9. Développements limités

9. Développements limités

9.1. Notion de développement limité

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application, et soit x_0 un réel élément ou extrémité de I.

Soit n un entier naturel. On dit que f admet un *développement limité* (en abrégé un DL) à l'ordre n en x_0 s'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et une fonction $x \mapsto \varepsilon(x)$ tels que : $\forall\, x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + (x-x_0)^n\varepsilon(x)$, avec $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Avec les notations de Landau, cela peut s'écrire : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + \mathrm{o}((x-x_0)^n)$.

Proposition *(unicité du développement limité)*

Soit f une application admettant un DL d'ordre n en x_0 : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + \mathrm{o}((x-x_0)^n)$.

Alors les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont définis de façon unique.

Le polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$ est appelé *partie principale* du développement limité.

Troncature d'un développement limité

- Supposons que f admette un DL d'ordre n en x_0. Soit p un entier naturel, $p \le n$.
  Alors f admet un DL d'ordre p en x_0, obtenu par *troncature*. Plus précisément :
  $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + \mathrm{o}((x-x_0)^n) \ \Rightarrow\ f(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k(x-x_0)^k + \mathrm{o}((x-x_0)^p)$.
  Par exemple, si $f(x) = 1 - x + 2x^3 + x^4 + \mathrm{o}(x^4)$, alors $f(x) = 1 - x + 2x^3 + \mathrm{o}(x^3)$.
- Il arrive qu'on utilise les notations "O" de Landau dans un développement limité.
  Par exemple, si $f(x) = 1 + 2x^2 + x^3 - x^4 + \mathrm{o}(x^4)$, alors $f(x) = 1 + 2x^2 + x^3 + \mathrm{O}(x^4)$.
  Cette dernière écriture contient un peu plus d'informations que $f(x) = 1 + 2x^2 + x^3 + \mathrm{o}(x^3)$.

DL et équivalents

- On considère le développement $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + \mathrm{o}((x-x_0)^n)$.
  Si tous les a_k sont nuls, alors $f(x)$ est négligeable devant $(x-x_0)^n$ au voisinage de x_0.
  Sinon, et si m est l'indice minimum tel que $a_m \neq 0$, alors $f(x) \sim a_m(x-x_0)^m$ en x_0.
  Inversement, si $f(x) \sim a_m(x-x_0)^m$ en x_0, avec $m \in \mathbb{N}$, alors $f(x) = a_m(x-x_0)^m + \mathrm{o}((x-x_0)^m)$.
  Par exemple : $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \mathrm{o}(x^4) \ \Rightarrow\ \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2!} \sim \dfrac{x^4}{4!}$ en 0.
- Dans la pratique, on utilisera souvent les équivalents dans les recherches de limites, et les développements limités lorsqu'on cherche plus de précision (par exemple non seulement l'existence d'une demi-tangente mais encore la position de la courbe par rapport à celle-ci) ou quand il est difficile d'utiliser des équivalents (notamment dans les sommes.)

DL à gauche ou à droite en un point

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application définie au voisinage d'un point x_0.

Il arrivera que seule la restriction de f à $I \cap]a, +\infty[$ ou à $I \cap]-\infty, a[$ possède un DL en x_0.

On parlera dans ce cas de développement limité à droite ou à gauche en x_0.

Définition *(développement limité au voisinage de $\pm\infty$)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application définie au voisinage de $+\infty$ (ou de $-\infty$.)

Soit n un entier naturel. On dit que f admet un développement limité (en abrégé un DL) à l'ordre n en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) s'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et une fonction $x \mapsto \varepsilon(x)$ tels que : $\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{a_k}{x^k} + \dfrac{\varepsilon(x)}{x^n}$, avec $\lim_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0$.

Avec les notations de Landau, cela peut s'écrire : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{a_k}{x^k} + \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{x^n}\Big)$.

Remarque

Tant pour les DL à droite où à gauche que pour les DL en $\pm\infty$, on dispose de propriétés analogues à celles qui ont déjà été vues (unicité, troncature, équivalents, etc.)

Importance des développements à l'origine

- f a un DL d'ordre n en x_0 $\Leftrightarrow$ $g : x \mapsto g(x) = f(x_0 + x)$ a un DL d'ordre n en 0.

  Plus précisément : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + \mathrm{o}((x - x_0)^n) \ \Leftrightarrow\ g(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$.

- De même, f a un DL d'ordre n en $\pm\infty$ $\Leftrightarrow$ $h : x \mapsto h\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$ a un DL d'ordre n en 0.

