บทที่ 2

ลำดับ (Sequence)

2.1 ความหมายของลำดับ

คำว่า ลำดับ ในคณิตศาสตร์ ใช้อธิบายการเขียนจำนวนที่มีพจน์ตามหลังสืบเนื่องกัน เช่น

$1, 2, 3, 4, \ldots$ $\qquad$ $2, 4, 6, 8, \ldots$

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ $\qquad$ $1, -1, 1, -1, \ldots$

เรียกจำนวนในลำดับว่า พจน์ (term) ของลำดับ และในแต่ละกรณี เราใช้จุด 3 จุด เพื่อแสดงว่าลำดับนั้นมีพจน์ต่อไปอีกอย่างไม่สิ้นสุด

การเขียนลำดับ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ สามารถเขียนในลักษณะวงเล็บได้เป็น $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$

เรียก a_1 ว่าพจน์ ที่ 1 ของลำดับ

เรียก a_2 ว่าพจน์ ที่ 2 ของลำดับ

....

เรียก a_n ว่าพจน์ ที่ n ของลำดับ

นอกจากนี้ยังสามารถเขียนได้ในรูป $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ หรือ $\{a_n\}$ เรียกว่า Bracket notation เช่น ลำดับ $2, 4, 6, 8, \ldots$ เขียนได้โดยใช้สัญลักษณ์ $\{2n\}_{n=1}^{+\infty}$ ซึ่งสัญลักษณ์นี้ แสดงให้เห็นว่าแต่ละพจน์เกิดจากการแทนจำนวนเต็ม $n = 1, 2, 3, \ldots$ ลงในสูตร $2n$

จะเห็นได้ว่าลำดับเป็นเซตของจำนวนที่เรียงลำดับกันภายใต้กฎเกณฑ์ อย่างใดอย่างหนึ่งร่วมกัน ลำดับที่มีพจน์เป็นจำนวนจำกัดเรียกว่า ลำดับจำกัด (Finite Sequence) ลำดับที่มีจำนวนพจน์ไม่จำกัดเรียกว่า ลำดับอนันต์ (Infinite Sequence)

ตัวอย่าง 1 จงเขียน 5 พจน์แรกของลำดับ $\left\{2^n\right\}_{n=1}^{+\infty}$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 2 จงเขียนลำดับต่อนี้ในรูป Bracket notation

(ก) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots$

(ข) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$

(ค) $1, -1, 1, -1, \ldots$

(ง) $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \cdots$

(จ) $1, 3, 5, 7, \ldots$

ข้อสังเกต อักษร a และ n อาจจะใช้ตัวอักษร อื่นแทนได้ เช่น a_n อาจจะแทนด้วย b_k ก็ได้

จากข้างต้นจะเห็นว่าในการเขียนลำดับ

$$2, 4, 8, 16, 32, \ldots, 2^n, \ldots \quad \text{หรือ} \quad \left\{2^n\right\}_{n=1}^{+\infty} \tag{1}$$

เป็นการกำหนดความเกี่ยวข้องระหว่าง 2^n และจำนวนเต็มบวก n ซึ่งกล่าวได้ว่า $\left\{2^n\right\}_{n=1}^{+\infty}$ เป็นสูตรสำหรับฟังก์ชันที่มีตัวแปรอิสระคือ n แปรค่าบนจำนวนเต็มบวก ดังนั้นอาจจะเขียน (1) ในรูปฟังก์ชันเป็น $f(n) = 2^n \;, n = 1, 2, 3, \ldots$ และ $2, 4, 8, 16, 32, \ldots, 2^n, \ldots$ แทนฟังก์ชัน $f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots$ จึงมีนิยามของลำดับดังนี้

