

บทที่ 9

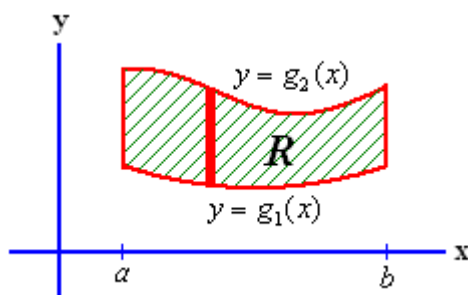
อินทิกรัลหลายชั้น (Multiple Integrals)

เราได้ศึกษาอินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชันตัวแปรเดียว $\int_a^b f(x)dx$ มาแล้ว ต่อไปเราจะขยายแนวคิดไปสู่

ฟังก์ชันหลายตัวแปร ซึ่งเป็นการศึกษาถึงอินทิกรัลหลายชั้น ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาอินทิกรัลสองชั้นของฟังก์ชันสองตัวแปรและอินทิกรัลสามชั้นของฟังก์ชันสามตัวแปร พร้อมทั้งคุณสมบัติพื้นฐาน การหาค่า และการประยุกต์สำหรับอินทิกรัล

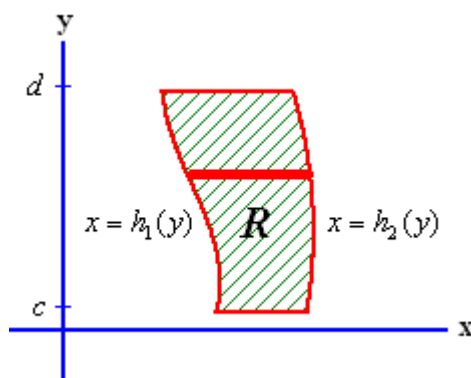
9.1 อินทิกรัลสองชั้น (Double Integrals)

ให้ g_1, g_2 เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และ $g_1 \leq g_2$ ทุกๆ $x \in [a, b]$ ดังรูป



เราจะเรียกบริเวณ R ข้างต้นว่า**บริเวณรูปแบบที่ 1**

ให้ h_1, h_2 เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[c, d]$ และ $h_1 \leq h_2$ ทุกๆ $y \in [c, d]$ ดังรูป

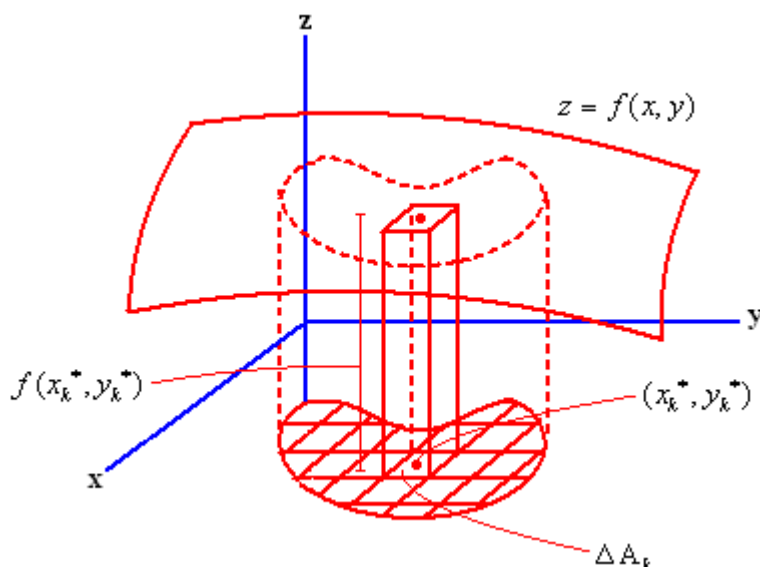


เราจะเรียกบริเวณ R ข้างต้นว่า**บริเวณรูปแบบที่ 2**

นิยาม ให้ $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนบริเวณ R ดังรูป ดังนั้นอินทิกรัลสองชั้นของ f บน R เขียนแทนด้วย $\iint_R f(x, y) dA$ กำหนดโดย

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) (\Delta A_k) \right]$$

โดยที่ลิมิตหาค่าได้



สมบัติของอินทิกรัลสองชั้น

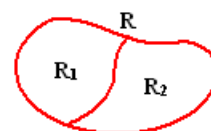
ให้ $f(x, y)$ และ $g(x, y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนบริเวณ R จะได้ว่า

1 $\iint_R c f(x, y) dA = c \iint_R f(x, y) dA$ โดยที่ c เป็นค่าคงที่

2 $\iint_R [f(x, y) \pm g(x, y)] dA = \iint_R f(x, y) dA \pm \iint_R g(x, y) dA$

3 ถ้า $R = R_1 \cup R_2$ โดยที่ R_1 และ R_2 ไม่มีส่วนที่ซ้อนกัน

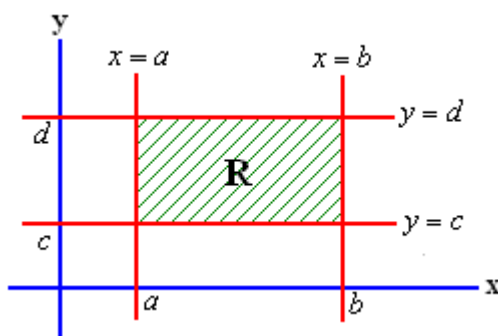
$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA$$



9.1.1 การหาค่าอินทิกรัลสองชั้น

เราจะหา $\iint_R f(x, y) dA$ โดยการศึกษาบนบริเวณ R ที่เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าก่อนดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท ให้ $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนบริเวณสี่เหลี่ยมผืนผ้าปิด $R = \{(x, y) | a \leq x \leq b \text{ และ } c \leq y \leq d\}$ ดังรูป



ดังนั้น

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

ข้อสังเกต

- ในการหาค่า $\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$ เราจะพิจารณาหา $\int_c^d f(x, y) dy$ ก่อน (โดยถือว่า x คงที่) หลังจากนั้นเราจึงพิจารณาหา $\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$
- ในการหาค่า $\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$ เราจะพิจารณาหา $\int_a^b f(x, y) dx$ ก่อน (โดยถือว่า y คงที่) หลังจากนั้นเราจึงพิจารณาหา $\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$

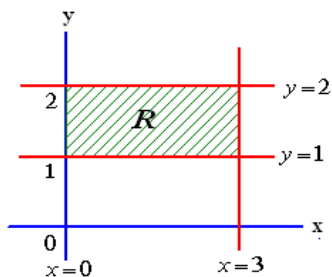
บทแทรก ให้ $f(x)$, $g(y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนบริเวณสี่เหลี่ยมผืนผ้าปิด $R = \{(x, y) | a \leq x \leq b \text{ และ } c \leq y \leq d\}$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\int_c^d \int_a^b f(x)g(y) dx dy = \left(\int_a^b f(x) dx \right) \left(\int_c^d g(y) dy \right)$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int_0^3 \int_1^2 (1+8xy) dy dx$

วิธีทำ

วิธีที่ 1
$$\int_0^3 \int_1^2 (1+8xy) dy dx =$$



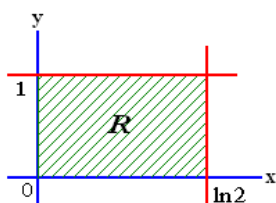
วิธีที่ 2

$$\begin{aligned} \int_0^3 \int_1^2 (1+8xy) dy dx &= \int_1^2 \int_0^3 (1+8xy) dx dy \\ &= \int_1^2 \left[x + 4x^2 y \right]_{x=0}^3 dy \\ &= \int_1^2 [(3+36y) - (0+0)] dy \\ &= \int_1^2 (3+36y) dy = 3y + 18y^2 \Big|_1^2 \\ &= (6+72) - (3+18) = 57 \end{aligned}$$

■

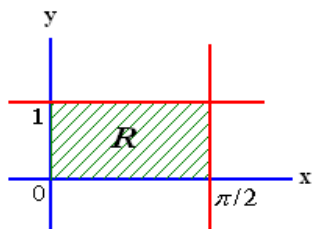
ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int_0^{\ln 2} \int_0^1 xye^{y^2 x} dy dx$

วิธีทำ
$$\int_0^{\ln 2} \int_0^1 xye^{y^2 x} dy dx =$$



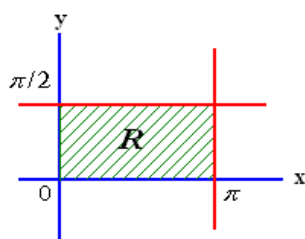
ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int_0^1 \int_0^{\pi/2} (e^y + \sin x) dx dy$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{\pi/2} (e^y + \sin x) dx dy &= \int_0^1 [xe^y - \cos x]_{x=0}^{\pi/2} dy \\ &= \int_0^1 \left[\left(\frac{\pi}{2} e^y - 0 \right) - (0 - 1) \right] dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\pi}{2} e^y + 1 \right) dy \\ &= \frac{\pi}{2} e^y + y \Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2} e + 1 - \left(\frac{\pi}{2} + 0 \right) \\ &= \frac{\pi}{2} (e - 1) + 1 \end{aligned}$$



