บทที่ 5

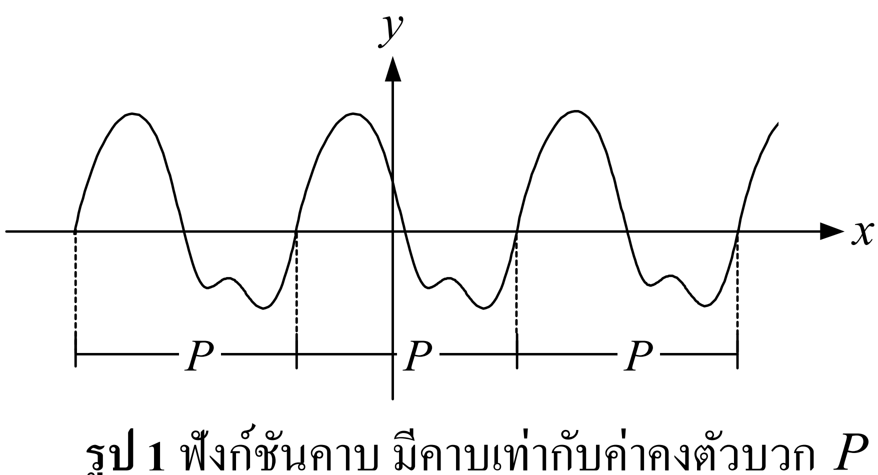
อนุกรมฟูเรียร์ (Fouier Series)

ในบทนี้จะศึกษาถึงอนุกรมฟูเรียร์ หรือ อนุกรมฟูริเยร์ ซึ่งเป็นอนุกรมสำหรับฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องเป็นช่วงๆ (piecewise continuous) บนโดเมนที่กำหนดให้หนึ่งคาบ อนุกรมที่กระจายได้จะประกอบด้วยพจน์ของไซน์ (sine) โคไซน์ (cosine)

5.1 ฟังก์ชันคาบ (Periodic function)

นิยาม 1   ฟังก์ชัน $f(x)$ จะเรียกว่าฟังก์ชันคาบ ที่มีคาบ (period) เท่ากับ p ถ้า ทุกๆ จำนวนจริง x ที่กำหนดให้ และมีจำนวนจริงบวก p บางจำนวนที่ทำให้ $f(x+p)=f(x)$ สำหรับทุกๆ x

ฟังก์ชันคาบเมื่อนำมาเขียนกราฟ จะมีลักษณะดังรูป1 ซึ่งเห็นได้ว่าเส้นกราฟซ้ำกันทุก ๆ ช่วงความยาว P



รูป 1 ฟังก์ชันคาบ มีคาบเท่ากับค่าคงตัวบวก P ใดๆ

ตัวอย่าง 1 จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน ต่อไปนี้

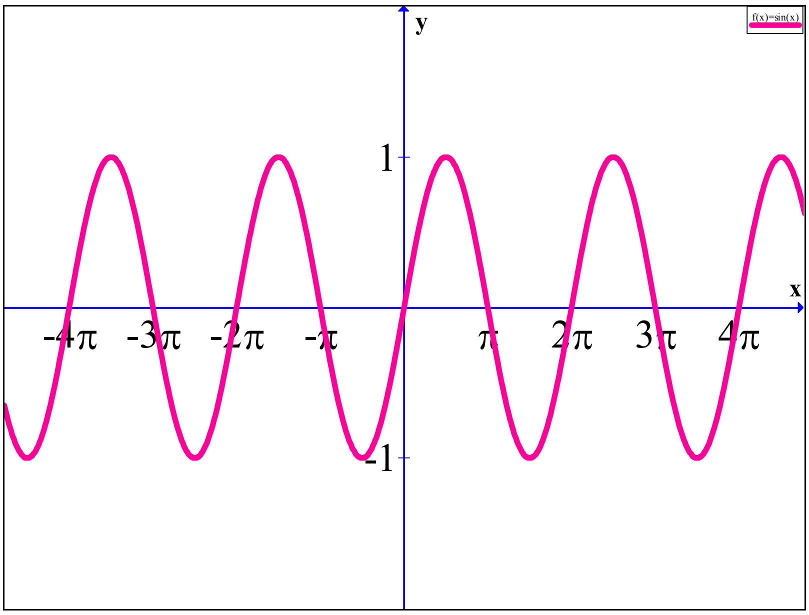
1. $f(x)=\sin x$
2. $g(x)=\cos nx$

วิธีทำ

1. ให้ $f(x)=\sin x$ และ เนื่องจาก

$$f(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)=\sin(x+4\pi)=\cdots=\sin x=f(x)$$

ดังนั้น $f(x)=\sin x$ เป็นฟังก์ชันคาบมีคาบ $2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$
และ 2π คือ คาบน้อยสุด และได้กราฟดังนี้

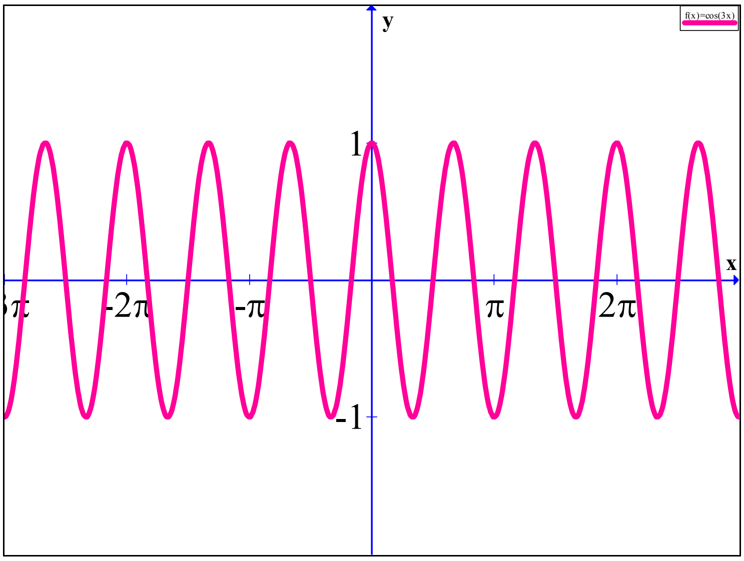


รูป 2.1

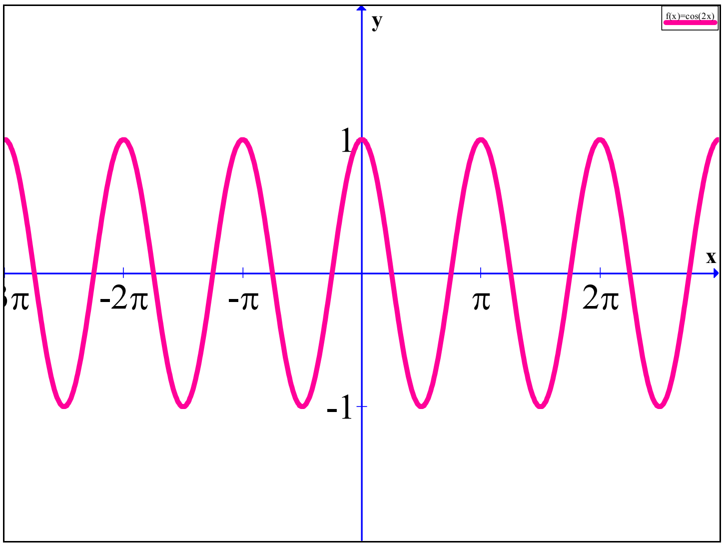
2.ให้ $g(x)=\cos nx$ และเนื่องจาก

$$f(x+\frac{2\pi}{n})=\cos\left(n\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)\right)=\cos\left(n\left(x+\frac{4\pi}{n}\right)\right)=\cdots=\cos nx$$

