5. Nombres complexes, trigonométrie

5.1. Le corps des nombres complexes

5.1.1. Définition de $\mathbb{C}$

5.1.2. Notation cartésienne

5.1.3. Conjugaison

5.1.4. Module

5.1.5. Fonctions à valeurs complexes

5.2. Argument, exponentielle complexe

5.2.1. Notation $\mathrm{e}^{i\theta}$

5.2.2. Formules de Moivre et d'Euler

5.2.3. Forme trigonométrique

5.2.4. Fonction exponentielle complexe

5.3. Représentation plane

5.3.1. Le plan complexe

5.3.2. Propriétés géométriques liées au module

5.3.3. Propriétés géométriques liées à la conjugaison

5.3.4. Propriétés géométriques liées à l'argument

5.3.5. Transformations du plan complexe

5.3.6. Similitudes directes

5.3.7. Configurations géométriques

5.4. Equations polynomiales dans $\mathbb{C}$

5.4.1. Théorème de d'Alembert

5.4.2. Racines carrées d'un nombre complexe non nul

5.4.3. Equation du second degré

5.4.4. Racines N-ièmes d'un nombre complexe non nul

5.4.5. Racines N-ièmes de l'unité

5.5. Trigonométrie

5.5.1. Applications sinus et cosinus

5.5.2. Applications tangente et cotangente

5.5.3. Linéarisation

5.5.4. Opération inverse de la linéarisation

5. Nombres complexes, trigonométrie

5.1. Le corps des nombres complexes

5.1.1. Définition de $\mathbb{C}$

Définition

On munit l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des deux lois suivantes :

$$\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \\ (x, y)(x', y') = (xx' - yy', xy' + yx') \end{cases}$$

Proposition

Muni de ces deux lois, $\mathbb{R}^2$ possède une structure de corps. Plus précisément :

- Le neutre pour la loi + est $(0, 0)$.
- L'opposé de (x, y) est $(-x, -y)$.
- Le neutre pour le produit est $(1, 0)$.
- Pour tout $z = (x, y)$ non nul, l'inverse de z est : $\dfrac{1}{z} = (\dfrac{x}{x^2 + y^2}, \dfrac{-y}{x^2 + y^2})$.

Définition

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble $\mathbb{R}^2$ avec les deux lois précédentes.
Ses éléments $z = (x, y)$ sont appelés *nombres complexes*.

Proposition

L'ensemble $\mathbb{K} = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.
L'application $f : x \to (x, 0)$ est un isomorphisme de corps de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{K}$.

Conséquence

De cette manière $(\mathbb{R}, +, \times)$ apparait comme un sous-corps de $(\mathbb{C}, +, \times)$.
Cet isomorphisme permet d'identifier le complexe $(x, 0)$ avec le réel x.

5.1.2. Notation cartésienne

Dans le corps $(\mathbb{C}, +, \times)$, on note $i = (0, 1)$.
Pour tout $z = (x, y)$ de $\mathbb{C}$, on constate que $z = (x, 0) + (0, 1)(y, 0)$.
Avec l'identification de $\mathbb{R}$ avec un sous-corps de $\mathbb{C}$, on peut écrire : $z = x + iy$.
On a ainsi obtenu la notation *cartésienne* (ou *algébrique*) des nombres complexes.

Définition

Pour tout z de $\mathbb{C}$, il existe un couple unique (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tel que $z = x + iy$.
Le réel x est appelé *partie réelle* de z et est noté $\mathrm{Re}\,(z)$.
Le réel y est appelé *partie imaginaire* de z et est noté $\mathrm{Im}\,(z)$.
Un nombre complexe z est dit *réel* si $\mathrm{Im}\,(z) = 0$.
z est dit *imaginaire pur* si $\mathrm{Re}\,(z) = 0$, c'est-à-dire si $z = iy$, avec y réel.

Remarques

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes, avec $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$.

Les lois de $\mathbb{C}$ s'écrivent maintenant : $\begin{cases} z + z' = (x + x') + i(y + y') \\ zz' = (xx' - yy') + i(xy' + yx') \end{cases}$

$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$ (on *identifie* les parties réelles et les parties imaginaires.)

En particulier : $z = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ (attention à vérifier que x et y sont réels!).

Puissances du nombre i

On constate que $i^2 = -1$. Donc $\dfrac{1}{i} = -i$.

En fait, $z^2 = -1 \Leftrightarrow z \in \{i, -i\}$.

Plus généralement $i^3 = -i$, et $i^4 = 1$.

Le sous-groupe de $(\mathbb{C}^*,\times)$ engendré par i est cyclique d'ordre 4 : $(i) = \{1, i, -1, -i\}$.

Remarque

Si ω est un complexe non réel, alors on peut encore effectuer l'identification suivante :

$\forall\,(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4 : x + \omega y = x' + \omega y' \Leftrightarrow x = x'$ et $y = y'$.

5.1.3. Conjugaison

Définition

Soit $z = x + iy$ (x et y réels) un nombre complexe quelconque.
Le nombre complexe $\overline{z} = x - iy$ est appelé le *conjugué* de z.
On nomme *conjugaison* l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définie par $z \to \overline{z}$.

Proposition

La conjugaison est un automorphisme involutif du corps $(\mathbb{C}, +, \times)$.
Cela signifie que :

- $\overline{1} = 1; \quad \forall\, z \in \mathbb{C}, \overline{\overline{z}} = z$.
- $\forall\,(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \; : \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad$ et $\quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

Propriétés

- Pour tous complexes $z_1, \ldots, z_n$, $\overline{\sum_{k=1}^{n} z_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}$ et $\overline{\prod_{k=1}^{n} z_k} = \prod_{k=1}^{n} \overline{z_k}$
- Pour tout z complexe : $\mathrm{Re}\,(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}\,(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.
- z est réel $\Leftrightarrow \overline{z} = z$.
- z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \overline{z} = -z$.

5.1.4. Module

Définition

Soit $z = x + iy$ (x et y réels) un nombre complexe quelconque.
On appelle *module* de z la quantité, notée $|z|$, égale à $\sqrt{x^2+y^2}$.

Remarques

On constate que $z\overline{z} = |z|^2$ (utile pour se “débarrasser” du module).

En particulier, si z est non nul, l'inverse de z est $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Si z est réel, le module de z est égal à sa valeur absolue.

Les notations $|\ |$ (valeur absolue ou module) sont donc compatibles.

Propriétés

L'application “module” vérifie les propriétés suivantes, pour tous (z, z') de $\mathbb{C}^2$:

- $|z| \geq 0$; $\quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$; $\quad |zz'| = |z|\,|z'|$.