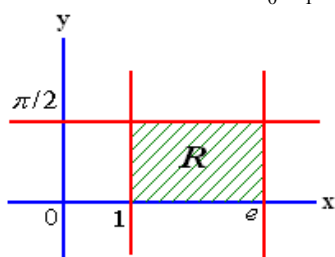
ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi} \cos x \cos y dx dy$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi} \cos x \cos y dx dy &= \left(\int_0^{\pi} \cos x dx \right) \left(\int_0^{\pi/2} \cos y dy \right) \\ &= \left(\sin x \Big|_0^{\pi} \right) \left(\sin y \Big|_0^{\pi/2} \right) \\ &= (\sin \pi - \sin 0)(\sin \pi - \sin 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$



ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int_0^{\pi/2} \int_1^e \frac{\sin y}{x} dx dy$

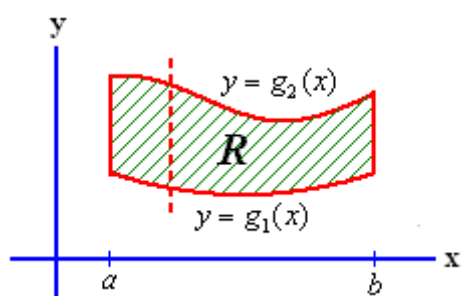
วิธีทำ
$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \int_1^e \frac{\sin y}{x} dx dy &= \left(\int_1^e \frac{1}{x} dx \right) \left(\int_0^{\pi/2} \sin y dy \right) \\ &= \left(\ln x \Big|_1^e \right) \left(-\cos y \Big|_0^{\pi/2} \right) \\ &= -(\ln e - \ln 1)(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0) \\ &= -(1 - 0)(0 - 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$



ในกรณีที่บริเวณ R ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า แต่เป็นบริเวณรูปแบบที่ 1 หรือ รูปแบบที่ 2 เราจะหา $\iint_R f(x, y) dA$ โดยใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท ให้ $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนบริเวณ R

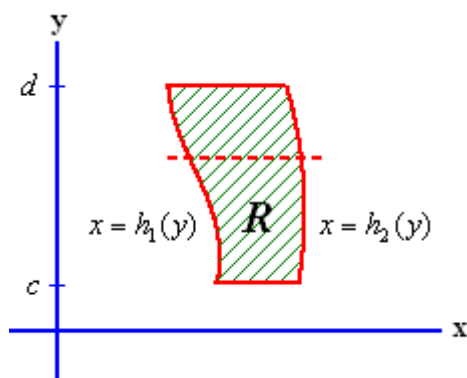
1 ถ้า R เป็นบริเวณรูปแบบที่ 1



จะได้ว่า

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

2 ถ้า R เป็นบริเวณรูปแบบที่ 2



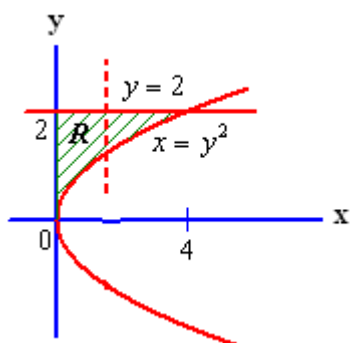
จะได้ว่า

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

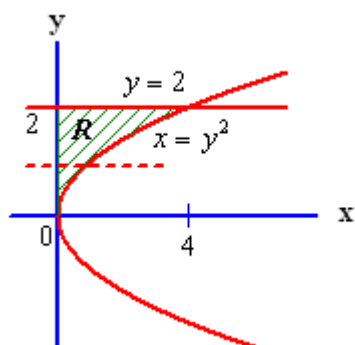
ตัวอย่าง จงหา $\iint_R (x^2 + 4y) dA$ เมื่อ R เป็นบริเวณที่ล้อมรอบด้วยแกน y เส้นตรง $y=2$ และเส้นโค้ง $x=y^2$

วิธีทำ

วิธีที่ 1 $\iint_R (x^2 + 4y) dA =$



วิธีที่ 2 $\iint_R (x^2 + 4y) dA = \int_0^2 \int_0^{y^2} (x^2 + 4y) dx dy$



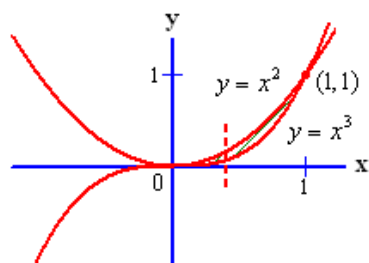
$$\begin{aligned}
 &= \int_0^2 \left[\frac{x^3}{3} + 4xy \right]_{x=0}^{y^2} dy \\
 &= \int_0^2 \left[\left(\frac{y^6}{3} + 4y^3 \right) - (0+0) \right] dy \\
 &= \int_0^2 \left(\frac{y^6}{3} + 4y^3 \right) dy \\
 &= \left. \frac{y^7}{21} + y^4 \right|_0^2 \\
 &= \left[\frac{128}{21} + 16 \right] - [0+0] = \frac{464}{21}
 \end{aligned}$$

■

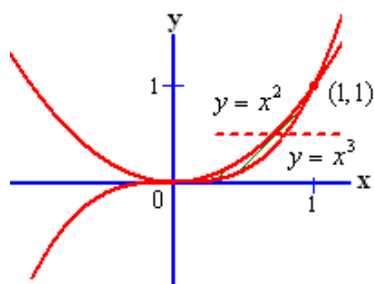
ตัวอย่าง จงหา $\iint_R xy^2 dA$ เมื่อ R เป็นบริเวณในจุดภาคที่หนึ่งซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ และ $y = x^3$

วิธีทำ

วิธีที่ 1



วิธีที่ 2



$$\iint_R xy^2 dA = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{y^{1/3}} xy^2 dx dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^2 y^2}{2} \right]_{x=\sqrt{y}}^{y^{1/3}} dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (y^{8/3} - y^3) dy$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{3}{11} y^{11/3} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{3}{11} - \frac{1}{4} \right) - (0 - 0) \right]$$

$$= \frac{1}{88}$$

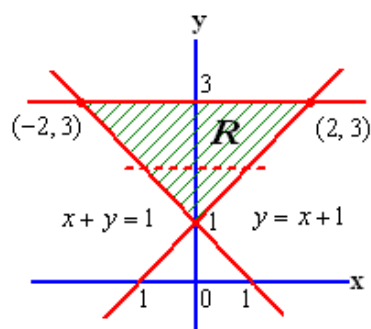
■

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\iint_R (2x - y^2) dA$ เมื่อ R เป็นบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นตรง $x + y = 1$ เส้นตรง

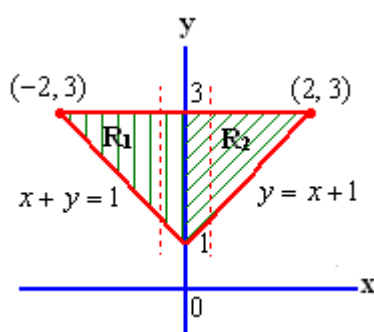
$$y = x + 1 \text{ และ } y = 3$$

วิธีทำ

วิธีที่ 1



วิธีที่ 2



$$\begin{aligned} \iint_R (2x - y^2) dA &= \iint_{R_1} (2x - y^2) dA + \iint_{R_2} (2x - y^2) dA \\ &= \int_{-2}^0 \int_{-x+1}^3 (2x - y^2) dy dx + \int_0^2 \int_{x+1}^3 (2x - y^2) dy dx \\ &= \int_{-2}^0 \left[2xy - \frac{y^3}{3} \right]_{y=-x+1}^3 dx + \int_0^2 \left[2xy - \frac{y^3}{3} \right]_{y=x+1}^3 dx \end{aligned}$$