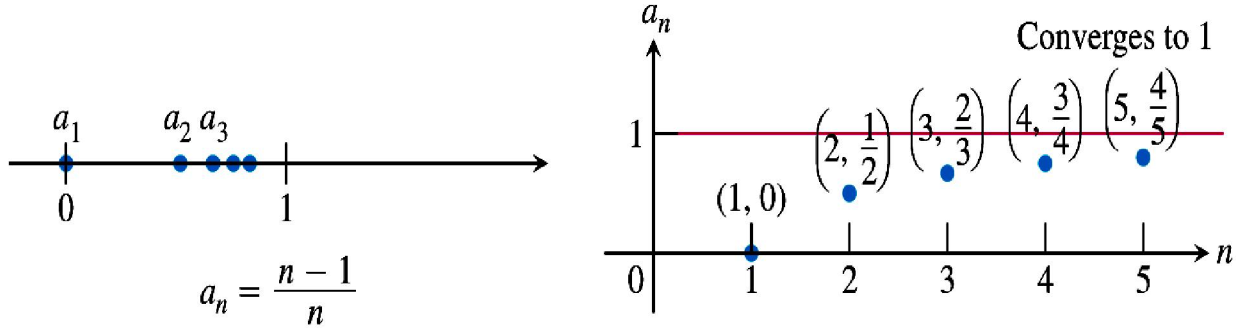
นิยาม 1 ลำดับ (Sequence) หรือ ลำดับอนันต์ (Infinite sequence) คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก

เนื่องจากทุกลำดับมีโดเมน คือ เซตของจำนวนเต็มบวกเหมือนกัน ดังนั้น เขียน $\{a_n\}$ แทน $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ หรือ $\{f(n)\}$ แทน $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$

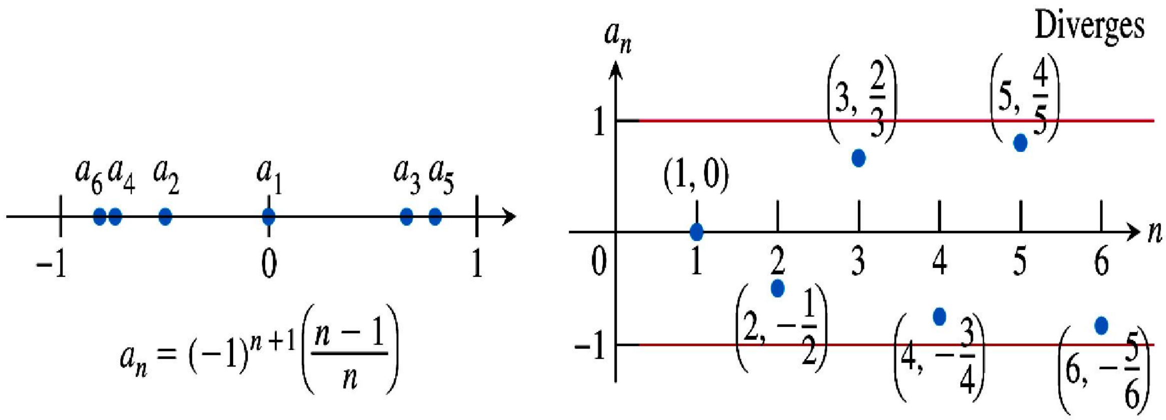
2.2 กราฟของลำดับ

เนื่องจากลำดับคือฟังก์ชัน เราสามารถเขียนกราฟได้ ดังตัวอย่างนี้

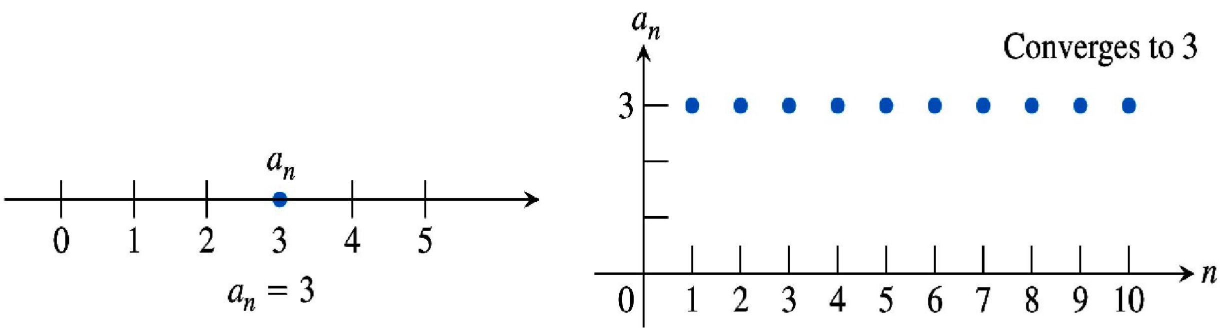
ตัวอย่าง 3.1 ลำดับ $\left\{\dfrac{n-1}{n}\right\}$ มีกราฟดังนี้



