7. Limites et continuité. Fonctions usuelles

7.1. Fonctions numériques, généralités

7.1.1. Opérations sur $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

7.1.2. Relation d'ordre sur $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

7.1.3. Fonctions majorées, minorées, bornées

7.1.4. Extremums absolus (ou globaux)

7.1.5. Applications monotones

7.1.6. Applications paires ou impaires

7.1.7. Applications périodiques

7.1.8. Axes et centres de symétrie

7.2. Limites des fonctions numériques

7.2.1. Propriétés vraies "au voisinage d'un point"

7.2.2. Limite en un point

7.2.3. Limite à gauche ou à droite

7.2.4. Opérations sur les limites

7.2.5. Limites et relation d'ordre

7.2.6. Formes indéterminées

7.3. Comparaisons locales

7.3.1. Définitions

7.3.2. Propriétés des relations f=o(g) et f=O(g)

7.3.3. Propriétés des équivalents

7.3.4. Quelques conseils

7.3.5. Comparaisons usuelles

7. Limites et continuité. Fonctions usuelles

7.1. Fonctions numériques, généralités

7.1.1. Opérations sur $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

Dans l'étude des fonctions numériques, on rencontre des applications f à valeurs réelles, définies sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ appelée *domaine de définition* de f.

L'ensemble $\mathcal{D}$ consiste le plus souvent en une réunion d'intervalles d'intérieur non vide.

Par exemple, le domaine de définition de l'application *tangente* est la réunion des intervalles $I_k =]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$, pour tout entier relatif k.

L'étude d'une fonction f (continuité, monotonie, extrémums, etc.) doit cependant s'effectuer *intervalle par intervalle*. C'est pourquoi, dans ce chapitre, on se limitera à des applications à valeurs réelles, définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

On note $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, ou $\mathbb{R}^I$, l'ensemble des applications $f : I \to \mathbb{R}$.

On rappelle que si f et g appartiennent à $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$: $f = g \Leftrightarrow \forall x \in I, f(x) = g(x)$.

Soient f et g deux éléments de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On définit les applications $f + g$ et fg par :

$$\begin{cases} \forall x \in I, (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ \forall x \in I, (fg)(x) = f(x)g(x) \end{cases}$$

Muni de ces deux opérations $+$ et $\times$, $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ a une structure d'anneau commutatif :

- Le neutre additif est l'application constante $x \to 0$.
- L'opposée d'une application f est l'application $-f$ définie par : $\forall x \in I, (-f)(x) = -f(x)$.
- Le neutre multiplicatif est l'application constante $x \mapsto 1$.
- Une application f est inversible pour le produit $\Leftrightarrow$ elle ne prend pas la valeur 0.
  Son inverse pour $\times$ est alors $\dfrac{1}{f}$, définie par : $\forall x \in I, \dfrac{1}{f}(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

Soit α un réel. On note encore α l'application constante $x \mapsto \alpha$.

La notation αf désigne l'application définie par : $\forall x \in I, (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$.

(c'est le produit de f par l'application constante α).

7.1.2. Relation d'ordre sur $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

Définition

Pour tous f et g de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, on pose $f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in I, f(x) \leq g(x)$.

On définit ainsi une relation d'ordre *partiel* sur $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

On note comme d'habitude $f \geq g \Leftrightarrow g \leq f$.

Définition

Soient f et g dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

On définit les applications $\inf(f, g)$ et $\sup(f, g)$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} \forall x \in I, \inf(f,g)(x) = \min(f(x), g(x)) \\ \forall x \in I, \sup(f,g)(x) = \max(f(x), g(x)) \end{cases}$$

Remarques et propriétés

f, g et h désignent ici trois applications quelconques de I dans $\mathbb{R}$.

- $\inf(f,g) = f \iff f \le g \iff \sup(f,g) = g$.
- $\begin{cases} \inf(f+h, g+h) = \inf(f,g) + h \\ \sup(f+h, g+h) = \sup(f,g) + h \end{cases}$
- Si $\alpha > 0$ $\begin{cases} \inf(\alpha f, \alpha g) = \alpha \inf(f,g) \\ \sup(\alpha f, \alpha g) = \alpha \sup(f,g) \end{cases}$ et si $\alpha < 0$ $\begin{cases} \inf(\alpha f, \alpha g) = \alpha \sup(f,g) \\ \sup(\alpha f, \alpha g) = \alpha \inf(f,g) \end{cases}$

  En particulier $\begin{cases} \inf(-f,-g) = -\sup(f,g) \\ \sup(-f,-g) = -\inf(f,g) \end{cases}$
- $\begin{cases} \inf(f,g) \le f \le \sup(f,g) \\ \inf(f,g) \le g \le \sup(f,g) \end{cases}$ $\begin{cases} (h \le f \text{ et } h \le g) \iff h \le \inf(f,g) \\ (h \ge f \text{ et } h \ge g) \iff h \ge \sup(f,g) \end{cases}$

  Autrement dit, dans $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ muni de la relation d'ordre $\le$:

  $\begin{cases} \inf(f,g) \text{ est le plus grand des minorants (la } \textit{borne inférieure}\text{) de la paire } \{f,g\}. \\ \sup(f,g) \text{ est le plus petit des majorants (la } \textit{borne supérieure}\text{) de la paire } \{f,g\}. \end{cases}$
- Les opérations inf et sup sont des lois de composition associatives sur $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.

  On peut donc généraliser et définir les applications $\inf(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ et $\sup(f_1, f_2, \ldots, f_n)$.

Définition *(Notations f^+, f^-, $|f|$)*

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.

On définit les applications $|f|$, f^+ et f^- de la façon suivante :

- $\forall x \in I, |f|(x) = |f(x)|$.
- $\forall x \in I, f^+(x) = \max(f(x), 0) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \ge 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$
- $\forall x \in I, f^-(x) = \max(-f(x), 0) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) \le 0 \\ 0 & \text{si } f(x) > 0 \end{cases}$

Remarques et propriétés

- Une définition équivalente de f^+ et de f^- est : $\begin{cases} f^+ = \sup(f, 0) \\ f^- = \sup(-f, 0) \end{cases}$
- Les applications f^+ et f^- sont à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
- On vérifie les égalités : $\begin{cases} f = f^+ - f^- \\ |f| = f^+ + f^- \end{cases}$ et on en en déduit $\begin{cases} f^+ = \dfrac{1}{2}(|f| + f) \\ f^- = \dfrac{1}{2}(|f| - f) \end{cases}$
- Plus généralement : $\forall (f,g) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, $\begin{cases} \sup(f,g) = \dfrac{1}{2}(f + g + |f-g|) \\ \inf(f,g) = \dfrac{1}{2}(f + g - |f-g|) \end{cases}$

7.1.3. Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
On dit que f est *majorée* s'il existe un réel β tel que : $\forall\, x \in I,\ f(x) \leq \beta$.
Cela revient à dire que $f(I) = \{f(x), x \in I\}$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$.
On note alors $\sup_I f$, ou $\sup_{x\in I} f(x)$ la borne supérieure de l'ensemble image $f(I)$.
On dit que cette quantité est la borne supérieure de f sur l'intervalle I.

Définition

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
On dit que f est *minorée* s'il existe un réel α tel que : $\forall\, x \in I, f(x) \geq \alpha$.
Cela revient à dire que $f(I) = \{f(x), x \in I\}$ est une partie minorée de $\mathbb{R}$.
On note alors $\inf_I f$, ou $\inf_{x\in I} f(x)$ la borne inférieure de l'ensemble $f(I)$.
On dit que cette quantité est la borne inférieure de f sur l'intervalle I.

Définition

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On dit que f est *bornée* si f est majorée et minorée.
f est donc bornée s'il existe deux réels α et β tels que : $\forall\, x \in I, \alpha \leq f(x) \leq \beta$.

Définition

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit J un sous-intervalle de I, d'intérieur non vide.
On dit que f est majorée (resp. minorée, resp. bornée) sur J si la restriction de f à J est majorée (resp. minorée, resp. bornée).
On a alors les inégalités : $\begin{cases} \inf\limits_{x\in I} f(x) \leq \inf\limits_{x\in J\subset I} f(x) \\ \sup\limits_{x\in I} f(x) \geq \sup\limits_{x\in J\subset I} f(x) \end{cases}$

Remarques

Soient f et g deux éléments de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

- f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.
- Si f et g sont majorées, alors $f + g$ est majorée et $\sup\limits_I(f + g) \leq \sup\limits_I f + \sup\limits_I g$.

  Si f et g sont minorées, alors $f + g$ est minorée et $\inf\limits_I(f + g) \geq \inf\limits_I f + \inf\limits_I g$.
- f majorée (resp. minorée) si et seulement si $-f$ minorée (resp. majorée).
  On a alors : $\inf\limits_I(-f) = -\sup\limits_I f$, et $\sup\limits_I(-f) = -\inf\limits_I f$.
- Soit α un réel strictement positif.
  Si f est majorée alors αf est majorée et $\sup\limits_I(\alpha f) = \alpha \sup\limits_I f$.

  De même, si f est minorée alors αf est minorée et $\inf\limits_I(\alpha f) = \alpha \inf\limits_I f$.
- Si f et g sont bornées, alors : $\forall\, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha f + \beta g$ est bornée.

7.1.4. Extremums absolus (ou globaux)

Définition

Soit f une application définie sur l'intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$.
On dit que f présente un *maximum absolu* (ou *global*) en a si : $\forall x \in I, f(x) \leq f(a)$.
On dit que f présente un *minimum absolu* (ou *global*) en a de I si : $\forall x \in I, f(x) \geq f(a)$.
Dans l'un ou l'autre cas, on dit que f présente un *extrémum absolu* en a.

Remarques

- f présente un maximum absolu en $a \quad \Leftrightarrow \quad f$ est majorée sur I et $f(a) = \sup\limits_I f$.

  On exprime cela en disant que la borne inférieure de f sur I est *atteinte* en a.

  On peut alors noter $f(a) = \max\limits_I f$ plutôt que $f(a) = \sup\limits_I f$.
- De même, f a un minimum absolu en $a \quad \Leftrightarrow \quad f$ est minorée sur I et $f(a) = \inf\limits_I f$.

  On dit alors que f atteint sa borne inférieure en a et on note $f(a) = \min\limits_I f$.

Définition *(Maximum local)*

Soit f appartenant à $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit a un élément de I.
On dit que f présente un *maximum local* en a si :
$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in I \cap [a - \varepsilon, a + \varepsilon], f(x) \leq f(a)$.
($\Leftrightarrow$ au voisinage de a, f prend des valeurs toutes inférieures ou égales à $f(a)$)

Définition *(Minimum local)*

Soit f appartenant à $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit a un élément de I.
De même on dit que f présente un *minimum local* en a si :
$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in I \cap [a - \varepsilon, a + \varepsilon], f(x) \geq f(a)$.

Remarques

- Un minimum ou un maximum local est aussi appelé un *extrémum local*.
- Un extrémum global (absolu) est bien sûr un extrémum local. La réciproque est fausse.