  Si z est non nul, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$, et $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$.
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$. Il y a égalité $\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z' = \lambda z$ ou $z = \lambda z'$.

  $\big||z| - |z'|\big| \leq |z \pm z'|$. Si $|z| \leq k < 1$, alors $1 - k \leq |1 + z| \leq 1 + k$.
- $\forall\, (u, v) \in \mathbb{C}^2, |u + v|^2 = |u|^2 + 2\mathrm{Re}\,(u\overline{v}) + |v|^2$.
- $\forall\, z \in \mathbb{C}, \max(|\mathrm{Re}\,(z)|, |\mathrm{Im}\,(z)|) \leq |z| \leq |\mathrm{Re}\,(z)| + |\mathrm{Im}\,(z)|$.

Généralisation

Pour tous complexes $z_1, \ldots, z_n$: $\left|\displaystyle\prod_{k=1}^{n} z_k\right| = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} |z_k|$ et $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

En particulier $\forall\, n \in \mathbb{N}, |z^n| = |z|^n$.

On a $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k| \Leftrightarrow$ les z_k sont produits de l'un d'entre eux par des réels positifs.

Proposition

L'ensemble $\mathcal{U}$ des complexes de module 1 est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
Pour tout z de $\mathcal{U}$, $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$.

Proposition *(Distance dans $\mathbb{C}$)*

Soit d l'application $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ vers $\mathbb{R}$, définie par : $\forall\, (z, z') \in \mathbb{C}^2, d(z, z') = |z - z'|$.
d est une *distance* sur $\mathbb{C}$, ce qui signifie qu'elle vérifie les propriétés suivantes :

Pour tous nombres complexes u, v et w :

- $d(u, v) \geq 0$; $\quad d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$; $\quad d(u, v) = d(v, u)$.
- $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ (inégalité triangulaire.)

5.1.5. Fonctions à valeurs complexes

Soit X un ensemble quelconque non vide.

$\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ désigne l'ensemble des applications définies sur X et à valeurs complexes.

Le plus souvent X désignera un intervalle de $\mathbb{R}$, ou l'ensemble $\mathbb{N}$ (dans ce dernier cas, on obtient l'ensemble des suites à valeurs complexes).

On sait que $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ est un anneau commutatif pour les lois déduites de $\mathbb{C}$, et définies par :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{F}(X, \mathbb{C}), \forall x \in X \ : \begin{cases} (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ (fg)(x) = f(x)g(x) \end{cases}$$

Le neutre de $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ pour la loi $+$ (resp. la loi $\times$) est l'application constante 0 (resp. 1).

Si f appartient à $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$, on définit les éléments $\mathrm{Re}\,(f)$, $\mathrm{Im}\,(f)$, $\overline{f}$ et $|\,f\,|$ de $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$:

$$\forall x \in X \ : \begin{cases} \mathrm{Re}\,(f)(x) = \mathrm{Re}\,(f(x)) & \mathrm{Im}\,(f)(x) = \mathrm{Im}\,(f(x)) \\ \overline{f}(x) = \overline{f(x)} & |\,f\,|(x) = |\,f(x)\,| \end{cases}$$

On a, pour les opérations “partie réelle”, “partie imaginaire”, “conjugaison” et “module”, des propriétés dans $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ analogues à celles qui ont été rencontrées dans $\mathbb{C}$.

5.2. Argument, exponentielle complexe

5.2.1. Notation $\mathrm{e}^{i\theta}$

Définition

Pour tout réel θ, on pose $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Théorème

L'application $\theta \to \mathrm{e}^{i\theta}$ est un morphisme surjectif du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $(\mathcal{U}, \times)$ des nombres complexes de module 1, de noyau $2\pi\mathbb{Z} = \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$:

- $\forall \theta \in \mathbb{R}, |\,\mathrm{e}^{i\theta}\,| = 1$.
- $\forall (\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{i\varphi} = \mathrm{e}^{i(\theta+\varphi)}$.
- $\forall z \in \mathcal{U}$ (càd $|\,z\,| = 1$), $\exists \theta \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{i\theta} = z$.
- $\forall \theta \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = 2k\pi \Leftrightarrow \theta \equiv 0\ (2\pi)$.

Propriétés

- L'application $\theta \to \mathrm{e}^{i\theta}$ est 2π-périodique : $\mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\varphi} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \theta - \varphi = 2k\pi \Leftrightarrow \theta \equiv \varphi\ (2\pi)$.
- $\forall \theta \in \mathbb{R}, \dfrac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}} = \mathrm{e}^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = \overline{\mathrm{e}^{i\theta}}$.
- Valeurs particulières :
  $\mathrm{e}^{i\pi/2} = i, \qquad \mathrm{e}^{i\pi} = -1, \qquad \mathrm{e}^{i3\pi/2} = -i, \qquad \mathrm{e}^{i2\pi/3} = j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5.2.2. Formules de Moivre et d'Euler

Proposition *(Formule de Moivre)*

Pour tout réel θ, et pour tout entier n : $(\mathrm{e}^{i\theta})^n = \mathrm{e}^{in\theta}$.
Autrement dit : $\forall\,\theta \in \mathbb{R}, \forall\,n \in \mathbb{Z}, (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

Proposition *(Formules d'Euler)*

Pour tout réel θ : $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2}$, et $\sin\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}$.

Utilisation

- "Moivre" permet, en développant $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ et en identifiant les parties réelles et imaginaires, d'exprimer $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ en fonction de puissances de $\cos\theta$ et/ou $\sin\theta$.
- Les formules d'Euler permettent, par utilisation de la formule du binôme et regroupement des termes équidistants des extrémités, de *linéariser* $\cos^n\theta$ et $\sin^n\theta$, pour $n \geq 2$, c'est-à-dire de les exprimer en fonction de quantités du type $\cos k\theta$ et/ou $\sin k\theta$.

5.2.3. Forme trigonométrique

Définition

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Il existe une unique classe de réels θ définie modulo 2π, telle que $z = |\,z\,|\mathrm{e}^{i\theta}$.

Cette classe de réels modulo 2π est appelée l'*argument* de z.

Chacun des réels θ de cette classe est appelée une *détermination* de l'argument de z (ou, par abus de langage, *un* argument de z), et on note : $\arg z = \theta\ (2\pi)$.

Remarque

L'argument d'un nombre complexe non nul z possède une unique détermination dans tout intervalle $[\alpha, \alpha + 2\pi[$, et en particulier dans les intervalles $[0, 2\pi[$ et $[-\pi, \pi[$.

Proposition

Tout nombre complexe non nul s'écrit de manière unique : $z = \rho\mathrm{e}^{i\theta}$, avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

ρ est le module de z et θ est une détermination de l'argument de z.

