ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Premier Ordre

$(E)\ a(t)y' + b(t)y = c(t)$
$(E_0)\ a(t)y' + b(t)y = 0$

1 : Solutions de l'equation Homogène (E_0) y_0 :

$y_0 : y_0 = ke^{-\int \frac{b(t)}{a(t)}\,dt} \quad k \in \mathbb{R}$

2 : Solution Particulière y_p :

- Solution évidente
- Solution Donnée dans l'énoncé
- Méthode de la variation de la constante :

y_p de la forme $y_p(t) = k(t)y_0(t)$
Donc $y_p'(t) = k'(t)y_0(t) + k(t)y_0'(t)$
On remplace dans (E)
$ay_p'(t) + by_p(t) = c(t) \longrightarrow a(k'(t)y_0(t) + k(t)y_0'(t)) + by_p(t) = c(t)$

$ak'(t)y_0(t) + ay_0'(t)k(t) + bk(t)y_0(t) = c(t)$
La partie surlignée en jaune est la solution de (E_0) Donc $ak'(t)y_0(t) = c(t)$
Ainsi, $k'(t)$ vaut :
$k'(t) = \frac{c(t)}{ay_0}$
Il suffit ensuite d'intégrer $k'(t)$

3 : Solution Générale

$y(t) = y_0(t) + y_p(t)$

Second Ordre

$(E_0)\ ay'' + by' + cy = f(t) \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$

$(E_0)\ ay'' + by' + cy = 0$

1 : Solutions de l'equation Homogène (E_0) y_0 :

$(H)ar^2 + br + c = 0 \qquad \Delta = b^2 - 4ac$ r_1 et r_2 solutions de (H)

- $\Delta > 0$: $y_0 = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} \qquad r_1,\ r_2,\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$
- $\Delta = 0$: $y_0 = (C_1x + C_2)e^rx$
- $\Delta < 0$: r de la forme $r = \alpha + i\beta$: $y_0 = (\ C_1cos(\beta x) + C_2sin(\beta x)\ )\,e^{\alpha x}$

2 : Solution Particulière y_p :

- $f(x)$ polynôme

  $y_p = Q(x)$ avec degré de $Q(x) =$

  - degré de $f(x)$ si $c \neq 0$ (coefficients de y)
  - degré de $f(x) + 1$ si $b \neq 0$ et $c = 0$
  - degré de $f(x) + 2$ si $b = c = 0$

  On identifie enfin les coefficients de $Q(x)$ en remplaçant dans (E)

- $f(x) = P(x)e^{mx}$

  $f(x) = P(x)e^{mx}$ et $y_p = Q(x)e^{mx}$ avec degré de $Q(x) =$

  - degré de $P(x)$ si m n'est pas solution de (H)
  - degré de $P(x)$ si m est solution simple de (H)
  - degré de $P(x) + 2$ si m est solution double de (H)

  On identifie enfin les coefficients de $Q(x)$ en remplaçant dans (E)

3 : Solution Générale

$y(t) = y_0(t) + y_p(t)$