บทที่ 4 อนุกรมกำลัง (Power Series)

4.1 ความหมายของอนุกรมกำลัง

นิยาม 1 อนุกรมกำลังเป็นอนุกรมอนันต์ ซึ่งเขียนได้ในรูป

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots \qquad (1)$$

เมื่อ $a, c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ เป็นค่าคงที่ และ x เป็นตัวแปร

เรียก a ว่าศูนย์กลางของอนุกรมกำลัง

เรียก $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ ว่าสัมประสิทธิ์ของอนุกรมกำลัง

ในกรณีที่ $a = 0$ เราจะเรียกอนุกรม (1) ว่า **อนุกรมกำลังใน** x

เช่น $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ และ $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ เป็นต้น

แต่ถ้า $a \neq 0$ จะเรียก (1) ว่า **อนุกรมกำลังใน** $x - a$

เช่น $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n+1}$ และ $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+3)^n}{n!}$ เป็นต้น

เนื่องจาก x มีค่าต่างๆกัน เมื่อแทนลงในอนุกรมกำลัง (1) จะได้อนุกรมที่ลู่เข้า หรือ ลู่ออกก็ได้ เช่นอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{n^2}$

ถ้า $x = 6$ จะได้ อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ซึ่งเป็นอนุกรม $p, p = 2$ ลู่เข้า

ถ้า $x = 3$ จะได้ อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{n^2}$ ลู่ออก

ดังนั้น อนุกรมกำลัง จึงมีจุดบางจุด หรือ ช่วงบางช่วงที่ทำให้อนุกรมลู่เข้า จึงเขียนเป็นนิยามได้ดังนี้

นิยาม 2 เซตของจุดบนช่วงจำกัด ช่วงหนึ่ง ที่ทำให้อนุกรมกำลังเป็นอนุกรมที่ลู่เข้า เรียกช่วงจำกัดนี้ว่า **ช่วงของการลู่เข้า** (Interval of Convergence)

ช่วงจำกัดอาจจะเป็นช่วงเปิด ช่วงปิด หรือ ช่วงครึ่งเปิดครึ่งปิด ได้นั่นคือ $(a,b),[a,b],[a,b),(a,b]$

นิยาม 3 ถ้า R เป็นจำนวนที่ทำให้อนุกรมกำลังเป็นอนุกรมที่ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ ทุกๆ x ถ้า $|x-a| < R$และ $a + R$ เป็นขีดจำกัดบนที่น้อยที่สุด เราเรียก R ว่ารัศมีของการลู่เข้า (Radius of Convergence)

ขั้นตอนการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง

ขั้นที่1 ใช้การทดสอบแบบอัตราส่วน (Ratio Test) หรือทดสอบแบบรากที่ n (n^{th} Root Test) จะทราบว่า อนุกรมกำลังลู่เข้าในช่วงใด ซึ่งจะได้ช่วงเปิด $|x-a|<R$ หรือ $a-R<x<a+R$

ขั้นที่2 จะทำการทดสอบปลายช่วง โดยนำจุดปลายไปแทนในอนุกรมกำลัง จะได้อนุกรมค่าคงตัว ซึ่งจะต้องใช้วิธีการอื่นๆ ในการทดสอบ เช่น การทดสอบแบบเปรียบเทียบ, การทดสอบโดยอินทิกรัล หรือ การทดสอบอนุกรมสลับ เป็นต้น

ตัวอย่าง 1 จงหาค่า x ที่ทำให้อนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้า

1.1 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$

วิธีทำ $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\dfrac{n!}{x^n}\right|$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right| = |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}$$

$$= 0 < 1 \text{ สำหรับทุกค่า } x$$

แสดงว่า $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ ลู่เข้าทุกค่า x

1.2 $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^{n}$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 2 จงหาช่วงและรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

2.1 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n(n+1)}$

วิธีทำ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)\left(n+2\right)}\cdot\frac{n(n+1)}{x^n}\right|$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{xn}{n+2}\right|$$

$$= \left|x\right|\cdot\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+2}) = \left|x\right|$$

แสดงว่า ลู่เข้าที่ $\left|x\right| < 1$ นั่นก็คือ $-1 < x < 1$

และรัศมีของการลู่เข้า คือ 1

จากนั้นพิจารณาจุดปลายทั้งสอง

$x = -1 : \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n\left(-1\right)^n}{n\left(n+1\right)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(n+1\right)} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (ลู่เข้า)

$x = 1 : \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n\left(n+1\right)}$ (ลู่เข้าด้วย)