  Plus précisément : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{a_k}{x^k} + \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{x^n}\Big) \ \Leftrightarrow\ h(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$.

- Ces deux remarques, et le fait que les calculs y sont plus simples, font que les DL sont généralement formés à l'origine (c'est d'ailleurs le cas des DL usuels.)

DL et continuité, DL et dérivabilité

- Dire que f admet un DL $f(x) = a_0 + \mathrm{o}(1)$ d'ordre 0 en x_0, c'est dire que f est continue (ou prolongeable par continuité) en x_0.

  Ce développement s'écrit nécessairement $f(x) = f(x_0) + \mathrm{o}(1)$.

- Dire que que f admet un DL $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \mathrm{o}(x - x_0)$ d'ordre 1 en x_0, c'est dire que f est dérivable (après prolongement éventuel en x_0).

  Ce développement s'écrit nécessairement $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \mathrm{o}(x - x_0)$.

- En revanche un DL d'ordre $n \geq 2$ en x_0 n'implique pas que f soit deux fois dérivable en x_0.

  Un contre-exemple est donné par l'application $f : x \mapsto x^3 \sin \dfrac{1}{x}$ en 0.

- Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ de I dans $\mathbb{R}$, et si x_0 appartient à I, alors l'égalité de Taylor-Young prouve l'existence du DL de f en x_0 à l'ordre n. Ce DL s'écrit :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \mathrm{o}((x - x_0)^n)$$

Placement par rapport à une tangente ou à une asymptote

- On suppose que f admet un DL d'ordre $n \geq 3$ en x_0 :
  $$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \mathrm{o}((x - x_0)^n)).$$
  On sait que cela implique la dérivabilité de f en x_0, avec $f(x_0) = a_0$ et $f'(x_0) = a_1$.
  L'équation de la tangente Δ à la courbe $y = f(x)$ en $x = x_0$ est donc $y = a_0 + a_1(x - x_0)$.
  Remarque : si le DL n'est valable qu'à gauche ou à droite de x_0, c'est une demi-tangente.
  Soit m l'indice minimum tel que $m \geq 2$ et $a_m \neq 0$.
  Alors $f(x) - a_0 - a_1(x - x_0) \sim a_m(x - x_0)^m$ au voisinage de x_0.
  On en déduit le placement local de la courbe $y = f(x)$ par rapport à Δ.
  - ◇ Si m est pair, le placement de $y = f(x)$ par rapport à Δ est donné par le signe de a_m.
    Si $a_m > 0$, la courbe est localement "au-dessus" de sa tangente.
    Si $a_m < 0$, la courbe est localement "en-dessous" de sa tangente.
  - ◇ Si m est impair, la courbe $y = f(x)$ "traverse" Δ au voisinage de M_0.
    Δ est donc une tangente d'inflexion.
- On suppose qu'au voisinage de $\pm\infty$ on a le développement : $\dfrac{f(x)}{x} = a_0 + \dfrac{a_1}{x} + \cdots + \dfrac{a_n}{x^n} + \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{x^n}\Big)$.
  Alors $f(x) = a_0 x + a_1 + \dfrac{a_2}{x} + \cdots + \dfrac{a_n}{x^{n-1}} + \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{x^{n-1}}\Big)$ (c'est un "développement asymptotique".)
  Ainsi $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - a_0 x - a_1) = 0$. On en déduit que la droite Δ d'équation $y = a_0 x + a_1$ est asymptote à la courbe $y = f(x)$ au voisinage de $\pm\infty$.
  Soit m l'indice minimum tel que $m \geq 2$ et $a_m \neq 0$. Alors $f(x) - a_0 x - a_1 \sim \dfrac{a_m}{x^{m-1}}$.
  On en déduit le placement de la courbe $y = f(x)$ par rapport à Δ au voisinage de $\pm\infty$.

DL et parité

- Soit f une application définie sur un intervalle de centre 0.
  On suppose que f admet un DL d'ordre n à l'origine : $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$.
  - ◇ Si f est paire, la partie principale du DL est paire.
    Autrement dit les coefficients a_{2k+1} sont nuls : $f(x) = a_0 + a_2x^2 + \cdots + a_{2k}x^{2k} + \cdots$
  - ◇ Si f est impaire, alors la partie principale du DL de f est un polynôme impair.
    Autrement dit les coefficients a_{2k} sont nuls : $f(x) = a_1x + a_3x^3 + \cdots + a_{2k+1}x^{2k+1} + \cdots$
- Si on forme le DL d'une fonction paire ou impaire, il pourra être utile d'utiliser cette parité et la notation "O" pour améliorer à peu de frais la précision du développement.
  Supposons par exemple que f soit paire : $f(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \mathrm{O}(x^6)$ est plus précis que $f(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \mathrm{o}(x^5)$, lui-même plus précis que $f(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \mathrm{o}(x^4)$.