ตัวอย่าง 3.2 ลำดับ $\left\{\dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)}{n}\right\}$ มีกราฟดังนี้



ตัวอย่าง 3.3 ลำดับ $\{3,3,3,\ldots\}$ มีกราฟดังนี้



จากกราฟทั้งสามของลำดับ ซึ่งเป็น กราฟที่ไม่ต่อเนื่อง (Discontinuous curve) จะได้ว่า กราฟของ (3.1) และ (3.3) นั้น จะมีค่าเข้าใกล้ หรือ ลู่เข้า 1 และ 3 ตามลำดับ ส่วน กราฟของ (3.2) จะมีการแกว่งไปมา ไม่เข้าสู่ค่าใดเลย

2.3 ลิมิตของลำดับ

การที่ลิมิตมีค่าเข้าใกล้ค่าหนึ่งหรือไม่นั้น สามารถกำหนดเป็นนิยามลิมิตของลำดับได้ดังนี้

นิยาม 2 ลำดับ $\{a_n\}$ มีลิมิต L ถ้ากำหนด $\varepsilon > 0$ ใดๆ แล้วมีจำนวนเต็มบวก N โดยที่ $|a_n - L| < \varepsilon$ เมื่อ $n \geq N$

ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ มีลิมิต L แล้ว เรียกว่า **ลำดับคอนเวอร์จ** หรือ **ลู่เข้า** และ เขียน $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ และเรียกลำดับที่ไม่มีลิมิตว่า **ไดเวอร์จ** หรือ **ลู่ออก**

จากการพิจารณากราฟของลำดับในตัวอย่าง 3.1 เราจึงได้ว่า ลำดับ $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$ ลู่เข้าสู่ 1 และเขียนได้เป็น $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$

นอกจากกราฟยังมีวิธีพิจารณาการลู่เข้าของลำดับดังทฤษฎีต่อไปนี้

การคำนวณค่าลิมิตของลำดับ (Calculating limit of Sequence)

ทฤษฎีบท 1 กำหนดให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ A, B, k เป็นจำนวนจริง ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ แล้วจะได้ว่า

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$ (Sum Rule)
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$ (Difference Rule)
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$ (Product Rule)
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$, $B \neq 0$ (Quotient Rule)
5. $\lim\limits_{n\to\infty} kb_n = kB$ (Constant Multiple Rule)

ทฤษฎีบท 2 ถ้าให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามสำหรับ $x > n_0$ และ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ซึ่งทำให้ $a_n = f(n)$ สำหรับ $n > n_0$ แล้วจะได้ว่า ถ้า $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

ลิมิตที่ควรรู้จักมีดังนี้

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} c^{\frac{1}{n}} = 1 \quad , c > 0$

5) $\lim_{n\to\infty} c^n = 0 \quad , |c| < 1$ 6) $\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{n!} = 0$

7) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ กรณี 4-6 c เป็นค่าคงที่

ในการตรวจสอบการลู่เข้าหรือลู่ออกของลำดับที่มีความซับซ้อนนั้น จำเป็นต้องหาลิมิตในรูปแบบไม่กำหนดลักษณะต่างๆ ($\pm\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0 \cdot \pm\infty, 0^0, \pm\infty^0, 1^{\pm\infty}, \pm\infty \pm \infty$) โดยใช้กฎของโลปิตาล แยกตัวประกอบหรือสังยุค ช่วยในการหาลิมิตๆได้