On dit alors que $z = \rho\mathrm{e}^{i\theta}$ est écrit sous forme *trigonométrique*.

Remarques

- $0 = \rho\mathrm{e}^{i\theta}$, avec $\rho = 0$ et θ réel quelconque. Parler de l'argument de 0 n'a donc aucun sens.
- Soit $z = x + iy = \rho\mathrm{e}^{i\theta}$ $(\rho > 0)$. Alors : $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ et $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{\rho}, \quad \sin\theta = \dfrac{y}{\rho} \end{cases}$

  Si $x \neq 0$, $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ (ce qui détermine θ modulo π.)

  Si $x \neq -1$, $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{y}{x+1}$ (ce qui détermine θ modulo 2π.)
- Si $z \neq 0$, mais si on n'est pas certain du signe du réel ρ :

  $z = \rho\mathrm{e}^{i\theta} \;\Leftrightarrow\; \Big(\rho = |\,z\,| \text{ et } \arg z = \theta\ (2\pi)\Big) \text{ ou } \Big(\rho = -|\,z\,| \text{ et } \arg z = \theta + \pi\ (2\pi)\Big)$

Argument et opérations dans $\mathbb{C}$

Soient u et v, non nuls : $u = \rho \mathrm{e}^{i\theta}$ et $v = r\mathrm{e}^{i\varphi}$ $(\rho > 0, r > 0)$.

$uv = \rho r \mathrm{e}^{i(\theta+\varphi)}$. En particulier : $\arg uv = \arg u + \arg v \ (2\pi)$.

$\overline{u} = \rho \mathrm{e}^{-i\theta}$. En particulier : $\arg \overline{u} = -\arg u \ (2\pi)$.

$\dfrac{1}{u} = \dfrac{1}{\rho}\,\mathrm{e}^{-i\theta}$. En particulier : $\arg \dfrac{1}{u} = -\arg u \ (2\pi)$.

$\dfrac{u}{v} = \dfrac{\rho}{r}\,\mathrm{e}^{i(\theta-\varphi)}$. En particulier : $\arg \dfrac{u}{v} = \arg u - \arg v \ (2\pi)$.

$\forall\, n \in \mathbb{Z},\ u^n = \rho^n \mathrm{e}^{in\theta}$. En particulier : $\arg u^n = n \arg u \ (2\pi)$.

$|\, u + v\,| = |\, u\,| + |\, v\,| \ \Leftrightarrow\ \arg u = \arg v \ (2\pi)$.

Argument et cas particuliers

Soit u un nombre complexe non nul.

$u \in \mathbb{R}^{+*} \ \Leftrightarrow\ \arg u = 0 \ (2\pi)$; $\qquad u \in \mathbb{R}^{-*} \ \Leftrightarrow\ \arg u = \pi (2\pi)$.

u est réel $\ \Leftrightarrow\ \arg u = 0 \ (\pi)$; $\qquad u$ est imaginaire pur $\ \Leftrightarrow\ \arg u = \pi/2 \ (\pi)$.

$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}^{+*},\ \arg \lambda u = \arg u \ (2\pi)$; $\qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^{-*},\ \arg \lambda u = \arg u + \pi \ (2\pi)$.

5.2.4. Fonction exponentielle complexe

Définition

Soit $z = x + iy$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$) un nombre complexe.
On pose $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{iy}$, encore noté $\exp z$.
On définit ainsi une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, appelée *exponentielle complexe.*

Remarques

- La restriction à $\mathbb{R}$ de la fonction $z \ \rightarrow\ \exp z$ est l'exponentielle réelle déjà connue.
  Sa restriction aux imaginaires purs est : $z = i\theta \ \rightarrow\ \mathrm{e}^{i\theta}$ définie précédemment.
- Pour tout nombre complexe $z = x + iy$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$) :
  $\exp z = \mathrm{e}^x(\cos y + i \sin y)$. Ainsi $\begin{cases} |\exp z\,| = \exp x \\ \arg \exp z = y \ (2\pi) \end{cases}$

Propriétés

Pour tous nombres complexes z et z' :

- $\exp(z + z') = \exp z\ \exp z'$.
- $\exp z = 1 \ \Leftrightarrow\ \exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = 2ik\pi$ (en particulier, $\exp 0 = 1$).
- $\exp z \in \mathbb{C}^*$ et $\quad \dfrac{1}{\exp z} = \exp(\text{-}z)$.
- $\overline{\exp z} = \exp \overline{z}$.
- $\exp z = \exp z' \ \Leftrightarrow\ \exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = z' + 2ik\pi \quad \Leftrightarrow\ z \equiv z' \ (2i\pi)$.
  L'application exponentielle est donc périodique de période $2i\pi$.

Résolution de l'équation $\exp z = a$

Soit $a = \rho e^{i\theta}$ un nombre complexe non nul ($\rho > 0$ est le module de a).

Pour tout nombre complexe $z = x + iy$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$) :

$$\exp z = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln \rho \\ y \equiv \theta\ (2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}, z = ln(\rho) + i(\theta + 2k\pi).$$

L'équation $\exp z = a$ possède donc une infinité de solutions.

Toutes se déduisent de l'une d'entre elles par ajout d'un multiple entier de $2i\pi$.

Remarques

- D'apès les résultats précédents, l'application exponentielle est un morphisme surjectif du groupe $(\mathbb{C}, +)$ sur le groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$ dont le noyau est $2i\pi\mathbb{Z}$.
- L'équation $\exp z = a$ (a non nul, z cherché sous la forme $x + iy$) possède une solution unique si on se limite à $y \in [\alpha, \alpha + 2\pi[$ (par exemple $y \in [0, 2\pi[$, ou $y \in [-\pi, \pi[$).

5.3. Représentation plane

5.3.1. Le plan complexe

Définition

Soit $\mathcal{P}$ le plan muni d'un repère orthonormé direct $(0, e_1, e_2)$.

L'application qui à $z = x + iy$ (x, y réels) associe le point M de coordonnées (x, y) est une bijection de $\mathbb{C}$ sur $\mathcal{P}$.

On dit que M est le *point image* de z, ou encore que z est l'*affixe* de M.

On note $M(z)$ pour désigner simultanément M et son affixe z.

Le plan $\mathcal{P}$, muni de cette correspondance, est appelé le *plan complexe*.

Le vecteur $OM = xe_1 + ye_2$ est appelé *vecteur image* du nombre complexe $z = x + iy$ (et on dit que z est l'affixe de ce vecteur).

Remarques

- $|\,z\,|$ est la distance $d(O, M)$ (ou la norme du vecteur OM).

  Un argument de z est une mesure de l'angle (Ox, OM).
- L'axe Ox est l'ensemble des points images des nombres réels.