ดังนั้น $\cos nx$ เป็นฟังก์ชันคาบมีคาบ $\frac{2\pi}{n},\frac{4\pi}{n},\frac{6\pi}{n},\ldots$ เมื่อ $n=1,2,3,\ldots$ โดยที่ $\frac{2\pi}{n}$ คือ คาบน้อยที่สุด เขียนกราฟได้ดังนี้

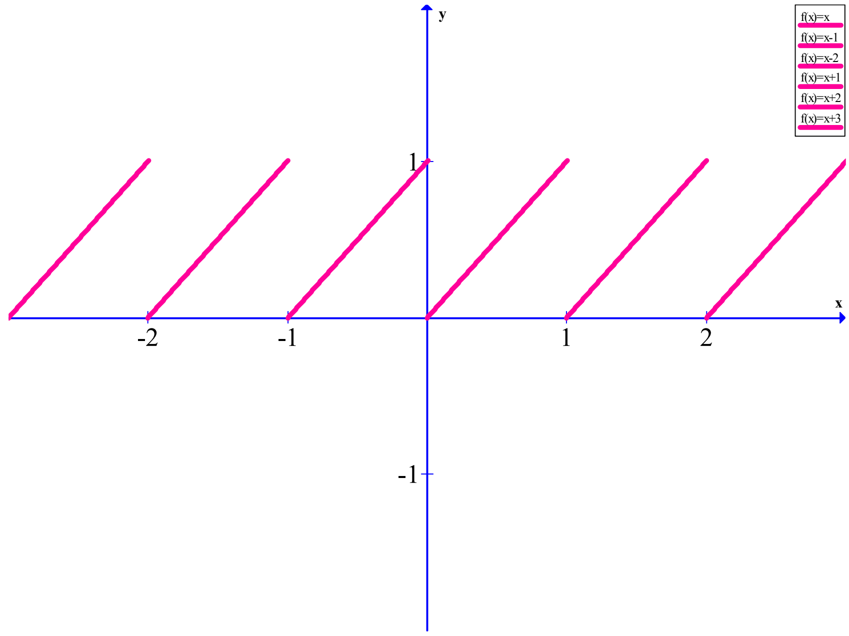


รูป 2.2 กราฟ $y=\cos 3x$

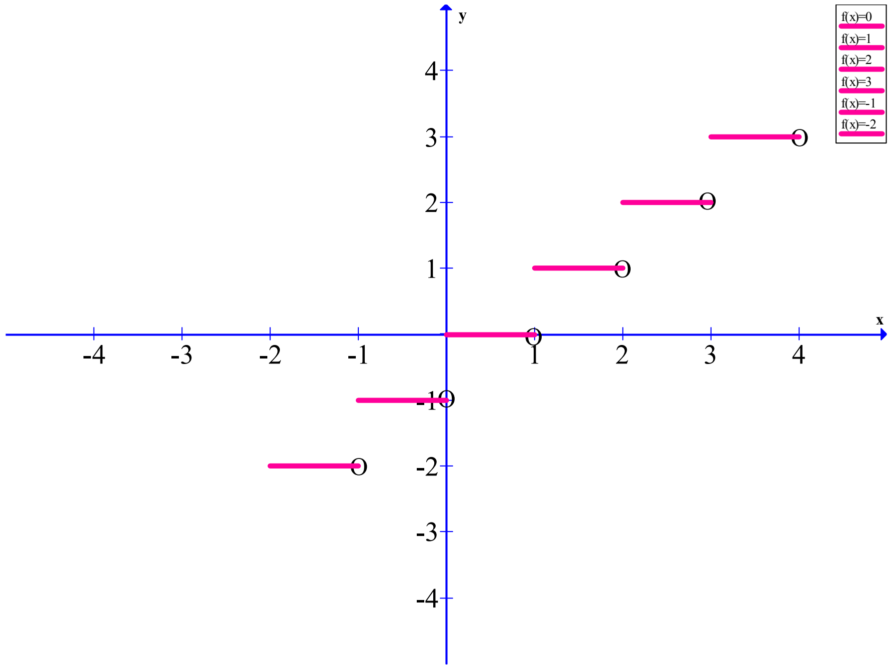


รูป 2.3 กราฟ $y=\cos 2x$

ตัวอย่าง 2 พิจารณากราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้



รูป 3.1



รูป 3.2

2.1 จากกราฟในรูป 3.1 จะได้ว่าเป็นฟังก์ชันคาบ และได้

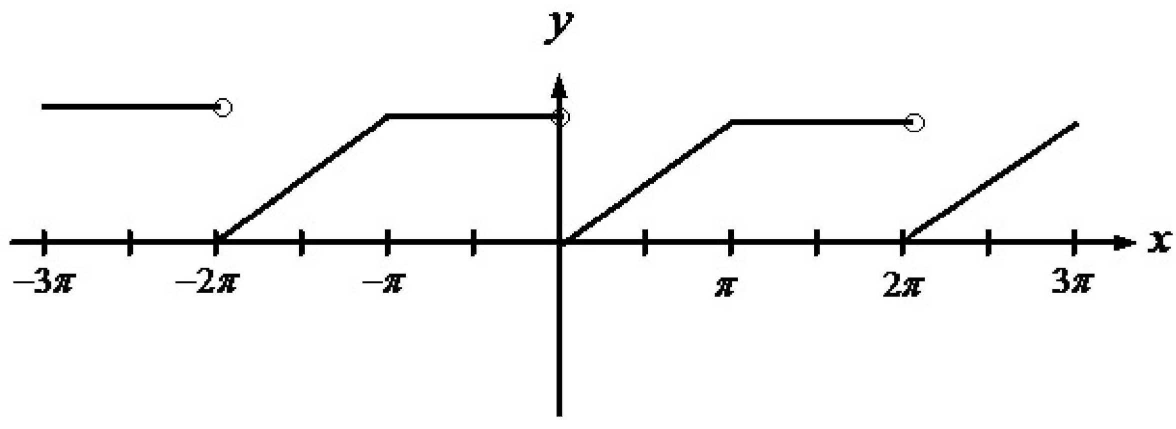
$f(x) = x \quad ,0 < x < 1$ และมีคาบ p=1

2.2 จากรูป 3.2 กราฟฟังก์ชันนี้ไม่เป็นฟังก์ชันคาบ

ตัวอย่าง 3 กำหนดให้ฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} \pi & -\pi \le x < 0 \\ x & 0 \le x \le \pi \end{cases}$

และมี $f(x+2\pi) = f(x)$ สำหรับทุกค่า x

จากนิยามได้ว่าฟังก์ชันนี้เป็นฟังก์ชันคาบ มีคาบหลักมูลเท่ากับ 2π และเขียนกราฟได้ดังรูป 4



รูป 4

คุณสมบัติต่างๆเกี่ยวกับฟังก์ชันเป็นคาบมีดังนี้

ทฤษฎีบท 1 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันเป็นคาบมีคาบเท่ากับ T จะได้ว่าฟังก์ชัน h ที่กำหนดโดย h(x) = a f(x) +b g(x) , (a,b เป็นค่าคงตัว) เป็นฟังก์ชันเป็นคาบที่มีคาบเท่ากับ T ด้วย

ทฤษฎีบท 2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันเป็นคาบมีคาบเท่ากับ T และสามารถอินทิเกรตได้ จะได้ว่า

$$\int_0^T f\left(x\right) dx = \int_a^{a+T} f\left(x\right) dx = \int_b^{b+T} f(x)\, dx$$