ตัวอย่าง 4 ลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือไม่

4.1 $\left\{ \frac{1-6n^4}{n^4+8n^3} \right\}$

วิธีทำ

4.2 $\left\{\dfrac{n^2-2n+1}{n-1}\right\}$

วิธีทำ

4.3 $\left\{ \dfrac{2^{1000} + 2^{n-1} + 3^{n-2}}{2^n + 3^n + 5} \right\}$

วิธีทำ

4.4 $\left\{n-\sqrt{n^2-n}\right\}$

วิธีทำ

4.5 $\left\{ \ln n - \ln(2n^3 + 1) \right\}$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 5 จงทดสอบลำดับอนันต์ $\left\{\left(\dfrac{1+n}{n-1}\right)^n\right\}$ ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ ให้ $K=\left(\dfrac{1+x}{x-1}\right)^x$ จะได้ $\ln K = x\ln\left(\dfrac{1+x}{x-1}\right)$

พิจารณาลิมิต $\lim\limits_{x\to\infty}\ln K = \lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(\dfrac{1+x}{x-1}\right)$

$$\ln\lim_{x\to\infty}K = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\dfrac{1+x}{x-1}\right)}{\dfrac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x-1}{1+x}\left(\dfrac{1\cdot(x-1)-1\cdot(1+x)}{(x-1)^2}\right)}{-\dfrac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{(1+x)(x-1)}$$

$$= 2$$

จะได้ $\ln\lim\limits_{x\to\infty}K = 2$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to\infty}K = e^2$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x-1}\right)^x = e^2$ ดังนั้น $\left\{\left(\dfrac{1+n}{n-1}\right)^n\right\}$ ลู่เข้าและลู่เข้าสู่ค่า e^2

ทฤษฎีบท 3 (The Sandwich Theorem of Sequence)

ให้ $\{a_n\},\{b_n\}$ และ $\{c_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงโดย $a_n \le b_n \le c_n$ ทุกๆค่า n ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$ แล้วจะได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$

ตัวอย่าง 6 จงแสดงว่าลำดับ $\left\{\dfrac{\sin n}{n}\right\}$ ลู่เข้า

วิธีทำ

$$-1 \le \sin n \le 1$$

$$-\frac{1}{n} \le \frac{\sin n}{n} \le \frac{1}{n}$$

$$0 = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \le \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$ ดังนั้น $\left\{\dfrac{\sin n}{n}\right\}$ ลู่เข้า

ทฤษฎีบท 4 (The Continuous Function Theorem for sequence)

ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ซึ่ง $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ และ f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่นิยามที่ a_n ทุกค่า n แล้ว

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$$

หมายเหตุ อาจเขียนได้ว่า $a_n \to L$ แล้ว $f(a_n) \to f(L)$

ตัวอย่าง 7 ลำดับ $\left\{\sin\left(\frac{n\pi+2}{2n}\right)\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้าหรือไม่

วิธีทำ จาก $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\pi+2}{2n}\right)=\frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{n\pi+2}{2n}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

2.4 ลำดับทางเดียว (Monotone Sequence)

นิยาม 3 จะเรียกลำดับ $\{a_n\}$ ว่า

เป็นลำดับเพิ่ม ถ้า $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < \ldots$

เป็นลำดับไม่ลด ถ้า $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_n \le \ldots$

เป็นลำดับลด ถ้า $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > \ldots$

เป็นลำดับไม่เพิ่ม ถ้า $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots \ge a_n \ge \ldots$

เรียกลำดับที่เป็นลำดับไม่ลด หรือเป็นลำดับไม่เพิ่มว่า **ลำดับทางเดียว (monotone)** และ เรียก ลำดับที่เป็นลำดับเพิ่ม หรือเป็นลำดับลดว่า **ลำดับทางเดียวโดยแท้ (strictly monotone)** นั่นคือ ลำดับทางเดียวโดยแท้ จะเป็นลำดับทางเดียวด้วย (แต่บทกลับไม่จริง)

ตัวอย่าง 8 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$ เป็นลำดับเพิ่ม (1)

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ เป็นลำดับลด (2)