7.1.5. Applications monotones

Définition

Soit f une application définie sur l'intervalle I, à valeurs réelles. On dit que f est :

- *croissante* si : $\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

  décroissante si : $\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
- *strictement croissante* si : $\forall (x, y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

  strictement décroissante si : $\forall (x, y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.
- *monotone* si f est croissante ou décroissante.

  strictement monotone si f est strictement croissante ou strictement décroissante.

Remarques

- Seules les applications constantes sont à la fois croissantes et décroissantes.
- Pour exprimer qu'une application f n'est pas monotone, on peut écrire :
  $\exists\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tq : $z \in [x,y]$ mais $f(z) \notin [f(x), f(y)]$.
- Soit f une application monotone. Dire que f n'est pas strictement monotone signifie qu'il existe un segment $[a,b]$ inclus dans I (avec $a < b$) sur lequel f garde une valeur constante.

Proposition *(Sommes d'applications monotones)*

Soient f et g deux applications monotones de I dans $\mathbb{R}$.
Si f et g ont même monotonie, alors $f + g$ est monotone de même monotonie.
Si de plus f ou g est strictement monotone, alors $f + g$ est strictement monotone.

Proposition *(Produits d'applications monotones)*

Soient f et g deux applications monotones de I dans $\mathbb{R}$.

- Si f et g sont positives croissantes, fg est positive croissante.
  Si f et g sont positives décroissantes, fg est positive décroissante.
- Si f et g sont négatives croissantes, fg est positive décroissante.
  Si f et g sont négatives décroissantes, fg est positive croissante.
- Si f est positive croissante et g négative décroissante, fg est négative décroissante.
  Si f est positive décroissante et g négative croissante, fg est négative croissante.

Remarques

- Dans les cas autres que ceux énumérés ci-dessus, on ne peut rien dire.
- Soit f une application monotone de I dans $\mathbb{R}$.
  Si $\alpha \geq 0$, αf et f ont la même monotonie.
  Si $\alpha \leq 0$, αf et f sont de monotonies contraires. C'est le cas en particulier pour $-f$ et f.

Proposition *(Inverse d'une application monotone)*

Soit f une application monotone de I dans $\mathbb{R}$.
On suppose que f ne s'annule pas sur I, et qu'elle garde un signe constant.
Alors $\dfrac{1}{f}$ est monotone sur I, de monotonie contraire à celle de f.

Proposition *(Compositions d'applications monotones)*

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide.
Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$, telle que $f(I)$ soit inclus dans J.
Soit g une application de J dans $\mathbb{R}$. L'application $g \circ f$ est donc définie sur I.

- Si f et g ont la même monotonie, alors $g \circ f$ est croissante.
- Si f et g sont de monotonies contraires, alors $g \circ f$ est décroissante.

Les deux propriétés précédentes restent vraies pour des monotonies strictes.

7.1.6. Applications paires ou impaires

On considère ici des applications définies sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$.
On suppose que l'ensemble $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0 ($x \in \mathcal{D} \Leftrightarrow -x \in \mathcal{D}$).
Le cas le plus courant est celui d'un intervalle de centre 0, et notamment $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Définition

On dit que f est *paire* si : $\forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = f(x)$.
On dit que f est *impaire* si : $\forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = -f(x)$.

Proposition *(Parties paire et impaire d'une application)*

Soit f une application de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$.
f s'écrit de manière unique $f = p + i$, où p est paire et i est impaire.
p et i sont définies par : $\forall x \in \mathcal{D}$, $p(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ et $i(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) - f(-x))$
On dit que p est la *partie paire* de f et que i en est la *partie impaire.*

Remarques

La seule application à la fois paire et impaire est l'application nulle.

Soient les applications ch et sh définies sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ et $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$.
ch et sh sont respectivement la partie paire et la partie impaire de $x \mapsto e^x$.

Proposition *(Opérations entre applications paires ou impaires*

Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$, paires ou impaires.

- Si f, g ont même parité, fg est paire. Si elles sont de parités contraires, fg est impaire.
- L'application $\dfrac{1}{f}$ est de même parité que f.
- Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$: Si f, g sont paires (resp. impaires), $\alpha f + \beta g$ est paire (resp. impaire).
- Si f est bijective de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{D}$ et impaire, alors sa bijection réciproque f^{-1} est impaire.
- Si f est paire, alors $h \circ f$ est paire (quelque soit l'application h).
  Si f est impaire, et si g est paire ou impaire, alors $g \circ f$ a la même parité que g.

7.1.7. Applications périodiques

Définition

Soient $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, et $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. Soit T un réel strictement positif.
L'application f est dite *T-périodique* si : $\forall x \in \mathcal{D}, x + T \in \mathcal{D}$ et $f(x + T) = f(x)$

Propriétés

Si f est T-périodique, alors pour tout n de $\mathbb{N}$, f est nT-périodique.

Si f et g sont T-périodiques, alors $\alpha f + \beta g$ et fg sont T-périodiques.

Si f est périodique, alors $\dfrac{1}{f}$ est T-périodique.

Si f est T-périodique, alors pour toute application g, $g \circ f$ est T-périodique.

Remarques

- Si f est périodique, il vaut mieux utiliser sa plus petite période positive (si elle existe).
  Cette plus petite période n'existe pas toujours.
  Par exemple, la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ admet tout rationnel comme période.
- Soit f une application T_1-périodique, et g une application T_2-périodique.
  On suppose que le rapport $\dfrac{T_1}{T_2}$ est rationnel. Alors $f+g$ et fg sont encore périodiques.
  Par exemple : si $T_1 = \dfrac{3\pi}{4}$ et $T_2 = \dfrac{\pi}{2}$, alors $f+g$ et fg sont $\dfrac{3\pi}{2}$-périodiques.
- Si f est T-périodique, alors l'application $g : x \mapsto f(\alpha x + \beta)$ est $\dfrac{T}{|\alpha|}$-périodique.

7.1.8. Axes et centres de symétrie

Parité, imparité et symétrie

Soit f une application f à valeurs réelles, définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$.

La courbe représentative Γ de f (on dit aussi le *graphe* de f) est l'ensemble des points $M(x, f(x))$ dans le plan affine $\mathcal{P}$ (muni d'un repère O, i, j), x décrivant le domaine de f.

- L'application f est paire $\Leftrightarrow$ son graphe Γ est symétrique par rapport à l'axe Oy.
- De même, f est impaire $\Leftrightarrow$ son graphe Γ est symétrique par rapport à l'origine O.

Axes de symétrie

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, le domaine $\mathcal{D}$ étant symétrique par rapport au réel a.

La droite $x = a$ est axe de symétrie du graphe Γ de f

$\Leftrightarrow$ Pour tout x de $\mathcal{D}$, $f(2a - x) = f(x)$.

$\Leftrightarrow$ Pour tout h tel que $a \pm h$ appartienne à $\mathcal{D}$, $f(a+h) = f(a-h)$.

$\Leftrightarrow$ L'application g définie par $g(x) = f(a+x)$ est paire.

Centres de symétrie

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, le domaine $\mathcal{D}$ étant symétrique par rapport au réel a.

Le point $\Omega(a, b)$ est centre de symétrie du graphe Γ de f

$\Leftrightarrow$ Pour tout x de $\mathcal{D}$, $f(2a - x) = 2b - f(x)$.

$\Leftrightarrow$ Pour tout h tel que $a \pm h$ appartienne à $\mathcal{D}$, $f(a+h) - b = b - f(a-h)$.

$\Leftrightarrow$ L'application g définie par $g(x) = f(a+x) - b$ est impaire.

Périodicité

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, le domaine $\mathcal{D}$ étant tel que : $x \in \mathcal{D} \Leftrightarrow x + T \in \mathcal{D}$ ($T > 0$ donné).

L'application f est T-périodique

$\Leftrightarrow$ son graphe Γ est invariant dans toute translation de vecteur $kT(1,0)$, ($k \in \mathbb{Z}$).

Graphe de la bijection réciproque

Soit f une application bijective de $\mathcal{D}$ sur $f(\mathcal{D})$.

Les graphes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à $y = x$.

7.2. Limites des fonctions numériques

7.2.1. Propriétés vraies "au voisinage d'un point"

La définition suivante permettra de simplifier certains énoncés de ce chapitre.

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide.

Soit a un élément de I ou une extrémité de I (éventuellement $a = \pm\infty$).

Soit $\mathcal{P}$ un prédicat (une propriété) de la variable réelle x, défini sur I.

$\mathcal{P}(x)$ désigne donc une proposition, vraie ou fausse selon les valeurs de x dans I.

On dit que $\mathcal{P}$ est vraie *au voisinage de a* si l'une des situations suivantes est réalisée :

- a est réel et $\exists\,\delta > 0$ tel que : $\forall\, x \in I\cap]a-\delta, a+\delta[$, $\mathcal{P}(x)$ est vraie.
- $a = +\infty$ et $\exists\, M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall\, x > M, \mathcal{P}(x)$ est vraie.
- $a = -\infty$ et $\exists\, M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall\, x < M, \mathcal{P}(x)$ est vraie.

Remarques

Dans le premier cas, la clause $x \in I$ n'est utile que si a est une extrémité de I.

En effet si a est intérieur à I, alors pour tout δ *assez petit*, $]a-\delta, a+\delta[\subset I$.

Si f et g sont des applications définies sur I, on pourra par exemple écrire des propositions du genre : *si $f(x) \le g(x)$ au voisinage de a, alors ...*

7.2.2. Limite en un point

Définition *(Limite en un point de $\mathbb{R}$)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Soit a un réel, élément ou extrémité de I.

Soit ℓ un réel. On dit que ℓ est limite de f en a si :

$\forall\,\varepsilon > 0, \exists\,\delta > 0$ tq $(x \in I$ et $|x-a| \le \delta) \Rightarrow |f(x) - \ell| \le \varepsilon.$

On dit que $+\infty$ est limite de f en a si :

$\forall\, M \in \mathbb{R}, \exists\,\delta > 0$ tel que $(x \in I$ et $|x-a| \le \delta) \Rightarrow f(x) \ge M.$

On dit que $-\infty$ est limite de f en a si :

$\forall\, M \in \mathbb{R}, \exists\,\delta > 0$ tel que $(x \in I$ et $|x-a| \le \delta) \Rightarrow f(x) \le M.$

Remarques

Dans les trois cas, la clause $x \in I$ n'est pas nécessaire si a est intérieur à I.

Si $a \in I$ et donc si f est définie en a, la seule limite *possible* de f en a est le réel $f(a)$.

Définition *(Limite en $+\infty$)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. On suppose que $I =]\alpha, +\infty[$, ou $I = [\alpha, +\infty[$, ou $I = \mathbb{R}$.
Soit ℓ un réel. On dit que ℓ est limite de f en $+\infty$ si :
$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.
On dit que $+\infty$ est limite de f en $+\infty$ si :
$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq A \Rightarrow f(x) \geq M$.
On dit que $-\infty$ est limite de f en $+\infty$ si :
$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq A \Rightarrow f(x) \leq M$.