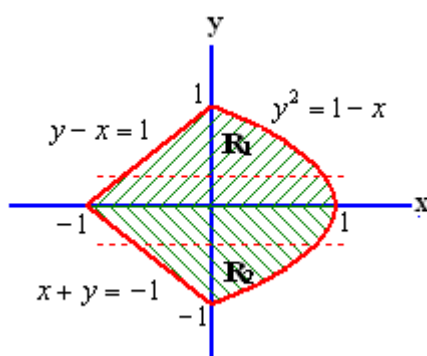
$$\begin{aligned}
\iint_R (2x - y^2) dA &= \int_{-2}^0 \left[(6x-9) - \left\{ 2x(-x+1) - \frac{(-x+1)^3}{3} \right\} \right] dx + \int_0^2 \left[(6x-9) - \left\{ 2x(x+1) - \frac{(x+1)^3}{3} \right\} \right] dx \\
&= \int_{-2}^0 \left[4x-9+2x^2 + \frac{(-x+1)^3}{3} \right] dx + \int_0^2 \left[4x-9-2x^2 + \frac{(x+1)^3}{3} \right] dx \\
&= \left[2x^2 - 9x + \frac{2}{3}x^3 - \frac{(-x+1)^4}{12} \right]_{-2}^0 + \left[2x^2 - 9x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{(x+1)^4}{12} \right]_0^2 \\
&= \left[\left(0-0+0-\frac{1}{12} \right) - \left(8+18-\frac{16}{3}-\frac{81}{12} \right) \right] - \left[\left(8-18-\frac{16}{3}+\frac{81}{12} \right) - \left(0-0-0+\frac{1}{12} \right) \right] \\
&= -\frac{68}{3}
\end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\iint_R (x-y) dA$ เมื่อ R เป็นบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y^2 = 1-x$ เส้นตรง

$$x+y=-1 \quad \text{และ} \quad y-x=1$$

วิธีทำ



$$\begin{aligned}
\iint_R (x-y) dA &= \iint_{R_1} (x-y) dA + \iint_{R_2} (x-y) dA \\
&= \int_0^1 \int_{y-1}^{1-y^2} (x-y) dx dy + \int_{-1}^0 \int_{-1-y}^{1-y^2} (x-y) dx dy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{(x-y)^2}{2} \right]_{x=y-1}^{1-y^2} dy + \int_{-1}^0 \left[\frac{(x-y)^2}{2} \right]_{x=-1-y}^{1-y^2} dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 [(1-y^2-y)^2 - (-1)^2] dy + \frac{1}{2} \int_{-1}^0 [(1-y^2-y)^2 - (1-2y)^2] dy
\end{aligned}$$

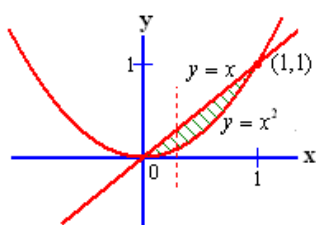
$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_0^1 (y^4 + 2y^3 - y^2 - 2y) dy + \frac{1}{2} \int_{-1}^0 (y^4 + 2y^3 - 5y^2 - 6y) dy \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{y^5}{5} + \frac{y^4}{2} - \frac{y^3}{3} - y^2 \right]_0^1 + \frac{1}{2} \left[\frac{y^5}{5} + \frac{y^4}{2} - \frac{5}{3}y^3 - 3y^2 \right]_{-1}^0 \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 1 \right) - 0 \right] + \frac{1}{2} \left[0 - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{5}{3} + 3 \right) \right] = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int_0^1 \int_{x^2}^x 8y^3 x dy dx$

วิธีทำ

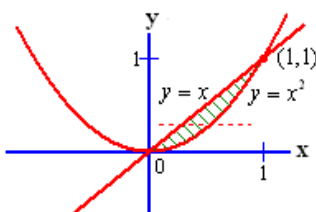
วิธีที่ 1



$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{x^2}^x 8y^3 x dy dx &= \int_0^1 \left[2xy^4 \right]_{y=x^2}^x dx \\
&= 2 \int_0^1 [x^5 - x^9] dx \\
&= 2 \left[\frac{x^6}{6} - \frac{x^{10}}{10} \right]_0^1 \\
&= 2 \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{10} \right] \\
&= \frac{2}{15}
\end{aligned}$$

■

วิธีที่ 2



$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{x^2}^x 8y^3 x dy dx &= \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} 8y^3 x dx dy \\
&= \int_0^1 \left[4y^3 x^2 \right]_{x=y}^{\sqrt{y}} dy \\
&= 4 \int_0^1 [y^4 - y^5] dy \\
&= 4 \left[\frac{y^5}{5} - \frac{y^6}{6} \right]_0^1 \\
&= 4 \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right] \\
&= \frac{2}{15}
\end{aligned}$$

■

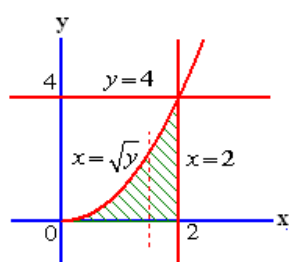
ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2} dx dy$

วิธีทำ

■

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 y \cos x^5 dx dy$

วิธีทำ

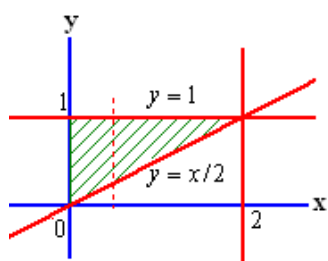


$$\begin{aligned} \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 y \cos x^5 dx dy &= \int_0^2 \int_0^{x^2} y \cos x^5 dy dx \\ &= \int_0^2 \left[\frac{y^2}{2} \cos x^5 \right]_{y=0}^{x^2} dx \\ &= \int_0^2 \left[\frac{x^4}{2} \cos x^5 \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{5} \sin x^5 \right]_0^2 = \frac{1}{10} \sin 32 \end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int_0^2 \int_{x/2}^1 x e^{y^3} dy dx$

วิธีทำ

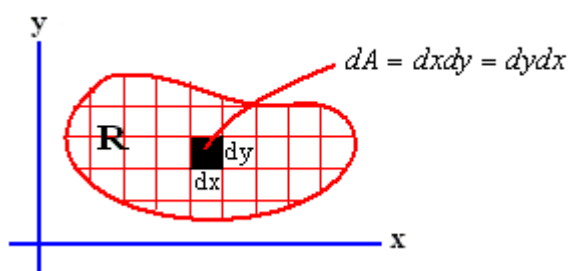


$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_{x/2}^1 x e^{y^3} dy dx &= \int_0^1 \int_0^{2y} x e^{y^3} dx dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} e^{y^3} \right]_{x=0}^{2y} dy \\ &= \int_0^1 2y^2 e^{y^3} dy \\ &= \frac{2}{3} e^{y^3} \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{3} (e^1 - e^0) = \frac{2}{3} (e - 1) \end{aligned}$$

■

9.1.2 การประยุกต์ของอินทิกรัลสองชั้น

9.1.2.1 การหาพื้นที่โดยใช้อินทิกรัลสองชั้นในระบบพิกัดฉาก



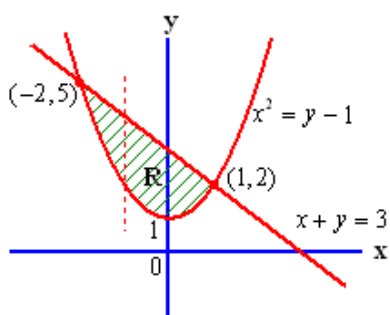
จากรูปจะได้ว่า

$$A = \iint_R dA = \iint_R dydx = \iint_R dxdy$$

ตัวอย่าง จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดด้วยเส้นโค้ง $x^2 = y - 1$ และเส้นตรง $x + y = 3$

วิธีทำ

วิธีที่ 1



หาจุดตัด

$$x^2 + 1 = 3 - x$$

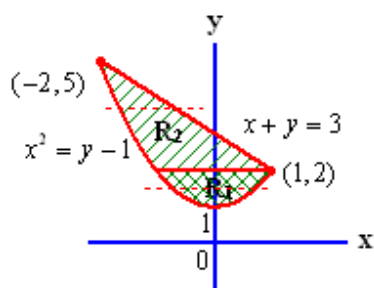
$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x - 1)(x + 2) = 0$$

$$\therefore x = -2, 1$$

วิธีที่ 2

$$A = \iint_{R_1} dA + \iint_{R_2} dA$$



$$\begin{aligned} &= \int_1^2 \int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} dxdy + \int_2^5 \int_{-\sqrt{y-1}}^{3-y} dxdy \\ &= \int_1^2 [x]_{x=-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} dy + \int_2^5 [x]_{x=-\sqrt{y-1}}^{3-y} dy \\ &= \int_1^2 [2\sqrt{y-1}] dy + \int_2^5 [3-y+\sqrt{y-1}] dy \end{aligned}$$

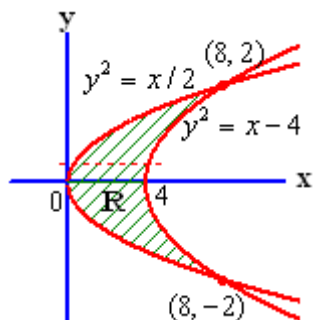
$$A = \left[\frac{4}{3}(y-1)^{3/2} \right]_1^2 + \left[3y - \frac{y^2}{2} + \frac{2}{3}(y-1)^{3/2} \right]_2^5$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{19}{6} = \frac{9}{2} \quad \text{ตารางหน่วย}$$

