Equations différentielles

Christel TREMOULET

Table des matières

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

1 Equations différentielles linéaires du premier ordre

1.1 Généralités

1.1.1 Définitions

Définition 1.1

1. *On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre toute équation du type*

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$$

où a, b et c sont trois fonctions continues sur I.

2. *Soit $(E)\ :\ a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$.*

On appelle solution de (E) sur I toute fonction f dérivable sur I telle que

$$\forall\, t \in I, \quad a(t)f'(t) + b(t)f(t) = c(t)$$

Définition 1.2

Soit $(E)\ :\ a(t)y' + b(t)y = c(t)$.

On appelle équation homogène associée à (E) l'équation

$$(E_0)\ :\ a(t)y' + b(t)y = 0$$

1.1.2 Ensemble des solutions de (E)

Soient $(E)\ :\ a(t)y' + b(t)y = c(t)$ et $(E_0)\ :\ a(t)y' + b(t)y = 0$.
Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E) et $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de (E_0).
On suppose que $\mathcal{S} \neq \emptyset$.

Théorème 1.1

Soit $y_p \in \mathcal{S}$ une solution particulière de (E).
Alors,

$$\mathcal{S} = \{\ y_p + y_0;\ y_0 \in \mathcal{S}_0\ \}$$

La solution générale de (E) est donc la somme d'UNE solution particulière de (E) et de LA solution générale de (E_0).

En conclusion, pour résoudre (E) il y a trois étapes :

• Etape 1 : on résoud (E_0) et on trouve $\mathcal{S}_0$.

• Etape 2 : on cherche une solution particulière de (E).

• Etape 3 : on conclut en donnant $\mathcal{S}$.

1.2 Résolution de (E_0)

Soit $(E_0) \quad : \ a(t)y' + b(t)y = 0$

avec a et b continues sur I.

On suppose que $\forall\ t \in I$, $a(t) \neq 0$.

Théorème 1.2

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{lll} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ke^{-\int \frac{b(t)}{a(t)}\,dt} \end{array} \ ; \ k \in \mathbb{R} \right\}$$

Exemple

Résoudre (E_0) $(1+x^2)y' + 4xy = 0$ dans $I = \mathbb{R}$.

On a

$$\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx = 2\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = 2\ln(1+x^2) = \ln\left((1+x^2)^2\right)$$

Par le théorème précédent, on obtient donc

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{k}{(1+x^2)^2} \end{array} \ ; \ k \in \mathbb{R} \right\}$$

1.3 Résolution de (E)

Soient $(E) \quad ay' + by = c$ avec a, b et c trois fonctions continues sur I.

On a vu que la solution générale de (E) est la somme de la solution générale de (E_0) et d'une solution particulière de (E).

On a alors les deux possibilités suivantes :

1. Une solution particulière de (E) est évidente.

Exemple

Résoudre $(E)\quad xy' + y = 3x^2$ dans $I =]0, +\infty[$.

• Etape 1 : on résoud $(E_0)\quad xy' + y = 0$ sur I.

On trouve

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{lcl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{k}{x} \end{array} \quad ; \ k \in \mathbb{R} \right\}$$

• Etape 2 : on voit facilement que $y_p(x) = x^2$ est une solution particulière de (E).

• Etape 3 : conclusion

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{lcl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{k}{x} + x^2 \end{array} \quad ; \ k \in \mathbb{R} \right\}$$

2. Il n'y a pas de solution particulière évidente de (E).

   On utilise alors **la méthode de la variation de la constante**.

   On note $y_0 = e^{-\int \frac{b(t)}{a(t)}\,dt}$ une solution non nulle de (E_0) et on cherche une solution y_p de (E) sous la forme

$$y_p(t) = k(t)y_0(t)$$

   où $k : I \to \mathbb{R}$ est une fonction inconnue dérivable sur I.

   On a alors

$$y_p \in \mathcal{S} \iff ay_p' + by_p = c \iff ak'y_o + aky_0' + bky_0 = c \iff ak'y_0 = c$$

   car $ay_0' + by_0 = 0$.

   On en déduit que $k' = \dfrac{c}{ay_0}$.

