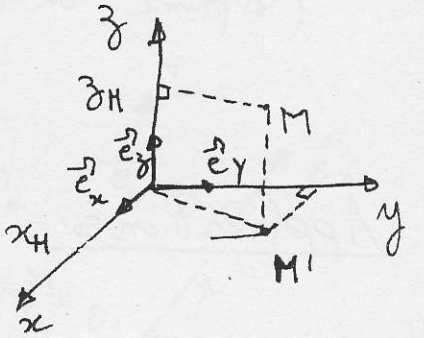
Cordonnées cartésiennes, polaires cylindriques et sphériques.

I cordonnées cartésiennes :



Variables x, y, z.

base $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$.

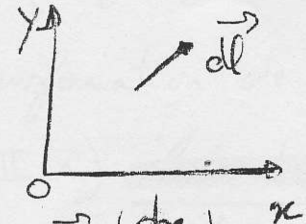
vecteur $\vec{U}\begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix}$: fonction $f(x,y,z)$.

M' : projection de M sur le plan xoy.

I.1) élément de longueur dl.

$dl = dx$

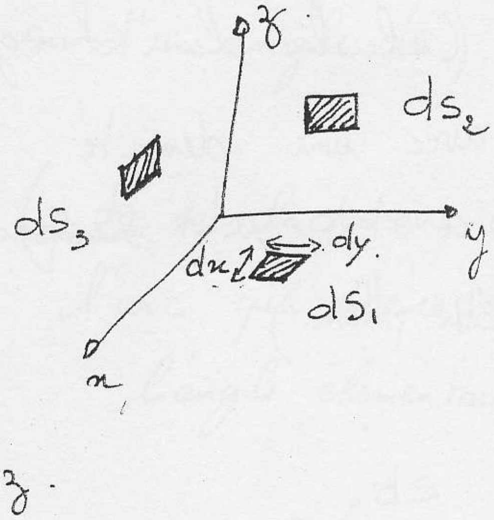
$dl =$ "longueur infinitésimale".



$\vec{dl}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$

à 3 dimensions $\vec{dl}\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$.

I.2) élément de surface "dS"



$dS =$ surface infinitésimale.

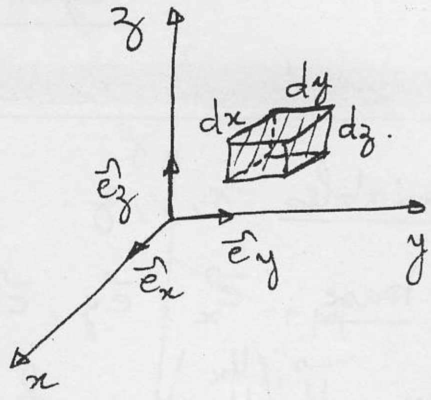
dans le plan (xoy) : $dS_1 = dx.dy$

" " (yoz) : $dS_2 = dy.dz$.

" " (xoz) : $dS_3 = dx.dz$.

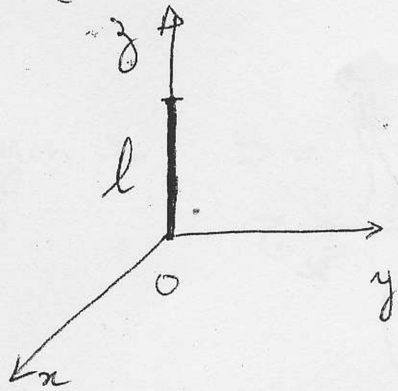
I.3) Elément de volume : $d\tau$ "déto"

$d\tau = dx \cdot dy \cdot dz$.
(exprimé en m^3).

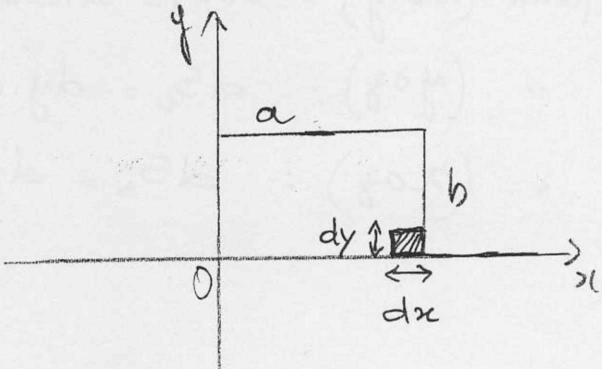


Applications

1°) Calculer la charge totale Q portée par une barre de longueur l, tel que $\lambda(z) = \alpha z^2$ où α est une constante (La barre est portée par l'axe $\vec{Oz}$).