  L'axe Oy est l'ensemble des points images des imaginaires purs.
- Si on se donne deux points $A(a)$ et $M(z)$, le vecteur image de $z - a$ est AM.

  Le module $|\,z - a\,|$ représente la distance $d(A, M)$.
- Le point N image de $a + z$ est le quatrième sommet du parallélogramme $OANM$ bâti sur les points O, A, M.

5.3.2. Propriétés géométriques liées au module

- M appartient au cercle de centre A et de rayon $r \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad d(A, M) = r \;\Leftrightarrow\; |\,z - a\,| = r$.

  M appartient au disque fermé de centre A et de rayon $r \geq 0 \quad \Leftrightarrow \; |\,z - a\,| \leq r$.

  M appartient au disque ouvert de centre A et de rayon $r > 0 \quad \Leftrightarrow \; |\,z - a\,| < r$.

  M est à l'extérieur du disque fermé de centre A et de rayon $r \geq 0 \quad \Leftrightarrow \; |\,z - a\,| > r$.

- Le cercle unité (centre en O, rayon 1) est formé des points images des complexes de module 1 (des éléments de $\mathcal{U}$).

  Le disque unité ouvert est l'ensemble images des z de $\mathbb{C}$ tels que $|\,z\,| < 1$.

  Le disque unité fermé est l'ensemble des points images des z de $\mathbb{C}$ tels que $|\,z\,| \leq 1$.

- Etant donnés $A(a)$, $B(b)$, et $M(z)$:

  M appartient à la médiatrice Δ du segment AB

  $\Leftrightarrow\; d(A, M) = d(B, M) \;\Leftrightarrow\; |\,z - a\,| = |\,z - b\,|$.

  L'inégalité $|\,z - a\,| < |\,z - b\,|$ définit le demi-plan ouvert délimité par Δ et contenant A.

5.3.3. Propriétés géométriques liées à la conjugaison

Soit M un point d'affixe z.

$N(\overline{z})$ est le symétrique de M par rapport à l'axe Ox.

$P(-z)$ est le symétrique de M par rapport à l'origine.

$Q(-\overline{z})$ est le symétrique de M par rapport à l'axe Oy.

Soient A et B deux points d'affixes respectifs a et b.

Le produit scalaire des vecteurs OA et OB est $Re(\overline{a}b)$.

5.3.4. Propriétés géométriques liées à l'argument

- Soient $A(a)$ et $B(b)$ deux points distincts de l'origine :

  O, A, B sont alignés si et seulement si $\arg(a) = \arg(b)\ (\pi)$.

  A et B sont alignés avec O et du même coté de O

  $\Leftrightarrow\; |\,a\,| + |\,b\,| = |\,a + b\,| \;\Leftrightarrow\; \arg(a) = \arg(b)\ (2\pi)$.

- Soient a et z deux nombres complexes non nuls.

  On pose $a = \rho e^{i\theta}$, avec $(\rho > 0)$, et $b = e^{i\theta}$.

  On définit les points $M(z)$, $N(bz)$, $P(\rho z)$, $Q(az)$.

  On passe de $M(z)$ à $P(\rho z)$ par l'homothétie h de centre O de rapport ρ.

  On passe de $M(z)$ à $N(e^{i\theta} z)$ par la rotation r de centre O et d'angle θ.

  On passe de $M(z)$ à $Q(az)$ par la composée $f = h \circ r = r \circ h$.

  f est la *similitude directe* de centre 0, de rapport ρ, d'angle θ.

  En particulier, $R(iz)$ se déduit de $M(z)$ par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

5.3.5. Transformations du plan complexe

Définition

Soit g une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ (définie éventuellement sur une partie de $\mathbb{C}$.)

Il lui correspond de façon unique une application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$, de la manière suivante :

Au point m d'affixe z, on associe le point M d'affixe $Z = g(z)$.

L'application $f : m(z) \rightarrow M(Z)$ est appelée *transformation du plan complexe.*

Cas particuliers simples

$f : m(z) \rightarrow M(Z = z + a)$ $(a \in \mathbb{C})$ est la translation de vecteur le vecteur image de a.

$f : m(z) \rightarrow M(Z = -z)$ est la symétrie par rapport au point O.

$f : m(z) \rightarrow M(Z = \overline{z})$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'axe Ox.

$f : m(z) \rightarrow M(Z = -\overline{z})$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'axe Oy.

$f : m(z) \rightarrow M(Z = \lambda z)$, avec λ réel, est l'homothétie de centre O et de rapport λ.

$f : m(z) \rightarrow M(Z = e^{i\theta} z)$ est la rotation de centre O et d'angle θ.

$f : m(z) \rightarrow M(Z = iz)$ est la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$.

$f : m(z) \rightarrow M(Z = jz)$ est la rotation de centre O et d'angle $2\pi/3$.

Soit a un complexe non nul et $f : m(z) \rightarrow M(Z = az)$: f est la composée commutative $(f = h \circ r = r \circ h)$ de l'homothétie h de centre O et de rapport $|\,a\,|$, et de la rotation r de centre O et d'angle $\arg(a)$ (2π).

5.3.6. Similitudes directes

Proposition

Soient a et b deux nombres complexes, a étant non nul.

Soit f la transformation de $\mathcal{P}$ définie par $m(z) \rightarrow M(Z = az + b)$.

- Si $a = 1$, f est la translation dont le vecteur est le vecteur image de b.
- Si $a \neq 1$, l'application f possède un point invariant unique Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$.

  f est alors la composée commutative de la rotation r de centre Ω et d'angle $\arg(a)$ et de l'homothétie h de centre Ω et de rapport $|\,a\,|$: $f = h \circ r = r \circ h$.

  On dit que f est la *similitude directe* de centre Ω, de rapport $|\,a\,|$, d'angle $\arg(a)$.

Remarques

- Si a est réel, f est l'homothétie de centre Ω et de rapport a.
- Supposons $|\,a\,| = 1$ (et toujours $a \neq 1$), et posons $a = e^{i\theta}$.

  Alors f est la rotation de centre Ω et d'angle θ (2π).
- Soit f une similitude de rapport ρ.

  Pour tous points M et N images respectives de m et n, on a : $d(M, N) = \rho d(m, n)$.

  Les distances sont donc multipliées par le facteur ρ.
- L'ensemble des transformations $f : m(z) \rightarrow M(Z) = az + b$ (avec $a \neq 0$) est un sous-groupe du groupe $\mathcal{B}(E)$ des bijections du plan $\mathcal{P}$.

5.3.7. Configurations géométriques

Soient A, B, C, D, quatre points distincts, d'affixes respectifs a, b, c, d.