Définition *(Limite en $-\infty$)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. On suppose que $I =]-\infty, \alpha[$, ou $I =]-\infty, \alpha]$, ou $I = \mathbb{R}$.
Soit ℓ un réel. On dit que ℓ est limite de f en $-\infty$ si :
$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.
On dit que $+\infty$ est limite de f en $-\infty$ si :
$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq A \Rightarrow f(x) \geq M$.
On dit que $-\infty$ est limite de f en $-\infty$ si :
$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq A \Rightarrow f(x) \leq M$.

Proposition *(Unicité de la limite)*

Les définitions précédentes permettent de donner un sens à la phrase ℓ *est limite de* f *en* a, où ℓ et a sont des éléments de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ (droite numérique achevée), à condition que a soit élément de l'intervalle I ou qu'il en soit une extrémité.
Si un tel élément ℓ existe, alors il est unique.
On l'appelle *la* limite de f en a, et on dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a.
On note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, ou $\lim\limits_{a} f = \ell$ ou $\begin{array}{c} f(x) \to \ell \\ x \to a \end{array}$

Remarque

Il se peut qu'une application ne possède pas de limite en un point. Par exemple

- ⋄ L'application $x \mapsto \cos x$ n'a pas de limite en $+\infty$.
- ⋄ L'application $x \mapsto \mathrm{E}[x]$ n'a pas de limite en 0.

Importance des limites nulles ou des limites en 0

Si ℓ est un réel, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a}(f(x) - \ell) = 0$.

Si a est un réel, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(a + h) = \ell$.

Proposition *(Caractérisation séquentielle des limites)*

Soit f une application définie sur l'intervalle I, à valeurs réelles.
Soit a un élément de $\overline{\mathbb{R}}$ (élément de I ou extrémité de I). Soit ℓ un élément de $\overline{\mathbb{R}}$.
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow$ pour toute suite (u_n) de I tendant vers a, $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = \ell$.

Définition *(Limite par valeurs supérieures ou inférieures)*

On suppose que la limite de f en a (élément de $\overline{\mathbb{R}}$) est le réel ℓ.

Quand x tend vers a, on dit que $f(x)$ tend vers ℓ par valeurs supérieures (resp. inférieures) si, au voisinage de a, $f(x) \geq \ell$ (resp. $f(x) \leq \ell$).

On peut alors éventuellement noter : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell^+$ (resp. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell^-$).

7.2.3. Limite à gauche ou à droite

Définition *(Limite à gauche)*

On suppose que a est réel et est intérieur à l'intervalle I. Soit ℓ un élément de $\overline{\mathbb{R}}$.

Soit g la restriction de f à l'intervalle $J = I \cap]-\infty, a[$.

Le réel a est donc l'extrémité droite de J, et n'appartient pas à J.

On dit que f admet ℓ pour limite en a à gauche si g admet ℓ pour limite en a.

On note alors $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$, ou $\lim\limits_{a^-} f = \ell$, ou $\begin{array}{c} f(x) \to \ell \\ x \to a^- \end{array}$

Définitions équivalentes

Soit ℓ un nombre réel.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell & \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, (a - \delta \leq x < a) \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon \\ \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty & \Leftrightarrow \quad \forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, (a - \delta \leq x < a) \Rightarrow f(x) \geq M \\ \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty & \Leftrightarrow \quad \forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, (a - \delta \leq x < a) \Rightarrow f(x) \leq M \end{cases}$$

Définition *(Limite à droite)*

On suppose que a est réel et est intérieur à l'intervalle I. Soit ℓ un élément de $\overline{\mathbb{R}}$.

Soit g la restriction de f à l'intervalle $J = I \cap]a, +\infty[$.

Le réel a est donc l'extrémité gauche de J, et n'appartient pas à J.

On dit que f admet ℓ pour limite en a à droite si g admet ℓ pour limite en a.

On note alors $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$, ou $\lim\limits_{a^+} f = \ell$, ou $\begin{array}{c} f(x) \to \ell \\ x \to a^+ \end{array}$

Définitions équivalentes

Soit ℓ un nombre réel.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell & \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, (a < x \leq a + \delta) \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon \\ \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty & \Leftrightarrow \quad \forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, (a < x \leq a + \delta) \Rightarrow f(x) \geq M \\ \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty & \Leftrightarrow \quad \forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, (a < x \leq a + \delta) \Rightarrow f(x) \leq M \end{cases}$$

Remarque

La limite de f en a, à gauche ou à droite, si elle existe, est unique. De même, la plupart des propriétés vraies pour les limites le sont encore s'il s'agit de limites à gauche ou à droite.

7.2.4. Opérations sur les limites

Proposition

On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'$ (avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$).

Alors $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = \ell + \ell'$ (si $\ell + \ell'$ n'est pas une forme indéterminée $\infty - \infty$.)

De même, $\lim\limits_{x\to a}(fg)(x) = \ell\ell'$(si $\ell\ell'$ n'est pas une forme indéterminée $0 \times \infty$.)

Cas particulier

Si λ est un réel non nul, alors $\lim\limits_{x\to a} \lambda f(x) = \lambda\ell$.

Proposition *(Limite de l'inverse d'une fonction)*

On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Si $\ell \in \mathbb{R}^*$, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\ell}$.

Si $\ell = \pm\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Si $\ell = 0$ et si, au voisinage de a, $f(x) > 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

Si $\ell = 0$ et si, au voisinage de a, $f(x) < 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$.

Proposition *(Composition des limites)*

On suppose que l'application $g \circ f$ est définie au voisinage de a.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to a}(g \circ f)(x) = \ell$.

7.2.5. Limites et relation d'ordre

Proposition *(Limite et valeur absolue)*

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to a} |f|(x) = |\ell|$.

La réciproque est fausse, mais : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{x\to a} |f|(x) = 0$.

Proposition *(Conséquences de l'existence d'une limite finie)*

Si f admet une limite finie en a, f est bornée au voisinage de a (réciproque fausse).

Si f admet en a une limite réelle non nulle ℓ , alors au voisinage de a : $|f(x)| \geq \dfrac{|\ell|}{2}$.

Plus précisément : $\begin{cases} \text{Si } \ell > 0, \text{ alors au voisinage de } a,\ f(x) > \dfrac{\ell}{2} > 0. \\ \text{Si } \ell < 0, \text{ alors, au voisinage de } a,\ f(x) < \dfrac{\ell}{2} < 0. \end{cases}$

Remarque

Les propriétés précédentes sont utiles parce qu'elles précisent le signe de f au voisinage de a et permettent de majorer $\dfrac{1}{|f(x)|}$ au voisinage de ce point par $\dfrac{2}{|\ell|}$.

Proposition

On suppose que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to a} g(x) = \ell'$ (avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$).

Si on a $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a, alors $\ell \leq \ell'$.

En particulier, si λ est un nombre réel :

- Si $f(x) \leq \lambda$ au voisinage de a, alors $\ell \leq \lambda$.
- Si $f(x) \geq \lambda$ au voisinage de a, alors $\ell \geq \lambda$.

Remarque

Si $f(x) < g(x)$ au voisinage de a, alors on peut seulement affirmer que $\ell \leq \ell'$.

Par passage à la limite, les inégalités strictes "deviennent" donc des inégalités larges.

Proposition *(Principe des gendarmes)*

On suppose que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \ell$ (avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.)

Si $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ au voisinage de a, alors $\lim_{x\to a} h(x) = \ell$.

Cas particuliers

- Si $|f(x)| \leq g(x)$ au voisinage de a et si $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, alors $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.
- Si f est bornée au voisinage de a et si $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, alors $\lim_{x\to a} (fg)(x) = 0$.
- Supposons $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a : $\begin{cases} \text{Si } \lim_{x\to a} f(x) = +\infty, \text{ alors } \lim_{x\to a} g(x) = +\infty. \\ \text{Si } \lim_{x\to a} g(x) = -\infty, \text{ alors } \lim_{x\to a} f(x) = -\infty. \end{cases}$

Proposition

On suppose que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to a} g(x) = \ell'$ (avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$).

Si $\ell < \ell'$, alors, au voisinage de a on a l'inégalité $f(x) < g(x)$.

En particulier, si λ est un nombre réel :

- Si $\ell < \lambda$, alors on a l'inégalité $f(x) < \lambda$ au voisinage de a.
- Si $\ell > \lambda$, alors on a l'inégalité $f(x) > \lambda$ au voisinage de a.

Proposition *(Limite aux bornes, pour une application monotone)*

Soit f une application monotone de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$ ($a < b, a \in \overline{\mathbb{R}}, b \in \overline{\mathbb{R}}$).

Alors la limite ℓ de f en a et la limite ℓ' de f en b existent dans $\overline{\mathbb{R}}$. Plus précisément :

- Supposons f croissante.

  Si elle est majorée, ℓ' est un réel, sinon $\ell' = +\infty$.

  Si elle est minorée, ℓ est un réel, sinon $\ell = -\infty$.
- Supposons f dćroissante.

  Si elle est minorée, ℓ' est un réel, sinon $\ell' = -\infty$.

  Si elle est majorée, ℓ est un réel, sinon $\ell = +\infty$.

Proposition *(Limite en un point intérieur, pour une application monotone)*

Soit f une application monotone de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$ ($a<b, a\in\overline{\mathbb{R}}, b\in\overline{\mathbb{R}}$).
Soit c un réel de l'intervalle $]a,b[$.
L'application f admet en c une limite à gauche et une limite à droite, toutes deux finies.
Plus précisément :

- Si f est croissante : $\lim\limits_{x\to c-} f(x) \le f(c) \le \lim\limits_{x\to c+} f(x)$.
- Si f est décroissante : $\lim\limits_{x\to c-} f(x) \ge f(c) \ge \lim\limits_{x\to c+} f(x)$.

7.2.6. Formes indéterminées

On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'$ (avec $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$ et $\ell'\in\overline{\mathbb{R}}$).

On dit qu'on a affaire à la forme indéterminée :

$$\begin{cases} \infty-\infty \text{ si on veut calculer la limite en } a \text{ de } f+g \text{ et si } \ell=+\infty\ ,\ \ell'=-\infty. \\ 0\times\infty \text{ si on veut calculer la limite en } a \text{ de } fg \text{ et si } \ell=0,\ \ell'=\pm\infty. \\ \dfrac{0}{0} \text{ si on veut calculer la limite en } a \text{ de } \dfrac{f}{g} \text{ et si } \ell=\ell'=0. \\ \dfrac{\infty}{\infty} \text{ si on veut calculer la limite en } a \text{ de } \dfrac{f}{g} \text{ et si } \ell=\pm\infty \text{ et } \ell'=\pm\infty. \end{cases}$$

Le calcul de $\lim\limits_{a}(f^g)$ donne lieu aux formes indéterminées : $\begin{cases} 1^\infty \text{ si } \ell=1 \text{ et } \ell'=\pm\infty. \\ \infty^0 \text{ si } \ell=+\infty \text{ et } \ell'=0. \\ 0^0 \text{ si } \ell=\ell'=0. \end{cases}$

Toutes ces formes indéterminées peuvent se ramener à $\infty-\infty$ ou à $0\times\infty$.
Pour les trois dernières il suffit en effet de poser $f^g=\exp(g\ln f)$.
Dans une forme indéterminée, tous les résultats sont possibles.
Chaque problème doit donc être résolu individuellement.
Comme on dit, il faut *lever* la forme indéterminée.