ดังนั้น $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n(n+1)}$ ลู่เข้าภายในช่วง $-1 \le x \le 1$

2.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n n^2}$

วิธีทำ

แบบฝึกหัด 4.1

จงหารัศมีของการลู่เข้า และช่วงของการลู่เข้าของอนุกรมที่กำหนดให้

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n2^n}$
5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{(n+1)^2}$
6. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n}$
7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{4^n}(2x-1)^n$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^n}$
10. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x-3)^n}{n+3}$
11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)4^n}(x-10)^n$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2}\right)^n (x+6)^n$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n^3}$
14. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n+1}}(x-e)^n$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)} \cdot x^n$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}$
17. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x+3)^n}{n \ln n}$
18. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(\ln n)^n}$
19. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(10)^n}(x-\pi)^n$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

คำตอบแบบฝึกหัด 4.1

1. $1, [-1,1)$
2. $1, (-1,1)$
3. $\infty, (-\infty, \infty)$
4. $2, (-2,2]$
5. $\frac{1}{3}, \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$
6. $1, [-1,1]$
7. $2, \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$
8. $1, (0,2]$
9. $\infty, (-\infty, \infty)$
10. $\frac{1}{2}, \left[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$
11. $1, [-1,1)$
12. $0, \{-6\}$
13. $\frac{1}{2}, [0,1]$
14. $1, (e-1, e+1)$
15. $1, (-1,1)$
16. $\infty, (-\infty, \infty)$
17. $\frac{1}{2}, (-2, -1]$
18. $\infty, (-\infty, \infty)$
19. $0, \{\pi\}$
20. $\infty, (-\infty, \infty)$

4.2 อนุกรมเทย์เลอร์ และอนุกรมแมคคลอริน

(Taylor and Maclaurin Series)

เป็นอนุกรมกำลังใน x ชนิดหนึ่ง ซึ่งใช้ประมาณค่าฟังก์ชันพื้นฐานต่างๆ กำหนดได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1 Taylor's Series

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับ ที่ a จะกำหนด Taylor Series สำหรับ f รอบจุด $x = a$ ได้เป็น

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^2}{n!} + \ldots \qquad (1)$$

นิยาม 3.4 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ถึงอันดับ n ที่ a จะกำหนด n^{th} Taylor's Series สำหรับ f รอบจุด $x = a$ ได้เป็น

$$f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^2}{n!} \qquad (2)$$

จะเห็นว่าอนุกรมที่ได้สามารถเขียนในรูปพหุนามอันดับที่ n ได้

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^2}{n!}$$

สำหรับอนุกรมเทย์เลอร์ในกรณีที่กระจายรอบจุด $a = 0$ จะเรียกว่า ***อนุกรมแมคคลอริน***

ตัวอย่าง 3 กำหนดฟังก์ชัน $f(x)=e^x$ จงหาอนุกรมแมคคลอริน

วิธีทำ ให้ $f(x)=e^x$

จะได้ $f'(x)=f''(x)=f'''(x)=...=f^{(n)}(x)=e^x$

และ $f'(0)=f''(0)=f'''(0)=...=f^{(n)}(0)=e^0=1$

ดังนั้น

$$P_0(x)=f(0)=1$$

$$P_1(x)=f(0)+f'(0)x=1+x$$

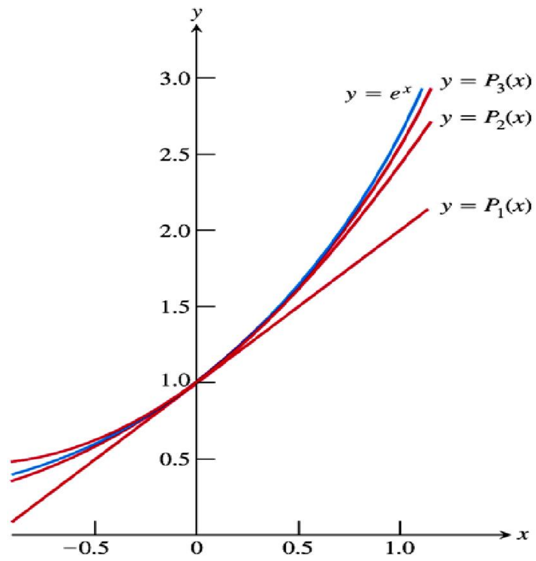
$$P_2(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2=1+x+\frac{x^2}{2!}=1+x+\frac{1}{2}x^2$$

$$P_3(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!} \quad =1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$$

$$P_n(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+...\frac{f^n(0)}{n!}x^n$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}$$



