บทที่ 3 อนุกรมอนันต์
(Infinite Series)

3.1 ความหมายของอนุกรมอนันต์

นิยาม 3.1 *อนุกรมอนันต์* คือ นิพจน์ (expression) ที่อยู่ในรูป

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k + \ldots$$

หรือ ใช้สัญลักษณ์ได้เป็น $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

เรียกจำนวน $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ว่า พจน์ของอนุกรม และต่อไปจะใช้คำว่า **อนุกรม** แทนคำว่า **อนุกรมอนันต์**

ตัวอย่างอนุกรมอนันต์

1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{(2)(3)} + \frac{1}{(3)(4)} + \ldots$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} e^n = e + e^2 + e^3 + \ldots$

เนื่องจากเราไม่สามารถบวกจำนวนที่นับไม่ถ้วนเข้าด้วยกันได้ ดังนั้น จึงต้องนิยามผลบวกของอนุกรม ก่อนที่จะคำนวณค่าโดยใช้ลิมิต

การหาผลบวกของอนุกรม $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ เรากำหนดให้ S_n แทนผลบวกของ n พจน์แรกของอนุกรมใด ๆ

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

เรียก S_n ว่า **ผลบวกย่อยที่ n** ของอนุกรม และ เรียกลำดับ $\{S_n\}$ ว่า **ลำดับของผลบวกย่อย** ขณะที่ n มีค่าเพิ่มขึ้น ผลบวกย่อย $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ จะรวมพจน์ของอนุกรมมากขึ้นเรื่อยๆ ดังนั้น ถ้า S_n มีค่าเข้าใกล้ลิมิตค่าหนึ่ง ขณะที่ $n \to \infty$ ค่าลิมิตนั้นจะเป็นผลบวกของทุกพจน์ในอนุกรมนั้น เขียนเป็นนิยามได้ดังนี้

นิยาม 3.2 ให้ $\{S_n\}$ เป็นลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ถ้าลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้าสู่ลิมิต S แล้วจะเรียกอนุกรมนี้ว่า **อนุกรมลู่เข้า** และเรียก S ว่า **ผลบวกของอนุกรม** เขียนแทนด้วย $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

ถ้าลำดับของผลบวกย่อยลู่ออกแล้ว จะเรียกอนุกรมนี้ว่า **อนุกรมลู่ออก** และหาผลบวกไม่ได้

ตัวอย่าง 1 จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า พร้อมทั้งหาผลบวกของอนุกรม

วิธีทำ เนื่องจาก $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}$ จะได้

$$S_1 = a_1 \quad = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = a_1 + a_2 \quad = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(3)} \quad = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(3)} + \frac{1}{3(4)}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$

ดังนั้น $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

และ $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n+1}) = 1$

ดังนั้น $\{S_n\}$ หรือ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ เป็นอนุกรมที่ลู่เข้า และมีผลบวกเป็น 1

ต่อไปจะขอเขียนแทนอนุกรมอนันต์ด้วย $\sum a_n$ ซึ่งจะมีทฤษฎีบทที่สำคัญดังนี้

ทฤษฎีบท 3.1 ถ้า $\sum a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแล้วจะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

ทฤษฎีบท 3.2 ถ้า $\lim a_n \neq 0$ แล้ว จะได้ว่า $\sum a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ทฤษฎีบท 3.3 ถ้า $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรมสองอนุกรมซึ่งมีความแตกต่างกัน เฉพาะ m พจน์แรก แล้ว จะได้ว่า $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าทั้งคู่ หรือ อนุกรมลู่ออกทั้งคู่

อนุกรมอนันต์ 2 ชนิดที่สำคัญ

1) อนุกรมเรขาคณิต (Geometric Series)

คืออนุกรมที่อยู่ในรูป

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

เมื่อ a และ r เป็นจำนวนจริงที่คงที่ และ $a \neq 0$ เรียก r ว่า **อัตราส่วนร่วม** (Common Ratio)

ตัวอย่าง 2 อนุกรมเรขาคณิต

1) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots,\ a=1,\ r=\frac{1}{2}$