2°) Calculer la charge totale d'un plan chargé avec une densité $\sigma(x,y) = \alpha x^2 \cdot y^2$
(a et b sont respectivement la longueur et la largeur du plan).



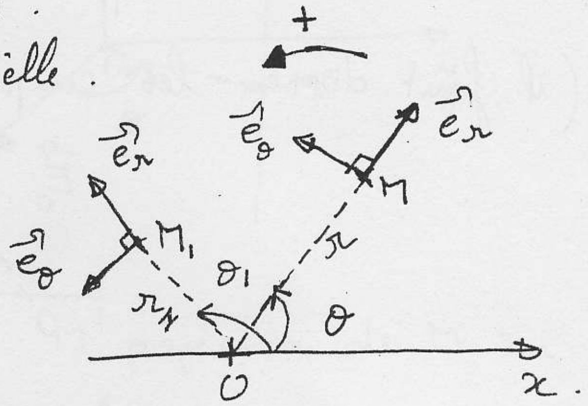
II) Coordonnées polaires

variables r, θ

base $\vec{e_r}, \vec{e_\theta}$. ($\vec{e_r}$: vect radial, $\vec{e_\theta}$: vect tangentiel)

vecteur : $\vec{U}\begin{pmatrix} U_r \\ U_\theta \end{pmatrix}$ U_r = composante radiale. U_θ = composante tangentielle.

fonction : $f(r,\theta)$.



$$\begin{cases} \overline{OM} = r. \\ \theta = (\widehat{\vec{Ox}, \vec{OM}}). \text{ avec } 0 \leq \theta \leq \pi. \end{cases}$$

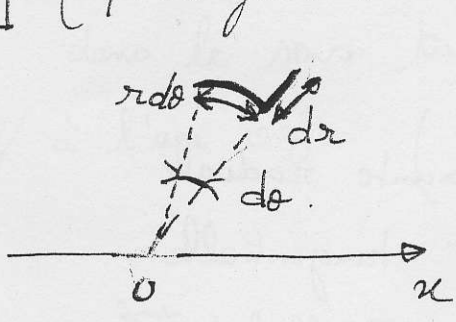
$\begin{cases} \vec{e_r} : \text{vecteur unitaire colinéaire à } OM. \text{ (de M vers l'}\infty\text{)}. \\ \vec{e_\theta} : \perp \vec{e_r} \text{ et tourne dans le sens trigo.} \end{cases}$

transformation de variables $(r,\theta) \rightarrow (x,y) \Rightarrow \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

II.1) élément de longueur.

$$\boxed{\begin{array}{l} dl = dr. \\ dl = r\,d\theta \end{array}}$$

(qd on fait varier r d'une valeur dr).
(qd on fait varier θ d'un angle $d\theta$)

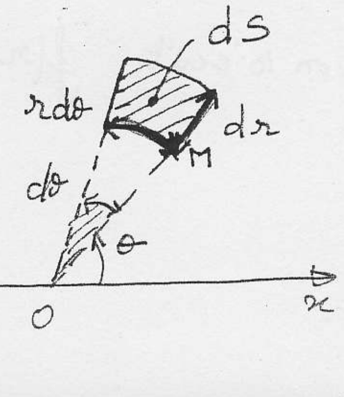


($\underline{r\,d\theta}$ est la mesure de l'arc qui intercepte l'angle élémentaire $d\theta$)