$1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots$ เป็นลำดับไม่ลด (3)

$1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots$ เป็นลำดับไม่เพิ่ม (4)

ลำดับทั้งสี่เป็นลำดับทางเดียว และลำดับ (3) ,(4) เป็นลำดับทางเดียวโดยแท้ และลำดับที่ไม่เป็นลำดับทางเดียว เช่น

$$1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{4}, \ldots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \ldots$$

<u>การทดสอบการเป็นลำดับทางเดียว</u>

การตรวจสอบลำดับว่า เป็นลำดับเพิ่ม หรือลำดับลด อาจทำได้ดังนี้

<u>วิธีที่ 1</u> พิจารณา $a_{n+1} - a_n$

ถ้าพบว่า $a_{n+1} - a_n < 0$ แล้ว แสดงว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลด (5)

และถ้า $a_{n+1} - a_n > 0$ แล้ว แสดงว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับเพิ่ม (6)

<u>วิธีที่ 2</u> ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่ $a_n > 0$ ทุกๆ $n = 1, 2, 3, ...$ แล้ว จะพิจารณาอัตราส่วน $\frac{a_{n+1}}{a_n}$

ถ้า $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ทุกๆ $n = 1, 2, 3, ...$ แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับลด (7)

และถ้า $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ทุกๆ $n = 1, 2, 3, ...$ แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับเพิ่ม (8)

<u>วิธีที่ 3</u> กรณีมีฟังก์ชันต่อเนื่อง $y = f(x)$ ซึ่งหาอนุพันธ์ได้ทุกจุดในโดเมนและ $f(n) = a_n$ ทุกๆ n จะได้ว่า ทุก ๆ $x \in (1, \infty)$

ถ้า $f'(x) < 0$ แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับลด (9)

$f'(x) > 0$ แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับเพิ่ม (10)

หมายเหตุ

- ถ้าเครื่องหมายน (5), (7) หรือ (9) เป็น $\leq$ จะเป็นลำดับไม่เพิ่ม
- ถ้าเครื่องหมายใน (6), (8) หรือ (10) เป็น $\geq$ จะเป็นลำดับไม่ลด

ตัวอย่าง 9 จงพิจารณาลำดับต่อไปนี้ว่าเป็นลำดับทางเดียวหรือไม่ ถ้าเป็น เป็นลำดับเพิ่ม หรือลำดับลด

9.1 $\left\{\dfrac{n}{2n-1}\right\}$

วิธีทำ พิจารณา $$a_{n+1}-a_n = \frac{n+1}{2(n+1)-1}-\frac{n}{2n-1}$$
$$= \frac{(n+1)(2n-1)-n(2n+1)}{(2n+1)(2n-1)}$$
$$= \frac{-1}{(2n+1)(2n-1)} < 0$$

ดังนั้น $\left\{\dfrac{n}{2n-1}\right\}$ เป็นลำดับลด

9.2 $\left\{\frac{1.2.3\ldots n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\right\}$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 10 จงพิจารณาว่าลำดับ $\left\{ne^{-n}\right\}$ เป็นลำดับเพิ่มหรือลำดับลด

วิธีทำ จากโจทย์ $a_n = ne^{-n}$ ทุกจำนวนนับ n

ให้ $f(x) = xe^{-x}$ ทุก $x \in [1,\infty)$

$$f'(x) = -xe^{-x} + e^{-x}$$

$$= \frac{-x+1}{e^{x}} < 0 \quad \text{ทุก } x \in (1,\infty)$$

ดังนั้น $\left\{ne^{-n}\right\}$ เป็นลำดับลด

ตัวอย่าง 11 จงแสดงว่า $\dfrac{e}{2!}, \dfrac{e^2}{3!}, \dfrac{e^3}{4!}, \ldots, \dfrac{e^n}{(n+1)!}, \ldots$ เป็นลำดับลด

วิธีทำ

1.5 ลำดับที่มีขอบเขต (Bounded Sequences)

