Вычисление ~~то~~ компонент i_3 j_3 k_3.

$$\left.\begin{aligned} A &= a^2 + i_3^2\gamma \\ B &= a^2 + j_3^2\gamma \\ C &= a^2 + k_3^2\gamma \end{aligned}\right\}\ (1)$$

$$\left.\begin{aligned} d &= i_3 j_3 \gamma \\ e &= j_3 k_3 \gamma \\ f &= i_3 k_3 \gamma \end{aligned}\right\}\ (2)$$

В случае когда все d, e и f отличны от 0: все i_3, j_3 и k_3 отличны от 0. Вектор можно умножить на i_3, j_3 или k_3:

$i_3 \quad j_3 \quad k_3$

$$\alpha_i \vec{k} = \begin{pmatrix} i_3^2 \\ j_3 i_3 \\ k_3 i_3 \end{pmatrix} \qquad \alpha_k \vec{k} = \begin{pmatrix} i_3 k_3 \\ j_3 k_3 \\ k_3^2 \end{pmatrix}.$$

$$\alpha_j \vec{k} = \begin{pmatrix} i_3 j_3 \\ j_3^2 \\ k_3 j_3 \end{pmatrix}$$

квадрат выражается из (1), остальные — из (2):

$$\alpha_i \vec{k} = \left(\frac{A - a^2}{\gamma}, \frac{d}{\gamma}, \frac{f}{\gamma} \right)$$

$$\alpha_j \vec{k} = \left(\cancel{\frac{A-a^2}{\gamma}}\ \frac{d}{\gamma}, \frac{B - a^2}{\gamma}, \frac{e}{\gamma} \right)$$

$$\alpha_k \vec{k} = \left(\frac{f}{\gamma}, \frac{e}{\gamma}, \frac{C - a^2}{\gamma} \right).$$

Эти выражения всегда вычислимы, т.к. $\gamma < 0$

Так как нормировка компонент может быть $\forall$, γ можно убрать.

$$c_1 \vec{k} = (A-a^2,\ d,\ f) \qquad (1)$$

$$c_2 \vec{k} = (d,\ B-a^2,\ e) \qquad (2)$$

$$c_3 \vec{k} = (f,\ e,\ C-a^2) \qquad (3).$$

какое из выражений использовать, чтобы получить $\vec{k}$?

(1) ~~можн~~ было получено умножением на i_3. Т.е. им можно пользоваться, если $i_3 \neq 0$. В противном случае получим: (т.е. для $i_3 = 0$):

$$c_1 \vec{k} = (0,\ 0,\ 0).$$

~~Если выбирать~~

Критерий выбора (1), (2) или (3): по максимальному c.

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= (A-a^2,\ d,\ f) \\ k_2 &= (d,\ B-a^2,\ e). \\ k_3 &= (f,\ e,\ C-a^2). \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Только здесь пока неизвестно a^2!

$$A+B+C = 3a^2 + \gamma.$$

$$\det = i^2 j^2 k^2 \gamma^3 = (A-a^2)(B-a^2)(C-a^2).$$

$$de = j^2 \gamma^2 i_3 k = \frac{B-a^2}{\gamma} \cdot \gamma^2 \frac{f}{\gamma} = (B-a^2) f.$$

$$\boxed{\begin{aligned} de &= (B-a^2) f \\ df &= (A-a^2) e \\ ef &= (C-a^2) d \end{aligned}}$$

— Для определения a^2. ~~Если выбо~~ Можно использовать если $\exists$ по крайней мере 1 ненулевое f, e или d. Если все нулевые, то a^2 определяется по max. из A, B или C.

$$a^2 = \max(A, B, C).$$

Если $d=0$, $e=0$ и $f=0$:

$$a^2 = \max(A,B,C).$$

$$\gamma = \min(A,B,C) - a^2.$$

Иначе:

$$i = \cancel{\text{def}}\ \operatorname{argmax}(d,e,f).$$

$$i = \cancel{B}2: \quad a^2 = B - \frac{de}{f}$$

$$i = 1: \quad a^2 = A - \frac{df}{e}.$$

$$i = 0: \quad a^2 = C - \frac{ef}{d}.$$

$$a^2 = (C, A, B)[i] - \frac{(d,e,f)[\neq \max(def)]\ \mathrm{prod}}{\max(def)}$$

Интересно подставить эти выражения для a^2 в (2.4):

$$\left.\begin{aligned} \vec{k}_1 &= \left(\frac{df}{e},\ d,\ f\right). \\ \vec{k}_2 &= \left(d,\ \frac{de}{f},\ e\right) \\ \vec{k}_3 &= \left(f,\ e,\ \frac{ef}{d}\right). \end{aligned}\right\} \text{эти выражения использовать если } \exists$$