สำหรับค่าคงตัว a, b ใดๆ

ทฤษฎีบท 3 ฟังก์ชัน $\sin\dfrac{n\pi x}{L}$ และ $\cos\dfrac{n\pi x}{L}$ เป็นฟังก์ชันเป็นคาบที่มีคาบหลักมูลเท่ากับ $\dfrac{2L}{n}$ เมื่อ n และ L เป็นจำนวนเต็มบวก และฟังก์ชันทั้งสองมีคาบเป็น $2L$ ด้วย

5.2 อนุกรมฟูเรียร์ (Fourier Series)

อนุกรมฟูเรียร์ คือ อนุกรมอนันต์ที่เกิดจากเขียนฟังก์ชัน $f(x)$ ที่นิยามให้เป็นฟังก์ชันคาบ ประกอบด้วยพจน์ต่าง ๆ ของตัวแปร x ในรูปของฟังก์ชันตรีโกณมิติไซน์และโคไซน์

อนุกรมฟูเรียร์ที่มีคาบ 2L

ถ้า $f(x)$ นิยามเป็นฟังก์ชันคาบมีคาบเท่ากับ $2L$ ในช่วง $(-L,L)$ หรือ $[-L,L]$ แล้วอนุกรมฟูเรียร์ของ $f(x)$ คือ

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos\frac{\pi x}{L}+b_1\sin\frac{\pi x}{L}+a_2\cos\frac{2\pi x}{L}+b_2\sin\frac{2\pi x}{L}+\cdots$$

นั่นคือ $$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (1)$$

เมื่อ a_n และ b_n คือ สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ (Fourier Coefficients) หาค่าได้จากการอินทิเกรต

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad ;n=0,1,2,\ldots \qquad (2)$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad ;n=1,2,3,\ldots \qquad (3)$$

จะเห็นได้ว่า ถ้าฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันคาบ มีคาบ 2π แล้วฟังก์ชันจะเขียนอยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์ได้ดังนี้

อนุกรมฟูเรียร์ที่มีคาบ 2π

ถ้า $f(x)$ นิยามเป็นฟังก์ชันคาบมีคาบเท่ากับ 2π แล้ว

อนุกรมฟูเรียร์ของ $f(x)$ คือ

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) \qquad (4)$$

เมื่อ a_n และ b_n คือ สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ (Fourier Coefficients)

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad ; n = 0,1,2,... \qquad (5)$$

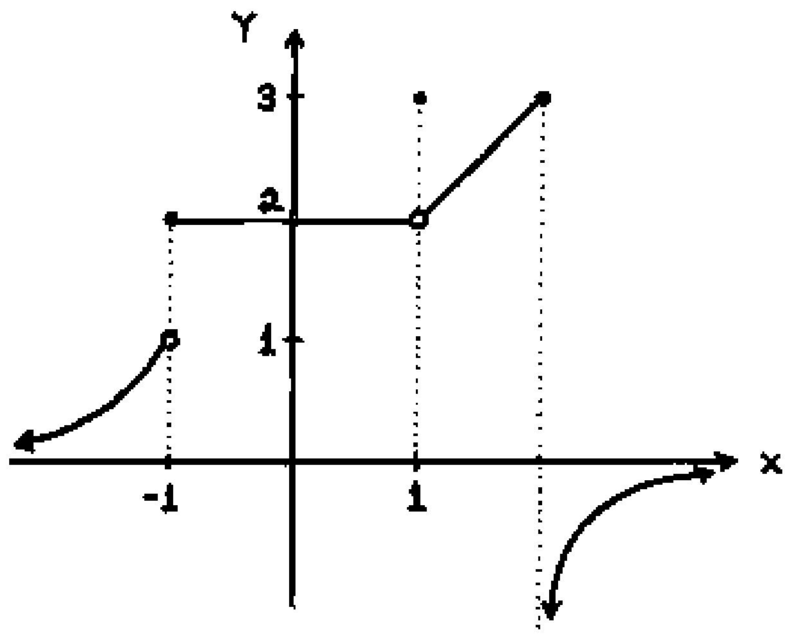
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad ; n = 1,2,3,... \qquad (6)$$

ข้อสังเกตุ

1. คำว่า “Fourier” บางตำราอาจเขียนว่า “ฟูริเยร์” และ อาจเรียกอนุกรมฟูเรียร์ว่า การขยาย หรือกระจายฟูเรียร์ได้เช่นกัน

2. ฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ (Piecewise continuous)

ฟังก์ชัน $f(x)$ เรียกว่าเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ ในช่วง $[a,b]$ เมื่อช่วง $[a,b]$ ถูกแบ่งออกเป็น n ช่วงย่อย(subinterval)ที่จำกัดแล้ว f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในแต่ละช่วงย่อยเปิดและมีค่าลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวาที่จุดปลายของแต่ละช่วงย่อยมีค่าจำกัด(finite)



รูป 5 แสดงลักษณะของฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ

3. ฟังก์ชัน $f(x)$ ไม่ว่าจะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องหรือต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ (Piecewise continuous) สามารถเขียน $f(x)$ อยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์ได้ เมื่อ f เป็นฟังก์ชันคาบซึ่งต่างจากอนุกรมเทย์เลอร์และแมคลอรินที่ว่าฟังก์ชัน f จะต้องเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้ถึงอันดับที่ n ในช่วงที่พิจารณา

4. ในกรณีที่ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในช่วง $\left[-L,L\right]$ และมีอนุกรมฟูริเยร์ อนุกรมฟูริเยร์จะเป็นอนุกรมที่ลู่เข้าหาฟังก์ชัน f ที่สมนัยที่ทุกๆค่า x

5. สัมประสิทธิ์ a_n, b_n อาจหาได้จากรูปแบบที่คล้ายคลึงกันได้ เมื่อ f มีคาบเท่ากับ $2L$ กล่าวคือ

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

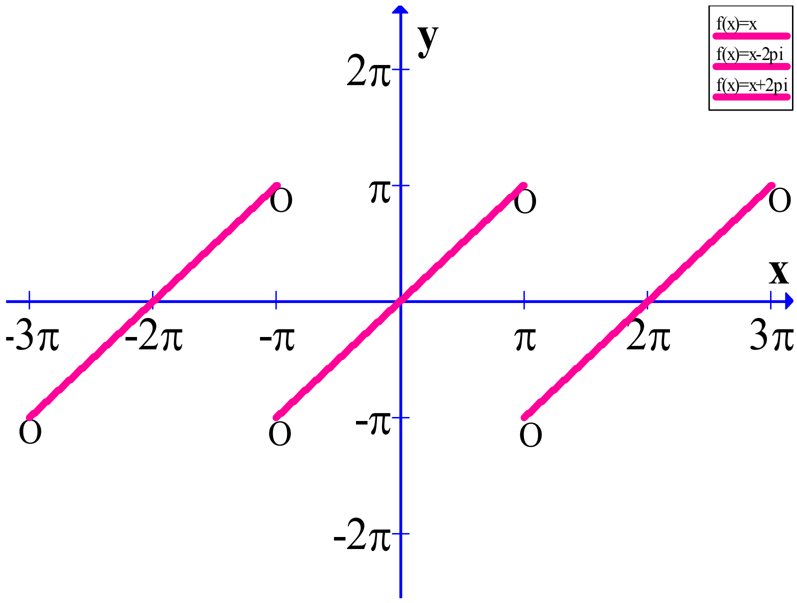
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