7.3. Comparaisons locales

Dans ce paragraphe, on considère un intervalle I de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide, et des applications qui sont définies sur I et à valeurs réelles.
On désigne par a un élément ou une extrémité de I ($a\in\overline{\mathbb{R}}$).

7.3.1. Définitions

Définition *(Fonction dominée par une autre)*

Soient f, g deux applications de I dans $\mathbb{R}$.
On dit que f est *dominée* par g au voisinage du point a (ou en a) si :
Il existe un réel positif ou nul M tel que, au voisinage de a, $|f(x)|\le M|g(x)|$.
On note alors $f=\mathrm{O}(g)$, ou éventuellement $f=\mathrm{O}_a(g)$.

Définition *(Fonction négligeable devant une autre)*

Soient f, g deux applications de I dans $\mathbb{R}$.
On dit que f est *négligeable* devant g au voisinage du point a (ou en a) si :
Pour tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité $|f(x)| \le \varepsilon |g(x)|$ est vraie au voisinage de a.
On note alors $f = \mathrm{o}(g)$, ou éventuellement $f = \mathrm{o}_a(g)$.

Définition *(Fonction équivalente à une autre)*

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a (ou en a) si :
L'application $f - g$ est négligeable devant g au voisinage de a.
On note alors $f \sim g$, ou éventuellement $f \underset{a}{\sim} g$.

Définitions équivalentes

On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a).

f est dominée par g au voisinage de a $\Leftrightarrow$ $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.

f est négligeable devant g au voisinage de a $\Leftrightarrow$ $\dfrac{f}{g}$ tend vers 0 en a.

f est équivalente à g au voisinage de a $\Leftrightarrow$ $\dfrac{f}{g}$ tend vers 1 en a.

Remarques

- $f \sim g$ définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{R}$.
  La symétrie permet donc dire : *f et g sont équivalentes au voisinage de a.*
- Dans les notations $f = \mathrm{o}(g)$, $f = \mathrm{O}(g)$ et $f \sim g$, le point a n'apparait pas en général.
  Le contexte doit donc être clair.

7.3.2. Propriétés des relations f=o(g) et f=O(g)

Dans les résultats suivants, les relations de comparaison sont établies au voisinage de a.

Fonctions dominées par 1 ou négligeables devant 1

$f = \mathrm{O}(1) \Leftrightarrow f$ est bornée au voisinage de a.
$f = \mathrm{o}(1) \Leftrightarrow$ la limite de f au point a est 0.

Propriétés de transitivité

Si $f = \mathrm{o}(g)$, alors $f = \mathrm{O}(g)$.
Si $f = \mathrm{O}(g)$ et $g = \mathrm{O}(h)$, alors $f = \mathrm{O}(h)$.
Si $f = \mathrm{o}(g)$ et $g = \mathrm{O}(h)$, ou si $f = \mathrm{O}(g)$ et $g = \mathrm{o}(h)$, alors $f = \mathrm{o}(h)$.

Sommes de fonctions dominées ou négligeables devant une autre

Si $f = \mathrm{O}(h)$ et $g = \mathrm{O}(h)$, alors $f + g = \mathrm{O}(h)$, et pour tout réel α, $\alpha f = \mathrm{O}(h)$.
Si $f = \mathrm{o}(h)$ et $g = \mathrm{o}(h)$, alors $f + g = \mathrm{o}(h)$, et pour tout réel α, $\alpha f = \mathrm{o}(h)$.

Produits de fonctions dominées ou négligeables devant une autre

Si $f = \mathrm{O}(h)$ et $g = \mathrm{O}(k)$, alors $fg = \mathrm{O}(hk)$.
Si $f = \mathrm{o}(h)$ et $g = \mathrm{O}(k)$, alors $fg = \mathrm{o}(hk)$.
Si $f = \mathrm{o}(h)$, alors pour tout $\alpha > 0$, $f^\alpha = \mathrm{o}(h^\alpha)$ (en supposant $f, h > 0$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$).

7.3.3. Propriétés des équivalents

Dans les résultats suivants, les relations de comparaison sont établies au voisinage de a.

Propriétés de transitivité

Si $f \sim g$ et $g = \mathrm{O}(k)$, alors $f = \mathrm{O}(k)$.
Si $f \sim g$ et $g = \mathrm{o}(k)$, alors $f = \mathrm{o}(k)$.
Si $f \sim g$ et si $g \sim h$, alors $f \sim h$.

Conservation du signe

Si $f \sim g$, alors f et g gardent le même signe au voisinage de a.

Conservation de la limite

Si $f \sim g$, et si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ ($\ell \in \overline{\mathbb{R}}$).
Réciproquement : si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$, avec ℓ réel non nul, alors $f \sim g$.

Equivalences dans un produit

Si $f_1 \sim f_2$ et $g_1 \sim g_2$, alors $f_1 g_1 \sim f_2 g_2$.

Equivalences dans un quotient

On suppose que g_1 et g_2 ne s'annulent pas au voisinage de a (sauf peut-être en a).
Si $f_1 \sim f_2$ et $g_1 \sim g_2$, alors $\dfrac{f_1}{g_1} \sim \dfrac{f_2}{g_2}$.

Généralisation

Les deux propriétés précédentes peuvent être généralisées à des produits ou des quotients de fonctions en nombre quelconque. Dans un tel produit (ou quotient), on peut remplacer tout ou partie des fonctions par un équivalent : l'expression obtenue est équivalente à l'expression initiale (en particulier, la limite éventuelle en a est la même).

Puissances d'équivalents

Si $f \sim g$ alors $\forall\, \alpha, f^\alpha \sim g^\alpha$ (si $\alpha \notin \mathbb{Z}$, on suppose $f, g > 0$). En particulier, $\dfrac{1}{f} \sim \dfrac{1}{g}$.

Equivalents dans une somme

Attention !! Si $f_1 \sim f_2$ et $g_1 \sim g_2$, alors on n'a pas, en général, $f_1 + g_1 \sim f_2 + g_2$.
Cependant : si $f \sim h$ et $g = \mathrm{o}(f)$, alors $f + g \sim h$.
Plus simplement : $g = \mathrm{o}(f) \;\Rightarrow\; f + g \sim f$.
Généralisation : si $f_2, f_3, \ldots, f_n$ sont des $\mathrm{o}(f_1)$ alors $f_1 + f_2 + \cdots + f_n \sim f_1$.

Changement de variable

Soit φ une application de J dans I, qui tend vers a quand x tend vers b dans J.
Si f est dominée par g en a, alors $f \circ \varphi$ est dominée par $g \circ \varphi$ en b.
Si f est négligeable devant g en a, $f \circ \varphi$ est négligeable devant $g \circ \varphi$ en b.
Si f et g sont équivalentes en a, $f \circ \varphi$ et $g \circ \varphi$ sont équivalentes en b.

Remarque

C'est surtout cette dernière propriété qui est utilisée.

Par exemple, du fait que $\sin x \sim x$ en 0, on a : $\sin x^2 \sim x^2$ en 0.

Toujours grâce à $\sin x \sim x$ en 0, on trouve : $\sin \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$ en $\pm\infty$.

Sachant que $\ln(1+x) \sim x$ en 0, alors $\ln x \sim x - 1$ en 1.

7.3.4. Quelques conseils

- Les équivalents servent essentiellement au calcul de limites :

  On transforme une expression $f(x)$, dont on cherche la limite ℓ en un point a, en une expression équivalente $g(x)$ dont la limite en ce point est évidente (si la limite ℓ est réelle, il est courant qu'on aboutisse à $g(x) = \ell$).

  Les outils essentiels sont les équivalents classiques (voir plus loin) et la possibilité qu'on a de remplacer les facteurs d'un produit (d'un quotient) par des équivalents.

- L'erreur la plus fréquente consiste à utiliser les équivalents dans des sommes. La seule propriété concernant les équivalents et les sommes peut s'écrire : $g = o(f) \Rightarrow f + g \sim f$.

- On évitera d'utiliser un équivalent d'une fonction f sous la forme $f \sim g + h$, avec $h = o(g)$, et surtout de donner un rôle à h : on se contentera de $f \sim g$.

  Ecrire par exemple $\cos(x) \sim 1 - \frac{x^2}{2}$ (en 0) n'est pas faux mais dangereux si on utilise $-\frac{x^2}{2}$.

  En effet, on a aussi : $\cos(x) \sim 1 + x^2 \sim 1 - 36x^2 \ldots$

  Pour cet exemple, la solution est sans doute d'écrire : $1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$.

- Soit ℓ un réel non nul, et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, alors $f(x) \sim \ell$ en ce point.

  Mais si $\ell = 0$, on n'écrira pas $f(x) \sim 0$!

  En effet, seule la fonction nulle au voisinage de a est elle-même équivalente à 0 en a.

- Si $f \sim g$ (f et g étant positives et ne tendent pas vers 1) alors $\ln(f) \sim \ln(g)$.

  C'est faux si f et g tendent vers 1.

  Par exemple, $(1+x) \sim (1+x^2)$ en $x = 0$, mais en ce point $\begin{cases} \ln(1+x) \sim x \\ \ln(1+x^2) \sim x^2 \end{cases}$

- On évitera surtout de prendre des " exponentielles " d'équivalents :

  En effet $e^f \sim e^g \Leftrightarrow f - g \to 0$, ce qui n'équivaut pas du tout à $f \sim g$.

  Exemples : x et x^2 en 0, ou encore x et $x + 1$ en $+\infty$.

7.3.5. Comparaisons usuelles

Exponentielles, puissances et logarithmes

Soient α, β et γ des réels strictement positifs.

On a : $\lim\limits_{+\infty} x^\beta \mathrm{e}^{-\alpha x} = 0$, $\lim\limits_{-\infty} |x|^\beta \mathrm{e}^{\alpha x} = 0$, $\lim\limits_{+\infty} x^{-\beta} \ln^\gamma(x) = 0$, $\lim\limits_{0+} x^\beta |\ln^\gamma(x)| = 0$.

Autrement dit :

- ◇ $x^\beta = \mathrm{o}(e^{\alpha x})$ en $+\infty$ $\qquad$ $\mathrm{e}^{\alpha x} = \mathrm{o}(|x|^{-\beta})$ en $-\infty$.
- ◇ $\ln(x)^\gamma = \mathrm{o}(x^\beta)$ en $+\infty$ $\qquad$ $|\ln(x)|^\gamma = \mathrm{o}(x^{-\beta})$ au voisinage de 0.

Equivalents classiques

Si f est dérivable en 0 et vérifie $f(0) = 0$ et $f(0) = 1$, alors $f(x) \sim x$ en 0.

En particulier, en 0 : $\sin(x) \sim x$, $\tan(x) \sim x$, $\ln(1 + x) \sim x$, et $\mathrm{e}^x - 1 \sim x$.

Toujours à l'origine : $(1 + x)^m - 1 \sim mx$, et $1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$.

On peut aussi écrire, au voisinage de $x = 1$: $x^m - 1 \sim m(x - 1)$ et $\ln(x) \sim x - 1$.

Polynômes et fractions rationnelles

Soit $P(x) = a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$ un polynôme ($a_n \neq 0$, $a_m \neq 0$).

