NOM : ............................................... PRENOM :............................................... GROUPE :........

# Contrôle 1 de Physique

*Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.*
***Réponses exclusivement sur le sujet***

## *Exercice 1* (Sur 5 points)

On considère, dans un repère orthonormé $(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y\vec{e}_z)$ direct, les trois vecteurs :

$\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ de composantes respectives: $\vec{U}(-4x,-2,+4)$ ; $\vec{V}(-1,+2,+3)$ ; $\vec{W}(-2,+4y,+6)$

1) a) Calculer le module de chacun des vecteurs pour $x = 0$ et $y = -1$.

$\|\vec{u}\| = \sqrt{(-4x)^2 + 4 + 16}$ en $x = 0$ $\|\vec{u}\| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

$\|\vec{V}\| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$.

$\|\vec{W}\| = \sqrt{4+16+36} = 2\sqrt{14} = \sqrt{56}$.

$(y = 1)$

b) Calculer le produit scalaire : $\vec{U}.\vec{V}$, pour quelle valeur de $x$ $\vec{U}$ est orthogonal à $\vec{V}$

$\vec{u}\cdot\vec{V} = (-4x)(-1) + 2(-2) + 4.3 = 4x - 4 + 12.$

$= 4x + 8$

$\vec{u} \perp \vec{V} \Rightarrow \vec{u}.\vec{V} = 0 \Rightarrow 4x + 8 = 0$ $\boxed{x = -\frac{8}{4} = -2}$

2- Calculer le produit vectoriel : $\vec{V} \wedge \vec{W}$, pour quelle valeur de $y$ les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont colinéaires.

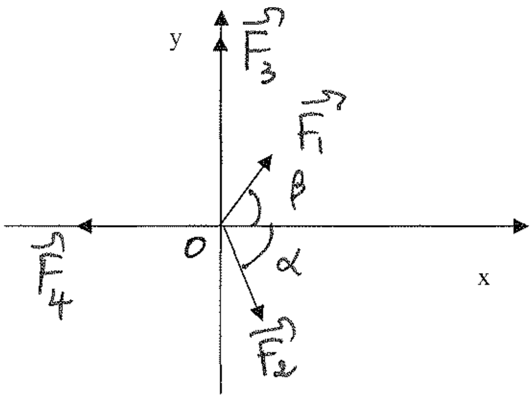
$$\vec{V} \wedge \vec{W} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ 4y \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 - 12y \\ -6 + 6 \\ -4y + 4 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{V} \wedge \vec{W} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 12 - 12y = 0 \\ -4y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = 1}$$

*Exercice 2* (4 points)

Calculer l'intensité de la résultante $\vec{R}$ des quatre forces représentées sur la figure suivante :

On donne : $F_1 = \sqrt{2}N$ , $F_2 = \sqrt{3}N$ ; $F_3 = 4N$ , $F_4 = 2N$ ; $\alpha = 60^\circ$ ; $\beta = 45^\circ$




$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4}$.

projection sur $\vec{Ox}$, et sur $\vec{Oy}$

$$\begin{cases} \text{sur } \vec{Ox} : F_1 \cos(\beta) + F_2 \cos(\alpha) + 0 - F_4 = \overline{R_x} \\ \text{sur } \vec{Oy} : F_1 \sin(\beta) - F_2 \sin(\alpha) + F_3 + 0 = \overline{R_y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{R_x} = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} - 2 = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \overline{R_y} = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 4 = \frac{7}{2}. \end{cases}$$

$$\|\vec{R}\| = \sqrt{\overline{R_x}^2 + \overline{R_y}^2} = \sqrt{\frac{49}{4} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{49 + (\sqrt{3} - 2)^2}$$ (on peut laisser le résultat sous cette forme).