   On choisit alors k par primitivation et on en déduit alors y_p.

Exemple

Résoudre $(E)\quad y' + 2ty = e^{t-t^2}$ dans $I = \mathbb{R}$.

• Etape 1 : on résoud $(E_0)\quad y' + 2ty = 0$.

On trouve

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & ke^{-t^2} \end{array} \quad ; \ k \in \mathbb{R} \right\}$$

• Etape 2 : on cherche une solution particulière y_p de (E) de la forme

$$y_p(t) = k(t)e^{-t^2}$$

avec $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable.

On a

$$y_p \in \mathcal{S} \iff y_p' + 2ty_p = e^{t-t^2} \iff k'(t)e^{-t^2} - 2tk(t)e^{-t^2} + 2tk(t)e^{-t^2} = e^{t-t^2}$$

On obtient que $k'(t) = e^t$.

Prenons alors

$$k(t) = e^t$$

Finalement,

$$y_p(t) = e^t e^{-t^2} = e^{t-t^2}$$

• Etape 3 : conclusion

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & ke^{-t^2} + e^{t-t^2} \end{array} \quad ; \ k \in \mathbb{R} \right\}$$

Remarque

(E) a une infinité de solutions.

Si on impose des conditions initiales alors on aura une solution unique.

2 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

2.1 Généralités

2.1.1 Définitions

Définition 2.1

1. *On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants toute équation du type*
$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t)$$
où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ et d une fonction continue sur I.
2. *Soit (E) : $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t)$.*
On appelle solution de (E) sur I toute fonction f deux fois dérivable sur I telle que
$$\forall\ t \in I, \quad af''(t) + bf'(t) + cf(t) = d(t)$$

Définition 2.2

Soit (E) : $ay'' + by' + cy = d$.
On appelle équation homogène associée à (E) l'équation
$$(E_0)\ :\ ay'' + by' + cy = 0$$

2.1.2 Ensemble des solutions de (E)

Soient (E) : $ay'' + by' + cy = d(t)$ et (E_0) : $ay'' + by' + cy = 0$.
Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E) et $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de (E_0).
On suppose que $\mathcal{S} \neq \emptyset$.

Théorème 2.1

Soit $y_p \in \mathcal{S}$ une solution particulière de (E).
Alors,
$$\mathcal{S} = \{\ y_p + y_0;\ y_0 \in \mathcal{S}_0\ \}$$
La solution générale de (E) est donc la somme d'UNE solution particulière de (E) et de LA solution générale de (E_0).

La technique de résolution de (E) est donc la même que celle utilisée dans la résolution des équations différentielles du premier ordre !

2.2 Résolution de (E_0)

Soit (E_0) $\quad ay'' + by' + c = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$.

Le but est de chercher les solutions de (E_0) à valeurs réelles.

Par analogie avec ce que l'on a trouvé pour les équations du premier ordre, on cherche les solutions de (E_0) sous la forme

$$y_0 = e^{rt}$$

On a

$$\begin{aligned} y_0 \in \mathcal{S}_0 &\iff ay_0'' + by_0' + cy_0 = 0 \\ &\iff (ar^2 + br + c)e^{rt} = 0 \\ &\iff ar^2 + br + c = 0 \end{aligned}$$

Définition 2.3

On appelle équation caractéristique de (E_0) l'équation

$$(C) \quad ar^2 + br + c = 0$$

d'inconnue $r \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Théorème 2.2

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de (C).

• *1er cas : $\Delta > 0$.*

Notons r_1 et r_2 les deux solutions réelles et distinctes de (C).

Alors,

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{lcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t} \end{array} \; ; \; (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

• *2ème cas : $\Delta = 0$.*

Notons r_1 la racine double réelle de (C).

Alors,

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{lcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (k_1 t + k_2) e^{r_1 t} \end{array} \; ; \; (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

• *3ème cas : $\Delta < 0$.*

Notons $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ ($(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$) les deux racines complexes conjuguées de (C).

