บทที่1 หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

(Principle of Mathematical Induction)

หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ทฤษฎีบท สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆจะมีประพจน์จริง $P(n)$ ซึ่งถ้า $P(n)$ มีคุณสมบัติ 2 ประการ ดังนี้

1. $P(1)$ เป็นจริง
2. สำหรับจำนวนเต็มบวก k ใดๆ ถ้าให้ $P(k)$ เป็นจริง แล้วทำให้ $P(k+1)$ เป็นจริงด้วยเสมอ

แล้วได้ว่า $P(n)$ จะต้องเป็นจริงสำหรับจำนวนเต็มบวกใดๆทุกจำนวน

การพิสูจน์ข้อความในแบบ $\forall n \in N, P(n)$ โดยใช้หลักอุปนัยทางคณิตศาสตร์ จะต้องแสดง 2 ขั้นตอน คือ

(1) แสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

เรียกขั้นนี้ว่า ขั้นตอนฐานหลัก (basic step)

และ (2) แสดงว่า $\forall k \in N, P(k) \rightarrow P(k+1)$ เป็นจริง

เรียกขั้นนี้ว่า ขั้นตอนอุปนัย (induction step)

<u>**หมายเหตุ**</u> ในการพิสูจน์นี้ จะละเว้นขั้นตอนหนึ่งขั้นตอนใดไม่ได้

ตัวอย่าง 1 จงพิสูจน์ว่า $1+2+3+\ldots+n \quad = \quad \frac{n(n+1)}{2}$

สำหรับทุกๆจำนวนเต็มบวก n

<u>พิสูจน์</u> ให้ $P(n): 1+2+3+\ldots+n \quad = \quad \frac{n(n+1)}{2}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก ($n \in N$)

(1) เพราะว่า $\frac{1(1+1)}{2} = 1$ ดังนั้น

$P(1)$ คือ $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ เป็นจริง

(2) ให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ ซึ่ง $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$1+2+3+\ldots+k \quad = \quad \frac{k(k+1)}{2} \qquad (*)$$

จะต้องแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง นั่นคือ จะแสดงว่า

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1) \quad = \quad \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

โดยการบวก $k+1$ เข้าในสมการ (*)

จะได้ $1+2+3+\ldots+k+(k+1) \quad = \quad \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$

$$= \quad \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \quad = \quad \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$\therefore \quad P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยทางคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงทุกจำนวนเต็มบวก n

ตัวอย่าง 2 จงใช้วิธีอุปนัยทางคณิตศาสตร์ พิสูจน์ว่าผลบวกของ n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต

$a, a+d, a+2d, \ldots$ คือ $\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$

พิสูจน์ ให้

$$P(n) : a+(a+d)+(a+2d)+\ldots+\{a+(n-1)d\} \quad = \quad \frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$$

ตัวอย่าง 3 จงใช้วิธีอุปนัยทางคณิตศาสตร์ พิสูจน์ว่าผลบวกของจำนวนคี่บวก n จำนวนแรกเท่ากับ n^2

<u>พิสูจน์</u> ให้ $P(n)$ ผลบวกของจำนวนคี่บวก n จำนวนแรกเท่ากับ n^2

$$P(k) \quad : \quad 1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2$$

ตัวอย่าง 4 จงใช้วิธีอุปนัยทางคณิตศาสตร์ พิสูจน์ว่า $2^{2n}-1$ หารด้วย 3 ลงตัว (n เป็นจำนวนเต็มบวก)

<u>พิสูจน์</u> ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $2^{2n}-1$ หารด้วย 3 ลงตัว

หลักของการอุปนัยทางคณิตศาสตร์ สามารถขยายให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปได้ดังนี้

ให้ $S \subseteq N$ ซึ่งมีสมบัติว่า

1. $n_0 \in S$

และ 2. $\forall n \in N, n \geq n_0, (n \in S \rightarrow n+1 \in S)$

แล้วจะได้ว่า $S = \{n \in N | n \geq n_0\}$

<u>หมายเหตุ</u> จะเห็นว่าหลักอุปนัยทางคณิตศาสตร์ เป็นกรณีพิเศษ เมื่อ $n_0 = 1$ นั่นเอง

ตัวอย่าง 5 จงใช้วิธีอุปนัยทางคณิตศาสตร์ พิสูจน์ว่า

$$5 + 7 + \ldots + (2n+1) = n(n+2) - 3 \text{ เมื่อ } n \in \{2,3,4,\ldots\}$$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$5 + 7 + \ldots + (2n+1) = n(n+2) + 3$$

แบบฝึกหัด

1. $\forall n \in N, 1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$ เมื่อ $r \neq 1$
2. $\forall n \in N, \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{15} + \dfrac{1}{35} + \ldots + \dfrac{1}{4n^2 - 1} = \dfrac{n}{2n+1}$
3. $\forall n \in N, 8$ หาร $5^{2n} - 1$ ลงตัว
4. $\forall n \in N, 11$ หาร $8 \cdot 10^{2n} + 6 \cdot 10^{2n-1} + 9$ ลงตัว
5. จงพิสูจน์ว่า 3 หาร $7^n - 4^n$ ลงตัว ทุกจำนวนเต็ม n
6. จงพิสูจน์ว่า $\forall n \in N, \left(n^3 - n\right)$ หารด้วย 3 ได้ลงตัว
7. จงพิสูจน์ว่า $\forall n \in N, n\left(n^2 + 2\right)$ หารด้วย 3 ได้ลงตัว
8. จงพิสูจน์ว่า $2n \leq 2^n$ ทุกจำนวนเต็ม
9. จงพิสูจน์ว่า $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$
10. จงพิสูจน์ว่า $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$
11. จงพิสูจน์ว่า $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$
12. จงพิสูจน์ว่า $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{\left(4n^3 - n\right)}{3}$
13. จงพิสูจน์ว่า

    $$1.3 + 2.4 + 3.5 + \ldots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

14. จงพิสูจน์ว่า $2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 2$
15. จงพิสูจน์ว่า $(23)^{3n} - 1$ หารด้วย 7 ลงตัว

16. จงพิสูจน์ว่า $(2)^{2n}-1$ หารด้วย 3 ลงตัว

17. จงพิสูจน์ว่า $x^{2n}-y^{2n}$ หารด้วย $x-y$ ลงตัว

18. จงพิสูจน์ว่า $3^{2n+2}-8n-9$ หารด้วย 64 ลงตัว

19. จงพิสูจน์ว่า $9^{n}-8n-1$ หารด้วย 64 ลงตัว

20. จงพิสูจน์ว่า $7^{2n}-48n-1$ หารด้วย 2304 ลงตัว

21. จงพิสูจน์ว่า $x^{n}-y^{n}$ หารด้วย $x-y$ ลงตัว