Mesure d'angle

Une mesure de l'angle de vecteurs (AC, AD) est : $\arg(d-a) - \arg(c-a) = \arg \dfrac{d-a}{c-a}\ (2\pi)$.

Condition d'alignement

Les points (A, a), (B, b), (C, c) sont alignés

$\Leftrightarrow\ \arg(b-a) = \arg(c-a)\ (\pi)$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{b-a}{c-a}$ est réel

$\Leftrightarrow\ (b-a)(\overline{c}-\overline{a})$ est réel.

Condition d'orthogonalité

Les vecteurs AB et AC sont orthogonaux

$\Leftrightarrow\ \arg(b-a) = \arg(c-a) + \dfrac{\pi}{2}\ (\pi)$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{b-a}{c-a}$ est imaginaire pur

$\Leftrightarrow\ (b-a)(\overline{c}-\overline{a})$ est imaginaire pur.

Condition de cocyclicité

Les points (A, a), (B, b), (C, c) et (D, d) sont sur un même cercle (sont cocycliques)

$\Leftrightarrow$ les angles de vecteurs (AC, AD) et (BC, BD) sont égaux (modulo π)

$\Leftrightarrow\ \arg \dfrac{d-a}{c-a} = \arg \dfrac{d-b}{c-b}\ (\pi)$

$\Leftrightarrow\ \arg \dfrac{(d-a)(c-b)}{(c-a)(d-b)} = 0\ (\pi)$

$\Leftrightarrow\ (d-a)(c-b)(\overline{c}-\overline{a})(\overline{d}-\overline{b})$ est réel.

Triangle équilatéral

Les points A, B, C forment un triangle équilatéral

$\Leftrightarrow\ a + jb + j^2c = 0$ ou $a + jc + j^2b = 0$

$\Leftrightarrow\ a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

Barycentre

L'isobarycentre des points $M_k(z_k)$ $(1 \leq k \leq n)$ est le point G d'affixe $g = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k$.

5.4. Equations polynomiales dans $\mathbb{C}$

5.4.1. Théorème de d'Alembert

Théorème

Tout polynôme P non constant (c'est-à-dire de degré supérieur ou égal à 1), à coefficients complexes, admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Conséquence

Tout polynôme P non constant, à coefficients dans $\mathbb{C}$, se factorise en un produit de polynômes du premier degré. Le nombre de racines de P est donc n, chacune étant comptée autant de fois que sa multiplicité.

Racines complexes d'un polynôme à coefficients réels

Soit $P = a_n \mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_1\mathrm{X} + a_0$ un polynôme à coefficients réels.
Soit α une racine non réelle de P, avec la multiplicité m.
Alors $\overline{\alpha}$ est racine de P avec la même multiplicité.

5.4.2. Racines carrées d'un nombre complexe non nul

Proposition

Tout nombre complexe non nul Z admet exactement 2 racines carrées, qui sont opposées.

La méthode est la suivante, en posant $Z = A + iB$, et en cherchant z sous la forme $z = x + iy$:

$$z^2 = Z \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = A \\ 2xy = B \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = A \\ xy = \dfrac{B}{2} \\ x^2 + y^2 = |Z| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 = \dfrac{|Z| + A}{2} \\ y^2 = \dfrac{|Z| - A}{2} \\ xy = \dfrac{B}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \varepsilon \sqrt{\dfrac{|Z| + A}{2}} \\ x = \varepsilon' \sqrt{\dfrac{|Z| + A}{2}} \\ \varepsilon, \varepsilon' \in \{-1, 1\},\ \varepsilon\varepsilon' \text{ du signe de } B \end{cases}$$

5.4.3. Equation du second degré

Soit (E) l'équation : $az^2 + bz + c = 0$, d'inconnue z, avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, et $a \neq 0$.
Le *discriminant* de cette équation est le nombre complexe : $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta = 0$, l'équation (E) admet une racine double $z = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta \neq 0$, soit δ une des deux racines carrées de Δ.

  L'équation (E) admet deux racines complexes, $z = \dfrac{-b - \delta}{2a}$ et $z = \dfrac{-b + \delta}{2a}$.

  Dans tous les cas, la somme des racines est $-\dfrac{b}{a}$ et leur produit est $\dfrac{c}{a}$.

- Si $b = 2b'$, on peut utiliser le *discriminant réduit* $\Delta' = b'^2 - ac$.

  Les solutions s'écrivent alors: $z = \dfrac{-b' - \delta'}{a}$ et $z = \dfrac{-b' + \delta'}{a}$ où $\delta'^2 = \Delta'$.
- Si (a, b, c) sont réels, on peut distinguer les deux cas $\Delta > 0$ et $\Delta < 0$:

  Si $\Delta > 0$, les deux solutions de (E) sont réelles et s'écrivent : $z = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

  Si $\Delta < 0$, elles sont non réelles, conjuguées l'une de l'autre et s'écrivent : $z = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

5.4.4. Racines N-ièmes d'un nombre complexe non nul

Définition

Soit Z un nombre complexe non nul, et n un entier naturel non nul.
On appelle racine n-ième de Z tout nombre complexe z tel que $z^n = Z$.

Proposition

Soit $Z = \rho e^{i\theta}$ la forme trigonométrique de Z (avec $\rho > 0$).
Z possède exactement n racines n-ièmes, données par :
$z_k = \rho^{1/n} \exp i \left(\dfrac{\theta}{n} + 2k\dfrac{\pi}{n}\right)$, $0 \leq k \leq n - 1$.

La méthode est la suivante, en cherchant z sous la forme $z = re^{i\varphi}$ $(r > 0)$:

$$z^n = Z \Leftrightarrow r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = \rho \\ n\varphi \equiv \theta \ (2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \varphi \equiv \dfrac{\theta}{n} \ (\dfrac{2\pi}{n}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \\ 0 \leq k \leq n - 1 \end{cases}$$

Remarques

- Les points images M_k de ces n racines n-ièmes sont les sommets d'un polygône régulier convexe inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\rho^{1/n}$.
- Les n racines n-ièmes z_k de Z apparaissent dans la factorisation : $z^n - Z = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(z - z_k)$.
- En particulier, par identification des termes de degré $n - 1$ et des termes constants :
  - ◇ La somme des n racines n-ièmes z_k de Z est nulle (si $n \geq 2$).
  - ◇ Leur produit vaut $(-1)^{n-1}Z$.

5.4.5. Racines N-ièmes de l'unité

Proposition

On appelle racines n-ièmes de l'unité les racines n-ièmes dans $\mathbb{C}$ du nombre 1.
Elles sont données par par $\omega_k = \exp \dfrac{2ik\pi}{n}$, avec $0 \leq k \leq n - 1$.
Si on note $\omega = \omega_1 = \exp \dfrac{2i\pi}{n}$, alors pour tout k : $\omega_k = \omega^k$ (en particulier $\omega_0 = 1$).