Au voisinage de l'origine, $P(x) \sim a_m x^m$ (monôme de plus bas degré).

Au voisinage de $\pm\infty$, $P(x) \sim a_n x^n$ (monôme de plus haut degré).

Soit $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle (P et Q deux polynômes).

Au voisinage de 0, $f(x)$ est équivalente au quotient des monômes de plus bas degré.

Au voisinage de ∞, $f(x)$ est équivalente au quotient des monômes de plus haut degré.

7.4. Continuité

7.4.1. Continuité en un point

Définition

Soient $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$. On dit que f est *continue* en a si la limite de f en a existe.

Au vu des définitions cette limite ne peut être égale qu'à $f(a)$.

Autrement dit : f est continue en $a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $(x \in I$ et $|x - a| \leq \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.

Définition *(Continuité à gauche en un point)*

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

Soit a un élément de I, qui ne soit pas l'extrémité gauche de I.

Soit g la restriction de f à l'intervalle $J = I \cap]-\infty, a]$

On dit que f est *continue à gauche* en a si g est continue en a.

Cela équivaut à dire que : $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = f(a)$ ou encore :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $(a - \delta \leq x \leq a) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.

Définition *(Continuité à droite en un point)*

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit a un élément de I qui n'est pas l'extrémité droite de I.

Soit g la restriction de f à l'intervalle $J = I \cap [a, +\infty[$.

On dit que f est *continue à droite* en a si g est continue en a.

Cela équivaut à dire que : $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(x)$ ou encore :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $(a \leq x \leq a + \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.

Remarque

Soit a un point intérieur à l'intervalle I. Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$.

f est continue en a si et seulement si$f$ est continue à droite et à gauche en a.

Définition *(Discontinuité de première espèce)*

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit a un point de I.

Si f n'est pas continue en a, on dit que f est *discontinue* en ce point.

Si a est intérieur à I, si f est discontinue en a, mais si les limites à gauche et à droite en a existent et sont finies, on dit que f présente en a une *discontinuité de première espèce.*

Définition *(Prolongement par continuité)*

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit a un réel, extrémité de I mais n'appartenant pas à I.

On dit que f est prolongeable par continuité en a si $\ell = \lim\limits_{a} f$ existe et est finie.

Cela signifie que g définie sur $I \cup \{a\}$ par $g(x) = f(x)$ si $x \in I$ et $g(a) = \ell$ est continue en a.

On dit que l'application g est le *prolongement par continuité* de f en a.

7.4.2. Propriétés

Proposition *(Opérations sur applications continues en un point)*

Soient f et g deux éléments de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit a un élément de I.

Si f et g sont continues en a, il en est de même pour fg et $\alpha f + \beta g$ ($\alpha\beta \in \mathbb{R}$).

Si f est continue en a et si $f(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est continue en a.

Si f est continue en a et si g est continue en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Proposition *(Caractérisation séquentielle de la continuité)*

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit a un élément de I.

f est continue en a si et seulement si, pour toute suite (u_n) de I convergeant vers a, la suite de terme général $f(u_n)$ converge vers $f(a)$.

Remarques

La propriété précédente est utile pour montrer qu'une application f n'est pas continue en un point a : on construit une suite (u_n) convergeant vers a, mais telle que la suite de terme général $(f(u_n))$ ne converge pas vers $f(a)$.

De même si le réel a est une extrémité de I (n'appartenant pas à I), si la suite (u_n) converge vers a, mais si la suite de terme général $f(u_n)$ n'a pas de limite (ou si sa limite est infinie), on peut dire que f n'est pas prolongeable par continuité au point a.

7.4.3. Continuité sur un intervalle

Définition

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I, \mathrm{I\!R})$.
On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.
On note $\mathcal{C}(I, \mathrm{I\!R})$ (ou $\mathcal{C}(I)$) l'ensemble des applications continues sur I, à valeurs réelles.

Propriétés et exemples

- Toute application constante est continue sur $\mathrm{I\!R}$.

  Il en est de même des applications $x \mapsto x$ et $x \mapsto |x|$.
- Soient f et g deux applications continues sur I.

  Pour tous scalaires α et β, $\alpha f + \beta g$ est continue sur I.

  Il en est de même de l'application fg.

  Si g ne s'annule pas sur I, $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I.
- Les applications polynômiales sont continues sur $\mathrm{I\!R}$.

  Une application rationnelle (quotient de deux applications polynômiales) est continue sur chaque intervalle de son domaine de définition.
- Les applications usuelles $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \tan(x)$, $x \mapsto \exp(x)$, $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto x^\alpha$ sont continues sur chaque intervalle de leur domaine.
- Soient $f \in \mathcal{C}(I, \mathrm{I\!R})$, $g \in \mathcal{C}(J, \mathrm{I\!R})$, avec $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f \in \mathcal{C}(I, \mathrm{I\!R})$.
- Si f est continue sur I, alors les applications $|f|$, f^+ et f^- sont continues sur I.

  Si f et g sont continues sur I, alors $\inf(f, g)$ et $\sup(f, g)$ sont continues sur I.
- Si f est continue sur I, alors la restriction de f à tout intervalle $J \subset I$ est continue sur J.

Remarques

Pour démontrer qu'une application est continue sur un intervalle I, on ne revient pratiquement jamais à la définition *epsilonesque.*

Le plus souvent, la fonction à étudier est en effet un *cocktail* de fonctions continues classiques et les propriétés précédentes permettent de conclure.

La continuité, même sur un intervalle, reste une *propriété locale*, ce qui signifie qu'elle n'est que le bilan de la continuité de f en chacun des points de I.

Théorème *(Théorème des valeurs intermédiaires)*

Soit f une application continue sur l'intervalle I.
Soient a, b deux éléments de I ($a < b$).
Soit y un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
Alors il existe un réel x, compris entre a et b, tel que $f(x) = y$.

Énoncé équivalent

Soit f une application continue sur l'intervalle I, à valeurs réelles.
Alors $f(I)$ est un intervalle.

Conséquence

Soit f une application continue sur l'intervalle I, à valeurs réelles.
On suppose qu'il existe a et b dans I tels que $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$.
Alors il existe c dans I, compris entre a et b, tel que $f(c) = 0$.

Théorème *(Fonction continue sur un segment)*

Soit f une application continue sur un segment $[a, b]$ (a, b deux réels, $a \leq b$).
Alors $f([a, b])$ est un segment $[m, M]$.

Conséquence

Toute application continue sur un segment y est bornée et y atteint ses bornes :
Il existe x_0 dans $[a, b]$ tel que $f(x_0) = m = \min\{f(x), a \leq x \leq b\}$.
Il existe x_1 dans $[a, b]$ tel que $f(x_1) = M = \max\{f(x), a \leq x \leq b\}$.

7.4.4. Théorème de la bijection réciproque

Théorème

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
On suppose que f est continue et strictement monotone sur I.
Alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle image $J = f(I)$.
De plus, la bijection réciproque f^{-1}, de J vers I, est continue et strictement monotone (avec la même monotonie que f).

Remarques

- Les courbes représentatives de f et de f^{-1} sont symétriques l'une de l'autre dans la symétrie par rapport à la droite $y = x$, parallèlement à la droite $y = -x$ (si le repère est orthonormé, il s'agit de la symétrie orthogonale par rapport à la droite $y = x$).
- Le théorème des valeurs intermédiaires montre l'existence d'une solution à $f(x) = 0$.

  Le théorème de la bijection réciproque assure l'unicité de cette solution.
- Si f est continue sur l'intervalle I, l'intervalle $J = f(I)$ n'a pas toujours les mêmes propriétés que I (ouvert ou fermé, borné ou non borné), sauf si I est un segment. Mais si f est strictement monotone, le caractère ouvert, semi-ouvert, ou fermé de I est conservé.

Exemples d'inversions d'applications continues

- L'application $x \mapsto \exp(x)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

  La bijection réciproque est $x \mapsto \ln(x)$.
- Pour tout α de $\mathbb{R}^{+*}$, les applications $x \mapsto x^\alpha$ et $x \mapsto x^{1/\alpha}$ sont deux bijections de $\mathbb{R}^{+*}$ sur lui-même, réciproques l'une de l'autre.

- L'application $x \mapsto \sin(x)$ réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$.
  La bijection réciproque est notée $x \mapsto \arcsin(x)$ (*arc sinus de* x).
- L'application $x \mapsto \cos(x)$ réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.
  La bijection réciproque est notée $x \mapsto \arccos(x)$ (*arc cosinus de* x).
- L'application $x \mapsto \tan(x)$ réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.
  La bijection réciproque est notée $x \mapsto \arctan(x)$ (*arc tangente de* x).

7.4.5. Continuité uniforme

Définition

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On dit que f est *uniformément continue* sur I si :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que : $\forall (x, y) \in I \times I, |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

Remarque

Pour montrer qu'une application $f : I \to \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue, on doit montrer l'existence d'un réel $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\delta > 0$, on puisse trouver x et y dans I tels que $|x - y| < \delta$, mais cependant tels que $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.

Il revient au même de trouver deux suites (x_n) et (y_n) de I telles que $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$ mais telles que $\lim\limits_{n\to\infty}(f(y_n) - f(x_n)) \neq 0$.

Continuité et continuité uniforme

Rappelons la définition de la continuité de f en un point a de I :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que : $\forall x \in \mathrm{I}, |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.

Dans cette définition, le réel δ dépend de ε et du point a.

La continuité uniforme exprime l'existence d'un réel δ ne dépendant plus du point a.

En particulier : si f est uniformément continue sur l'intervalle I, f est continue sur I.

La réciproque est fausse, comme le montrent ces exemples : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} \text{ sur }]0, 1]. \\ f(x) = \sin(x^2) \text{ sur } \mathbb{R}. \end{cases}$

Le théorème suivant donne une condition où la continuité implique la continuité uniforme.

Théorème *(Théorème de Heine)*

Soit f une application continue sur un segment $[a, b]$ (a, b deux réels, $a \leq b$).
Alors f est uniformément continue sur $[a, b]$.

7.4.6. Applications lipschitziennes

Définition

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit λ un réel strictement positif.
On dit que f est $\lambda -$ *lipschitzienne* (ou encore lipschitzienne de rapport λ) sur I si :
$\forall (x, y) \in I \times I, |f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|$.

Remarques et propriétés

- Dire que f est λ-lipschitzienne sur I, c'est dire que les taux d'accroissement de f sur I (entre deux points quelconques) sont majorés en valeur absolue par λ.
- Si f est λ -lipschitzienne sur I, alors f est uniformément continue sur I.
  La réciproque est fausse comme le montre l'exemple de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur le segment $[0, 1]$.
- Si f est λ-lipschitzienne sur I, alors, pour tout $\mu > \lambda$, f est μ-lipschitzienne sur I.
- Si f est λ-lipschitzienne sur I, avec $\lambda < 1$, on dit que f est *contractante* sur I.
- L'inégalité des accroissements finis (cours de Terminale) indique que si f est dérivable sur I, et si, pour tout x de I, $|f'(x)| \leq \lambda$, alors f est λ-lipschitzienne sur I.