โดยที่ c เป็นจำนวนจริงใดๆ

ตัวอย่าง 4 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันคาบ

$$f(x) = x \; ; x \in (-\pi, \pi)$$

วิธีทำ เขียนรูปกราฟ $f(x) = x \; ; -\pi < x < \pi$ เป็นฟังก์ชันคาบมีคาบ 2π



รูป 6 กราฟฟังก์ชันคาบ $f(x) = x \; ; -\pi < x < \pi$

จาก
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \; ; n = 0, 1, 2, \ldots$$

และ

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \; ; n = 1, 2, 3, \ldots$$

จะได้

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx \\ &= \frac{1}{n\pi}\left[x\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx \\ &= \frac{1}{n\pi}\left[-x\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx \\ &= -\frac{2}{n}\cos n\pi = (-1)^{n+1}\frac{2}{n} \;; n = 1,2,3,\ldots \end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้อนุกรมฟูเรียร์ของ $f(x) = x \;; x \in (-\pi,\pi)$ คือ

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \cdots\right)$$

จากรูป 6 จะเห็นว่าที่ $x = 0$ อนุกรมฟูเรียร์ ข้างต้นมีผลรวมเป็น ศูนย์ ซึ่งเราเรียกว่า อนุกรมฟูเรียร์ลู่เข้าสู่ ศูนย์ซึ่งตรงกับ $f(0) = 0$ และ $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \ldots$ ซึ่ง ฟังก์ชัน ไม่ต่อเนื่องและไม่กำหนดค่า ณ จุดนี้ แต่ อนุกรมฟูเรียร์ที่ได้ ลู่เข้าสู่ศูนย์ เช่นกัน

ตัวอย่าง 5 สมมติว่ามีอนุกรมฟูเรียร์ที่ลู่เข้าสู่ f ซึ่งกำหนดโดย

$$f(x)\begin{cases} -x & ; \quad -L \le x < 0 \\ x & ; \quad 0 \le x < L \end{cases} \quad \text{และ} \quad f(x+2L) = f(x)$$

จงหาสัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูเรียร์นี้และหาอนุกรมฟูเรียร์

วิธีทำ

อนุกรมฟูเรียร์ของ $f(x)$ คือ

$$f(x) = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2}\left\{\cos\frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{L} + \dots\right\}$$ ใน

ที่นี้จะเห็นว่าที่ $x = 0$

ได้ $$f(0) = 0 = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2}\left\{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right\}$$

หรือ $$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

ตัวอย่าง 6 สมมติว่ามีอนุกรมฟูเรียร์ที่ลู่เข้าสู่ฟังก์ชันเป็นคาบ f ที่

กำหนดโดย $$f(x)=\begin{cases} 0 & , \quad -\pi \le x \le 0 \\ \sin x & , \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

และ $f(x+2\pi)=f(x)$ ทุกค่า x

จงหาการขยายฟูเรียร์ของฟังก์ชัน f นี้

วิธีทำ

ตัวอย่าง 7 ฟังก์ชัน f กำหนดโดย

$$f(x)=\begin{cases}2 & , \quad -\pi \le x \le 0 \\ x & , \quad 0 < x \le \pi\end{cases} \quad \text{และ} \quad f(x+2\pi)=f(x)$$

เป็นฟังก์ชันเป็นคาบ มีค่าเท่ากับ 2π และเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วงๆ (ในที่นี้ f ไม่ต่อเนื่องที่ $x=0$)

สมมุติว่าฟังก์ชันขยายเป็นอนุกรมฟูเรียร์ได้ โดยใช้สูตรสัมประสิทธิ์อนุกรมฟูเรียร์ จะได้

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 2\,dx + \int_{0}^{\pi} x\,dx\right] \qquad = \frac{1}{\pi}\left\{[2x]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{2\pi + \frac{\pi^2}{2}\right\} \qquad = 2 + \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} 2\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx\right\} \qquad n \neq 0$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{2}{n}\sin nx\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{1}{n}x\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\right]_0^{\pi}\right\}$$

$$= \frac{1}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1)$$

$$= \begin{cases} 0 & , \quad n = \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ \dfrac{-2}{n^2\pi} & , \quad n = \text{ เป็นจำนวนคี่}\end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left\{ \int_{-\pi}^{0} 2\sin nx\, dx + \int_{0}^{\pi} x\sin nx\, dx \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{ \left[-\frac{2}{n}\cos nx \right]_{-\pi}^{0} + \left[-\frac{1}{n}x\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx \right]_{0}^{\pi} \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{ \left[-\frac{2}{n}\left(1-(-1)^n\right) \right] - \frac{\pi}{n}(-1)^n \right\}$$

$$b_n = \begin{cases} -\dfrac{1}{n} & , \quad n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ \dfrac{1}{n\pi}(-4+\pi) & , \quad n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

ดังนั้นอนุกรมฟูริเยร์ของ f คือ

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$$

$$= 1 + \frac{\pi}{4} + \left[-\frac{2}{\pi}\cos x - \frac{2}{3^2\pi}\cos 3x - \frac{2}{5^2\pi}\cos 5x - \dots \right]$$

$$+ \left[\frac{1}{\pi}(-4+\pi)\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3\pi}(-4+\pi)\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \dots \right]$$

ที่ $x = 0$ ค่าของฟังก์ชัน f ที่กำหนดให้จากโจทย์เท่ากับ 2 แต่ค่าของอนุกรมฟูริเยร์ที่ขยายออกมาได้คือ

$$f(0) = 1 + \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right]$$

ซึ่งมีค่าเท่ากับหนึ่ง (เพราะว่าอนุกรม $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$ มีค่าเท่ากับ $\frac{\pi^2}{8}$ เป็นผลจากตัวอย่าง 5)

จะเห็นว่า อนุกรมฟูเรียร์ไม่ได้ลู่เข้าหาค่าของฟังก์ชัน f ที่ $x = 0$ ซึ่งเป็นจุดที่ฟังก์ชัน f ไม่ต่อเนื่อง นั่นคืออนุกรมฟูเรียร์ที่ได้ยังไม่สามารถแทนฟังก์ชัน f ได้ที่จุดซึ่งฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง

พิจารณาตัวอย่างที่น่าสนใจอีกหนึ่งตัวอย่างก่อนที่จะกล่าวถึงหลักการที่ทำให้อนุกรมฟูริเยร์ใช้แทนฟังก์ชันคาบใดๆที่จุดทุกๆจุด

ตัวอย่าง8 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน

$$f(x)=\begin{cases}-1 & , \quad -1<x<0 \\ 1 & , \quad 0<x<1\end{cases} \quad \text{และ} \quad f(x+2)=f(x)$$

(ฟังก์ชันที่มีลักษณะนี้ในทางฟิสิกส์ ได้แก่แรงเคลื่อนไฟฟ้าในวงจรไฟฟ้า)

วิธีทำ ฟังก์ชันนี้มีคาบเท่ากับ2 ไม่ต่อเนื่องที่ $x=0$ และเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วงๆ ในช่วง $(-1,1)$ ในที่นี้ $L=1$

$$a_n=\int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x\, dx \qquad , \qquad n\neq 0$$

$$=\left[-\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right]_{0}^{1}=0$$

$$a_0=\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0}(-1)dx+\int_{0}^{1}1dx=\left[-x\right]_{-1}^{0}+\left[x\right]_{0}^{-1}=0$$

$$b_n=\int_{0}^{1} f(x)\sin n\pi x\, dx=\frac{2}{n\pi}\left(1-\cos n\pi\right)$$

เพราะฉะนั้น $b_n=\begin{cases}0 & , \quad n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ \dfrac{4}{n\pi} & , \quad n \text{ เป็นจำนวนคี่}\end{cases}$

ดังนั้นอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันที่กำหนดคือ

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$$
$$= \frac{4}{\pi}\left[\sin \pi x + \frac{1}{3}\sin 3\pi x + \frac{1}{5}\sin 5\pi x + \ldots\right]$$