■

ตัวอย่าง จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดด้วยเส้นโค้ง $x^2 = y-1$ และเส้นตรง $x+y=3$

วิธีทำ

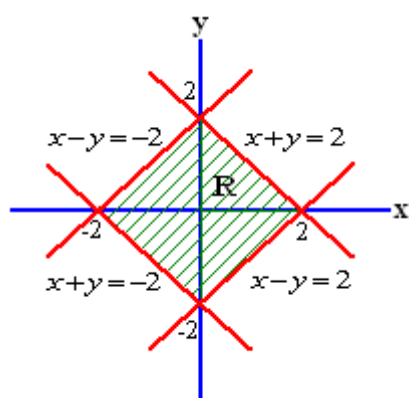


$$A = \iint_R dA$$

■

ตัวอย่าง จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดด้วยเส้นตรง $x+y=2$, $x-y=2$, $x+y=-2$ และ $x-y=-2$

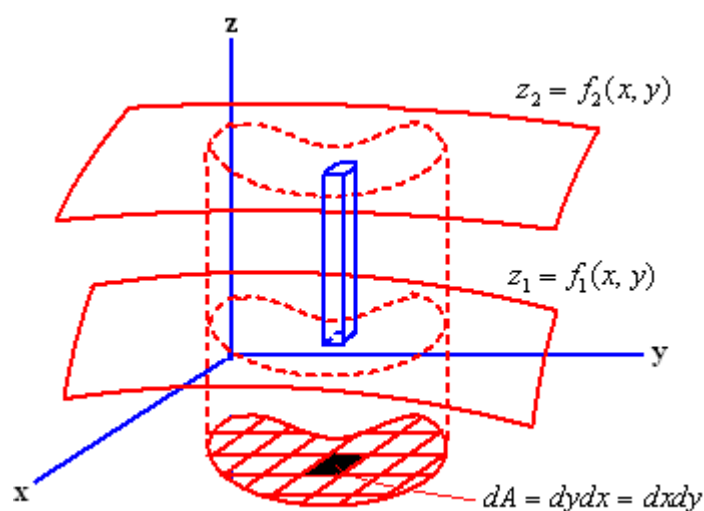
วิธีทำ



$$A = \iint_R dA$$

■

9.1.2.2 การหาปริมาตรของทรงทรงแปดหน้าโดยใช้อินทิกรัลสองชั้นในระบบพิกัดฉาก

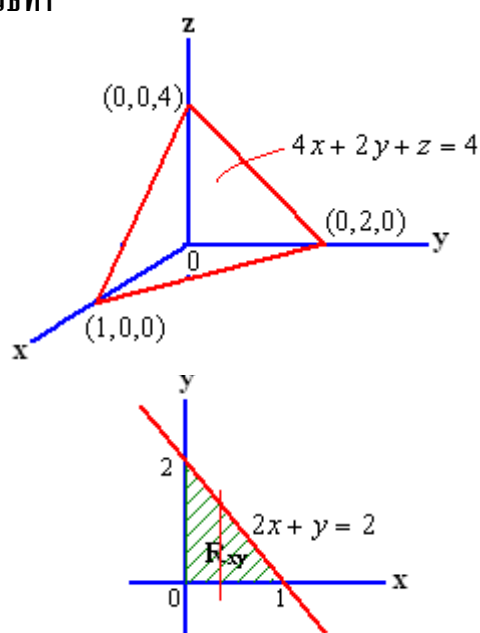


ดังนั้น จากรูปจะได้ว่า

$$\begin{aligned} V &= \iint_{R_{xy}} [z_2 - z_1] dA \\ &= \iint_{R_{xy}} [f_2(x, y) - f_1(x, y)] dy dx \\ &= \iint_{R_{xy}} [f_2(x, y) - f_1(x, y)] dx dy \end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงหาปริมาตรของทรงสามมิติที่ล้อมรอบด้วยระนาบพิกัดฉากและระนาบ $4x + 2y + z = 4$

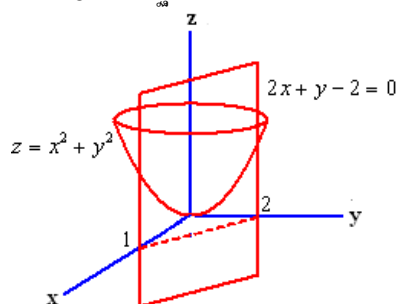
วิธีทำ



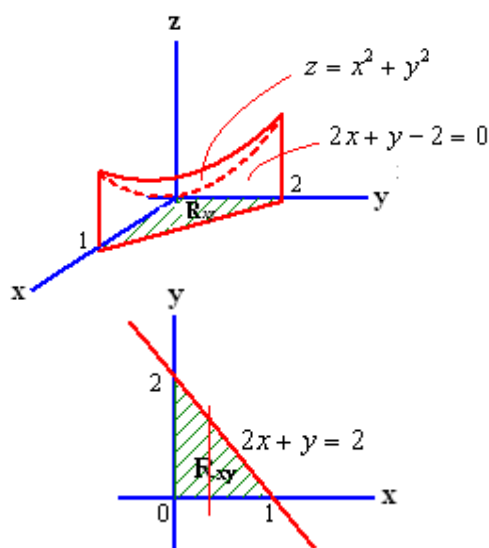
$$V = \iint_{R_{xy}} (z - 0) dA = \iint_{R_{xy}} z dA$$

ตัวอย่าง จงหาปริมาตรของทรงสามมิติที่ล้อมรอบด้วยระนาบพิกัดฉาก พื้นผิว $z = x^2 + y^2$ และระนาบ $2x + y - 2 = 0$ ในอัฐภาคที่หนึ่ง

วิธีทำ



$$V = \iint_{R_{xy}} (z - 0) dA = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (x^2 + y^2) dy dx$$

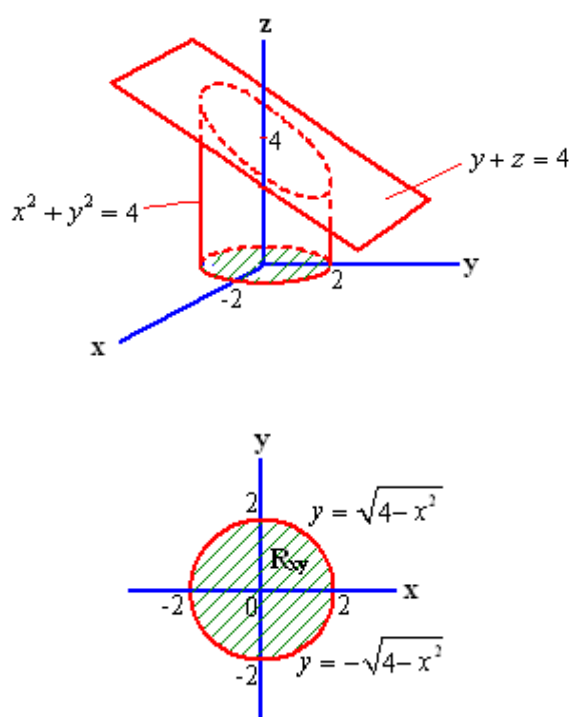


$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{2-2x} dx \\
 &= \int_0^1 \left[x^2(2-2x) + \frac{1}{3}(2-2x)^3 \right] dx \\
 &= \int_0^1 \left[2x^2 - 2x^3 + \frac{1}{3}(2-2x)^3 \right] dx \\
 &= \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{2} - \frac{1}{24}(2-2x)^4 \right]_0^1 \\
 &= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} - 0 \right) - \left(0 - 0 - \frac{2}{3} \right) \\
 &= \frac{5}{6} \quad \text{ลูกบาศก์หน่วย}
 \end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง จงหาปริมาตรของทรงสามมิติที่ล้อมรอบด้วยทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 4$ และระนาบ $y + z = 4$ เหนือระนาบ xy