Opérations entre applications lipschitziennes

- Si f est λ-lipschitzienne sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$, alors f est λ-lipschitzienne sur $[a, c]$.
- Si f et g sont λ-lipschitziennes sur I, alors $f + g$ est λ-lipschitzienne sur I.
- Si f est λ-lipschitzienne sur I, alors αf est $|\alpha|\lambda$-lipschitzienne sur I.
- Si f et g sont lipschitziennes et bornées sur I, alors fg est lipschitzienne sur I.
- Si f est λ-lipschitzienne sur I, si g est μ-lipschitzienne sur J, et si $f(I) \subset J$, alors l'application $g \circ f$ est $\lambda\mu$-lipschitzienne sur I.

Les notions d'applications uniformément continue ou lipschitzienne sur un intervalle I sont des notions globales (contrairement à la continuité, qui est une notion locale). En particulier, cela n'a aucun sens de dire que f est uniformément continue ou lipschitzienne en un point !

7.5. Quelques fonctions usuelles

7.5.1. Fonctions circulaires réciproques

Définition *(fonction arcsin)*

La restriction à $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ de $x \mapsto \sin x$ est une bijection de I sur $J = [-1, 1]$.
La bijection réciproque est notée $x \mapsto \arcsin x$ (fonction "arc sinus").

Propriétés

- L'application $x \mapsto \arcsin x$ est une bijection de $[-1, 1]$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
  Elle est continue, strictement croissante, et impaire.
- Pour tout x de $[-1, 1]$, $\arcsin x$ est l'angle compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont le sinus est égal à x :

$$\begin{cases} y = \arcsin x \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin y \\ y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

- Quelques valeurs particulières

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

- Pour tout x de $[-1,1]$, $\sin(\arcsin x) = x$.

  Pour tout x de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arcsin(\sin x) = x$ (attention au domaine!)

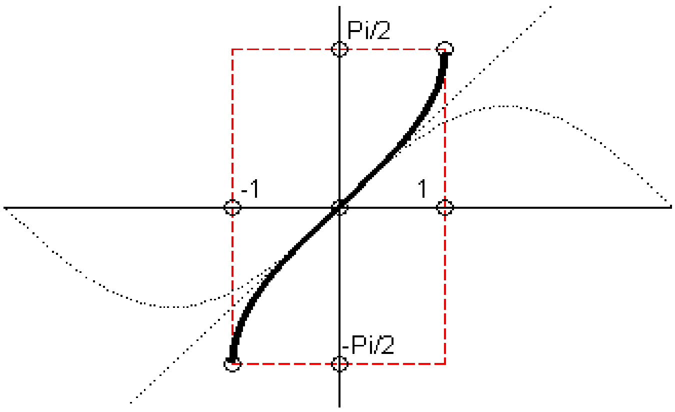
  Pour tout x de $[-1,1]$, $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.

  Pour tout x de $]-1,1[$, $\tan(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

- Dérivée : pour tout x de $]-1,1[$, $\arcsin' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

- Courbe représentative :

y = arcsin x



Définition *(fonction arccos)*

> La restriction à $I = [0,\pi]$ de $x \mapsto \cos x$ est une bijection de I sur $J = [-1,1]$.
> La bijection réciproque est notée $x \mapsto \arccos x$ (fonction "arc cosinus").

Propriétés

- L'application $x \mapsto \arccos x$ est une bijection de $[-1,1]$ sur $[0,\pi]$.

  Elle est continue et strictement décroissante.

- Pour tout x de $[-1,1]$, $\arccos x$ est l'angle compris entre 0 et π dont le cosinus est égal à x :

$$\begin{cases} y = \arccos x \\ x \in [-1,1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos y \\ y \in [0,\pi] \end{cases}$$

- Quelques valeurs particulières

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

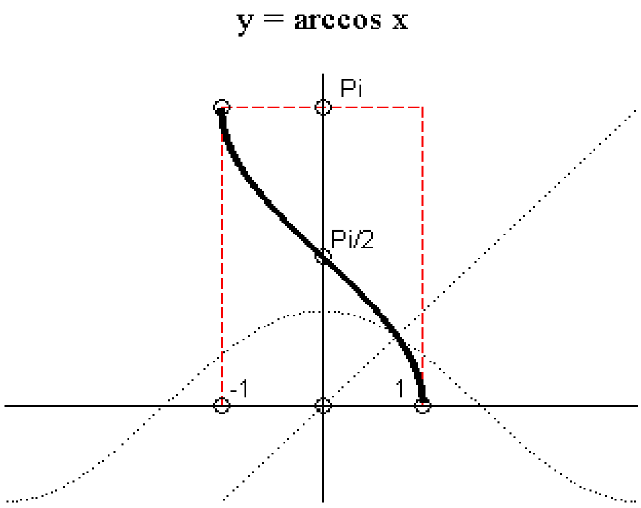
- Pour tout x de $[-1,1]$, $\cos(\arccos x) = x$.

  Pour tout x de $[0,\pi]$, $\arccos(\cos x) = x$ (attention au domaine!)

  Pour tout x de $[-1,1]$, $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$.

  Pour tout x de $[-1,0\,[\cup]\,0,1]$, $\tan(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

- Pour tout x de $[-1,1]$, $\arccos(-x)+\arccos x=\pi$.
  Pour tout x de $[-1,1]$, $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.
- Dérivée : pour tout x de $]-1,1[$, $\arccos' x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- Courbe représentative :



Définition *(fonction arctan)*

La restriction à $I=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ de $x\mapsto \tan x$ est une bijection de$I$ sur $\mathbb{R}$.
La bijection réciproque est notée $x\mapsto \arctan x$ (fonction “arc tangente”).

Propriétés

- L'application $x\mapsto \arctan x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.
  Elle est continue, strictement croissante, et impaire.
- Pour tout x réel, $\arctan x$ est l'angle de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ dont la tangente est égale à x :

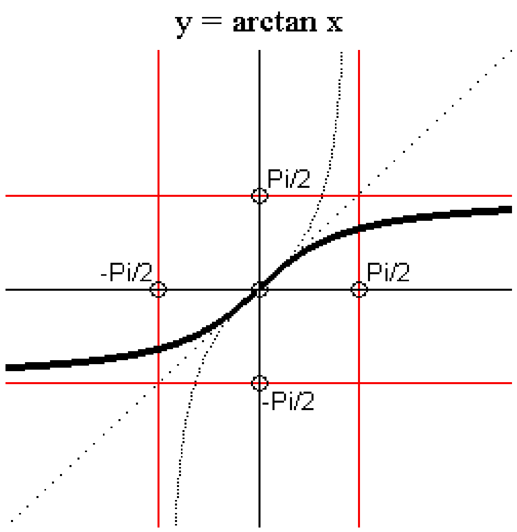
$$\begin{cases} y=\arctan x \\ x\in\mathbb{R}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\tan y \\ y\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\end{cases}$$

- Quelques valeurs particulières

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

- Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\tan(\arctan x)=x$.
  Pour tout x de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $\arctan(\tan x)=x$ (attention au domaine!).
  Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\cos(\arctan x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
  Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\sin(\arctan x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

- Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \varepsilon \frac{\pi}{2}$, avec $\varepsilon = \begin{cases} -1 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$
- Dérivée : pour tout x de $\mathbb{R}$, $\arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}$.
- Courbe représentative :



7.5.2. Fonctions logarithmes et exponentielles

Définition *(logarithme népérien)*

> On appelle fonction *logarithme népérien*, et on note $x \mapsto \ln x$, la primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$ et qui s'annule en $x = 1$ de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Autrement dit : $\forall x > 0, \ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

Propriétés

- L'application ln est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\forall\, x > 0,\ \ln' x = \frac{1}{x}$ et $\ln 1 = 0$.
- Cette application est strictement croissante et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Pour $x > 0$ et $y > 0$, on a : $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, $\quad \ln \frac{1}{x} = -\ln x$, $\quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$.

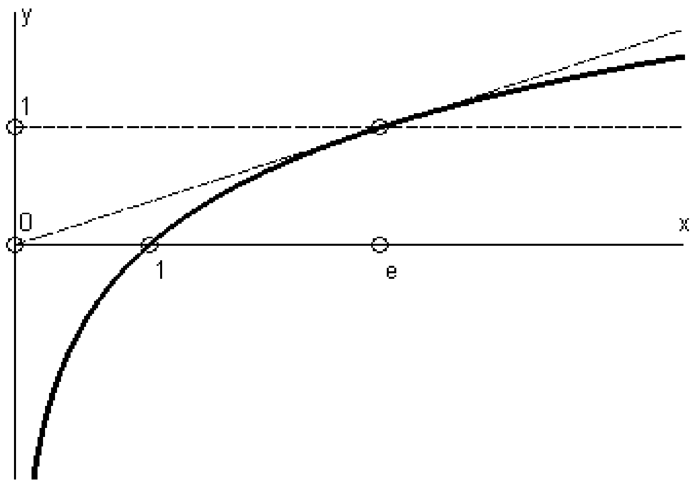
  Plus généralement, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x > 0$, on a : $\ln x^\alpha = \alpha \ln x$.
- Limites usuelles : $\begin{cases} \lim\limits_{0^+} \ln x = -\infty & \lim\limits_{+\infty} \ln x = +\infty & \lim\limits_{0^+} x \ln x = 0^- \\ \lim\limits_{+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+ & \lim\limits_{0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 & \lim\limits_{1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \\ \forall\, \alpha > 0, \forall\, \beta > 0 & \lim\limits_{0^+} x^\alpha \left|\ln x\right|^\beta = 0 & \lim\limits_{+\infty} \frac{\ln^\beta x}{x^\alpha} = 0 \end{cases}$
- L'application $x \mapsto \ln x$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$.

  On note e l'unique réel strictement positif tel que $\ln \mathrm{e} = 1$. On a : $\mathrm{e} \approx 2.718281828$.
- L'application $x \mapsto \ln x$ est concave (sa dérivée seconde est $-\frac{1}{x^2} < 0$.)

  Pour tout $x > 0$, on a l'inégalité $\ln x \leq x - 1$ (avec égalité $\Leftrightarrow\ x = 1$.)

- Courbe représentative :

y = ln x



Remarques

- Si x, y sont deux réels non nuls et de même signe, alors $\ln(xy) = \ln|x| + \ln|y|$.

  En particulier, pour tout $x \neq 0$, on a : $\ln x^2 = 2\ln|x|$.
- L'application $x \mapsto \ln|x|$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
- Soit f une application dérivable sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}^*$.

  On appelle *dérivée logarithmique* de f la dérivée $\dfrac{f'}{f}$ de l'application $\ln|f|$.
- Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des applications dérivables et strictement positives sur l'intervalle I.

  Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des réels, et $g = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \ldots f_n^{\alpha_n}$.

  Alors la dérivée logarithmique de g est $\dfrac{g'}{g} = \alpha_1 \dfrac{f_1'}{f_1} + \alpha_2 \dfrac{f_2'}{f_2} + \cdots + \alpha_n \dfrac{f_n'}{f_n}$.
- La dérivée logarithmique peut donc être un moyen commode de calculer la dérivée d'une application qui s'exprime essentiellement à l'aide de quotients, de produits, de puissances.