เมื่อพิจารณาค่าของ $f(x)$ ที่โจทย์กำหนดกับค่าของอนุกรมที่ได้ จะเท่ากัน เมื่ออนุกรมลู่เข้า สำหรับแต่ละค่า x

จะเห็นว่าที่ $x = \frac{1}{2}$ ได้

$$f(\frac{1}{2}) = 1 = \frac{4}{\pi}\left[\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi}{2} + \ldots\right]$$

ดังนั้น $\quad 1 = \frac{4}{\pi}\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots\right]$

ทำให้ได้ $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

ซึ่งใช้เป็นวิธีหนึ่งในการคำนวณค่าอนุกรมอนันต์บางอนุกรม

แต่จะเห็นว่า ที่ $x = 0\,, -1\,, 1$ ฟังก์ชันไม่ได้กำหนดค่าไว้ใน ขณะที่อนุกรมฟูเรียร์ที่ขยายได้มีค่าเป็นศูนย์

ดังนั้นอนุกรมฟูเรียร์ที่ได้ยังไม่สามารถใช้แทนฟังก์ชันที่กำหนด ที่จุด ซึ่งฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง

จากตัวอย่าง ที่ 7 และ8 ทำให้เกิดปัญหาว่า ถ้าต้องการให้อนุกรมฟูเรียร์ลู่เข้าหาฟังก์ชัน f สำหรับทุกค่า x ที่รวมจุดที่ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องด้วย ค่าอนุกรมฟูเรียร์ ณ จุดนั้นจะมีค่าเท่าไร

ในการแก้ปัญหานี้จะอาศัยทฤษฎีบท ของดีริเคลต (Theorem of Dirichlet)** ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4 Dirichlet's Theorem (การลู่เข้าของอนุกรมฟูเรียร์)

ถ้าฟังก์ชันคาบ $f(x)$ มีคาบ $2L$ ต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ (piecewise continuous) บนช่วง $(-L, L)$แล้ว

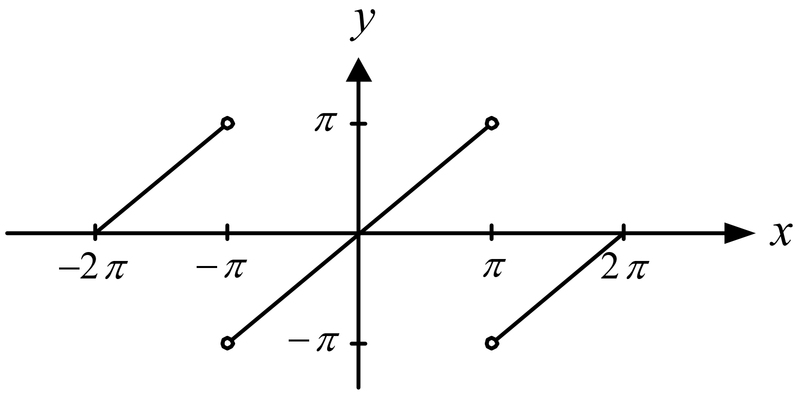
อนุกรมฟูเรียร์จะลู่เข้าหาค่า $f(x)$ ณ.จุดที่ฟังก์ชันต่อเนื่อง

สำหรับจุด x_0 ที่ $f(x)$ ไม่ต่อเนื่อง อนุกรมฟูเรียร์จะลู่เข้าสู่ค่าเฉลี่ยของลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวาของ $f(x)$ ที่จุด x_0

หรือ $\dfrac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$

** Dirichlet เป็นนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน (1805-1859)

ตัวอย่าง 9 กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = x \quad ; \quad -\pi < x < \pi$



ซึ่งมีอนุกรมฟูเรียร์อยู่ในรูป $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \sin nx$

จะได้อนุกรมฟูริเยร์ของ f ซึ่งมีอนุกรมฟูเรียร์อยู่ในรูป

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \sin nx$$

- พิจารณาที่จุด $x = -\pi$ ฟังก์ชัน $f(x)$ ไม่ต่อเนื่อง

  ดังนั้นอนุกรมนี้จะลู่เข้าสู่ค่าเฉลี่ย

$$\frac{f(-\pi^{+}) + f(-\pi^{-})}{2} = \frac{-\pi + \pi}{2} = 0$$

- พิจารณาที่จุด $x = \frac{\pi}{2}$ ฟังก์ชัน $f(x)$ ต่อเนื่อง

  ดังนั้นอนุกรมนี้จะลู่เข้าสู่ค่า $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$

นั่นคือ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin\frac{n\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$2-\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-\frac{2}{7}+\ldots = \frac{\pi}{2}$$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots = \frac{\pi}{4}$$

ดังนั้น $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$

5.3 ฟังก์ชันคู่ฟังก์ชันคี่ (Even and Odd function)

ในการหาสัมประสิทธิ์ a_o, a_n, b_n ของอนุกรมฟูริเยร์ บางครั้งอาจหลีกเลี่ยงความยุ่งยากได้บ้าง ถ้าฟังก์ชันที่กำหนดในช่วงหนึ่งคาบเป็นฟังก์ชันคู่ หรือฟังก์ชันชันคี่

นิยาม 2 f เป็นฟังก์ชันคู่ (Even function) ก็ต่อเมื่อ

$f(-x) = f(x)$ สำหรับทุกค่า x ในโดเมนของ f

นิยาม 3 f เป็นฟังก์ชันคี่(odd Function) ก็ต่อเมื่อ

$f(-x) = -f(x)$ สำหรับทุกค่า x ในโดเมน f

หมายเหตุ กราฟของฟังก์ชันคู่มีสมมาตรเทียบกับแกน y และกราฟของฟังก์ชันคี่ มีสมมาตรเทียบกับจุดกำเนิด

ตัวอย่าง 10

ฟังก์ชัน $f_1(x) = x^2$ และ $f_2(x) = \cos x$ เป็นฟังก์ชันคู่

ฟังก์ชัน $g_1(x) = x^3$ และ $g_2(x) = \sin x$ เป็นฟังก์ชันคี่

ฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ที่สำคัญ และเกี่ยวข้องกับอนุกรมฟูเรียร์ได้แก่

$\cos\dfrac{n\pi x}{L}$ และ $\sin\dfrac{n\pi x}{L}$

คุณสมบัติที่น่าสนใจของฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่มีดังต่อไปนี้

1. <u>การบวก การลบ</u>

ฟังก์ชันประเภทเดียวกัน บวก (หรือลบ) กันจะได้ฟังก์ชันประเภทเดิม

นั่นคือ ฟังก์ชันคู่ $\pm$ ฟังก์ชันคู่ = ฟังก์ชันคู่

ฟังก์ชันคี่ $\pm$ ฟังก์ชันคี่ = ฟังก์ชันคี่

2. <u>การคูณ การหาร</u>

ก. ฟังก์ชันประเภทเดียวกัน คูณ (หรือหาร) กัน จะได้ฟังก์ชันคู่

นั่นคือ ฟังก์ชันคู่ $\genfrac{}{}{0pt}{}{\times}{\div}$ ฟังก์ชันคู่ = ฟังก์ชันคู่

ฟังก์ชันคี่ $\genfrac{}{}{0pt}{}{\times}{\div}$ ฟังก์ชันคี่ = ฟังก์ชันคู่

ข. ฟังก์ชันต่างประเภทกัน คูณ (หรือหาร) กัน จะได้ฟังก์ชันคี่

นั่นคือ ฟังก์ชันคู่ $\genfrac{}{}{0pt}{}{\times}{\div}$ ฟังก์ชันคี่ = ฟังก์ชันคี่