Une dernière remarque

Dans un DL $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x)^k + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \mathrm{o}((x - x_0)^n)$, on ne développera jamais les termes $a_k(x - x_0)^k$, avec $k \geq 2$.

En revanche, on rappelle que $y = a_0 + a_1(x - x_0) = a_1x + (a_0 - a_1x_0)$ est l'équation de la tangente en $M_0(x_0, f(x_0))$ à la courbe $y = f(x)$.

9.2. Développements limités usuels

Tous les développements ci-dessous sont valables à l'origine, et peuvent être obtenus par la formule de Taylor-Young (ou par d'autres méthodes qui seront exposées plus loin.)

$$\boxed{\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathrm{o}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}(x^n)}$$

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+2})}$$

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1})}$$

$$\boxed{\mathrm{sh}\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+2})}$$

$$\boxed{\mathrm{ch}\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1})}$$

$$\boxed{\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathrm{o}(x^6)} \qquad \boxed{\mathrm{th}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathrm{o}(x^6)}$$

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \mathrm{o}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \mathrm{o}(x^n)}$$

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \mathrm{o}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{o}(x^n)}$$

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\, x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n + \mathrm{o}(x^n)}$$

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \mathrm{o}(x^n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \mathrm{o}(x^n)}$$

$$\boxed{\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + \mathrm{o}(x^n) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + \mathrm{o}(x^n)}$$

$$\boxed{\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{o}(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \mathrm{o}(x^{2n+2})}$$

$$\boxed{\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots + \mathrm{o}(x^{2n+2})} \qquad \boxed{\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \cdots}$$

9.3. Opérations sur les DL

Pour simplifier, les résultats sont énoncés pour des DL à l'origine, mais on peut facilement les adapter à des développements en un autre point, voire en $\pm\infty$.

Combinaisons linéaires

- Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$ et $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$.

  Alors, pour tous scalaires α, β, on a : $(\alpha f + \beta g)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) x^k + \mathrm{o}(x^n)$.

- Exemples :

  ◇ $\sin\Big(x + \dfrac{\pi}{4}\Big) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big(1 + x - \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \mathrm{o}(x^4)\Big)$.

  ◇ $\dfrac{1}{2}\ln\Big(\dfrac{1+x}{1-x}\Big) = \dfrac{1}{2}\Big(\ln(1+x) - \ln(1-x)\Big) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{o}(x^{2n+2})$.

DL obtenu par primitivation

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ admettant un DL d'ordre n en 0 : $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$.

  Soit F une primitive de f sur l'intervalle I (donc une application dérivable telle que $F' = f$.)

  Alors F a en 0 un DL d'ordre $n+1$ obtenu par intégration terme à terme de celui de f.

  Plus précisément : $F(x) = F(0) + \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + \mathrm{o}(x^{n+1})$ (ne pas oublier $F(0)$...)

- Exemples :

  ◇ Si $f(x) = \ln\cos x$, alors $f'(x) = -\tan x = -x - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{2x^5}{15} + \mathrm{o}(x^6)$.

  On en déduit $f(x) = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^6}{45} + \mathrm{o}(x^7)$.

  ◇ Si $f(x) = \arctan\dfrac{x+2}{1-2x}$, alors $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \mathrm{o}(x^7)$.

  On en déduit $f(x) = \arctan 2 + x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \mathrm{o}(x^8)$.

DL obtenu par dérivation

- Soit f une application de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ au voisinage de 0. Alors le développement limité de f' en 0 à l'ordre n s'obtient en dérivant terme à terme le développement limité de f en 0 à l'ordre $n+1$ (ces deux développements résultent de la formule de Taylor-Young).

  Ce résultat est surtout utilisé pour des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$.

- Exemple : On sait que $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \mathrm{o}(x^n)$.

  Par dérivation, on en déduit : $\dfrac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 \cdots + (n+1)x^n + \mathrm{o}(x^n)$.

  Un nouvelle dérivation donne : $\dfrac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x + 6x^2 + \cdots + (n+2)(n+1)x^n + \mathrm{o}(x^n)$.