วิธีทำ



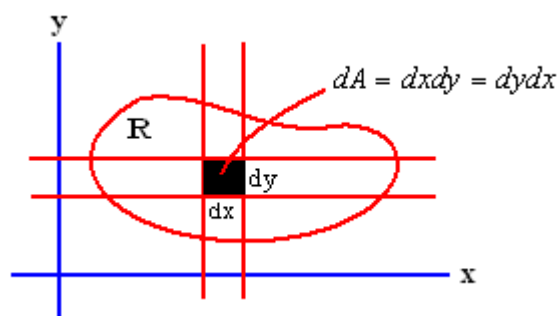
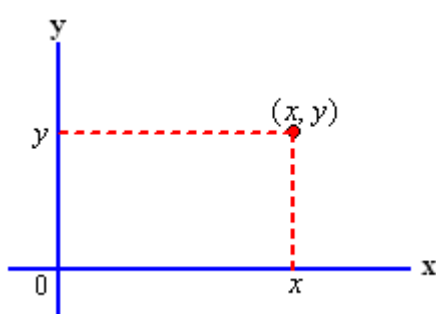
$$\begin{aligned}
 V &= \iint_{R_{xy}} (z-0) dA \\
 &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4-y) dy dx \\
 &= 2 \int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4-y) dy dx \\
 &= 2 \int_0^2 \left[4y - \frac{y^2}{2} \right]_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx \\
 &= 2 \int_0^2 8\sqrt{4-x^2} dx = 16 \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx \\
 &= 16 \int_0^{\pi/2} \sqrt{4-4\sin^2 \theta} 2\cos \theta d\theta \\
 &= 64 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cos \theta d\theta = 64 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta \\
 &= 64 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2} \right) d\theta = 32 \int_0^{\pi/2} (1+\cos 2\theta) d\theta \\
 &= 32 \left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \Big|_0^{\pi/2} = 32 \left[\left(\frac{\pi}{2} + 0 \right) - (0+0) \right] = 16\pi \quad \text{ลูกบาศก์หน่วย}
 \end{aligned}$$

ให้ $x = 2 \sin \theta$
 $\therefore dx = 2 \cos \theta d\theta$

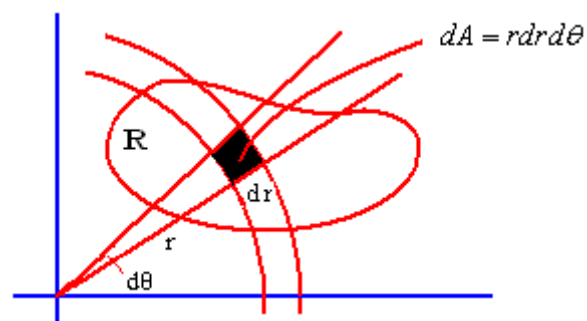
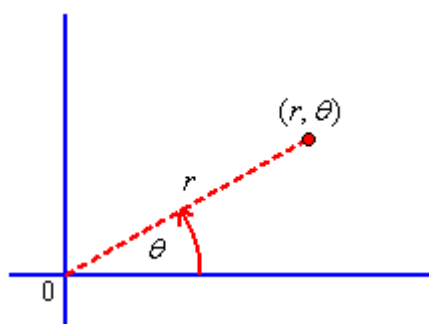
■

9.1.3 อินทิกรัลสองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว (Polar Coordinates)

พิกัดฉาก (Rectangular Coordinates)



พิกัดเชิงขั้ว (Polar Coordinates)



จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดฉากและระบบพิกัดเชิงขั้ว ดังนี้

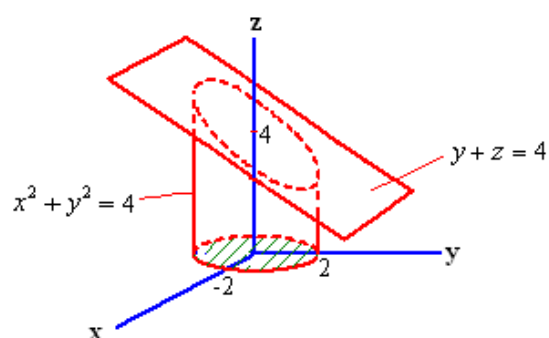
$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{และ} \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$x = r \cos \theta \quad \text{และ} \quad y = r \sin \theta$$

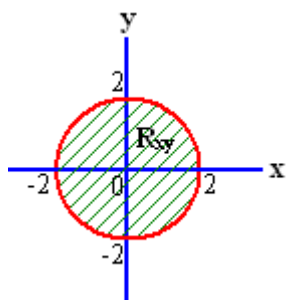
ตัวอย่าง จงหาปริมาตรของทรงสามมิติที่ล้อมรอบด้วยทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 4$ และระนาบ $y + z = 4$ และ

$z = 0$

วิธีทำ



$$\begin{aligned} V &= \iint_{R_{xy}} (z - 0) dA = \iint_{R_{xy}} z dA \\ &= \iint_{R_{xy}} (4 - y) dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r \sin \theta) r dr d\theta \end{aligned}$$



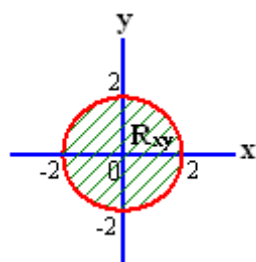
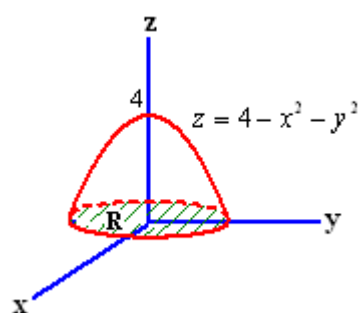
$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{2\pi} \left[2r^2 - \frac{r^3}{3} \sin \theta \right]_{r=0}^2 d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(8 - \frac{8}{3} \sin \theta \right) d\theta \\
 &= \left[8\theta + \frac{8}{3} \cos \theta \right]_0^{2\pi} \\
 &= 16\pi + \frac{8}{3} - \left(0 + \frac{8}{3} \right) = 16\pi \quad \text{ลูกบาศก์หน่วย}
 \end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง จงหาปริมาตรที่อยู่ใต้ผิวโค้ง $z = 4 - x^2 - y^2$ และอยู่เหนือระนาบ xy

วิธีทำ

$$V = \iint_{R_{xy}} z \, dA$$

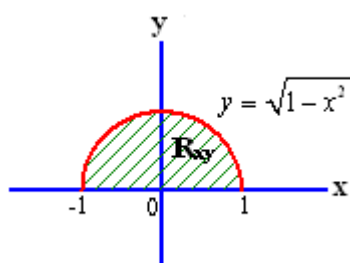


■

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2} \, dy \, dx$

วิธีทำ

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2} \, dy \, dx = \int_0^{\pi} \int_0^1 (r^2)^{3/2} r \, dr \, d\theta$$



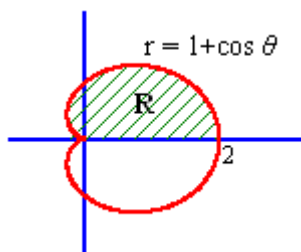
$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\pi} \int_0^1 r^4 \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{\pi} \left[\frac{r^5}{5} \right]_{r=0}^1 d\theta \\
 &= \frac{1}{5} \int_0^{\pi} d\theta = \frac{\theta}{5} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{5}
 \end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\iint_R r^2 \sin \theta \, dA$ เมื่อ R คือบริเวณที่ปิดล้อมด้วยแกนเชิงขั้วและครึ่งบนของโค้งรูปหัวใจ

$$r = 1 + \cos \theta$$

วิธีทำ

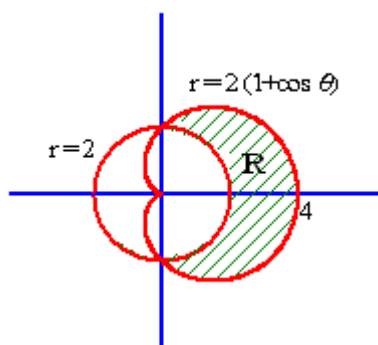


$$\begin{aligned} \iint_R r^2 \sin \theta \, dA &= \int_0^\pi \int_0^{1+\cos \theta} r^2 \sin \theta \, r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_0^{1+\cos \theta} r^3 \sin \theta \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[\frac{r^4}{4} \sin \theta \right]_{r=0}^{1+\cos \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\pi (1 + \cos \theta)^4 \sin \theta \, d\theta \\ &= -\frac{1}{4} \frac{(1 + \cos \theta)^5}{5} \Big|_0^\pi \\ &= -\frac{1}{20} (0 - 32) = \frac{8}{5} \end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง จงหาพื้นที่ของบริเวณ R ที่อยู่ภายนอกวงกลม $r = 2$ แต่อยู่ภายใน $r = 2(1 + \cos \theta)$

วิธีทำ



$$\begin{aligned} A &= \iint_R dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_2^{2(1+\cos \theta)} r \, dr \, d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \int_2^{2(1+\cos \theta)} r \, dr \, d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=2}^{2(1+\cos \theta)} d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} [(1 + \cos \theta)^2 - 1] d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} (2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= 4 \left(2 \sin \theta + \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right) \Big|_0^{\pi/2} \\ &= 4 \left[\left(2 + \frac{\pi}{4} + 0 \right) - (0 + 0 + 0) \right] \\ &= 8 + \pi \quad \text{ตารางหน่วย} \end{aligned}$$

■

9.1.4 การเปลี่ยนตัวแปรในอินทิกรัลสองชั้น

ในหัวข้อที่ผ่านมาเราหาค่าอินทิกรัลสองชั้น $\iint_{R_{xy}} f(x, y) dA$ โดยการเปลี่ยนให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว (r, θ)