นิยาม 4 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง
เรียกจำนวนจริง A ว่า**ขอบเขตบน** (Upper Bound) ของ $\{a_n\}$
ก็ต่อเมื่อ $A \geq a_n$ สำหรับทุก ๆ $n = 1, 2, 3, \ldots$
และเรียก A ว่า**ขอบเขตบนค่าน้อยสุด** (Least Upper Bound) ของ $\{a_n\}$ ก็ต่อเมื่อ A เป็นขอบเขตบนของ $\{a_n\}$ และ A มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับขอบเขตบนทุกตัวของ $\{a_n\}$

นิยาม 5 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง
เรียกจำนวนจริง B ว่า**ขอบเขตล่าง** (Lower Bound) ของ $\{a_n\}$
ก็ต่อเมื่อ $B \leq a_n$ สำหรับทุก ๆ $n = 1, 2, 3, \ldots$
และเรียก B ว่า**ขอบเขตล่างค่ามากสุด** (Greatest Lower Bound) ของ $\{a_n\}$ ก็ต่อเมื่อ B เป็นขอบเขตล่างของ $\{a_n\}$ และ B มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับขอบเขตล่างทุกตัวของ $\{a_n\}$

นิยาม 6 ลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต ก็ต่อเมื่อ $\{a_n\}$ มีทั้งขอบเขตบน A และขอบเขตล่าง B ซึ่งทำให้ $A \geq a_n \geq B$ ทุก ๆ จำนวนนับ n

ตัวอย่าง 12

12.1 ลำดับ $\{2n\} = 2, 4, 6, 8, \ldots$ มี 2 เป็นขอบเขตล่างค่ามากสุด แต่ ไม่มีขอบเขตบน

ดังนั้นลำดับนี้จึงไม่มีขอบเขต และเป็นลำดับเพิ่ม

12.2 ลำดับ $\left\{(-1)^n\right\} = -1, 1, -1, 1, \ldots$ มี 1 เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุด และมี -1 เป็นขอบเขตล่างค่ามากสุด

ดังนั้นลำดับนี้มีขอบเขต แต่ลู่ออก

12.3 ลำดับ $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\} = -1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{5}, \ldots$

มี -1 เป็นขอบเขตล่างค่ามากสุด และ $\frac{1}{2}$ เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุด

ดังนั้น $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตแต่ ไม่เป็นลำดับทางเดียว

ตัวอย่าง 13 จงหาขอบเขตของลำดับ $\left\{\dfrac{n}{2n+1}\right\} = \dfrac{1}{3},\dfrac{2}{5},\dfrac{3}{7},\dfrac{4}{9},...$

วิธีทำ กำหนดให้ $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$, $a_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n+3}$

ดังนั้น $a_{n+1} - a_n = \dfrac{n+1}{2n+3} - \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{(2n+3)(2n+1)} > 0$

จึงได้ว่า $a_{n+1} > a_n$ ทุกๆ $n = 1,2,3,...$

นั่นคือ $a_1 < a_2 < a_3 < ...$ หรือเขียนเป็น $\dfrac{1}{3} < \dfrac{2}{5} < \dfrac{3}{7} < \dfrac{4}{9} < ...$

และได้ว่า $a_n \geq \dfrac{1}{3}$ ทุก ๆ $n = 1,2,3,...$

ดังนั้น $\frac{1}{3}$ เป็นขอบเขตล่างของ $\{a_n\}$

นอกจากนี้แล้วยังมีจำนวนจริงอีกมากมายที่เป็นขอบเขตล่างของ $\{a_n\}$ เช่น 0 , -1 ,-3/2 เป็นต้น แต่ทุกจำนวนที่เป็นขอบเขตล่างของ $\{a_n\}$ จะมีค่าไม่เกิน 1/3 ดังนั้น 1/3 เป็นขอบเขตล่างที่มีค่ามากที่สุด

สำหรับขอบเขตบนของ $\{a_n\}$ พิจารณาจาก

$$a_n = \frac{n}{2n+1} < \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \text{ ทุกๆ } n = 1,2,3,...$$