  Soit par exemple $f : x \mapsto \sqrt{|x(x+2)|}\exp\dfrac{1}{x}$, qui est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$.

  Pour tout x de $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$, on a : $\ln f(x) = \dfrac{1}{2}\ln|x(x+2)| + \dfrac{1}{x}$.

  En dérivant, on obtient : $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{x+1}{x(x+2)} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-2}{x^2(x+2)}$. Ainsi $f' = \dfrac{x^2-2}{x(x+2)} f$.

  En redérivant sur $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$, on trouve l'expression de f'' :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{x^2-2}{x^2(x+2)} f'(x) + \frac{-x^4+6x^2+8x}{x^4(x+2)^2} f(x) \\ &= \frac{(x^2-2)^2 + (-x^4+6x^2+8x)}{x^4(x+2)^2} f(x) = \frac{2(x^2+4x+2)}{x^4(x+2)^2} f(x) \end{aligned}$$

  On pourra comparer ce calcul de f'' avec celui obtenu par les méthodes habituelles de dérivation (où la présence d'une valeur absolue n'arrange rien).

Définition *(fonction exponentielle)*

On sait que l'application $x \mapsto \ln x$ est une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$.
La bijection réciproque est appelée *fonction exponentielle* et est notée $x \mapsto \exp x$.

Propriétés

- L'application $x \mapsto \exp x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, continue et strictement croissante.

  On a l'équivalence : $\begin{cases} y = \exp x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln y \\ y > 0 \end{cases}$
- L'application $x \mapsto \exp x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exp' x = \exp x$.

  Plus généralement, $x \mapsto \exp x$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exp^{(n)} = \exp$.
- Propriétés fonctionnelles :

  Pour tous x, y on a : $\exp(x+y) = \exp x\ \exp y \quad \exp(-x) = \dfrac{1}{\exp x}, \quad \exp(x-y) = \dfrac{\exp x}{\exp y}$.
- L'application $x \mapsto \exp x$ est convexe sur $\mathbb{R}$ (sa dérivé seconde est $\exp x > 0$.)

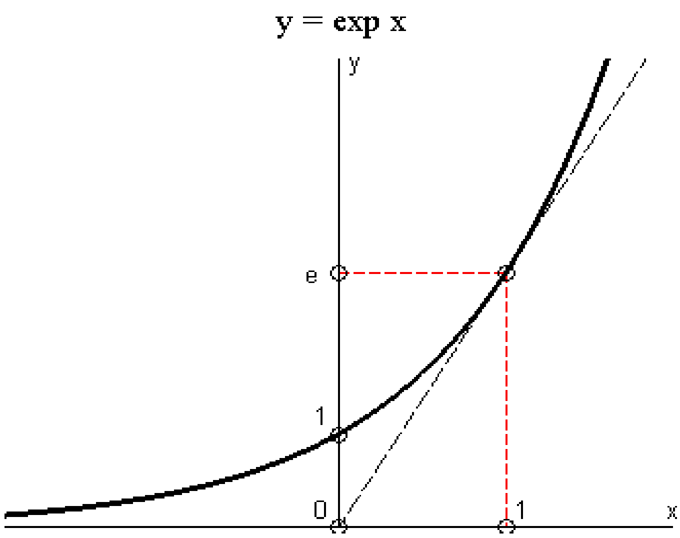
  Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a l'inégalité $\exp(x) \leq 1 + x$ (égalité $\Leftrightarrow\ x = 0$.)
- Limites usuelles : $\begin{cases} \lim\limits_{-\infty} \exp x = 0^+ & \lim\limits_{+\infty} \exp x = +\infty & \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\exp x}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{-\infty} x \exp x = 0 & \lim\limits_{0} \dfrac{\exp x - 1}{x} = 1 & \\ \forall\, \alpha, \beta > 0 & \lim\limits_{-\infty} |x|^\alpha \exp^\beta x = 0 & \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\exp^\beta x}{x^\alpha} = +\infty \end{cases}$
- Notation $x \mapsto \mathrm{e}^x$:

  Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\exp(n) = \exp(1)^n = \mathrm{e}^n$.

  Cette propriété se généralise aux exposants rationnels.

  On décide d'étendre encore cette définition en posant : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x = \exp x$.

  On définit ainsi les puissances de e avec exposant réel quelconque. Toutes les propriétés de la fonction exponentielle peuvent alors se réécrire en utilisant cette notation.
- Courbe représentative :



Définition *(fonctions exponentielles de base quelconque)*

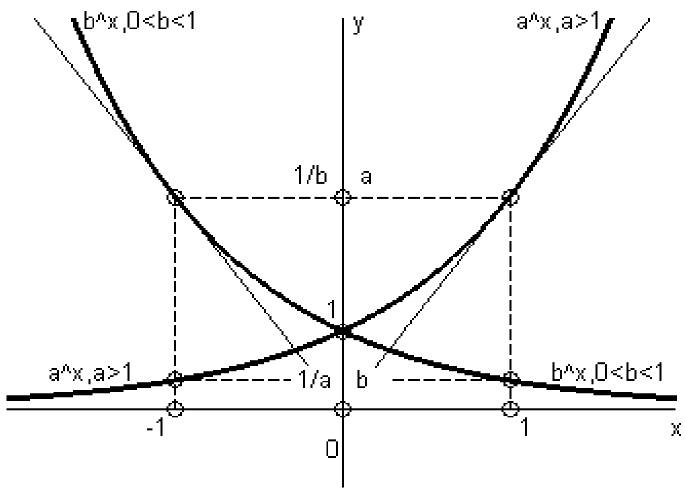
Pour tout réel $a > 0$, et pour tout réel x, on pose $a^x = \exp(x \ln a)$.
L'application $x \mapsto a^x$ est appelée *fonction exponentielle de base a*.

Définition *(fonctions puissances)*

Soit α un nombre réel quelconque. On appelle *fonction puissance d'exposant* α l'application définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $x \mapsto x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$.

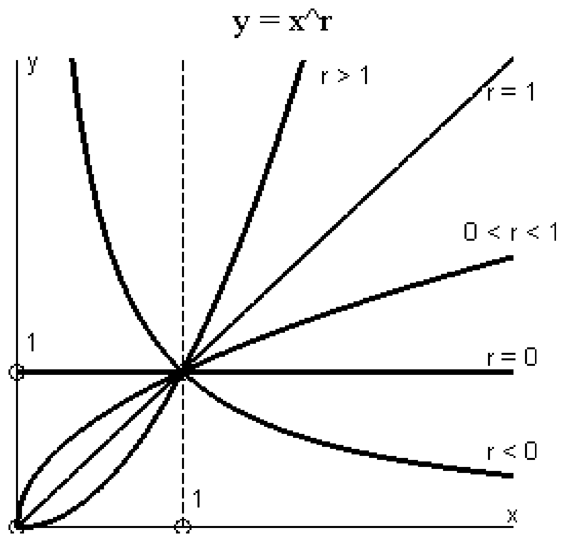
Propriétés des fonctions exponentielles

- Pour $a = \mathrm{e}$, on retrouve l'application $x \mapsto \exp x$, déjà notée $x \mapsto \mathrm{e}^x$.
  L'application $x \mapsto \exp x = \mathrm{e}^x$ est donc l'application exponentielle de base e.
- La notation a^x étend la définition de a^r pour tout rationnel r.
- Pour tout réel $a > 0$, l'application $x \mapsto a^x$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
  Elle est même indéfiniment dérivable : $\forall x \in \mathbb{R}, (a^x)' = (\ln a) a^x$.
- L'application $x \mapsto a^x$ est $\begin{cases} \text{strictement croissante si } a > 1 \\ \text{strictement décroissante si } 0 < a < 1 \\ \text{constante égale à 1 si } a = 1 \end{cases}$
- Si $a \neq 1$, l'application $x \mapsto a^x$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
  La bijection réciproque est $x \mapsto \log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ appelée fonction logarithme de base a.
  Ainsi la fonction logarithme de base 10 est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\log_{10} x = \log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$ et elle est la bijection réciproque de l'application $x \mapsto 10^x$.
- Pour tout x de $\mathbb{R}$ et tout $a > 0$, on a $\left(\dfrac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$. Les courbes représentatives de $x \mapsto a^x$ et $x \mapsto \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ sont donc symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des ordonnées.
- Courbes représentatives :



Propriétés des fonctions puissances

- Quant l'exposant α est entier ou rationnel, cette définition de l'application $x \mapsto x^\alpha$ est compatible avec celle qu'on connaissait déjà (sur un domaine parfois plus large que $\mathbb{R}^{+*}$).
- La dérivée de $x \mapsto x^\alpha$ est $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.
  Sur son domaine $\mathbb{R}^{+*}$, l'application $x \mapsto x^\alpha$ est $\begin{cases} \text{strictement croissante si } \alpha > 0 \\ \text{strictement décroissante si } \alpha < 0 \\ \text{constante en 1 si } \alpha = 0 \end{cases}$
- Si $\alpha \neq 0$, l'application $x \mapsto x^\alpha$ est une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur lui-même, dont la bijection réciproque est l'application $x \mapsto x^{1/\alpha}$
- Si $\alpha > 0$, $x \mapsto x^\alpha$ est prolongeable par continuité à l'origine en lui donnant la valeur 0.
  En $(0,0)$, la courbe présente alors une tangente horizontale si $\alpha > 1$ et verticale si $0 < \alpha < 1$.
  Toutes les courbes représentatives des applications $x \mapsto x^\alpha$ passent par le point $(1,1)$.
- Le placement des différentes courbes est le suivant :
  $\forall\, x > 0,\ \forall\,(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, avec $\alpha < \beta$: $\begin{cases} \text{Si } 0 < x < 1 \text{ alors } x^\alpha > x^\beta \\ \text{Si } x > 1 \text{ alors } x^\alpha < x^\beta \end{cases}$
- Courbes représentatives :



Propriétés fonctionnelles et limites usuelles

- Propriétés fonctionnelles :
  Pour tous x, y de $\mathbb{R}$, pour tout a, b de $\mathbb{R}^{+*}$, on a : $\begin{cases} a^{x+y} = a^x\, a^y & a^{-x} = \dfrac{1}{a^x} & a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y} \\ (a^x)^y = a^{xy} & a^x\, b^x = (ab)^x & \dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x \end{cases}$
- Limites usuelles :

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 \text{ si } a > 1 \\ +\infty \text{ si } 0 < a < 1 \end{cases} & \displaystyle\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty \text{ si } a > 1 \\ 0 \text{ si } 0 < a < 1 \end{cases} & \\ \forall\,\alpha > 0, \forall\, a > 1 & \displaystyle\lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha\, a^x = 0 & \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \\ \forall\,\alpha > 0, \forall\, a \in]0,1[& \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{a^x}{|x|^\alpha} = +\infty & \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha a^x = 0 \end{cases}$$