รูป 1

จากรูป 1 จะเห็นว่า เมื่อเราใช้อนุกรมแมคลลอรินอันดับสูงหรือใช้พจน์ของอนุกรมจำนวนมากขึ้นเท่าใด ค่าประมาณที่ได้ ก็จะใกล้เคียงกับ ฟังก์ชัน e^x มากขึ้นเท่านั้น นั่นคือ ในการคำนวณ n พจน์ ค่าที่ได้จะไม่เป็นค่าที่แท้จริงของฟังก์ชัน เพราะเรามีการตัดส่วนปลายทิ้งไป จึงเกิดเป็นความคลาดเคลื่อนที่เรียกว่า ความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย (Truncation error)

และจากรูป พบว่า อนุกรมแมคลอริน จะมีความถูกต้องมากเมื่อ $x = 0$ หรือใกล้เคียงศูนย์ แต่ถ้า x เป็นจุดอื่นๆ ที่ไกลจากศูนย์ จะพบว่ามีความคลาดเคลื่อนค่อนข้างมาก ดังนั้นการประมาณในลักษณะนี้จะอาศัยอนุกรมเทย์เลอร์

ตัวอย่าง 4 จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ $f(x) = \sin x$ รอบจุด $x = \dfrac{\pi}{3}$ โดยกระจาย 4 พจน์แรกของอนุกรม

วิธีทำ

อนุกรมแมคลอรินที่ควรรู้จัก

1. $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \; , \; -1 < x < 1$

2. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2\,!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n\,!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x^n}{n\,!}\right) \; , \quad -\infty < x < \infty$

3. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3\,!} + \dfrac{x^5}{5\,!} - \ldots + \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) \; , -\infty < x < \infty$

4. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2\,!} + \dfrac{x^4}{4\,!} - \ldots + \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right) \; , \; -\infty < x < \infty$

5. $\ln\left|1 + x\right| = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ldots + \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \; , -1 < x \le 1$

4.3 การหาอนุพันธ์ และปริพันธ์ของอนุกรมกำลัง

(Differentiation and Integration of Power Series)

กำหนดให้ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ เป็นอนุกรมกำลัง โดยมีรัศมีของการลู่เข้าเป็น $R > 0$ เราจะได้ว่า

1. $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง เมื่อ $|x-a| < R$

2. $\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{c_n (x-a)^{n+1}}{n+1} + C; \quad |x-a| < R$

3. $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}; \quad |x-a| < R$

ตัวอย่าง 5 จงหาอนุกรมแมคลอรินสำหรับ $f(x) = \tan^{-1} x$

วิธีทำ

4.4 อนุกรมทวินาม (The Binomial Series)

ให้ k เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $|x|<1$ จะได้อนุกรมทวินามคือ

$$(1+x)^k = 1+kx+k(k-1)\frac{x^2}{2!}+k(k-1)(k-2)\frac{x^3}{3!}+...$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{k}{n}x^n$$

เมื่อ $\binom{k}{n} = \dfrac{k(k-1)...(k-n+1)}{n!}, n \geq 1$ และ $\binom{k}{0} = 1$

คำนวณได้จาก Maclaurin series ของ $f(x)=(1+x)^k$ ดังนี้

$$f(x) = (1+x)^k \qquad \text{และ } f(0)=1$$

$$f'(x) = k(1+x)^{k-1}$$

$$f''(x) = k(k-1)(1+x)^{k-2}$$

$$f'''(x) = k(k-1)(k-2)(1+x)^{k-3}$$

$$\ldots$$

$$f^{(n)}(x) = k(k-1)...(k-n+1)(1+x)^{k-n}$$

และ $f^{(n)}(0) = k(k-1)...(k-n+1)$

ดังนั้น Maclaurin series ของ $f(x)=(1+x)^k$ คือ

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} k(k-1)...(k-n+1)\frac{x^n}{n!}$$

