{зависит только от цилиндра } = \beta}$$

$$\alpha = xx_n + yy_n + zz_n - \beta$$

$$\alpha^2 = x^2x_n^2 + y^2y_n^2 + z^2z_n^2 + \beta^2 + 2xyx_ny_n + 2xzx_nz_n - 2xx_n\beta +$$
$$+ 2yzy_nz_n - 2yy_n\beta - 2zz_n\beta.$$

$$= \ x^2+y^2+z^2 + x_0^2+y_0^2+z_0^2 + x^2x_n^2 + y^2y_n^2 + z^2z_n^2 + \beta^2 +$$
$$+ 2xyx_ny_n + 2yzy_nz_n + 2zxz_nx_n - 2\beta(xx_n+yy_n+zz_n) -$$
$$- x2x_0 - y2y_0 - z2z_0 - 2\alpha\left[xx_n+yy_n+zz_n\right] - r^2 =$$

$$\Leftarrow x \quad \alpha(xx_n+yy_n+zz_n) = (xx_n+yy_n+zz_n-\beta)\cdot\chi = \chi^2 - \beta\chi =$$
$$= x^2x_n^2 + y^2y_n^2 + zz_n^2 + 2xyx_ny_n \overset{\chi}{+} 2xzx_nz_n + 2yzy_nz_n - \beta(xx_n+yy_n+zz_n)$$

③

$$= x^2\left(1 + x_n^2 - 2x_n^2\right) + y^2\left(1 + y_n^2 - 2y_n^2\right) + z^2\left(1 + z_n^2 - 2z_n^2\right) +$$

$$+ 2xy\left(x_n y_n - 2x_n y_n\right) +$$

$$+ 2yz\left(y_n z_n - 2y_n z_n\right) +$$

$$+ 2zx\left(x_n z_n - 2z_n x_n\right) +$$

$$+ x\left(\cancel{-2\beta x_n} - 2x_0 \cancel{+2\beta x_n}\right) + y\left(\cancel{-2\beta y_n} - 2y_0 \cancel{+2\beta y_n}\right) + z\left(\cancel{-2\beta z_n} - 2z_0 \cancel{+2\beta z_n}\right) +$$

$$+ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + \beta^2 - r^2 =$$

$$= x^2\left(1 - x_n^2\right) + y^2\left(1 - y_n^2\right) + z^2\left(1 - z_n^2\right) +$$

$$+ xy\left(-2x_n y_n\right) + yz\left(-2y_n z_n\right) + zx\left(-2z_n x_n\right) +$$

$$+ x\left(-2x_0\right) + y\left(-2y_0\right) + z\left(-2z_0\right) + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$

Сравнивая с уравнением GQ:

$A = 1 - x_n^2$ $\quad D = -2x_n y_n$

$B = 1 - y_n^2$ $\quad E = -2y_n z_n$

$C = 1 - z_n^2$ $\quad F = -2z_n x_n$.

$G = -2x_0 + 2x_n(R_0, n)$

$H = -2y_0 + 2y_n(R_0 n)$

$J = -2z_0 + 2z_n(R_0 n)$

$$K = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - \left(x_0 x_n + y_0 y_n + z_0 z_n\right)^2 - r^2 = \left(\bar{R}_0, \bar{R}_0 - \bar{n}\right) - r^2$$

$$= x_0(x_0 - x_n) + y_0(y_0 - y_n) + z_0(z_0 - z_n) - r^2$$

$$= R_0^2 - (R_0, n)^2 - r^2$$