Produit de deux DL

- Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$ et $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$.

  Alors $(fg)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$, avec $c_k = \sum\limits_{i+j=k} a_i b_j$.

- Exemples :

  ◇ On a $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \mathrm{o}(x^4)$ et $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \mathrm{o}(x^4)$.

  On en déduit $\dfrac{\mathrm{e}^x}{1-x} = 1 + 2x + \dfrac{5}{2}x^2 + \dfrac{8}{3}x^3 + \dfrac{65}{24}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$

  ◇ $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \mathrm{o}(x^n) \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \mathrm{o}(x^n)$.

Composition de deux DL

- Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$ et $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$.

  Remarque : il est important que le coefficient constant a_0 du DL de f soit nul. Autrement dit l'application f doit être un infiniment petit quand x tend vers 0.

  Dans ces conditions, l'application $g \circ f$ admet un DL d'ordre n en 0.

  Si on note $P = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x^k$ et $Q = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k x^k$ les parties régulières des DL de f et g, alors la partie régulière de celui de $g \circ f$ est obtenue en conservant les termes de degré $\leq n$ dans $Q \circ P$.

  Dans la pratique, on pose $g(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k X^k + \mathrm{o}(X^n)$ et on remplace X par le DL de $f(x)$.

  On calcule de proche en proche les DL des puissances successives $X^k = f(x)^k$, en ne gardant à chaque étape que les puissances x^m avec $m \leq n$.

- Exemple :

  Supposons $f(x) = x - x^2 + 2x^3 + x^4 + \mathrm{o}(x^4)$ et $g(X) = 1 + X + 3X^2 - X^3 - X^4 + \mathrm{o}(X^4)$.

  Posons $X = f(x) = x - x^2 + 2x^3 + x^4 + \mathrm{o}(x^4)$.

  On trouve $X^2 = x^2 - 2x^3 + 5x^4 + \mathrm{o}(x^4)$, puis $X^3 = x^3 - 3x^4 + \mathrm{o}(x^4)$ et $X^4 = x^4 + \mathrm{o}(x^4)$.

  On en déduit le développement limité de $g \circ f$ à l'ordre 4 à l'origine :

$$(g \circ f)(x) = 1 + X + 3X^2 - X^3 - X^4 + \mathrm{o}(X^4) = 1 + x + 2x^2 - 5x^3 + 18x^4 + \mathrm{o}(x^4)$$

  Les calculs précédents peuvent avantageusement prendre place dans un tableau comme indiqué ci-contre. Un tel tableau est particulièrement indiqué quand aucun des deux DL à composer n'est pair ou impair.

					coeff
X	x	$-x^2$	$2x^3$	x^4	1
X^2		x^2	$-2x^3$	$5x^4$	3
X^3			x^3	$-3x^4$	-1
X^4				x^4	-1
	x	$2x^2$	$-5x^3$	$18x^4$	

Inverse d'un DL

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ admettant un DL d'ordre n en 0 : $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$.

  On suppose que $a_0 \neq 0$ (autrement dit f possède une limite non nulle en 0.)

  Dans ces conditions l'application $x \mapsto \dfrac{1}{f(x)}$ possède un DL d'ordre n en 0.

  Pour cela on écrit $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{a_0(1-g(x))}$ où $g(x) = -\dfrac{1}{a_0}\Big(a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \mathrm{o}(x^n)\Big)$.

  On compose ensuite le DL de $x \mapsto g(x)$ par celui de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

- Exemple :

  On veut calculer le développement limité de $x \mapsto \dfrac{1}{\cos x}$ à l'origine, à l'ordre 7.

  On sait que $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \mathrm{o}(x^7)$.

  On pose donc $\dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{1-g(x)}$, avec $X = g(x) = \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \mathrm{o}(x^7)$.

  On utilise ensuite $\dfrac{1}{1-X} = 1 + X + X^2 + X^3 + \mathrm{O}(X^4)$.

  On trouve $X^2 = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^6}{24} + \mathrm{o}(x^7)$ et $X^3 = \dfrac{x^6}{8} + \mathrm{o}(x^7)$.

  On obtient finalement : $\dfrac{1}{\cos x} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} + \dfrac{61x^6}{720} + \mathrm{o}(x^7)$.

Quotient de deux DL

- Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$ et $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$, avec $b_0 \neq 0$.

  On suppose donc que l'application g ne tend vers 0 à l'origine.

  Dans ces conditions, $\dfrac{f}{g}$ admet un DL en 0 à l'ordre n.