7.5.3. Fonctions hyperboliques

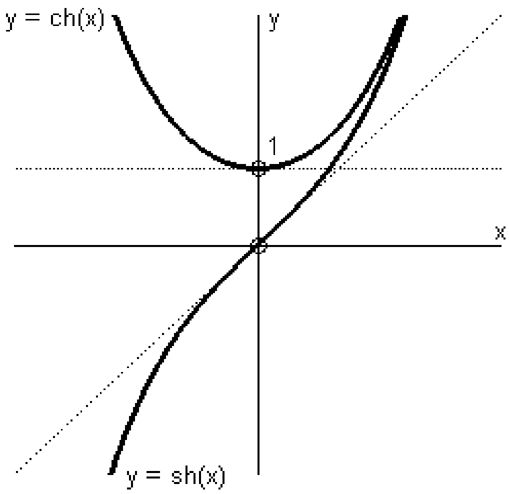
Définition *(applications $x \mapsto \operatorname{sh}x$ et $x \mapsto \operatorname{ch}x$)*

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose $\operatorname{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (fonction "cosinus hyperbolique")

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose $\operatorname{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (fonction "sinus hyperbolique")

Propriétés

- Les applications $x \mapsto \operatorname{ch}x$ et $x \mapsto \operatorname{sh}x$ sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.
  Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $\operatorname{sh}'x = \operatorname{ch}x$ et $\operatorname{ch}'x = \operatorname{sh}x$.
  Les deux applications $x \mapsto y = \operatorname{ch}x$ et $x \mapsto y = \operatorname{sh}x$ sont donc solutions de $y'' = y$.
  L'application $x \mapsto \operatorname{ch}x$ est paire, et l'application $x \mapsto \operatorname{sh}x$ est impaire.
- Courbes représentatives :



- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \operatorname{ch}x + \operatorname{sh}x = e^x \\ \operatorname{ch}x - \operatorname{sh}x = e^{-x} \end{cases}$, $\begin{cases} \operatorname{ch}x \geq 1 \\ \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \end{cases}$
- $\forall x \geq 0,\ \forall y \in \mathbb{R},\ x^2 - y^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \exists\, t \in \mathbb{R} \\ \operatorname{ch}t = x,\ \operatorname{sh}t = y \end{cases}$
  L'application $t \mapsto (\operatorname{ch}t, \operatorname{sh}t)$ est un paramétrage de l'arc d'hyperbole $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$
- Au voisinage de l'origine, on a : $\operatorname{sh}x \sim x$ (la droite $y = x$ est tangente d'inflexion).
  Toujours au voisinage de 0, on a : $\operatorname{ch}x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$.
- Au voisinage de $+\infty$, on a : $\operatorname{ch}x \sim \frac{e^x}{2}$ et $\operatorname{sh}x \sim \frac{e^x}{2}$.
  Les deux courbes $y = \operatorname{ch}x$ et $y = \operatorname{sh}x$ sont asymptotes à $y = \frac{e^x}{2}$ (avec $\operatorname{sh}x < \frac{e^x}{2} < \operatorname{ch}x$.)
- Au voisinage de $-\infty$, on a : $\operatorname{ch}x \sim \frac{e^{-x}}{2}$ et $\operatorname{sh}x \sim -\frac{e^{-x}}{2}$.

Définition *(application $x \mapsto \operatorname{th} x$)*

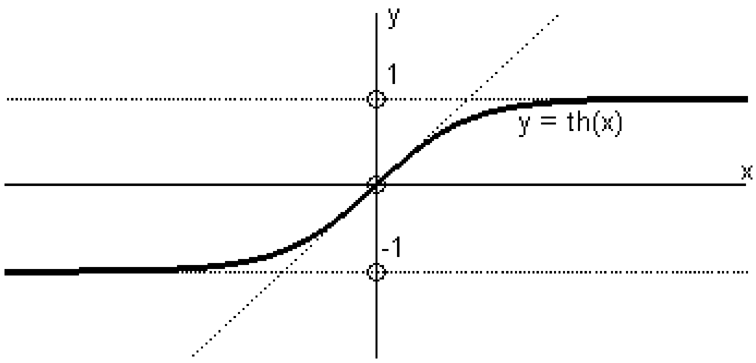
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ (fonction “tangente hyperbolique”)

Propriétés

- L’application $x \mapsto \operatorname{th} x$ est impaire. $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{th} x = 1$.

  Au voisinage de 0, on a : $\operatorname{th} x \sim x$ (la droite $y = x$ est tangente d’inflexion.)
- L’application $x \mapsto \operatorname{th} x$ est indéfiniment dérivable : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \operatorname{th}' x = 1 - \operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.
- Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $\operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$.

  Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $|\operatorname{th} x| \le 1$.
- Courbe représentative :



7.5.4. Trigonométrie hyperbolique

- ch, sh et th d’une somme ou d’une différence :

$$\begin{cases} \operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \\ \operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \\ \operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \\ \operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{ch} 2x = 2\operatorname{ch}^2 x - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x \\ \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x \end{cases}$$

$$\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}, \quad \operatorname{th}(x-y) = \frac{\operatorname{th} x - \operatorname{th} y}{1 - \operatorname{th} x \operatorname{th} y}, \quad \operatorname{th} 2x = \frac{2\operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}$$

- Transformations de produits en sommes et de sommes en produits.

$$\begin{cases} \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y)) \\ \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y)) \\ \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y)) \\ \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{ch} 2x) \\ \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1) \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{ch} p + \operatorname{ch} q = 2\operatorname{ch}\frac{p+q}{2}\operatorname{ch}\frac{p-q}{2} \\ \operatorname{ch} p - \operatorname{ch} q = 2\operatorname{sh}\frac{p+q}{2}\operatorname{sh}\frac{p-q}{2} \\ \operatorname{sh} p + \operatorname{sh} q = 2\operatorname{sh}\frac{p+q}{2}\operatorname{ch}\frac{p-q}{2} \\ \operatorname{sh} p - \operatorname{sh} q = 2\operatorname{sh}\frac{p-q}{2}\operatorname{ch}\frac{p+q}{2} \end{cases}$$

- Changement de variable $t = \text{th}\frac{x}{2}$: $\quad \text{ch}x = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}, \quad \text{sh}x = \dfrac{2t}{1-t^2}, \quad \text{th}x = \dfrac{2t}{1+t^2}$
- Changement de variable $u = \text{e}^x$: $\quad \text{ch}x = \dfrac{u^2+1}{2u}, \quad \text{sh}x = \dfrac{u^2-1}{2u}, \quad \text{th}x = \dfrac{u^2-1}{u^2+1}$
- Linéarisation.

  On écrit $\text{ch}^n x = \left(\dfrac{\text{e}^x+\text{e}^{-x}}{2}\right)^n$ et $\text{sh}^n x = \left(\dfrac{\text{e}^x-\text{e}^{-x}}{2}\right)^n$.

  On développe (formule du binôme), on groupe les termes équidistants des extrémités, et on réutilise les définitions pour retrouver des $\text{ch}(px)$ et/ou des $\text{sh}(px)$. Par exemple :

$$\text{sh}^4 x = \left(\frac{\text{e}^x-\text{e}^{-x}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\,(\text{e}^{4x}-4\text{e}^{2x}+6-4\text{e}^{-2x}+\text{e}^{-4x}) = \frac{1}{8}\,(\,\text{ch}4x-4\,\text{ch}2x+3)$$

$$\begin{aligned}\text{ch}^5 x &= \left(\frac{\text{e}^x+\text{e}^{-x}}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}\,(\text{e}^{5x}+5\text{e}^{3x}+10\text{e}^{x}+10\text{e}^{-x}+5\text{e}^{-3x}+\text{e}^{-5x})\\ &= \frac{1}{16}\,(\,\text{ch}5x+5\,\text{ch}3x+10\,\text{ch}x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{sh}^5 x &= \left(\frac{\text{e}^x-\text{e}^{-x}}{2}\right)^5 = \frac{1}{16}\,\frac{1}{2}(\text{e}^{5x}-5\text{e}^{3x}+10\text{e}^{x}-10\text{e}^{-x}+5\text{e}^{-3x}-\text{e}^{-5x})\\ &= \frac{1}{16}\,(\,\text{sh}5x-5\,\text{sh}3x+10\,\text{sh}x)\end{aligned}$$

- Opération inverse de la linéarisation.

  $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ (\,\text{ch}x+\,\text{sh}x)^n = (\text{e}^x)^n = \text{e}^{nx} = \,\text{ch}nx+\,\text{sh}nx$

  On peut ainsi exprimer $\text{ch}(nx)$, $\text{sh}(nx)$ en fonction de puissances de $\text{ch}x$ et/ou de $\text{sh}x$.

  Pour cela on développe $(\,\text{ch}x+\,\text{sh}x)^n$ par la formule du binôme.

  La partie paire (resp. impaire) du résultat est alors égale à $\text{ch}(nx)$ (resp. $\text{sh}(nx)$).

  Si on cherche à obtenir un résultat où figurent surtout des puissances de $\text{ch}x$ (resp. de $\text{sh}x$) il convient de remplacer les puissances paires de $\text{sh}x$ (resp. de $\text{ch}x$) par des puissances de $(\,\text{ch}^2x-1)$ (resp. de $(1+\,\text{sh}^2x)$) puis de développer. Par exemple :

$$(\,\text{ch}x+\,\text{sh}x)^4 = \,\text{ch}^4x+4\,\text{ch}^3x\,\text{sh}x+6\,\text{ch}^2x\,\text{sh}^2x+4\,\text{ch}x\,\text{sh}^3x+\,\text{sh}^4x$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\text{ch}4x = \,\text{ch}^4x+6\,\text{ch}^2x\,\text{sh}^2x+\,\text{sh}^4x\\ \text{sh}4x = 4\,\text{ch}^3x\,\text{sh}x+4\,\text{ch}x\,\text{sh}^3x\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\text{ch}4x = \,\text{ch}^4x+6\,\text{ch}^2x(\,\text{ch}^2x-1)+(\,\text{ch}^2x-1)^2\\ \text{sh}4x = 4\,\text{ch}x((1+\,\text{sh}^2x)\,\text{sh}x+\,\text{sh}^3x)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\text{ch}4x = 8\,\text{ch}^4x-8\,\text{ch}^2x+1\\ \text{sh}4x = 4\,\text{ch}x(2\,\text{sh}^3x+\,\text{sh}x)\end{cases}$$

- Liens entre la trigonométrie hyperbolique et la trigonométrie circulaire.

  Les formules de la trigonométrie hyperbolique peuvent être retrouvées à partir de celles de la trigonométrie circulaire, avec : $\quad \cos(ix) = \,\text{ch}x, \quad \sin(ix) = i\,\text{sh}x, \quad \tan(ix) = i\,\text{th}x.$

  Par exemple :

$$\begin{aligned}\sin^3 x &= \tfrac{1}{4}(-\sin 3x+3\sin x) \;\Rightarrow\; \sin^3(ix) = \tfrac{1}{4}(-\sin(3ix)+3\sin(ix))\\ &\Rightarrow\; -i\,\text{sh}^3x = \tfrac{1}{4}(-i\,\text{sh}(3x)+3i\,\text{sh}x) \;\Rightarrow\; \text{sh}^3x = \tfrac{1}{4}(\,\text{sh}(3x)-3\,\text{sh}x)\end{aligned}$$