2) $\frac{5}{9}-\frac{5}{9^2}+\frac{5}{9^3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{5}{9^n}+\ldots\ ,\ a=\frac{5}{9},\ r=-\frac{1}{9}$

3) $1+2+4+\ldots+2^{n-1}+\ldots,\ a=1,\ r=2$

ทฤษฎีบท 3.4 กำหนดให้ $a+ar+ar^2+ar^3+\ldots+ar^{n-1}+\ldots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต

1. ถ้า $|r|<1$ จะได้ว่าอนุกรมเรขาคณิตลู่เข้า และ มีผลบวกเป็น $\frac{a}{1-r}$

นั่นคือ $a+ar+ar^2+ar^3+\ldots+ar^{n-1}+\ldots=\frac{a}{1-r}$

2. ถ้า $|r|\geq 1$ จะได้ว่าอนุกรมเรขาคณิตลู่ออก (หาผลรวมไม่ได้)

2) อนุกรมพี (*p*’s Series)

นิยาม 2.3 อนุกรม *p* จะมีรูปแบบทั่วไปเป็น

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$ เมื่อ *p* เป็นจำนวนจริง

ตัวอย่าง 3 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots\ ,\ p=1$

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots\ ,\ p=\frac{1}{2}$$

ทฤษฎีบท 3.5 กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ เป็นอนุกรม p

1. ถ้า $p>1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ จะเป็น อนุกรมลู่เข้า
2. ถ้า $p\le 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ จะเป็น อนุกรมลู่ออก

แบบฝึกหัด 3.1

จงแสดงว่าอนุกรมที่กำหนดต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออก กรณีเป็นอนุกรมลู่เข้า ให้หาผลบวกของอนุกรมด้วย

1 $\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n-1}\frac{7}{6^{n-1}}\right)$

2 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{(4n-3)(4n+1)}\right)$

3 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{9n^2+3n-2}\right)$

4 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{5^n}\right)$

5 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$

6 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n^4+1}}{3n^2+1}\right)$

7 $\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2-1}+\left(-\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right]$

8 $\sum_{n=0}^{\infty}\left[\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right]$

9 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\left(\frac{n}{2n+1}\right)\right]$

10 $\sum_{n=1}^{\infty}(\cos n\pi)$

11 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{3^n}$

12 $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

13 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$

14 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

15 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^n}$

คำตอบแบบฝึกหัด 3.1

1. ลู่เข้า 6 2. ลู่เข้า 1 3. ลู่เข้า $\frac{1}{6}$ 4. ลู่เข้า $\frac{17}{6}$
5. ลู่เข้า $\frac{23}{2}$ 6. ลู่ออก 7. ลู่ออก 8. ลู่ออก
9. ลู่ออก 10. ลู่ออก 11. ลู่เข้า $\frac{3}{2}$ 12. ลู่เข้า $\ln\frac{1}{2}$
13. ลู่เข้า 1 14. ลู่ออก 15. ลู่เข้า 1

3.2 การทดสอบการลู่เข้า และการลู่ออกของอนุกรมบวก (Tests for Convergence of Positive Series)

ในกรณีที่เราต้องการทราบว่าอนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก แต่ไม่สามารถหาผลบวกย่อยที่ n ได้ และไม่สามารถนำทฤษฎีบทเบื้องต้นที่กล่าวมาใช้ได้ จึงจำเป็นต้องศึกษาทฤษฎีบทที่ใช้ในการทดสอบการลู่เข้าและการลู่ออกของอนุกรม ซึ่งมีอยู่หลายทฤษฎีดังต่อไปนี้ แต่เหล่านี้ไม่สามารถสรุปได้ว่าอนุกรมลู่เข้าค่าใด

นิยาม 3.4 อนุกรมบวก (Positive Series)
อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมบวกเมื่อ $a_n \geq 0$ ทุก ๆ จำนวนนับ $n \geq 1$

พิจารณาอนุกรมบวก $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ จะเห็นว่าผลบวกย่อยของ S_n มีสมบัติ $S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq \ldots \leq S_n \leq \ldots$ ดังนั้น $\{S_n\}$ เป็นลำดับทางเดียว และถ้า $\{S_n\}$ มีขอบเขตจำกัด จะได้ว่า $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ซึ่งทำให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าด้วย