Alors,

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{lcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & e^{\alpha t} \left(k_1 \cos(\beta t) + k_2 \sin(\beta t) \right) \end{array} \; ; \; (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Exemples

1. Résoudre $(E_0)\quad y'' + y' - 6y = 0$ dans $\mathbb{R}$.

   L'équation caractéristique $(C)\quad r^2 + r - 6 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes : 2 et -3.

   Donc,
$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & k_1 e^{2t} + k_2 e^{-3t} \end{array} ;\ (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

2. Résoudre $(E_0)\quad y'' - 2y + y = 0$ dans $\mathbb{R}$.

   L'équation caractéristique $(C)\quad r^2 - 2r + 1 = 0$ admet une racine double : 1.

   Donc,
$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (k_1 t + k_2) e^{t} \end{array} ;\ (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

3. Résoudre $(E_0)\quad y'' + y' + y = 0$ dans $\mathbb{R}$.

   L'équation caractéristique $(C)\quad r^2 + r + 1 = 0$ admet deux solutions complexes : $\dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{-1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   Donc,
$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & e^{-\frac{1}{2}t} \left(k_1 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} t) + k_2 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} t) \right) \end{array} ;\ (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

2.3 Résolution de (E) lorsque le second membre est de type polynôme ou exponentielle-polynôme

Soit
$$(E)\quad ay'' + by' + cy = d$$
avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ et $d : I \to \mathbb{R}$ continue.

2.3.1 Cas où d est une fonction polynôme

Proposition 2.1

Soit $(E)\quad ay'' + by' + cy = P$ *où* P *est une fonction polynôme de degré* n.

On cherche alors une solution particulière de (E) *sous la forme d'une fonction polynôme de degré*

-n *si* $c \neq 0$.

-$n+1$ *si* $c = 0$ *et* $b \neq 0$.

-$n+2$ *si* $c = b = 0$.

Exemple

Résoudre $(E) \quad y'' - 4y' + 4y = x^2 + 1$ dans $I = \mathbb{R}$.

• Etape 1 : résolution de $(E_0) \quad y'' - 4y' + 4y = 0$.
L'équation caractéristique $(C) \quad r^2 - 4r + 4 = 0$ admet une racine double réelle : 2.
Donc,

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (k_1 x + k_2)e^{2x} \end{array} ; \ (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

• Etape 2 : on cherche une solution particulière y_p de (E) de la forme

$$yp(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

On a

$$y_p \in \mathcal{S} \iff 4\alpha x^2 + (4\beta - 8\alpha)x + 2\alpha - 4\beta + 4\gamma = x^2 + 1$$

On trouve donc $\alpha = \dfrac{1}{4}$, $\beta = \dfrac{1}{2}$ et $\gamma = \dfrac{5}{8}$.
D'où,

$$y_p(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{8}$$

• Etape 3 : conclusion

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (k_1 x + k_2)e^{2x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{8} \end{array} ; \ (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

2.3.2 Cas où $d(t) = e^{mt}P(t)$ où P est une fonction polynôme de degré n

Proposition 2.2

On cherche une solution prticulière y_p de (E) de la forme $y_p(t) = e^{mt}Q(t)$ où Q est une fonction polynôme de degré

-n *si* m *n'est pas racine de* (C).

-$n+1$ *si* m *est racine simple de* (C).

-$n+2$ *si* m *est racine double de* (C).

Exemple

Résoudre $(E) \quad y'' - 2y' + y = e^t$ dans $I = \mathbb{R}$.

• Etape 1 : l'équation caractéristique $(C) \quad r^2 - 2r + 1 = 0$ admet 1 comme racine double.

Donc,

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (k_1 t + k_2)e^t \end{array} \; ; \; (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

• Etape 2 : on cherche une solution particulière y_p de (E) de la forme

$$y_p(t) = \left(\alpha t^2 + \beta t + \gamma\right) e^t$$

Après calculs, on trouve que $\alpha = \dfrac{1}{2}$, β et γ quelconques.

Prenons $\beta = \gamma = 0$.

On en déduit que

$$y_p(t) = \frac{1}{2} t^2 e^t$$

• Etape 3 : conclusion

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (k_1 t + k_2)e^t + \frac{1}{2} t^2 e^t \end{array} \; ; \; (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$