3. <u>การอินทิเกรต</u>

สำหรับจำนวน L ใดๆ ซึ่ง $f(x)$ มีค่าจริงในช่วง $[-L\,,L]$

ก. ถ้า f เป็นฟังก์ชันคู่จะได้ $\int_{-L}^{L} f\left(x\right)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx$

ข. ถ้า f เป็นฟังก์ชันคี่จะได้ $\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0$

จากคุณสมบัติดังกล่าว มีผลต่อการคำนวณหาสัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูเรียร์ ดังนี้

5.4 อนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันคู่หรือฟังก์ชันคี่

ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคู่ ที่กำหนดบนช่วง $-L \le x \le L$ (มีคาบเท่ากับ $2L$)

จากสัมประสิทธิ์อนุกรมฟูเรียร์ $a_n = \dfrac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{L}\,dx$

เนื่องจาก $f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{L}$ เป็นฟังก์ชันคู่ จะได้

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad , \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

และ $\qquad b_n = \dfrac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{L}\,dx$

แต่ $f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{L}$ เป็นฟังก์ชันคี่ จะได้ $b_n = 0$

เพราะฉะนั้นอนุกรมฟูริเรียร์ของฟังก์ชันคู่ f บนช่วง $-L \le x \le L$ มีรูปแบบเป็น

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad , \qquad x \in [-L, L]$$

เรียกว่า อนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ (Fourier Cosine Series)

โดยที่มีสัมประสิทธิ์กำหนดโดย

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad n = 0,1,2,\ldots$$

ในทำนองเดียวกัน อนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันคี่ f ที่กำหนดบนช่วง $-L \le x \le L$ (มีค่าเท่ากับ $2L$) จะมีสัมประสิทธิ์

$$a_n = 0 \qquad , \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \quad , \qquad n = 1,2,\ldots$$

และได้อนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันคี่ บนช่วง $-L \le x \le L$ มีรูปแบบเป็น $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}dx$

เรียกว่า อนุกรมฟูเรียร์ไซน์ (Fourier sine series) มีสัมประสิทธิ์กำหนดโดย $b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \qquad n = 1,2,\ldots$

ตัวอย่าง 11 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อ

$$f(x) = |x| \quad ; \quad -\pi < x < \pi$$

วิธีทำ พิจารณา $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$

ดังนั้น $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคู่ ซึ่งจะได้ว่าอนุกรมฟูเรียร์ของ $f(x)$ จะอยู่ในรูปของอนุกรมฟูเรียร์โคซายน์ นั่นคือ

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

โดยที่

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |x| \cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right)$$

ดังนั้น

$$|x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 \pi}\left[((-1)^n - 1)\cos nx\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right)$$

ตัวอย่าง 12 กำหนด $f(x) = x \quad , \quad -2 < x < 2$

$f(-2) = f(2) = 0$ และ $f(x+4) = f(x)$

จงวาดรูปและหาอนุกรมฟูริเยร์ของ f

อนุกรมฟูริเยร์ของ f เป็นอนุกรมฟูริเยร์ไซน์คือ

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{2} \qquad , \qquad -2<x<2$$

และอนุกรมลู่เข้าหา 0 ที่จุด $x=0,\pm 2,\pm 4,...$

ตัวอย่าง 13 จงวาดกราฟ และหาอนุกรมฟูริเยร์ของฟังก์ชัน

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & , \quad -1<x<0 \\ x-1 & , \quad 0<x<1 \end{cases}$$

และ $f(x+2)=f(x)$

อนุกรมฟูริเยร์ของฟังก์ชัน f คือ

$$f(x) \sim -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x}{n}; \qquad -1 < x < 0 \text{ หรือ } 0 < x < 1$$

และอนุกรมลู่เข้าหา $\dfrac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = 0$ ที่ $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

5.6 การขยายพิสัยครึ่งช่วง (Half – range expansions)

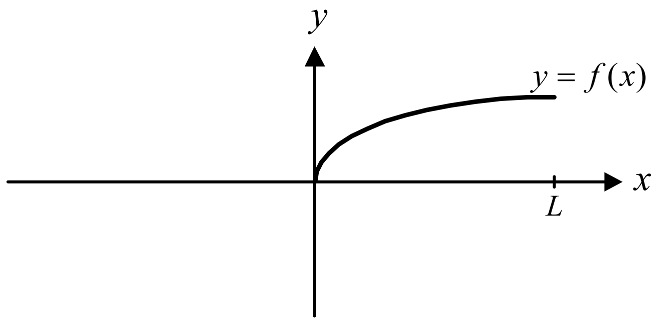
จากการหาสัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูริเยร์ของฟังก์ชันคู่ และของฟังก์ชันคี่ จะสังเกตได้ว่าสามารถใช้ช่วงการกระจายของเพียงครึ่งคาบได้ และอนุกรมที่ได้จะมีแต่พจน์ของโคไซน์เพียงอย่างเดียวหรือพจน์ของไซน์เพียงอย่างเดียว

ถ้าสมมุติว่าเงื่อนไขของปัญหาต้องการให้พิจารณาค่าฟังก์ชัน f ในช่วง [0, L]ในกรณีนี้สามารถขยาย f ไปยังฟังก์ชันใหม่ F ซึ่งในช่วง [0,L] จะกำหนดให้ F เท่ากับ f และในช่วง (-L,0) จะกำหนดให้ F สอดคล้องเงื่อนไขดิลิคเลตสำหรับทุกๆค่าของ x และกำหนดเงื่อนไขภาวะเป็นคาบ F โดยให้ $F(x + 2L) = F(x)$

หรือเขียนได้เป็น $F(x) = \begin{cases} \varphi(x) & , \quad -L < x < 0 \\ f(x) & , \quad 0 \le x \le L \end{cases}$

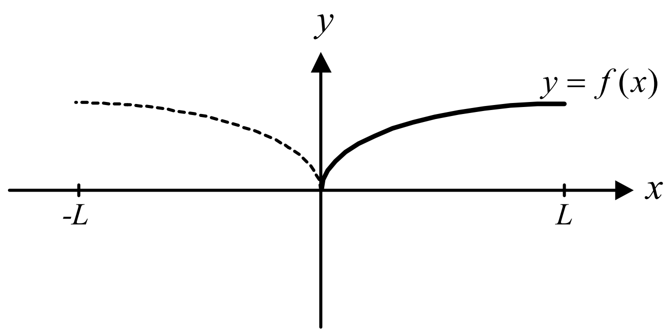
เมื่อ φเป็นฟังก์ชันใดๆ

นั่นคือ ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง $0 < x < L$



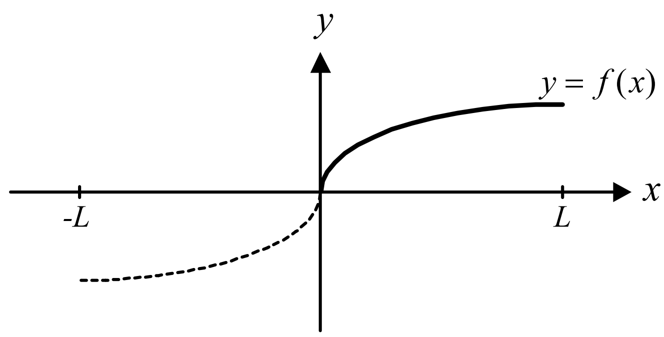
แล้วการแทนฟังก์ชัน $f(x)$ ด้วยอนุกรมฟูเรียร์ สามารถทำได้ดังนี้