Structure de groupe cyclique

L'ensemble des n racines n-ièmes de l'unité s'écrit $\{1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}\}$.
C'est un sous-groupe cyclique d'ordre n du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$. Il est noté $\mathcal{U}_n$.
ω_k est un générateur de $\mathcal{U}_n$
$\Leftrightarrow \mathcal{U}_n = (\omega_k) = \{1, \omega_k, \omega_k^2, \ldots, \omega_k^{n-1}\}$
$\Leftrightarrow$ les entiers k $(0 \leq k \leq n-1)$ et n sont premiers entre eux.

Propriétés

- -1 est une racine n-ième de l'unité si n est pair : c'est $\omega_{n/2}$.
- Les racines n-ièmes de 1 apparaissent dans la factorisation : $z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(z - \omega_k)$.

  Par identification, on en déduit:

  $$\begin{cases} \text{La somme des racines } n\text{-ièmes de l'unité est nulle (si } n \geq 2). \\ \text{Le produit des racines } n\text{-ièmes de l'unité vaut } (-1)^{n-1}. \end{cases}$$

- Considérons l'équation (E) : $z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + 1 = 0$

  Les $n-1$ racines de (E) sont les $n-1$ racines n-ièmes de l'unité distinctes de 1.
- Pour $n \geq 2$, les points images Ω_k des n racines n-ièmes de l'unité sont les sommets d'un polygône régulier convexe inscrit dans le cercle unité (un sommet est le point d'affixe 1.)
- Si Z est un nombre complexe non nul, et si z_0 est l'une de ses racines n-ièmes, alors les n racines n-ièmes de Z sont les $z_k = \omega_k z_0$, avec $0 \leq k \leq n-1$.

Cas particuliers

- Les deux racines carrées de l'unité sont 1 et -1 : $\mathcal{U}_2 = \{1, -1\} = (-1)$.
- Les racines cubiques de l'unité sont :

  $1, \quad j = \exp\dfrac{2i\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{et} \quad j^2 = \exp\dfrac{4i\pi}{3} = \ = 1/j.$

  Elles vérifient $1 + j + j^2 = 0$. D'autre part, $j^2 = \overline{j}$. $\mathcal{U}_3 = \{1, j, j^2\} = (j) = (j^2)$.
- Les racines quatrièmes de l'unité sont : 1, i, -1, et $-i$.

  On a : $\mathcal{U}_4 = \{1, i, -1, -i\} = (i) = (-i)$.

  Les trois racines de $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ sont i, -1, et $-i$.
- Les racines cinquièmes de l'unité sont $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$, avec $\omega = \exp\dfrac{2i\pi}{5}$.

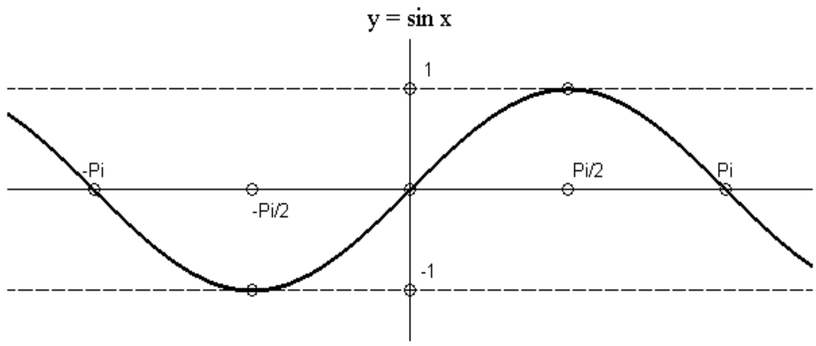
  Compte tenu du fait que 5 est premier, $\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$ engendrent tous $\mathcal{U}_5$.
- Les racines sixièmes de l'unité sont : 1, $-j^2 = \exp\dfrac{i\pi}{3}$, j, -1, j^2, et $-j$.

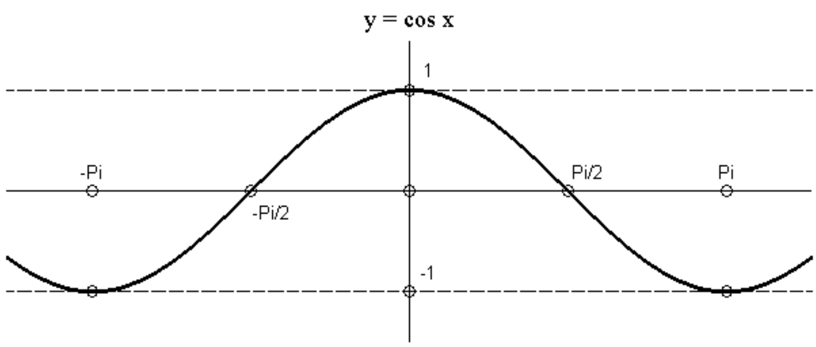
  On a : $\mathcal{U}_6 = (-j^2) = (-j)$.

5.5. Trigonométrie

5.5.1. Applications sinus et cosinus

- Les applications $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont définies et indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.
- Courbes représentatives :

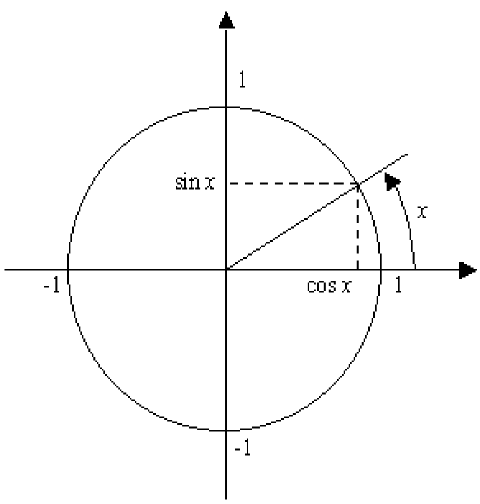


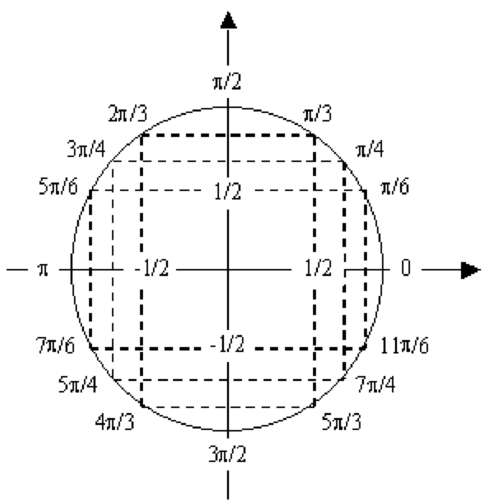


- Représentations utilisant le cercle trigonométrique :

  Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1,\ |\cos x\,| \leq 1,\ |\sin x\,| \leq 1$.