  Ce développement est obtenu en effectuant le produit de celui de f par celui de $\dfrac{1}{g}$.

- Exemple :

  On peut obtenir le développement limité de $\tan x$ en 0 par quotient.

  On sait que $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \mathrm{o}(x^8)$.

  On a vu précédemment que $\dfrac{1}{\cos x} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} + \dfrac{61x^6}{720} + \mathrm{o}(x^7)$.

  On en déduit le développement limité de $x \mapsto \tan x$ en 0, à l'ordre 8 :

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} = x\Big(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + \mathrm{o}(x^7)\Big)\Big(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \mathrm{o}(x^7)\Big)\\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \mathrm{o}(x^8)\end{aligned}$$

Quelques remarques pour finir

- Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux applications admettant un DL en 0.

  On suppose que $f(x) = a_p x^p + a_{p+1}x^{p+1} + a_{p+2}x^{p+2} + \cdots$, avec $p \geq 0$.

  De même, on suppose que $g(x) = b_q x^q + b_{q+1}x^{q+1} + b_{q+2}x^{q+2} + \cdots$, avec $q \geq 0$.

  Pour former le DL du produit fg à l'ordre n, il suffit de former celui de f à l'ordre $n - q$ et celui de g à l'ordre $n - p$.

  Par exemple, pour calculer le DL de $(1 - \cos x)(\sin x - x)$ en 0 à l'ordre 8 :

  ◇ On écrit $1 - \cos x = \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^4}{4!} + \mathrm{o}(x^5)$ et $\sin x - x = -\dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \mathrm{o}(x^6)$.

  ◇ On en déduit :

  $(1 - \cos x)(\sin x - x) = \Big(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} + \mathrm{o}(x^5)\Big)\Big(-\dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + \mathrm{o}(x^6)\Big) = -\dfrac{x^5}{12} + \dfrac{x^7}{90} + \mathrm{o}(x^8)$

- Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux applications admettant un DL en 0.

  On suppose que $f(x) = a_p x^p + a_{p+1}x^{p+1} + a_{p+2}x^{p+2} + \cdots$, avec $p \geq 1$.

  De même, on suppose que $g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$.

  Pour former le DL de $g \circ f$ en 0, on écrit : $(g \circ f)(x) = b_0 + b_1 f(x) + b_2 f^2(x) + \cdots + b_k f^k(x) + \cdots$

  Mais le développement de $f^k(x)$ débute par $(a_p x^p)^k = a_p^k\, x^{pk}$.

  On voit que pour obtenir le DL de $g \circ f$ en 0 à l'ordre n, il faut porter celui de f à un ordre m tel que $pm \leq n < p(m + 1)$. Donc $m = \mathrm{E}(\frac{n}{p})$.

  Par exemple, pour calculer le DL de $\ln(1 + x - \arctan x)$ en 0 à l'ordre 6 :

  ◇ On écrit $X = x - \arctan x = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{5} + \mathrm{o}(x^6)$ et $\ln(1 + X) = X - \dfrac{X^2}{2} + \mathrm{O}(X^3)$.

  ◇ On trouve $X^2 = \dfrac{x^6}{18} + \mathrm{o}(x^6)$ puis $\ln(1 + x - \arctan x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^6}{18} + \mathrm{o}(x^6)$

- Quand on doit calculer le DL à un ordre déterminé d'une application f qui s'exprime en fonction d'autres applications $g, h, \ldots$ il faut prendre le temps de comprendre à quel ordre les DL de $g, h, \ldots$ doivent être calculés. Il y a en effet deux risques : celui de partir avec des DL trop "longs" et de faire beaucoup de calculs inutiles, et celui au contraire de partir avec des DL trop "courts" ce qui oblige à tout recommencer.

  Par exemple, pour calculer le DL en 0 (à droite) de $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln(\cos\sqrt{x})$ à l'ordre 2 :

  ◇ On écrit $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \mathrm{O}(x^8)$ puis $\cos\sqrt{x} = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{24} - \dfrac{x^3}{720} + \mathrm{o}(x^3)$.

  ◇ On pose $X = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{24} - \dfrac{x^3}{720} + \mathrm{o}(x^3)$ et on compose par $\ln(1 + X) = X - \dfrac{X^2}{2} + \dfrac{X^3}{3} + \mathrm{o}(X^3)$.

  ◇ Après calcul, on trouve : $\ln(\cos\sqrt{x}) = -\dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{12} - \dfrac{x^3}{45} + \mathrm{o}(x^3)$.