Решение системы для случая $a^2 = b^2$.

$$A = a^2(i_1^2 + i_2^2) + c i_3^2 = a^2(1 - i_3^2) + c i_3^2 .$$

i_3, j_3, k_3.
a^2, c $c - a^2 \equiv \gamma$

$$A = a^2 + i_3^2 (c - a^2).$$

$$B = a^2 + j_3^2 (c - a^2) \qquad (1)$$

$$C = a^2 + k_3^2 (c - a^2).$$

$$\frac{1}{2} D = a^2 (i_1 j_1 + i_2 j_2) + c\, i_3 j_3 = a^2(-i_3 j_3) + c\, i_3 j_3.$$

$$= i_3 j_3 (c - a^2). \qquad (2)$$

i	j	k	D	E	F
+	+	+	−	−	−
+	+	−			
+	·				

$$\frac{1}{2} E = j_3 k_3 (c - a^2)$$

$$\frac{1}{2} F = i_3 k_3 (c - a^2).$$

Уравнения, в которые входят G, H и J: x_0 и y_0 зависят от поворота „простой" СК вокруг ее оси k. (В для случая $a^2 = b^2$ фигура симметрична отн. своей оси). Поэтому повернем i так, чтобы i смотрела в сторону общей С.К. В этом случае $y_0 = 0$.

$$a^2 i_1 x_0 + c i_3 z_0 = \frac{G}{2}$$

$$a^2 j_1 x_0 + c j_3 z_0 = \frac{H}{2} \qquad (3)$$

$$a^2 k_1 x_0 + c k_3 z_0 = \frac{J}{2}.$$

Здесь $i_1 \equiv (i', i)$, $j_1 \equiv (j', i)$ и $k_1 \equiv (k', i)$ – координаты в-ра i в общей СК. Т.о., эту систему можно записать в векторном виде:

$$\vec{i}\, a^2 x_0 + \vec{k}\, c z_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} G \\ H \\ J \end{pmatrix}.$$

Последнее уравнение, в которое входит K, также зависит от выбора $y_0 = 0$:

$$K = x_0^2 a^2 + z_0^2 c - d. \qquad (4).$$

Для цилиндра, d — это есть квадрат радиуса. Для конуса $d = 0$, и это ур-ие определяет соотношение между x_0 и z_0.

Общая схема:

Из (1.1) и (1.2) можно определить a^2 и c. По ним-же, определяются и компоненты в-ра $\bar{k}$, i_3, j_3 и k_3.

Если c/a^2 — мало, то полагаем, что коэф-ты $A, B, \dots K$ представляют цилиндр, в котором $c = 0$. Для цилиндра z_0 — произвольно, т.к. оно не входит ни в одно ур-ние.

Вектор $\vec{i}$ определяется из (1.3): Для произвольного x_0:

$$\bar{i} = \begin{pmatrix} \dfrac{G}{2x_0a^2} \\ \dfrac{H}{2x_0a^2} \\ \dfrac{J}{2x_0a^2} \end{pmatrix},$$

и x_0 выбирается так, чтобы $|\bar{i}| = 1$:

$$\frac{G^2 + H^2 + J^2}{4a^4} = x_0^2.$$

Последним определяется радиус из (2.4):

$$\boxed{r^2 \equiv d = x_0^2 a^2 - K = \frac{G^2 + H^2 + J^2}{4a^2} - K.}$$

Если c/a^2 не мало, считаем что параметры $A, B, \dots K$ определяют конус. (3)

Из (1.3), умноженного на $\bar{k}$ определяем z_0:

$$\underbrace{(\vec{i},\bar{k})}_{=0} a^2 x_0 + \underbrace{(\bar{k},\bar{k})}_{=1} c z_0 = \frac{1}{2}\left(G i_3 + H j_3 + J k_3\right).$$

$$\boxed{z_0 = \frac{G i_3 + H j_3 + J k_3}{2c}.}$$

Из (2.4) определяется x_0:

$$K = a^2 x_0^2 + z_0^2 c$$

$$\boxed{x_0^2 = \frac{K - z_0^2 c}{a^2}}$$

И вектор $\vec{i}$ находится подстановкой x_0 и $\bar{k}$ в (1.3):

$$\boxed{\vec{i} = \begin{pmatrix} G \\ H \\ J \end{pmatrix} \frac{1}{2 x_0 a^2} - \bar{k}\, \frac{c z_0}{a^2 x_0}}$$