แต่ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษา การเปลี่ยนตัวแปรให้อยู่ในระบบพิกัด (u, v) ใดๆ

ก่อนที่จะศึกษาการแปลงของพิกัด (Transformation of Coordinates) (x, y) ไปเป็น (u, v) ใดๆ เราจะขอกล่าวถึงนิยามต่อไปนี้ก่อน

นิยาม ให้ $x = g(u, v)$ และ $y = h(u, v)$ โดยที่ g และ h สามารถหาอนุพันธ์ย่อยได้ จะได้ว่า

ค่าตัวกำหนดจาโคเบียน (Jacobian determinant) เขียนแทนด้วย $J(u, v)$ กำหนดโดย

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

หมายเหตุ $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}}$ โดยที่ $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \neq 0$

ทฤษฎีบท ให้ $x = g(u, v)$ และ $y = h(u, v)$ โดยที่ g และ h สามารถหาอนุพันธ์ย่อยได้ จะได้ว่า

$$\iint_{R_{xy}} f(x, y) dx dy = \iint_{R_{uv}} f(g(u, v), h(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

โดยที่ $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ จงแปลง $\iint_{R_{xy}} f(x, y) dx dy$ ให้อยู่ในระบบพิกัด (r, θ)

วิธีทำ

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

จะได้ว่า

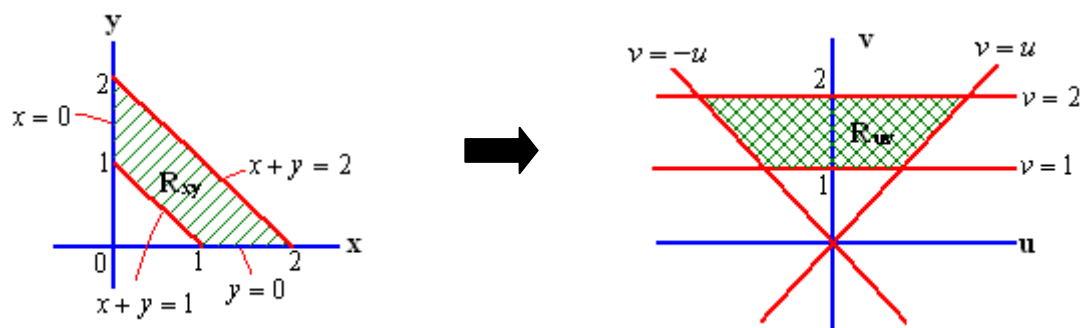
$$\begin{aligned} \iint_{R_{xy}} f(x, y) dx dy &= \iint_{R_{r\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr d\theta \\ &= \iint_{R_{r\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) |r| dr d\theta \\ &= \iint_{R_{r\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง ให้ R เป็นบริเวณสี่เหลี่ยมคางหมูในระนาบ xy ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ $(0,1)$, $(0,2)$, $(2,0)$ และ $(1,0)$

จงหาค่าของ $\iint_R e^{\frac{y-x}{y+x}} dA$ โดยใช้การแปลง $u = y - x$ และ $v = y + x$

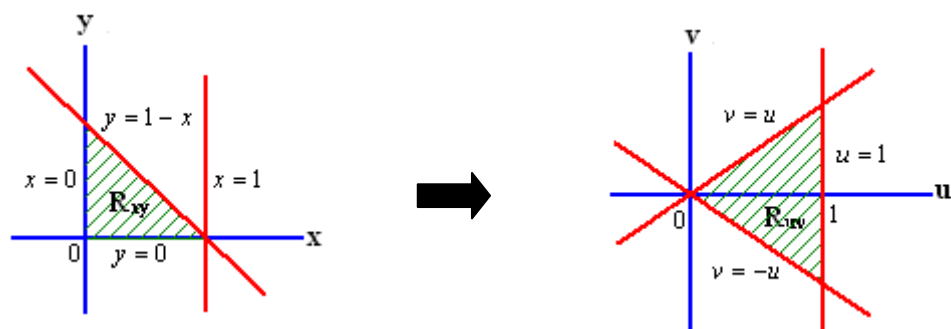
วิธีทำ



■

ตัวอย่าง จงใช้การแปลง $u = x + y$ และ $v = x - y$ หาค่าของ $\int_0^1 \int_0^{1-x} (x+y) \cos(x-y) dy dx$

วิธีทำ



ดังนั้น $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1 = -2$

นั่นคือ $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\frac{1}{2}$

จะได้ว่า

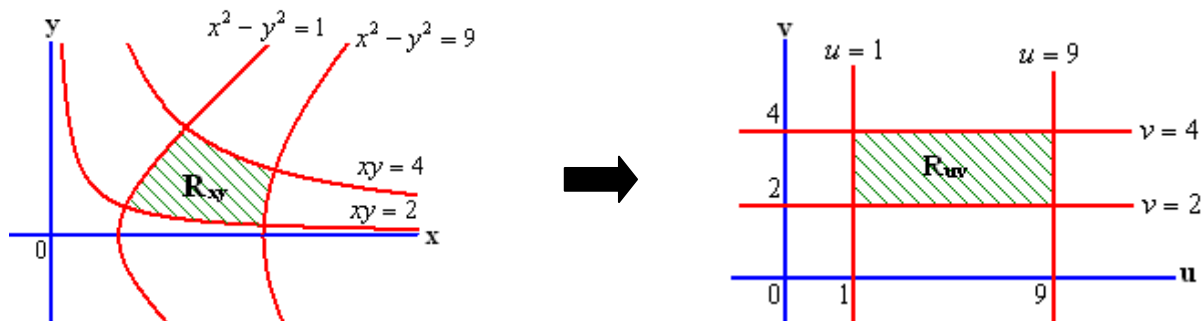
$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{1-x} (x+y) \cos(x-y) dy dx &= \int_0^1 \int_{-u}^u u \cos v \left| -\frac{1}{2} \right| dv du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-u}^u u \cos v dv du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 [u \sin v]_{v=-u}^u du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 [u \sin u - u \sin(-u)] du \\ &= \int_0^1 u \sin u du \\ &= -u \cos u + \sin u \Big|_0^1 \\ &= -\cos 1 + \sin 1 - (0 + \sin 0) \\ &= \sin 1 - \cos 1 \end{aligned}$$

u	$\xrightarrow{+}$	$\sin u$
1	$\xrightarrow{-}$	$-\cos u$
0	$\xrightarrow{-}$	$-\sin u$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\iint_{R_{xy}} (x^2 + y^2) dA$ เมื่อ R เป็นบริเวณในจุดภาคที่หนึ่ง ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง

$$x^2 - y^2 = 1, x^2 - y^2 = 9, xy = 2 \text{ และ } xy = 4$$

วิธีทำ



กำหนดให้ $u = x^2 - y^2$ และ $v = xy$ จะได้ว่า

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{vmatrix} = 2x^2 + 2y^2 = 2(x^2 + y^2)$$

นั่นคือ

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{2(x^2 + y^2)}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \iint_{R_{xy}} (x^2 + y^2) dA &= \iint_{R_{uv}} (x^2 + y^2) \left| \frac{1}{2(x^2 + y^2)} \right| du dv \\ &= \frac{1}{2} \iint_{R_{uv}} du dv \quad \left(\iint_{R_{uv}} du dv = \text{พื้นที่ของ } \square \text{ ผืนผ้า} \right) \\ &= \frac{1}{2} (16) \\ &= 8 \end{aligned}$$

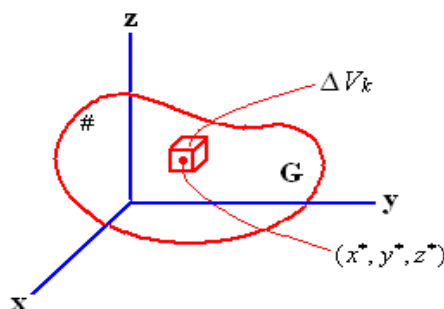
9.2 อินทิกรัลสามชั้น (Triple Integrals)

เรานิยามอินทิกรัลสามชั้นของฟังก์ชัน $f(x, y, z)$ บนบริเวณปิดของทรงสามมิติ G ในลักษณะเดียวกับอินทิกรัลสองชั้น ดังนี้

นิยาม ให้ $f(x, y, z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนรูปทรงสามมิติ G ดังนั้นอินทิกรัลสามชั้นของ f บน G เขียนแทนด้วย $\iiint_G f(x, y, z) dV$ กำหนดโดย

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) (\Delta V_k) \right]$$

โดยที่ลิมิตหาค่าได้

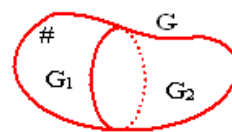


สมบัติของอินทิกรัลสามชั้น

ให้ $f(x, y, z)$ และ $g(x, y, z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนรูปทรง G จะได้ว่า