II.2) élément de surface dS

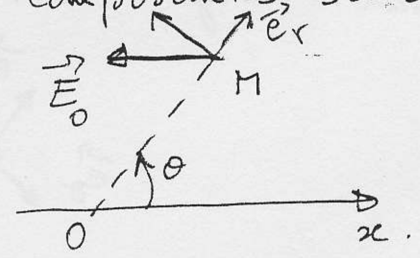
(surface infinitésimale)

$$dS = (dr) \times (r\,d\theta) = \boxed{r\,dr\,d\theta}$$

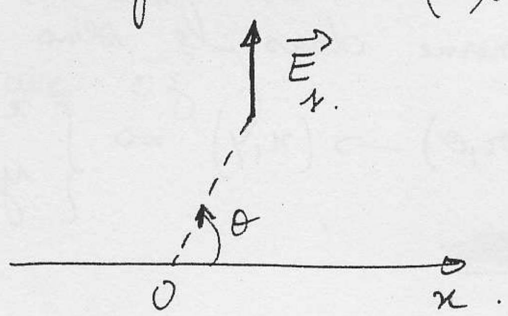


Applications:

1°- Exprime les composantes du champ électrique $\vec{E_0}$ en coordonnées polaires (en fonction de E_0 et θ).
(il faut donner les composantes, radiale et tangentielle).



2°) Exprimer les composantes radiale et tangentielle du vecteur $\vec{E_1}$ en fonction de (E_1 et θ)



III) Coordonnées cylindriques :

variables : (r, θ, z)

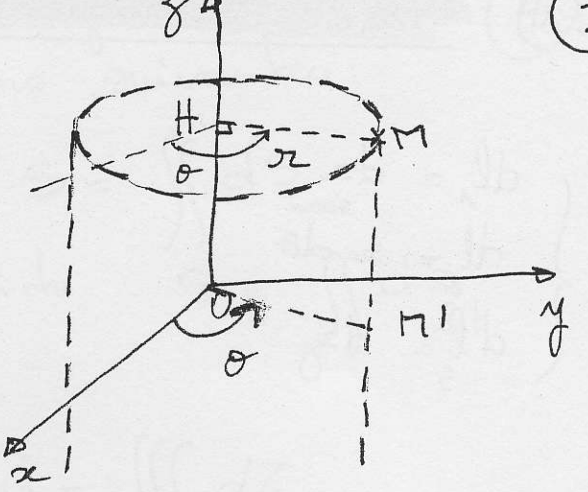
base : $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$

vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{pmatrix}$ $\begin{cases} u_r = \text{composante radiale} \\ u_\theta = \text{" tangentielle} \\ u_z = \text{" parallèle à } \vec{Oz}. \end{cases}$

fonction s'écrit $f(r, \theta, z)$.

Défs des variable.

$$\begin{cases} r = \overline{HM} = \overline{OM'} \\ \theta = (\overrightarrow{Ox}\,\hat{,}\,\overrightarrow{OM'}) \\ z = \overline{OH} \end{cases}$$



$r > 0$; $-\infty < z < +\infty$

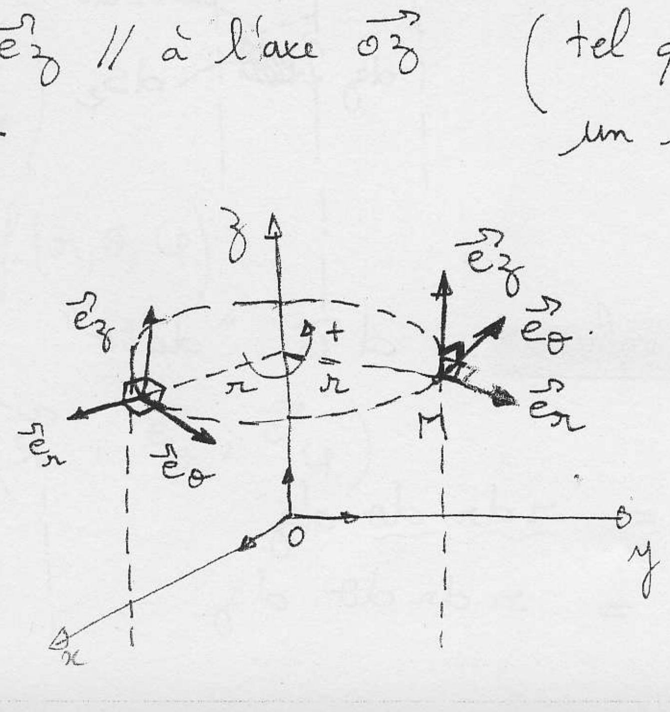
et $\boxed{0 \leq \theta \leq 2\pi}$

M' projéction de M sur le plan xoy.