  ◇ Finalement, la division par x fait chuter l'ordre du DL d'une unité.

  Le développement cherché est donc : $\dfrac{1}{x}\ln(\cos\sqrt{x}) = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{12} - \dfrac{x^2}{45} + \mathrm{o}(x^2)$.

  Pour obtenir un résultat à l'ordre 2, il a donc fallu développer $x \mapsto \cos x$ à l'ordre 6.

- Quand on veut calculer le DL de $g \circ f$ en 0 en composant les développements de f et de g à l'origine, il faut veiller à ce que $f(x)$ soit bien un infiniment petit lorsque x tend vers 0, afin que la substitution de X par $f(x)$ soit justifiée dans le développement de $g(X)$. Si ce n'est pas le cas, on peut souvent s'y ramener, comme dans les exemples suivants :

  ◇ $\exp f(x) = \exp(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) = \exp(a_0)\,\exp(a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)$.

  On pose alors $X = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ et on utilise $\exp(X) = 1 + X + \dfrac{X^2}{2!} + \cdots$

  ◇ $\ln f(x) = \ln(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) = \ln(a_0) + \ln\Big(1 + \dfrac{a_1}{a_0}\,x + \dfrac{a_2}{a_0}\,x^2 + \cdots\Big)$.

  On pose alors $X = \dfrac{a_1}{a_0}\,x + \dfrac{a_2}{a_0}\,x^2 + \cdots$ et on utilise $\ln(1+X) = X - \dfrac{X^2}{2} + \cdots$

  ◇ $f(x)^\alpha = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)^\alpha = a_0^\alpha \Big(1 + \dfrac{a_1}{a_0}\,x + \dfrac{a_2}{a_0}\,x^2 + \cdots\Big)^\alpha$.

  On pose alors $X = \dfrac{a_1}{a_0}\,x + \dfrac{a_2}{a_0}\,x^2 + \cdots$ et on utilise $(1+X)^\alpha = 1 + \alpha X + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}\,X^2 + \cdots$

- On sait que $(1+x)^\alpha = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \mathrm{o}(x^n)$, où $a_k = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$.

  Si on doit former un tel développement avec une valeur particulière de α, et plutôt que d'utiliser la formule donnant a_k, il est préférable de calculer les a_k de proche en proche, au moyen d'un tableau comme indiqué ci-dessous :

1	$*\alpha$	$*(\alpha-1)*\frac{1}{2}$	$*(\alpha-2)*\frac{1}{3}$	$*(\alpha-3)*\frac{1}{4}$	$*(\alpha-4)*\frac{1}{5}$
a_0	$= a_1$	$= a_2$	$= a_3$	$= a_4$	$= a_5$

  Par exemple, pour développer $f(x) = \sqrt{1+x}$:

1	$*\frac{1}{2}$	$*\frac{-1}{2}*\frac{1}{2}$	$*\frac{-3}{2}*\frac{1}{3}$	$*\frac{-5}{2}*\frac{1}{4}$	$*\frac{-7}{2}*\frac{1}{5}$
$= a_0$	$= a_1 = \frac{1}{2}$	$= a_2 = \frac{-1}{8}$	$= a_3 = \frac{1}{16}$	$= a_4 = \frac{-5}{128}$	$= a_5 = \frac{7}{256}$

  On en déduit : $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16} - \dfrac{5x^4}{128} + \dfrac{7x^5}{256} + \mathrm{o}(x^5)$

- Il arrive qu'on ait besoin de développements limités pour trouver un simple équivalent d'une expression (notamment quand cette expression est constituée de sommes).

  Par exemple, pour un équivalent de $\sin(\operatorname{sh} x) - \operatorname{sh}(\sin x)$ en 0, il faut développer $\sin x$ et $\operatorname{sh} x$ à l'ordre 7 (pour atteindre les premiers coefficients qui ne se simplifient pas) :

  ◇ On trouve d'abord $\sin(\operatorname{sh} x) = x - \dfrac{x^5}{15} - \dfrac{x^7}{90} + \mathrm{o}(x^7)$.

  ◇ On trouve ensuite $\operatorname{sh}(\sin x) = x - \dfrac{x^5}{15} + \dfrac{x^7}{90} + \mathrm{o}(x^7)$.

  ◇ On en déduit : $\sin(\operatorname{sh} x) - \operatorname{sh}(\sin x) = -\dfrac{x^7}{45} + \mathrm{o}(x^7) \sim -\dfrac{x^7}{45}$.