  $\forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a^2+b^2=1 \ \Leftrightarrow\ \exists\,\alpha \in \mathbb{R},\ \begin{cases} a = \cos\alpha \\ b = \sin\alpha \end{cases}$





- Quelques valeurs particulières :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

- Les applications $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont 2π-périodiques.
  L'application $x \mapsto \sin x$ est impaire et l'application $x \mapsto \cos x$ est paire.
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \sin(x+2\pi) = \sin x \\ \cos(x+2\pi) = \cos x \end{cases} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \sin(-x) = -\sin x \\ \cos(-x) = \cos x \end{cases}$$

- Passage de x à $\pi \pm x$ et à $\frac{\pi}{2} \pm x$:
$$\sin(\pi+x) = -\sin x \quad \cos(\pi+x) = -\cos x \quad \sin(\pi-x) = \sin x \quad \cos(\pi-x) = -\cos x$$
$$\sin(\tfrac{\pi}{2}+x) = \cos x \quad \cos(\tfrac{\pi}{2}+x) = -\sin x \quad \sin(\tfrac{\pi}{2}-x) = \cos x \quad \cos(\tfrac{\pi}{2}-x) = \sin x$$

- Dans les notations suivantes, k est un entier relatif quelconque :
$$\cos x = \cos\alpha \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \text{ ou} \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases} \qquad \sin x = \sin\alpha \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \text{ ou} \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}$$
$$\begin{cases} \cos x = 0 \ \Leftrightarrow\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \cos x = 1 \ \Leftrightarrow\ x = 2k\pi \\ \cos x = -1 \ \Leftrightarrow\ x = \pi + 2k\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin x = 0 \ \Leftrightarrow\ x = k\pi \\ \sin x = 1 \ \Leftrightarrow\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \sin x = -1 \ \Leftrightarrow\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

- Dérivées successives :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad \begin{cases} \sin' x = \cos x \\ \cos' x = -\sin x \end{cases} \quad \begin{cases} \sin^{(n)} x = \sin(x + n\frac{\pi}{2}) \\ \cos^{(n)} x = \cos(x + n\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

- Cosinus et sinus d'une somme ou d'une différence. Pour tous réels x et y :
$$\begin{cases} \cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y \\ \cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y \\ \sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y \\ \sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \\ \sin 2x = 2\sin x\cos x \end{cases}$$

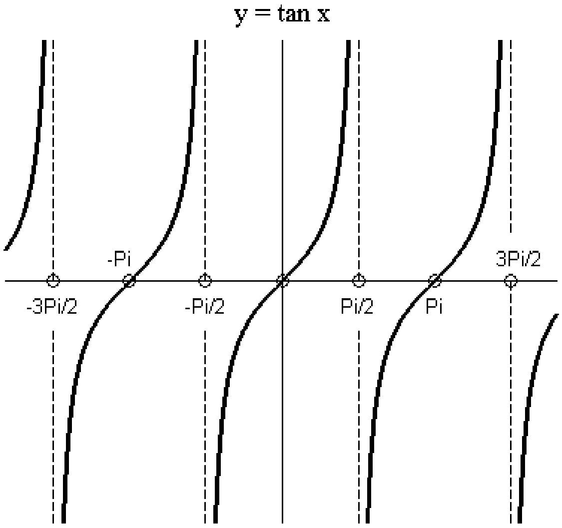
- Transformations de produits en sommes et de sommes en produits. Pour tous réels x, y, p, q :
$$\begin{cases} \cos x\cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)) \\ \sin x\sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)) \\ \sin x\cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)) \\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \\ \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \\ \sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \\ \sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2} \end{cases}$$

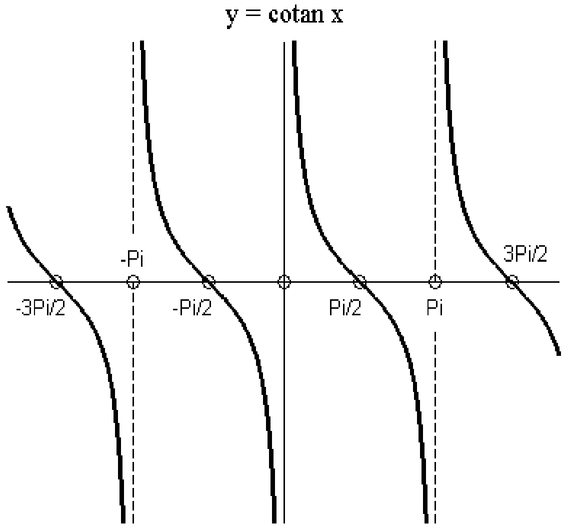
5.5.2. Applications tangente et cotangente

- L'application $x \mapsto \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ est indéfiniment dérivable sur $\left\{x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2}\ (\pi)\right\}$.

  L'application $x \mapsto \operatorname{cotan} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ est indéfiniment dérivable sur $\{x \in \mathbb{R}, x \neq 0\ (\pi)\}$.

- Courbes représentatives



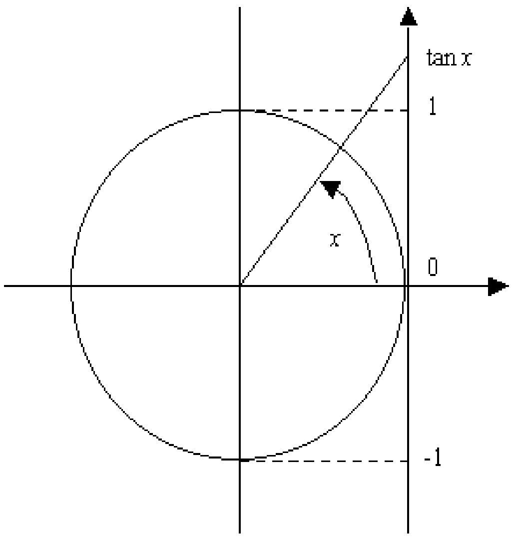


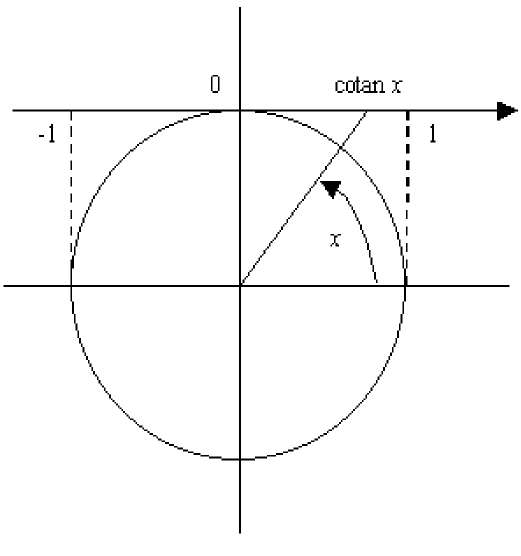
- Les applications $x \mapsto \tan x$ et $x \mapsto \operatorname{cotan} x$ sont impaires et π-périodiques :

$$\begin{cases} \tan(-x) = -\tan x \\ \operatorname{cotan}(-x) = -\operatorname{cotan} x \end{cases} \qquad \begin{cases} \tan(x+\pi) = \tan x \\ \operatorname{cotan}(x+\pi) = \operatorname{cotan} x \end{cases}$$