วิธีทดสอบการลู่เข้าหรือลู่ออกของอนุกรมบวก

ในที่นี้จะกล่าวถึงวิธีการทดสอบเบื้องต้นสำหรับอนุกรมบวก 5 วิธีดังนี้

1. วิธีทดสอบโดยอินทิกรัล (The Integral Test)
2. วิธีทดสอบโดยการเปรียบเทียบ (The Comparison Test)
3. วิธีทดสอบโดยการเปรียบเทียบลิมิต (The Limit Comparison Test)
4. วิธีทดสอบอัตราส่วน (The Ratio Test)
5. วิธีทดสอบราก (The Root Test)

วิธีที่ 1 การทดสอบโดยอินทิกรัล (Integral Test)

ให้ $\sum a_n$ เป็นอนุกรมที่มี $a_n > 0$ และ ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่เกิดจากการแทน n ใน a_nด้วย x ถ้า f มีค่าลดลงและมีความต่อเนื่องสำหรับ $x \geq 1$แล้ว อนุกรม $\sum a_n$ กับอินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ จะลู่เข้า หรือลู่ออกเหมือนกัน

ตัวอย่าง 4 จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าเป็นอนุกรมลู่เข้า หรือ ลู่ออก

4.1 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$

วิธีทำ ให้ $f(x) = xe^{-x}$

พิจารณา $\int_1^{\infty} xe^{-x}dx$ โดย integration by part จะได้

$$\lim_{b\to\infty}\left(-xe^{-x} - e^{-x}\right)\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(-be^{-b} - e^{-b} + e^{-1} + e^{-1}\right) = 2e^{-1}$$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$ ลู่เข้า

4.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$

แบบฝึกหัด 3.2.1

ข้อ 1 - 10 จงแสดงว่าอนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)$	2	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+4n^2}\right)$	3	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+5}}\right)$
4	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{\ln(n+1)}\right)$	5	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$	6	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^n}{1+e^{2n}}\right)$
7	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8\tan^{-1} n}{n^2+1}\right)$	8	$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n\ln n}\right)$	9	$\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{n\ln n\sqrt{\ln^2 n-1}}\right)$
10	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}\right)$				

11. จงแสดงว่า $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n\ \ln^p n}\right)$ เป็นอนุกรมลู่เข้าเมื่อ $p>1$ และเป็นอนุกรมลู่ออก เมื่อ $p\le 1$

12. จงแสดงว่า $\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{n\ln n\ (\ln^p(\ln n))}\right)$ เป็นอนุกรมลู่เข้าเมื่อ $p>1$ และเป็นอนุกรมลู่ออก เมื่อ $p\le 1$

คำตอบแบบฝึกหัด 3.2.1

1. ลู่ออก 2. ลู่เข้า 3. ลู่ออก
4. ลู่ออก
5. ลู่เข้า 6. ลู่เข้า 7. ลู่เข้า
8. ลู่ออก
9. ลู่เข้า 10. ลู่เข้า

วิธีที่ 2 การทดสอบโดยการเปรียบเทียบ (Comparison Test)

ให้ $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรมบวก ($a_n \geq 0, b_n \geq 0$ ทุก ๆ $n \geq 1$)

1. ถ้า $a_n \leq b_n$ และ $\sum b_n$ ลู่เข้าแล้ว จะได้ว่า $\sum a_n$ ลู่เข้าด้วย
2. ถ้า $a_n \geq b_n$ และ $\sum b_n$ ลู่ออกแล้ว จะได้ว่า $\sum a_n$ ลู่ออกด้วย

นอกเหนือจากนี้สรุปไม่ได้

ตัวอย่าง 5

จงทดสอบอนุกรมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ว่า เป็นอนุกรมลู่เข้า หรือ ลู่ออก

5.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}+1}$ 5.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ 5.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - \cos n}$

วิธีทำ 5.1 $a_n = \frac{1}{2^{n-1}+1}$ และเลือก $b_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ แล้ว $a_n \leq b_n$