M ∈ au cylindre "fictif" de rayon r.

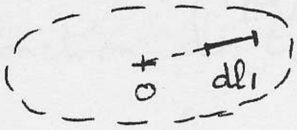
base: $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ est representée en tout point M.

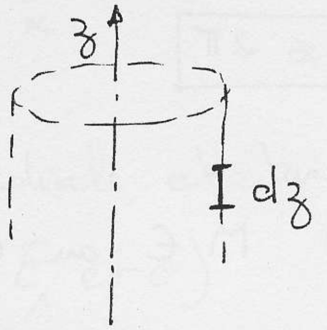
tel que:
- $\vec{e}_r$ colinéaire à HM. (vers l'extérieur de M).
- $\vec{e}_\theta \perp \vec{e}_r$ et doit appartenir au plan (Hx, HM)
  ($\vec{e}_\theta$ est tangent au cercle de rayon r et tourne dans le sens trigo).
- $\vec{e}_z$ // à l'axe $\overrightarrow{Oz}$ (tel que $(\vec{e}_r, \vec{e}_z, \vec{e}_z)$ forment un trièdre direct).



III. 1) Elément de longueur dl.

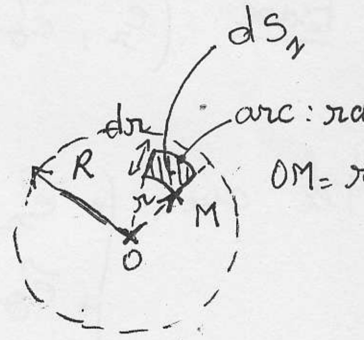
$$\begin{cases} dl_1 = dr \\ \text{ou } dl_2 = r\,d\theta \\ \text{ou } dl_3 = dz \end{cases}$$



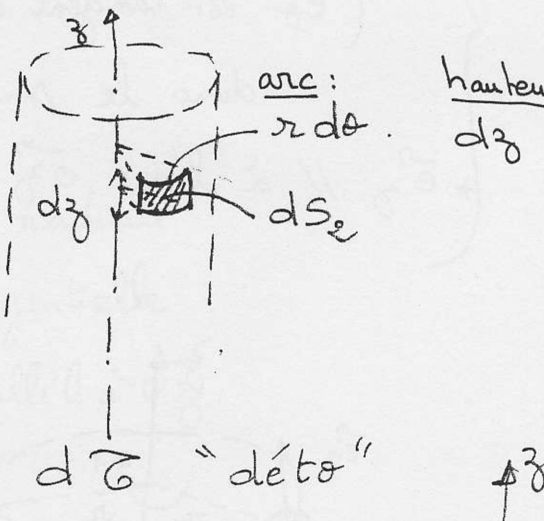


III. 2) Elément de surface : dS.

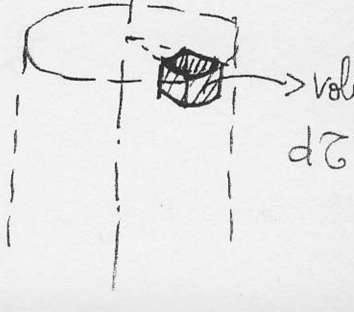
sur la surface de base : $dS_1 = r\,dr\,d\theta$



sur la surface latérale : $dS_2 = dz \cdot r\,d\theta$.



III. 3) Elément de volume : dτ "déto"



$$\begin{cases} d\tau = dS_1 \times dz = r\,dr\,d\theta\,dz. \\ \text{ou } d\tau = dS_2 \cdot dr = r\,dr\,d\theta \cdot dz. \end{cases}$$

Applications :

1°_ Retrouver les expressions suivantes :

* surface d'un disque : $S = \iint dS_{base}$
* surface latérale d'un cylindre $S = \iint dS_{lat}$
* volume d'un cylindre :

(de rayon R et de hauteur h). $\tau = \iiint d\tau$.