พิจารณาช่วงการลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ได้จาก

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{k(k-1)...(k-n+1)(k-n)x^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{k(k-1)...(k-n+1)x^n}{n!}}\right|$$

$$= |x|\lim_{n\to\infty}\frac{|k-n|}{n+1} = |x| < 1$$

จึงเป็นการลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

ตัวอย่าง 6 จงหาอนุกรมกำลังของ $f(x) = 1/(1+x)^2$ พร้อมช่วงการลู่เข้า

วิธีทำ

ใช้สูตรอนุกรมทวินาม แทน $k = -2$ จะได้สัมประสิทธิ์ทวินามเป็น

$$\binom{-2}{n} = \frac{-2(-3)...(-2-n+1)}{n!}, n \geq 1$$

$$= \frac{(-1)^n 2(3)...n(n+1)}{n!} = (-1)^n (n+1)$$

ดังนั้น $f(x) = 1/(1+x)^2$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (n+1)x^n, |x| < 1$$

ตัวอย่าง 7 จงหาอนุกรมกำลังของ $f(x)=1/\sqrt{4-x}$ พร้อมรัศมีการลู่เข้า

วิธีทำ

แบบฝึกหัด 4.2

โจทย์ข้อ 1-8 จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของ f ที่จุด $x=a$ ที่กำหนดให้และหารัศมีการลู่เข้าของอนุกรม

1. $f(x)=e^{2x} \quad ,a=0$
2. $f(x)=\sin x \quad ,a=\dfrac{\pi}{4}$
3. $f(x)=\dfrac{1}{x+1} \quad ,a=0$
4. $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2} \quad ,a=-2$
5. $f(x)=\dfrac{1}{x} \quad ,a=1$
6. $f(x)=e^{x} \quad ,a=3$
7. $f(x)=\sqrt{x} \quad ,a=4$
8. $f(x)=\tan^{-1}2x \quad ,a=0$

โจทย์ข้อ 9-14 จงหาอนุกรมแมคลอริน ของ f และหารัศมีการลู่เข้าโดยใช้อนุกรมเรขาคณิต หรือโดยการหาอนุพันธ์ หรือการหาค่าอินทิกรัลของอนุกรม

9. $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$
10. $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$
11. $f(x)=\dfrac{1}{1+4x^2}$
12. $f(x)=\dfrac{1}{4+x^2}$
13. $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$
14. $f(x)=\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$

โจทย์ข้อ 15-22 จงใช้วิธีการใดก็ได้หาอนุกรมแมคลอรินของฟังก์ชันที่กำหนดให้และหารัศมีการลู่เข้าของอนุกรมที่ได้

15. $f(x) = e^{3x}$

16. $f(x) = x^2 \cos x$

17. $f(x) = x \sin \frac{x}{2}$

18. $f(x) = \sin^2 x$ (ข้อแนะนำ: ใช้ $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$)

19. $f(x) = \sqrt{1+x}$

20. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$

21. $f(x) = (1+x)^{-3}$

22. $f(x) = \ln |5+x|$

คำตอบแบบฝึกหัด 4.2

1. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^n x^n}{n!}\right) \quad , R=\infty$

2. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}(n-1)}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{n!}\right), R=\infty$

3. $\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n x^n\right) \quad , R=1$

4. $\sum_{n=0}^{\infty}\left((n+1)(x+2)^n\right) \quad , R=1$

5. $\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n (x-1)^n\right) \quad , R=1$

6. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^3}{n!}(x-3)^n\right) \quad , R=\infty$

7. $2+\frac{1}{4}(x-4\sum_{n=2}^{\infty}\left((-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-3)}{n!2^{3n-1}}(x-4)^n)\right)+ \quad , R=\frac{1}{2}$

8. $\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)}\right) \quad , R=\frac{1}{4}$

9. $\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n x^n\right) \quad , R=1$

10. $\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n (x-1)x^n\right) \quad , R=1$

11. $\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n 4^n x^{2n}\right) \quad , R=\frac{1}{2}$

12. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}x^{2n}\right) \quad , R=2$

13. $\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n} \quad , R=1$

14. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}\right) \quad , R=1$

15. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3^n x^n}{n!}\right) \quad , R=\infty$

16. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n)!}\right) \quad , R=\infty$

17. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{2^{2n+1}(2n+1)!}\right) \quad , R=\infty$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n\cdot 2^{2n-1}\cdot x^{2n}}{(2n)!}\right) \quad , R=\infty$

19. $2+\frac{1}{4}(x-4)+\sum_{n=2}^{\infty}\left((-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ \ldots \ \cdot(2n-3)}{2^n n!}\cdot x^n\right) \quad , R=1$

20. $1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ \ldots \ \cdot(3n-2)}{3^n n!}\cdot x^n\right) \quad , R=1$

21. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2}(n+1)(n+2)x^n\right) \quad , R=1$

22. $\ln 5+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n x^n}{5^n\cdot n}\right) \quad , R=5$