*Exercice 3* (sur 7 points)

Calculer la charge totale $Q$ des distributions de charges continues suivantes :

1- Un fil de longueur L chargé avec une densité linéaire d'expression : $\lambda(y) = 2y^3$

$Q = \int_\ell \lambda \, dl$ (la de f) $\quad Q = \int_0^L 2y^3 \cdot dy$ ($dl = dy$)

$$\boxed{Q = 2\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^L = \frac{2L^4}{4} = \frac{L^4}{2}}$$

2- Un plan de longueur a et de largeur b, chargé avec une densité surfacique $\sigma(x,y)=\alpha.x^3.y^3$ (où $\alpha$ est constante)

$$\varphi = \iint_S \sigma\, ds \quad (\text{par def}) \qquad \varphi = \int_0^b\int_0^a \underbrace{\alpha x^3 y^3}_{\sigma}\, dx\, dy$$

$$\boxed{\varphi = \alpha\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^a \cdot \left[\frac{y^4}{4}\right]_0^b = \frac{\alpha a^4 b^4}{16} = \frac{\alpha (ab)^4}{16}}$$

3- Un disque de rayon R, chargé en surface avec une densité surfacique $\sigma(r,\theta)=C_1.r.\exp(C_2.\theta)$ ; où $C_1$ et $C_2$ sont des constantes.

$$\varphi = \iint_S \sigma\, dS \quad (\text{par def}) \qquad \varphi = \int_0^R\int_0^{2\pi} (C_1 r e^{C_2\theta})\, r\, dr\, d\theta$$

$$\varphi = C_1 \cdot \int_0^R r^2 dr \cdot \int_0^{2\pi} e^{C_2\theta} = C_1 \cdot \frac{R^3}{3} \cdot \frac{1}{C_2}\left(e^{2\pi} - e^0\right).$$

$$\varphi = \frac{C_1}{C_2}\frac{R^3}{3}\left(e^{2\pi}-1\right).$$

4- Un cylindre, de rayon R, de hauteur h, chargé avec une densité volumique $\rho(r)=K.r^2$ (K est une constante).

$$\varphi = \iiint_\tau \rho \cdot d\tau \quad (\text{par def}). \qquad \varphi = \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^h K r^2 \underbrace{r\, dr\, d\theta\, dz}_{d\tau}$$

$$= K \cdot \int_0^R r^3 dr \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = K . 2\pi . h . \frac{R^4}{4}$$

$$= K.\pi h \frac{R^4}{2}.$$

5- Une sphère de rayon R, chargée en volume avec une densité de la forme :

$\rho(r)=\rho_0.(1-\frac{r}{R})$ (Où $\rho_0$ et R sont des constantes)

$$\varphi = \iiint_\tau \rho\, d\tau = \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \rho_0\left(1-\frac{r}{R}\right)\underbrace{r^2 dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}_{d\tau_{sph}}.$$

$$= \rho_0 \cdot \int_0^R \left(r^2 - \frac{r^3}{R}\right) dr \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} \cdot \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta}_{=\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = 2}$$

$$= \rho_0 \cdot \left(\frac{R^3}{3} - \frac{R^4}{4R}\right) . 2\pi . 2$$

$$\boxed{\varphi = \rho_0 . \pi . \frac{R^3}{3}}$$

## *Exercice 4* (Sur 4 points)

Les équations horaires d'un point matériel M(x,y) sont données par :

$$\begin{cases} x(t) = t & (1) \\ y(t) = (1-t^2)^{1/2} & (2) \end{cases}$$

1- Donner l'équation ainsi que la nature de la trajectoire du point M.

(1) dans (2) $\Rightarrow$ $y(x) = (1-x^2)^{1/2}$.

$\Rightarrow$ $y^2 = 1-x^2$ $\Rightarrow$ $x^2+y^2=1$ : éq^t^ d'un cercle de centre O et de rayon 1

2- Donner les composantes des vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = \frac{1}{2}\cdot(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2t) \end{pmatrix}.$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \end{pmatrix}.$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} = \dot{v}_x = 0 \\ \ddot{y} = \dot{v}_y = \dfrac{-\sqrt{1-t^2} + 2t\frac{1}{2}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(-t)}{(1-t^2)}. \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{-1}{(1-t^2)^{3/2}} \end{pmatrix}$$

3- En déduire les modules de $\vec{v}$ et de $\vec{a}$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1 + \frac{t^2}{(\sqrt{1-t^2})^2}} = \sqrt{1+\frac{t^2}{(1-t^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)}}$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{0 + \frac{1}{(1-t^2)^3}} = \frac{1}{(1-t^2)^{3/2}}.$$