2°) Calculer la charge totale $Q = \int dQ$.

* d'un disque de rayon R, tel que $\sigma(r) = \alpha r^2$.
* d'une surface latérale d'un cylindre tel que $\sigma = \beta = \underline{\underline{cste}}$
* d'un cylindre chargé en volume avec une densité $\rho(r) = \beta . r$ où $\beta = \underline{\underline{cste}}$.

IV. Coordonnées sphériques :

Variables : (r, θ, φ)

$$\begin{cases} \theta : \text{"têta"} & (1^{\underline{er}} \text{ angle}) \\ \varphi : \text{"phi"} & (2^{\underline{ième}} \text{ angle}) \end{cases}$$

Vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\varphi \end{pmatrix}$

fonction : $f(r, \theta, \varphi)$.

base : $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$

Défs des variables

$r = OM \quad (r>0)$.

$\theta = (\overrightarrow{Oz}, \widehat{\overrightarrow{OM}})$ appartient au plan (Oz, OM) qui tourne autour de Oz.

d'où $\boxed{0 \leq \theta \leq \pi}$ car il ne défini que les pts M qui se trouvent dans le plan (OM, Oz)

$\varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM'})$ où M' = projection de M sur (xOy)

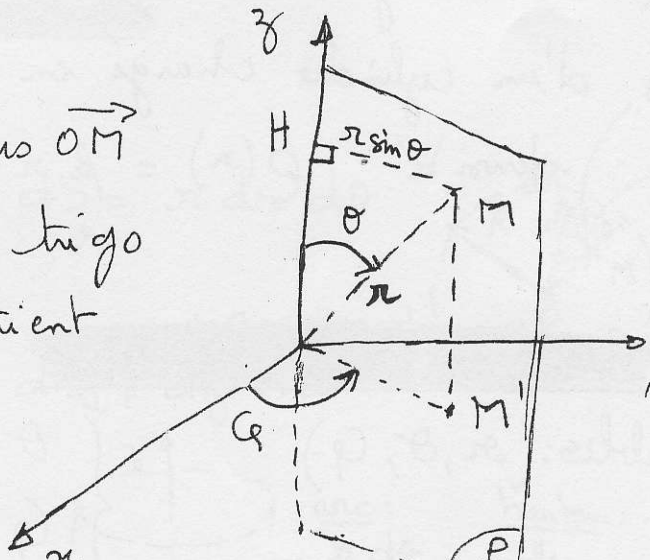
d'où $\boxed{0 \leq \varphi \leq 2\pi}$

avec :

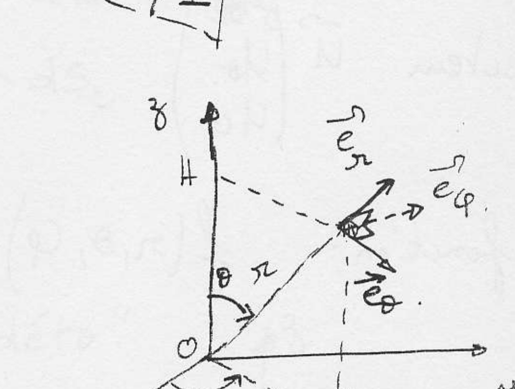
θ est orienté de $\overrightarrow{Oz}$ vers $\overrightarrow{OM}$

φ tourne dans le sens trigo

avec φ : angle qui appartient au plan (xOy)



base :



$\vec{e}_r$: colinéaire à OM.
(dirigé de M vers l'extérieur)

$\vec{e}_\theta$: $\perp$ à $\vec{e}_r$ et $\in$ au plan (OM, Oz)

$\vec{e}_\varphi$: décrit la rotation de φ et forme un trièdre direct avec $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, $\vec{e}_\varphi \perp (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

IV. 1) Elément de longueur

$$\begin{cases} \text{dans le plan } (Oz, OM) & \boxed{dl_1 = r\,d\theta} = \text{arc élémentaire} \\ \text{dans le plan } (xOy) & dl_2 = (r\sin\theta)\,d\varphi = \text{arc} \quad " \end{cases}$$

$$\left(\text{car } \overline{HM} = \overline{OM'} = r\sin\theta \atop \text{et } dl_2 = \overline{OM'}.d\varphi \right).$$