(1) ขยายฟังก์ชัน f จาก 0 ถึง –L โดยการสะท้อนกับแกนแนวดิ่ง หรือ พิจารณาทำให้ฟังก์ชัน $f(x)$ เป็น**ฟังก์ชันคู่** บนช่วง $-L < x < L$ ที่มีคาบ $2L$ ซึ่งจะได้อนุกรมฟูเรียร์ในรูป**อนุกรมฟูเรียร์โคซายน์**



(2) ขยายฟังก์ชันนี้จาก 0 ถึง –L โดยการสะท้อนเทียบกับจุดกำเนิด

หรือ พิจารณาทำให้ฟังก์ชัน $f(x)$ เป็น**ฟังก์ชันคี่**บนช่วง $-L < x < L$ ที่มีคาบ $2L$ ซึ่งจะได้อนุกรมฟูเรียร์ในรูป**อนุกรมฟูเรียร์ซายน์**



ตัวอย่าง 14 กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} 1-x \ ; \ 0 < x < 1 \\ \ \ 0 \quad ; 1 < x < 2 \end{cases}$$

จงหา (ก) อนุกรมฟูเรียร์โคไซน์

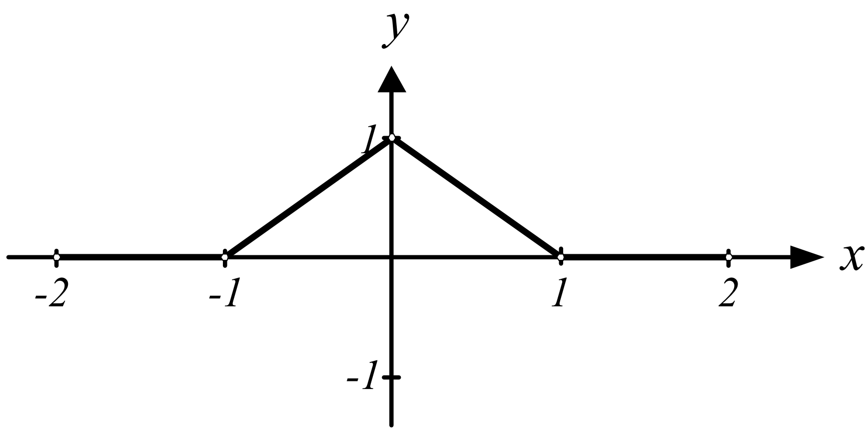
(ข) อนุกรมฟูเรียร์ไซน์

พร้อมทั้งวาดกราฟของฟังก์ชัน

วิธีทำ ในที่นี้ $L = 2$

(ก) ให้ $$F(x) = f(x) = \begin{cases} 1-x \ ; \ 0 < x < 1 \\ \ \ 0 \quad ; 1 < x < 2 \end{cases}$$

และ $$F(x) = f(-x) = \begin{cases} 1+x \ ; \ -1 < x < 0 \\ \ \ 0 \quad ; -2 < x < -1 \end{cases}$$



จะได้อนุกรมฟูฟูเรียร์โคซายน์คือ

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{2}$$

เมื่อ $a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\ dx\ = \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 0\,dx = \frac{1}{2}$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\ dx$$

$$= \int_0^1 (1-x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx$$

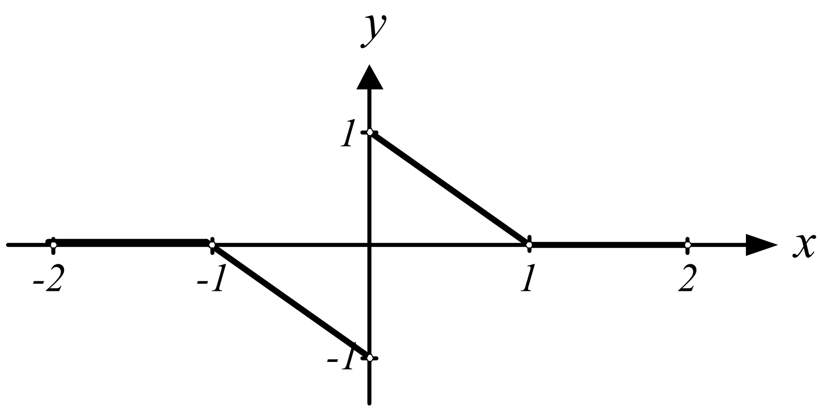
$$= \frac{4}{n^2\pi^2}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)$$

ดังนั้นอนุกรมฟูเรียร์โคซายน์ของฟังก์ชันคือ

$$f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)\cos\frac{n\pi x}{2}$$

(ข) ให้ $F(x) = f(x) = \begin{cases} 1-x\ ;\ 0<x<1 \\ \ \ 0\ \ \ ;\ 1<x<2 \end{cases}$

และ $F(x) = -f(-x) = \begin{cases} -1-x\ ;\ \ -1<x<0 \\ \ \ \ 0\ \ \ \ \ ;\ -2<x<-1 \end{cases}$



จะได้อนุกรมฟูเรียร์ซายน์คือ $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{2}$

เมื่อ $b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$

$$= \int_0^1 (1-x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \frac{2}{n\pi} - \frac{4}{n^2\pi^2}\left(\sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

ดังนั้นอนุกรมฟูเรียร์ซายน์ของฟังก์ชันคือ

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n\pi}-\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\sin\frac{n\pi x}{2}$$

ตัวอย่าง 15 จงหาการขยายพิสัยครึ่งช่วงของฟังก์ชัน

$$f(x) = x^2 \ , \ \ 0 \le x < 1$$

วิธีทำ

(ก)หาการขยายพิสัยครึ่งช่วงโดยสะท้อนเทียบกับแนวแกนดิ่ง

ได้อนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ คือ

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n\pi x}{n^2}$$

(ข) หาการขยายพิสัยครึ่งช่วงโดยการสะท้อนเทียบกับจุดกำเนิด

ได้อนุกรมฟูเรียร์ไซน์ คือ

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$$

$$= \left(\frac{2}{\pi} - \frac{8}{\pi^3}\right)\sin \pi x - \frac{2}{2\pi}\sin 2\pi x + \left(\frac{2}{3\pi} - \frac{8}{3^3\pi^3}\right)\sin 3\pi x - \frac{2}{4\pi}\sin 4\pi x + \ldots$$

หมายเหตุ อนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ที่ได้จากการขยายพิสัยครึ่งช่วงของฟังก์ชัน $f(x)=x^2, 0 \le x < 1$ อนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน $f(x)=x^2, -1 < x < 1$ ด้วย เพราะว่าฟังก์ชัน $f(x)=x^2$ เป็นฟังก์ชันคู่บน $(-1, 1)$ แต่จะไม่เท่ากับอนุกรมฟูเรียร์ของ $f(x)=x^2$ บน $[0, 1)$ ซึ่งมีคาบเท่ากับ 1

ในทำนองเดียวกัน อนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันที่กำหนดเป็นฟังก์ชันคี่บน (-L, L) จะเท่ากับ อนุกรมฟูเรียร์ไซน์ของฟังก์ชันที่ได้จากการขยายพิสัยครึ่งช่วงของฟังก์ชันที่กำหนดบน [0, L)

ตัวอย่างที่ 16 จงใช้การขยายพิสัยครึ่งช่วงหาอนุกรมฟูเรียร์ไซน์และอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ของฟังก์ชัน

$f(x) = x+1$ เมื่อ $0 < x < \pi$

วิธีทำ

(ก) หาอนุกรมฟูเรียร์ไซน์

$$f(x) = x+1 \cong \frac{2}{\pi}\left[(2+\pi)\sin x - \frac{\pi}{2}\sin 2x + \frac{(2+\pi)}{3}\sin 3x - \frac{\pi}{4}\sin 4x + \ldots\right]$$