- 1 $\iiint_G c f(x, y, z) dV = c \iiint_G f(x, y, z) dV$ โดยที่ c เป็นค่าคงตัว
- 2 $\iiint_G [f(x, y, z) \pm g(x, y, z)] dV = \iiint_G f(x, y, z) dV \pm \iiint_G g(x, y, z) dV$
- 3 ถ้า $G = G_1 \cup G_2$ โดยที่ G_1 และ G_2 ไม่มีส่วนที่ซ้อนกัน

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \iiint_{G_1} f(x, y, z) dV \pm \iiint_{G_2} f(x, y, z) dV$$

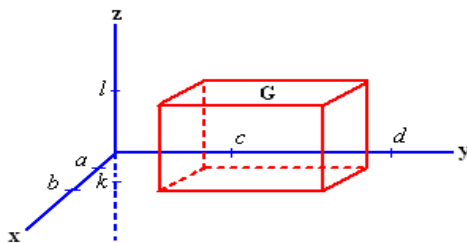


9.2.1 การหาค่าอินทิกรัลสามชั้น

เราจะหา $\iiint_G f(x, y, z) dV$ โดยการศึกษารูปทรง G ที่เป็นรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานก่อน

ทฤษฎีบท ให้ $f(x, y, z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน

$G = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \text{ และ } k \leq z \leq l\}$ ดังรูป



จะได้ว่า

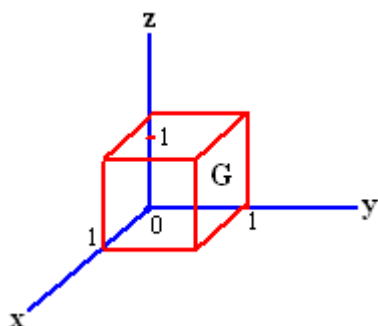
$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_c^d \int_k^l f(x, y, z) dz dy dx$$

หมายเหตุ

- ในการหาค่า $\int_a^b \int_c^d \int_k^l f(x, y, z) dz dy dx$ เราจะอินทิเกรตเทียบกับ z ก่อน (โดย x และ y เป็นค่าคงตัว) แล้วอินทิเกรตเทียบกับ y (โดย x เป็นค่าคงตัว) หลังจากนั้นจึงอินทิเกรตเทียบกับ x
- มีอีก 5 แบบที่เท่ากับ $\int_a^b \int_c^d \int_k^l f(x, y, z) dz dy dx$ คือ $\int_c^d \int_a^b \int_k^l f(x, y, z) dz dx dy$, $\int_k^l \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz$, $\int_c^d \int_k^l \int_a^b f(x, y, z) dx dz dy$, $\int_k^l \int_a^b \int_c^d f(x, y, z) dy dx dz$, $\int_a^b \int_k^l \int_c^d f(x, y, z) dy dz dx$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\iiint_G (x^2 + yz) dV$ เมื่อ G คือกล่องทรงสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่ง $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ และ $0 \leq z \leq 1$

วิธีทำ

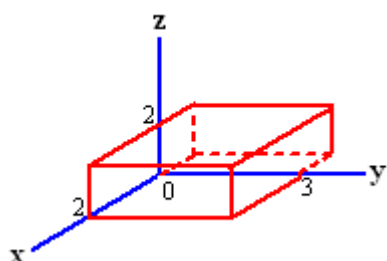


$$\begin{aligned}
 \iiint_G (x^2 + yz) dV &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + yz) dz dy dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 \left[x^2 z + \frac{yz^2}{2} \right]_{z=0}^1 dy dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 \left(x^2 + \frac{y}{2} \right) dy dx \\
 &= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^2}{4} \right]_{y=0}^1 dx \\
 &= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{4} \right) dx \\
 &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{4} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}
 \end{aligned}$$



ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\iiint_G 12xy^2z^3 dV$ เมื่อ $G = \{(x, y, z) | -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3 \text{ และ } 0 \leq z \leq 2\}$

วิธีทำ



$$\begin{aligned}
 \iiint_G 12xy^2z^3 dV &= \int_{-1}^2 \int_0^3 \int_0^2 12xy^2z^3 dx dy dz \\
 &= \int_{-1}^2 \int_0^3 \left[6x^2 y^2 z^3 \right]_{x=-1}^2 dy dz \\
 &= \int_{-1}^2 \int_0^3 (24y^2 z^3 - 6y^2 z^3) dy dz = \int_{-1}^2 \int_0^3 18y^2 z^3 dy dz
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^2 \left[6y^3 z^3 \right]_{y=0}^3 dz \\
&= \int_0^2 162z^3 dz \\
&= 162 \frac{z^4}{4} \Big|_0^2 \\
&= \frac{162}{4} (16 - 0) = 648
\end{aligned}$$

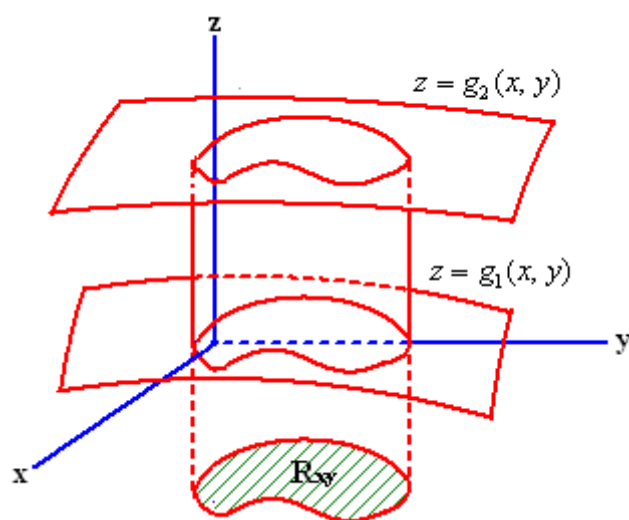
■

ในกรณีที่รูปทรง G ไม่เป็นรูปทรงสี่เหลี่ยมผืนผ้า เราหา $\iiint_G f(x, y, z) dV$ ด้วยทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท ให้ G เป็นทรงสามมิติที่มีพื้นผิวบน $z = g_2(x, y)$ และมีพื้นผิวล่าง $z = g_1(x, y)$ และ R_{xy} เป็นภาพฉายของ G บนระนาบ xy

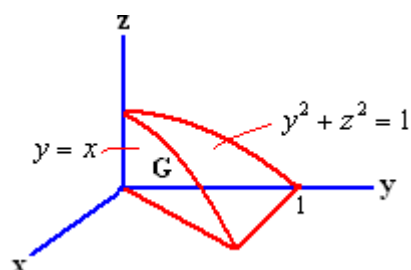
ให้ $f(x, y, z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน G จะได้ว่า

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \iint_{R_{xy}} \left[\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dA$$



ตัวอย่าง ให้ G เป็นทรงสามมิติในอวกาศที่หนึ่ง ซึ่งล้อมรอบด้วยทรงกระบอก $y^2 + z^2 = 1$ ระนาบ $y = x$ และระนาบ $x = 0, z = 0$ จงหาค่าของ $\iiint_G z dV$

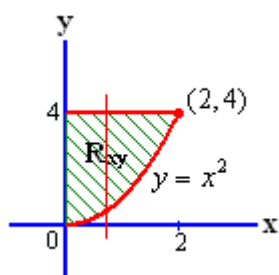
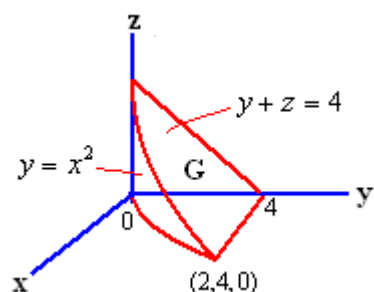
วิธีทำ



ตัวอย่าง จงหา $\iiint_G dV$ เมื่อ G เป็นทรงสามมิติในอวกาศที่หนึ่ง ซึ่งล้อมรอบด้วยระนาบ $y + z = 4$