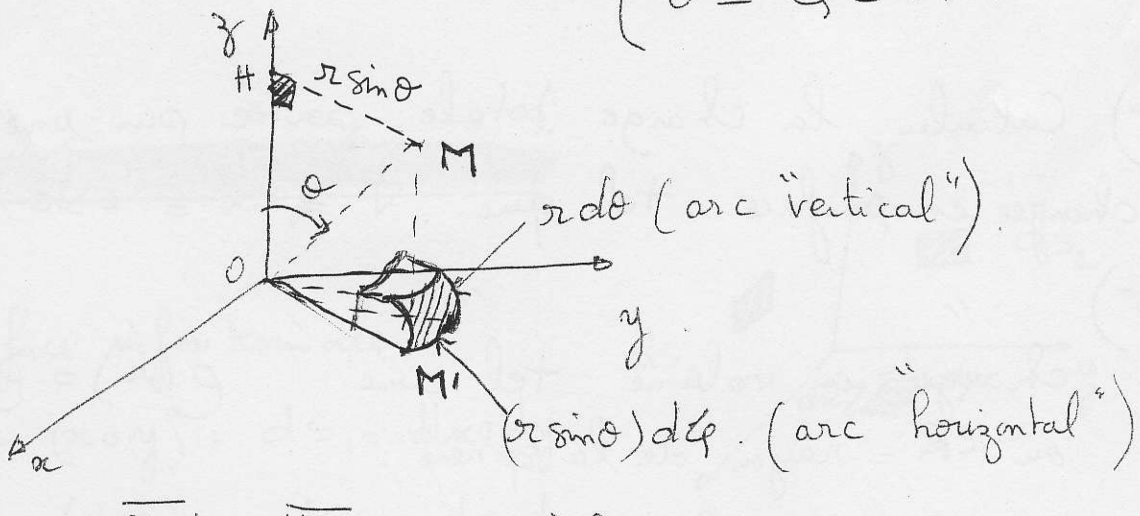
IV. 2) Elément de surface dS

dS = élément de surface sur la sphère de rayon r

= produit des 2 arcs ($r\,d\theta$ et $r\sin\theta\,d\varphi$).

d'où $dS = r^2 \sin\theta\,d\theta\,d\varphi$.

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

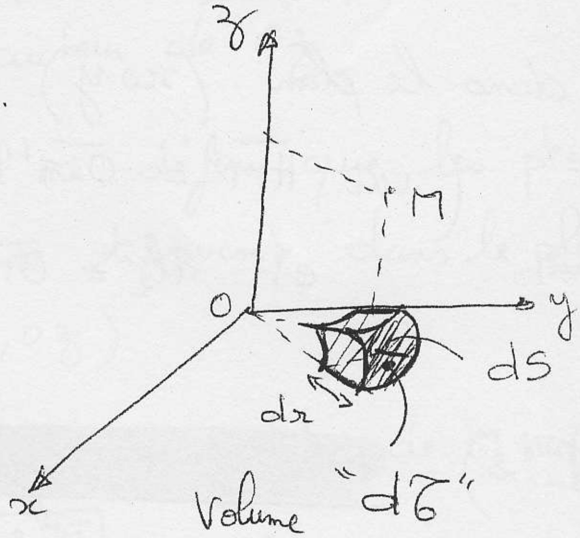


$\overline{OM'} = \overline{HM} = r\sin\theta$.

IV.3) Element de volume :

$$d\tau = dS_{\text{sphère}} \times dr$$

$$d\tau = r^2 dr \sin\theta \, d\theta . d\varphi .$$



Applications :

1°) Retrouver les expressions de

a) la surface d'une sphère de rayon r $\quad S = \iint dS$

b) Le volume " " " $\quad \tau = \iiint d\tau \quad \frac{4}{3}\pi R^3$

2°) Calculer la charge totale portée par une sphère chargée en surface tel que $\sigma = \alpha = \text{cste}$. (rayon $= R$)

3°) " " "

chargée en volume tel que $\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$

où R = rayon de la sphère.