ตรวจคำตอบที่ $x = \dfrac{\pi}{2}$ ได้

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}\left[(2+\pi) - \left(\frac{2+\pi}{3}\right) + \left(\frac{2+\pi}{5}\right) - \ldots\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}(2+\pi)\left\{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right\}$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}$$

เพราะฉะนั้น $\quad f(\frac{\pi}{2}) = \dfrac{2}{\pi}(2+\pi)\dfrac{\pi}{4} = 1 + \dfrac{\pi}{2}$

ข) หาอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์

$$f(x) = x+1 = \frac{\pi+2}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right)$$

พิจารณาที่ x=0 จะได้ $f(0^+) = f(0^-) = 1$

และผลที่ตามมาได้

$$1 = \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{4}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right)$$

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots \quad = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(2n+1\right)^2}$$

<u>หมายเหตุ</u>

พิจารณาฟังก์ชัน $g(x) = x + 1 \quad , \quad -\pi < x < \pi$ จะเห็นว่า g ไม่ใช่ทั้งฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ เพราะฉะนั้นอนุกรมฟูเรียร์ของ g จะไม่เท่ากับอนุกรมฟูเรียร์ไซน์หรืออนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ของ

$f(x) = x + 1 \quad , \quad 0 < x < \pi$

แบบฝึกหัด 5

1. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันคู่หรือฟังก์ชันคี่หรือไม่เป็นทั้งสองอย่าง

1.1 2 –5x 1.2 $x^3 - 2x + 1$

1.3 $\dfrac{x}{x^2 + x + 3}$ 1.4 $x\,e^{-x}$

1.5 $\dfrac{x^2}{x^4 + 2}$ 1.6 $x^2 \cos x^3 - 8$

1.7 $\left(2x - x^3\right)^3$ 1.8 $\ln \left| \sin x \right|$

1.9 $e^{-x \sin x}$ 1.10 $\cos\left(\sin x\right)$

2. จงใช้คุณสมบัติฟังก์ชันคู่ และฟังก์ชันคี่หาค่าอินทิกรัล

2.1 $\int_{-1}^{1} x^4 dx$ 2.2 $\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin nx \, dx$

3. ถ้า $f(x) = e^x$, $0 < x < \pi$ จงแสดงว่า อนุกรมฟูเรียร์ไซน์และอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์คือ

$$\frac{e^{\pi} - 1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\{1 - (-1)^n e^{\pi}\right\}}{n^2 + 1} \cos nx$$

และ $\dfrac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\left\{1 - (-1)^n e^{\pi}\right\}}{n^2 + 1} n \sin nx$ ตามลำดับ

4. จงแสดงว่าอนุกรมฟูเรียร์ของ f(x) = $\begin{cases} x & , \quad 0 \le x < \dfrac{L}{2} \\ L - x & , \quad \dfrac{L}{2} \le x \le L \end{cases}$

คือ $\dfrac{4L}{\pi^2}\left[\sin\dfrac{\pi x}{L} - \dfrac{1}{3^2}\sin\dfrac{3\pi x}{L} + \dfrac{1}{5^2}\sin\dfrac{5\pi x}{L} - \ldots\right]$

5. จงแสดงว่าอนุกรมฟูเรียร์ของโคไซน์ของฟังก์ชัน

$f(x) = \sin x\,, \quad 0 \le x \le \pi$ คือ

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{1.3}\cos 2x - \frac{1}{3.5}\cos 4x - \frac{1}{5.7}\cos 6x - \ldots\right\}$$

และจงแสดงว่า

$$\frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} - \ldots \quad = \quad \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

6. จงแสดงว่าอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ของฟังก์ชัน

$f(x) = \cos x\,, 0 \le x \le \pi$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left\{\frac{2}{2^2-1}\sin 2x + \frac{4}{4^2-1}\sin 4x + \frac{6}{6^2-1}\sin 6x - \ldots\right\}$$

และจงแสดงว่าอนุกรมนี้จะคอนเวอร์จเข้าสู่ 0 ที่ $x = 0$

พร้อมทั้งแสดงว่า $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{16} = \dfrac{1}{1.3} - \dfrac{3}{3.5} + \dfrac{5}{9.11} - \ldots$

7. จงแสดงว่าอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ของ

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi x}{L} & , \quad 0\le x<\dfrac{L}{2}\\[2ex] 0 & , \quad \dfrac{L}{2}<x\le L\end{cases}$$

คือ

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{L}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{4n^2-1}\sin\frac{2\pi nx}{L}\,,\ (0\le x\le L)$$

และที่ $x=\dfrac{L}{2}$ อนุกรมจะเท่ากับ $\dfrac{1}{2}$

8. กำหนด $f(x)=\begin{cases}0 & , \quad 0<x<\pi\\ 1 & , \quad \pi<x<2\pi\\ 2 & , \quad 2\pi<x<3\pi\end{cases}$

จงวาดกราฟและหาอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ซึ่งมีคาบเท่ากับ 6π

จงหาการขยายพิสัยครึ่งช่วงไซน์และโคไซน์ของฟังก์ชันในข้อ $9-11$

9. $f(x)=\sin x\,,\ 0\le x\le 2\pi$

10. $f(x) = \sin ax$, $0 \le x < \pi$, a ไม่เป็นจำนวนเต็ม

และจงแสดงว่า

$$\operatorname{cos}ec\ a\pi = \frac{1}{a\pi} - \frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2 - a^2} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+a}$$

โดยกำหนด $\cot a\pi = \dfrac{1}{a\pi} - \dfrac{2a}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 - a^2} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n+a}$

11. $f(x) = x(\pi - x)$, $\quad 0 \le x \le \pi$

12. จงใช้ผลของตัวอย่าง แสดงว่า

$$1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots = \frac{\pi^3}{32}$$

และจงแสดงว่า

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{74} + \ldots = \frac{\pi^4}{96}$$

13. จงหาการขยายพิสัยครึ่งช่วงไซน์ พิสัยหนึ่งในสี่ช่วงโคไซน์ของ

$f(x) = 100$ บน $[0, L]$

14. จงแสดงว่าอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ของ $f(x) = \dfrac{\pi}{4}$ คือ

$$\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots, 0 < x < \pi$$

คำตอบแบบฝึกหัด 5

1. 1.1 ไม่เป็นทั้งสองอย่าง 1.2 ไม่เป็นทั้งสองทั้งอย่าง

 1.3 ไม่เป็นทั้งสองอย่าง 1.4 ไม่เป็นทั้งสองอย่าง

 1.5 ฟังก์ชันคู่ 1.6 ฟังก์ชันคู่

 1.7 ฟังก์ชันคี่ 1.8 ฟังก์ชันคู่

 1.9 ฟังก์ชันคู่ 1.10 ฟังก์ชันคู่

2. 2.1 $\frac{2}{5}$ 2.2 0

8. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{3} + \cos\frac{2n\pi}{3} - 2\cos n\pi\right)\sin\frac{nx}{3}$

9. $\sin x$, $\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{3-4n(n+1)}$

10. $a_n = 0$, $b_n = \frac{(-1)^{n+1} 2n \sin a\pi}{\pi(n^2 - a^2)}$,

$a_n = \frac{2a(-1(-1)^n \cos a\pi)}{\pi(a^2 - n^2)}$, $b_n = 0$

11. $\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}$, $\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n^2}$

13. การขยายครึ่งช่วงไซน์ $f(x) = \frac{400}{\pi} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{L}$

 การขยายพิสัยหนึ่งในสี่ช่วงโคไซน์ $f(x) = \frac{400}{\pi}$

$\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n}\cos\frac{n\pi x}{2L}$