แต่เราทราบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มีอัตราส่วนร่วมเป็น $\frac{1}{2}$

จึงเป็นอนุกรมลู่เข้า และจากวิธีการนี้ เราจึงสรุปได้ว่า

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}+1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าด้วย

5.2

5.3

แบบฝึกหัด 3.2.2

จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออกโดยวิธีเปรียบเทียบ

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin^2 n}{2^n}\right)$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-n}{n2^n}\right)$
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n-1}+1}\right)$
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{n}\right)$
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+2+3+\ldots+n}\right)$
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n^3+1}\right)$
7. $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right)$
8. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}\right)$
9. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3+\cos n}{3^n}\right)$
10. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin^2 n}{n\sqrt{n}}\right)$
11. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n}{1+3^n}\right)$
12. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\arctan n}{n^3}\right)$
13. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+2^n}{1+3^n}\right)$
14. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{(n+1)2^n}\right)$
15. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n2^n}\right)$
16. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n!}{n^2}\right)$
17. $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\ln n}\right)$
18. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^n}\right)$
19. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n-1}{3^n+5^n}\right)$
20. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3\sin^2 n}{n!}\right)$

คำตอบแบบฝึกหัด 3.2.2

1. ลู่เข้า	2. ลู่เข้า	3. ลู่เข้า
4. ลู่ออก	5. ลู่เข้า	6. ลู่เข้า
7. ลู่ออก	8. ลู่เข้า	9. ลู่เข้า
10. ลู่เข้า	11.ลู่เข้า	12. ลู่เข้า
13. ลู่เข้า	14. ลู่เข้า	15. ลู่เข้า
16. ลู่ออก	17. ลู่ออก	18. ลู่เข้า
19. ลู่เข้า	20. ลู่เข้า	

วิธีที่ 3 การทดสอบโดยการเปรียบเทียบลิมิต

(Limit Comparison Test)

ให้ $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรมบวก ($a_n \geq 0, b_n \geq 0$ ทุก ๆ $n \geq 1$)

1. ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$

   แล้วจะได้ว่า $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ จะลู่เข้า หรือ ลู่ออกเหมือนกัน

2. ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

   แล้วจะได้ว่า $\sum a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

3. ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

   แล้วจะได้ว่า $\sum a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 6 จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่า เป็นอนุกรมลู่เข้า หรือ ลู่ออก

6.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^3-2}$ 6.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n+1}}$ 6.3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$

วิธีทำ 6.1 ให้ $a_n=\frac{n}{4n^3-2}$ เลือก $b_n=\frac{n}{n^3}=\frac{1}{n^2}$ (ทราบว่าลู่เข้า)

พิจารณา $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{4n^3-2}}{\frac{1}{n^2}}$$

$$=\frac{1}{4}>0$$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^3-2}$ ลู่เข้า

6.2

6.3

แบบฝึกหัด 3.2.3

จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออกโดยวิธีเปรียบเทียบลิมิต

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}\right)$ 2. $\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{\ln(\ln n)}\right)$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(\ln n)^2}{n^3}\right)$

4. $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}\right)$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\ln n}\right)$ 6. $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\ln(n+1)}{(n+1)}\right)$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}\right)$ 8. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{10n+1}{n(n+1)(n+2)}\right)$ 9. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\tan^{-1} n}{n^{1.1}}\right)$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\coth n}{n^2}\right)$ 11. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\right)$ 12. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n!\ln n}{n(n+2)!}\right)$ 14. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\arctan n}{n}\right)$ 15. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n^2+2n}{\sqrt{1+n^5}}\right)$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3^n-1}\right)$ 17. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-3n}{\sqrt[3]{n^{10}-4n^2}}\right)$ 18. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\sqrt{n}}\right)$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n}\ln n}{n^3+1}\right)$ 20. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n(n+3)}{(n+1)(\sqrt{n}+2)(3n+7)}\right)$