ดังนั้น 1/2 เป็นขอบเขตบนค่าหนึ่งของ $\{a_n\}$ และทุกจำนวนที่มากกว่าหรือเท่ากับ 1/2 เป็นขอบเขตบนทั้งหมด

การที่จะแสดงว่า 1/2 เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดทำได้ดังนี้

สมมติว่ามีจำนวนจริง y โดยที่ $0 < y < 1/2$

และ y เป็นขอบเขตบนของ $\{a_n\}$ แล้ว จะมีจำนวนเต็มบวก m ตัว

หนึ่งซึ่ง $m > \dfrac{y}{1-2y}$ หรือ ได้ $y < \dfrac{m}{2m+1} = a_m$

ซึ่งขัดแย้งกับที่ y เป็นขอบเขตบน

ดังนั้น จึงไม่มีจำนวนจริง $0 < y < 1/2$ และ y เป็นขอบเขตบนของ $\{a_n\}$ นั่นคือ 1/2 เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ $\{a_n\}$

ทฤษฎีบท 5 ถ้า $\{a_n\}$เป็นลำดับที่ลู่เข้าแล้ว$\{a_n\}$เป็นลำดับมีขอบเขต

หมายเหตุ

- บทกลับของทฤษฎีบท 5: ถ้า $\{a_n\}$ ไม่มีขอบเขต จะเป็นลำดับลู่ออก
- ลำดับทางเดียวที่มีค่าขอบเขต จะเป็นลำดับที่ลู่เข้าเสมอ แต่ลำดับที่มีขอบเขต ไม่จำเป็นต้องลู่เข้า ดังเช่นตัวอย่าง 12.2

แบบฝึกหัด 1

1. จงแสดงว่าลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก กรณีที่เป็นลำดับลู่เข้าให้หาลิมิตของลำดับด้วย

1.1 $\left\{\frac{4n-1}{8n+3}\right\}$ 1.2 $\left\{5(-1)^{n+1}\right\}$ 1.3 $\left\{\frac{n^3-1}{2n}\right\}$

1.4 $\left\{\frac{\sqrt{2n+1}}{n}\right\}$ 1.5 $\left\{\frac{\ln n}{n}\right\}$ 1.6 $\left\{\frac{6-2^{-n}}{3+4^{-n}}\right\}$

1.7 $\left\{n^{\frac{2}{n+1}}\right\}$ 1.8 $\left\{\ln\left(\frac{4n+1}{5n-1}\right)\right\}$ 1.9 $\left\{\frac{\sin^2 n}{4^n}\right\}$

1.10 $\left\{(-1)^n \frac{5n^3}{n^3+1}\right\}$ 1.11 $\left\{n\sin\frac{\pi}{n}\right\}$ 1.12 $\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right\}$

1.13 $\left\{\frac{e^n}{4^n}\right\}$ 1.14 $\left\{\sqrt{n^2+3n}-n\right\}$ 1.15 $\left\{\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n\right\}$

2. จงแสดงว่าลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับเพิ่มหรือลำดับลด หรือไม่เป็นลำดับทางเดียว

2.1 $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}$ 2.2 $\left\{n-2^n\right\}$ 2.3 $\left\{\frac{n!}{3^n}\right\}$

คำตอบแบบฝึกหัด 1

1.1 ลู่เข้า $\frac{1}{2}$	1.2 ลู่ออก	1.3 ลู่ออก
1.4 ลู่เข้า 0	1.5 ลู่เข้า 0	1.6 ลู่เข้า 2
1.7 ลู่เข้า 1	1.8 ลู่เข้า $\ln\frac{4}{5}$	1.9 ลู่เข้า 0
1.10 ลู่ออก	1.11 ลู่เข้า π	1.12 ลู่เข้า 0
1.13 ลู่เข้า 0	1.14 ลู่เข้า $\frac{3}{2}$	1.15 ลู่เข้า e^2

2. 2.1 ลำดับเพิ่ม

   2.2 ลำดับลด

   2.3 ไม่เป็นลำดับทางเดียว