- Trois valeurs particulières : $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

- Représentations utilisant le cercle trigonométrique :





- Passage de x à $\pi - x$ ou à $\frac{\pi}{2} \pm x$:

$$\tan(\pi - x) = -\tan x, \quad \tan(\tfrac{\pi}{2} + x) = -\frac{1}{\tan x}, \quad \tan(\tfrac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan x}$$

- Pour tout réel $\alpha \neq \frac{\pi}{2}(\pi)$: $\tan x = \tan\alpha \ \Leftrightarrow\ x = \alpha\,(\pi)$. En particulier :

$$\tan x = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0\ (\pi), \quad \tan x = 1 \ \Leftrightarrow\ x = \tfrac{\pi}{4}\ (\pi), \quad \tan x = -1 \ \Leftrightarrow\ x = -\tfrac{\pi}{4}\ (\pi)$$

- Dérivées : $\quad \tan' x = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad \text{cotan}\,' x = -1 - \text{cotan}\,^2 x = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

- Tangente d'une somme ou d'une différence :

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}, \quad \tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

- Utilisation du changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$:

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

5.5.3. Linéarisation

- Formules d'Euler : $\quad \cos x = \dfrac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \dfrac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}$

- Ces formules permettent de calculer les puissances de $\cos x$ et de $\sin x$ en fonction de quantités du type $\cos(px)$ et/ou $\sin(px)$. Cette opération est appelée *linéarisation*.

  Pour cela on écrit $\quad \cos^n x = \left(\dfrac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}\right)^n, \quad \sin^n x = \left(\dfrac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}\right)^n$. On développe ensuite ces puissances par la formule du binôme, et on regroupe les termes équidistants des extrémités.

  On réutilise alors les formules d'Euler pour retouver des $\cos(px)$ et/ou des $\sin(px)$.

- Exemples :

$$\sin^4 x = \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{16}\,(\mathrm{e}^{4ix} - 4\mathrm{e}^{2ix} + 6 - 4\mathrm{e}^{-2ix} + \mathrm{e}^{-4ix}) = \frac{1}{8}\,(\cos 4x - 4\cos 2x + 3)$$

$$\cos^5 x = \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}\,(\mathrm{e}^{5ix} + 5\mathrm{e}^{3ix} + 10\mathrm{e}^{ix} + 10\mathrm{e}^{-ix} + 5\mathrm{e}^{-3ix} + \mathrm{e}^{-5ix})$$
$$= \frac{1}{16}\,(\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x)$$

$$\sin^5 x = \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}\right)^5 = \frac{1}{16}\,\frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{5ix} - 5\mathrm{e}^{3ix} + 10\mathrm{e}^{ix} - 10\mathrm{e}^{-ix} + 5\mathrm{e}^{-3ix} - \mathrm{e}^{-5ix})$$
$$= \frac{1}{16}\,(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x)$$

$$\cos^6 x = \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}\,(\mathrm{e}^{6ix} + 6\mathrm{e}^{4ix} + 15\mathrm{e}^{2ix} + 20 + 15\mathrm{e}^{-2ix} + 6\mathrm{e}^{-4ix} + \mathrm{e}^{-6ix})$$
$$= \frac{1}{32}\,(\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10)$$

5.5.4. Opération inverse de la linéarisation

- Formule de Moivre : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx$.

- Elle permet d'exprimer $\cos(nx), \sin(nx)$ en fonction de puissances de $\cos x$ et/ou de $\sin x$.

  On développe $(\cos x + i\sin x)^n$ par la formule du binôme. La partie réelle (resp. imaginaire) du résultat est alors égale à $\cos(nx)$ (resp. $\sin(nx)$).

  Si on cherche à obtenir un résultat où figurent surtout des puissances de $\cos x$ (resp. de $\sin x$) il convient de remplacer les puissances paires de $\sin x$ (resp. de $\cos x$) par des puissances de $(1-\cos^2 x)$ (resp. de $(1-\sin^2 x)$) puis de développer.

- Exemples :

$$(\cos x + i\sin x)^4 = \cos^4 x + 4i\cos^3 x\sin x - 6\cos^2 x\sin^2 x - 4i\cos x\sin^3 x + \sin^4 x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x \\ \sin 4x = 4\cos^3 x\sin x - 4\cos x\sin^3 x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x(1-\cos^2 x) + (1-\cos^2 x)^2 \\ \sin 4x = 4\cos x((1-\sin^2 x)\sin x - \sin^3 x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 \\ \sin 4x = 4\cos x(-2\sin^3 x + \sin x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}(\cos x + i\sin x)^5 &= \cos^5 x + 5i\cos^4 x\sin x - 10\cos^3 x\sin^2 x \\ &-10i\cos^2 x\sin^3 x + 5\cos x\sin^4 x + i\sin^5 x\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x \\ \sin 5x = 5\cos^4 x\sin x - 10\cos^2 x\sin^3 x + \sin^5 x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x(1-\cos^2 x) + 5\cos x(1-\cos^2 x)^2 \\ \sin 5x = 5(1-\sin^2 x)^2\sin x - 10(1-\sin^2 x)\sin^3 x + \sin^5 x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x \\ \sin 5x = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x \end{cases}$$

- Dans ce dernier cas, la formule donnant $\sin 5x$ se déduit facilement de celle donnant $\cos 5x$.

  En effet, en posant $x = \frac{\pi}{2} - y$, on trouve :

$$\begin{aligned}\sin 5x &= \sin\Big(\frac{5\pi}{2} - 5y\Big) = \sin\Big(\frac{\pi}{2} - 5y\Big) \\ &= \cos 5y = 16\cos^5 y - 20\cos^3 y + 5\cos y = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x\end{aligned}$$