คำตอบแบบฝึกหัด 3.2.3

1. ลู่ออก	2. ลู่ออก	3. ลู่เข้า	4. ลู่ออก	5. ลู่ออก
6. ลู่ออก	7. ลู่เข้า	8. ลู่เข้า	9. ลู่เข้า	10. ลู่เข้า
11. ลู่ออก	12. ลู่เข้า	13. ลู่เข้า	14. ลู่ออก	15. ลู่ออก
16. ลู่เข้า	17. ลู่เข้า	18. ลู่ออก	19. ลู่เข้า	20. ลู่ออก

วิธีที่ 4 การทดสอบโดยอัตราส่วน (Ratio Test)

ให้ $\sum a_n$ เป็นอนุกรมที่ต้องการทดสอบ

ถ้า $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ แล้วได้ว่า

(1) ถ้า $L<1$ อนุกรมจะลู่เข้า

(2) ถ้า $L>1$ อนุกรมจะลู่ออก

(3) ถ้า $L=1$ สรุปไม่ได้

ตัวอย่าง 7

จงทดสอบอนุกรมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ว่า เป็นอนุกรมลู่เข้า หรือ ลู่ออก

7.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$ 7.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!n!}$

7.1 **วิธีทำ** $a_n = \frac{3^n}{n!}$

พิจารณา
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{3^n}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3}{(n+1)}\right|$$
$$= 0 < 1$$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$ ลู่เข้า

7.2

แบบฝึกหัด 3.2.4

จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^{\sqrt{2}}}{2^n}\right)$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n!e^{-n}\right)$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^{10}}{10^n}\right)$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln n}{e^n}\right)$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n!}\right)$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n!}{(2n+1)!}\right)$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n n!n!}{(2n)!}\right)$ 8. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdot\ \dots\ \cdot(2n-1)}{4^n 2^n n!}\right)$ 9. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5^n+n}{n!+3}\right)$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2+n\cdot 5^n}\right)$ 11. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n)!}{n!(2n)^n}\right)$ 12. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n)!}{3^n}\right)$

คำตอบแบบฝึกหัด 3.2.4

1. ลู่เข้า	2. ลู่ออก	3. ลู่เข้า	4. ลู่เข้า
5. ลู่เข้า	6. ลู่เข้า	7. ลู่เข้า	8. ลู่เข้า
9. ลู่เข้า	10. ลู่เข้า	11. ลู่เข้า	12. ลู่ออก

วิธีที่ 5 การทดสอบโดยใช้รากที่ n (n^{th}-Root Test)

ให้ $\sum a_n$ เป็นอนุกรมที่ต้องการทดสอบ ถ้า $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=R$ แล้ว

(1) ถ้า $R<1$ อนุกรมจะลู่เข้า

(2) ถ้า $R>1$ อนุกรมจะลู่ออก

(3) ถ้า $R=1$ สรุปไม่ได้

ตัวอย่าง 8 อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า หรือลู่ออก

วิธีทำ ให้ $a_n = \frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$

พิจารณา $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$

$= 0$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$ ลู่เข้า

แบบฝึกหัด 3.2.5

จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออกโดยการทดสอบรากที่ n

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+(-1)^n}{(1.25)^n}\right)$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{3}{n}\right)^n$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{(\ln n)^n}\right)$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(n!)^n}{(n^n)^2}\right)$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^n}{2^{n^2}}\right)$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-e^{-n}\right)^n$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln(n+2)}\right)^n$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n+2}{3n-1}\right)^n$

คำตอบแบบฝึกหัด 3.2.5

1. ลู่เข้า	2. ลู่เข้า	3. ลู่ออก	4. ลู่เข้า
5. ลู่ออก	6. ลู่เข้า	7. ลู่ออก	8. ลู่เข้า
9. ลู่เข้า	10. ลู่ออก		

3.3 อนุกรมสลับ (Alternating Series)

คืออนุกรมที่เขียนได้ในรูป

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1}a_n + \ldots$$

หรือ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots + (-1)^{n}a_n + \ldots$

ทฤษฎีบท 3.6 การทดสอบอนุกรมสลับของไลบ์นิตซ์ (Leibnitz's Theorem)

ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ เป็นอนุกรมสลับซึ่งมีคุณสมบัติต่อไปนี้

(1) $0 < a_{n+1} < a_n$ สำหรับ $n > 1$ (ลำดับลด)

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

จะได้ว่า อนุกรมสลับนี้ ลู่เข้า

ตัวอย่าง 9 จงทดสอบอนุกรมสลับต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก

9.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 9.2 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2^n}{n^2}$

วิธีทำ 9.1 ให้ $a_n = \frac{1}{n}$

พิจารณา $a_{n+1} < a_n$ จะได้ $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ เป็นลำดับลด

พิจารณา $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ลู่เข้า

9.2

แบบฝึกหัด 3.3

จงแสดงว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{3n+1}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{10}\right)^n$
6. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln n}$
7. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{\ln n^2}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}+1}{n+1}$
9. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n} \frac{\ln n}{n}$
10. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n}$

คำตอบแบบฝึกหัด 3.3

1. ลู่เข้า 2. ลู่ออก 3. ลู่เข้า 4. ลู่เข้า
5. ลู่ออก 6. ลู่เข้า 7. ลู่ออก 8. ลู่เข้า
9. ลู่เข้า 10. ลู่เข้า

3.4 การลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ และแบบมีเงื่อนไข (Absolute and Conditional Convergence)

นิยาม 3.5 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

นิยาม 3.6 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แต่ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ทฤษฎีบท 3.7 ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแล้วจะได้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ และมี $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

บทแทรก ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออกแล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ลู่ออกด้วย

ตัวอย่าง 10 จงทดสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่

วิธีทำ

อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{32} + \frac{1}{50} + \frac{1}{36} + \frac{1}{98} - \ldots$

พิจารณา $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n^2}\right|$ เนื่องจาก $\left|\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ สำหรับ $n \ge 1$

แต่ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ เป็นอนุกรม p ที่ลู่เข้า เพราะ $p = 2 > 1$

จากการทดสอบแบบเปรียบเทียบได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n^2}\right|$ ลู่เข้า

โดยทฤษฎีบท 2.7 จะได้ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

โดยทั่วไปแล้ว เราสามารถ ใช้การทดสอบแบบอัตราส่วนในการบอกว่าอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ หรือไม่ ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.8

การทดสอบโดยอัตราส่วน (Ratio Test)

ให้ $\sum a_n$ เป็นอนุกรม ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ แล้วได้ว่า

(1) ถ้า $L<1$ จะได้อนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

(2) ถ้า $L>1$ อนุกรมจะลู่ออก

(3) ถ้า $L+1$ สรุปไม่ได้

ตัวอย่าง 11 จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ หรือ ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข หรือ ลู่ออก

11.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-5)^n}{n!}$ 11.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\sin\dfrac{1}{n}$ 11.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

วิธีทำ

11.1 $a_n = \dfrac{(-5)^n}{n!}$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\dfrac{n!}{5^n}$

จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{n+1} = 0$

จึงสรุปได้ทันทีว่า $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-5)^n}{n!}$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

11.2 $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$

11.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

แบบฝึกหัด 3.4

จงแสดงว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็น อนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ อนุกรมลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข หรืออนุกรมลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^n$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3}{n^2}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n^3}{e^n}\right)$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n}$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^n$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n(n+3)}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{2}$ 8. $\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{3}{\ln n}\right)^n$ 9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+1}{n^3+2}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\tan^{-1}n}{n^2+2}$ 11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-100)^n}{n!}$ 12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n\sqrt{n}}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n+1)^n}{(2n)^n}$ 14. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n)!}{2^n n!n}$ 15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k\cos k\pi}{k^2+1}$ 17. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{n}$ 18. $\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{\ln n}\right)^n$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ 20. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)$

คำตอบแบบฝึกหัด 3.4

1. ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ 2. ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ 3. ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์
4. ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข 5. ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ 6. ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข
7. ลู่ออก 8. ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ 9. ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข
10. ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ 11. ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ 12. ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์
13. ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ 14. ลู่ออก 15. ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์
16. ลู่ออก 17. ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข 18. ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์
19. ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข 20. ลู่ออก