ทรงกระบอก $y = x^2$ ระนาบ xy และ yz

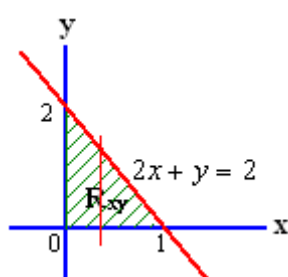
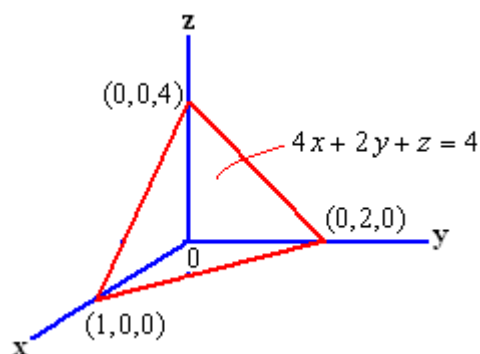
วิธีทำ



$$\begin{aligned}
 \iiint_G z \, dV &= \iint_{R_{xy}} \left[\int_0^{4-y} dz \right] dA \\
 &= \iint_{R_{xy}} [z]_0^{4-y} dA \\
 &= \iint_{R_{xy}} (4-y) dA \\
 &= \int_0^2 \int_{x^2}^4 (4-y) dy dx \\
 &= \int_0^2 \left[4y - \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^4 dx \\
 &= \int_0^2 \left[(16-8) - \left(4x^2 - \frac{x^4}{2} \right) \right] dx \\
 &= \int_0^2 \left(8 - 4x^2 + \frac{x^4}{2} \right) dx \\
 &= 8x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{x^5}{10} \Big|_0^2 = 16 - \frac{32}{3} + \frac{32}{10} = \frac{128}{15}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงหาปริมาตรของทรงสามมิติ G ซึ่งล้อมรอบด้วยระนาบพิกัดทั้งสามและระนาบ $4x + 2y + z = 4$

วิธีทำ

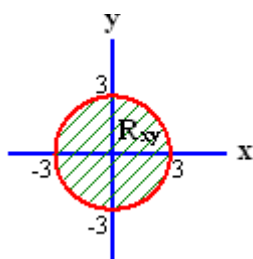
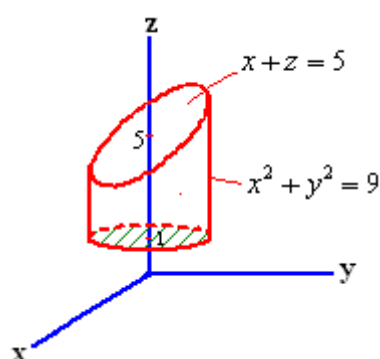


$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_G dV \\
 &= \iint_{R_{xy}} \left[\int_0^{4-4x-2y} dz \right] dA \\
 &= \iint_{R_{xy}} [z]_0^{4-4x-2y} dA \\
 &= \iint_{R_{xy}} (4-4x-2y) dA \\
 &= \int_0^1 \int_0^{2-2x} (4-4x-2y) dy dx \\
 &= \int_0^1 \left[4y - 4xy - y^2 \right]_{y=0}^{2-2x} dx \\
 &= \int_0^1 \left[4(2-2x) - 4x(2-2x) - (2-2x)^2 \right] dx \\
 &= \int_0^1 (4-8x+4x^2) dx \\
 &= 4x - 4x^2 + \frac{4}{3}x^3 \Big|_0^1 \\
 &= 4 - 4 + \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \text{ ลูกบาศก์หน่วย}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงหาปริมาตรของทรงสามมิติ G ที่ล้อมรอบด้วยระนาบ $z=1$ ระนาบ $x+z=5$ และทรงกระบอก

$$x^2 + y^2 = 9$$

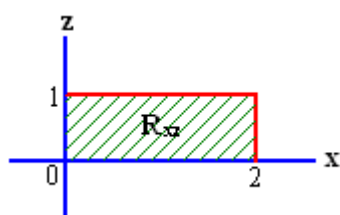
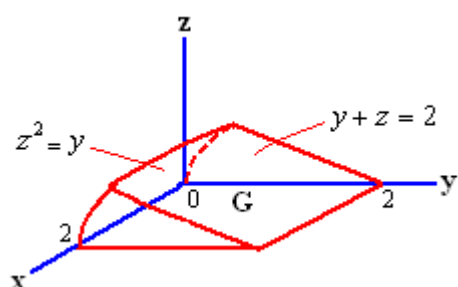
วิธีทำ



ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\iiint_G 2z \, dV$ เมื่อ G เป็นทรงสามมิติที่ปิดล้อมด้วยทรงกระบอก $z^2 = y$ ระนาบ

$y + z = 2$, $x = 0$, $z = 0$ และ $x = 2$

วิธีทำ



$$\begin{aligned}
 \iiint_G 2z \, dV &= \iint_{R_{xz}} \left[\int_{z^2}^{2-z} 2z \, dy \right] dA \\
 &= 2 \iint_{R_{xz}} [zy]_{y=z^2}^{2-z} dA \\
 &= 2 \iint_{R_{xz}} [z(2-z-z^2)] dA \\
 &= 2 \int_0^2 \int_0^1 (2z - z^2 - z^3) \, dz \, dx \\
 &= 2 \int_0^2 \left[z^2 - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} \right]_0^1 dx \\
 &= 2 \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) dx \\
 &= \frac{5}{6} \int_0^2 dx \\
 &= \frac{5}{6} x \Big|_0^2 \\
 &= \frac{5}{6} (2 - 0) = \frac{5}{3}
 \end{aligned}$$

■

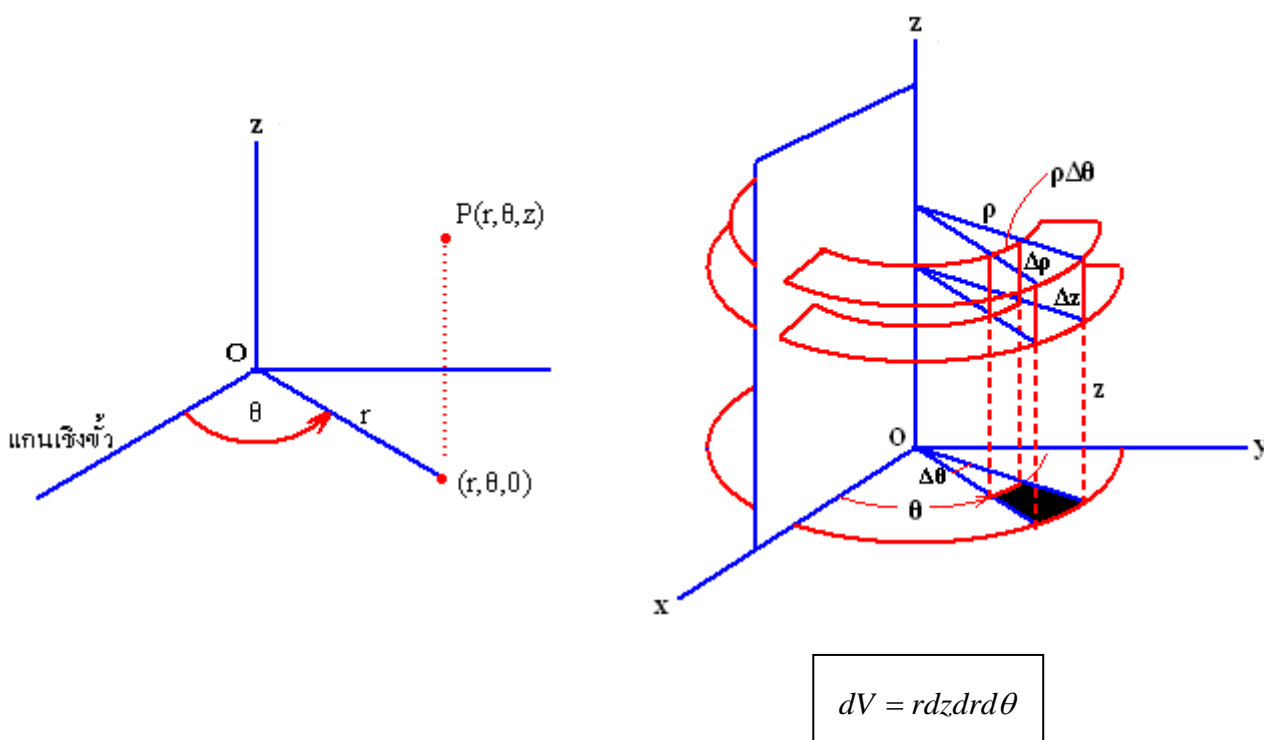
9.2.2 อินทิกรัลสามชั้นในระบบพิกัดทรงกระบอกและระบบพิกัดทรงกลม (Triple Integrals in

Cylindrical and Spherical Coordinates System)

ในหัวข้อที่ผ่านมา การหาค่าอินทิกรัลสองชั้นในระบบพิกัดฉาก x และ y เมื่อมีความยุ่งยาก เราจะเปลี่ยนเป็นระบบพิกัดเชิงขั้ว หรือเปลี่ยนเป็นระบบตัวแปร u และ v ดังกล่าวไว้แล้ว ในทำนองเดียวกัน สำหรับอินทิกรัลสามชั้น ถ้าการหาค่าอินทิกรัลในระบบตัวแปรพิกัดฉาก x, y และ z ยุ่งยาก ก็จะเปลี่ยนมาอินทิเกรตในระบบพิกัดทรงกระบอก หรือพิกัดทรงกลมแทน

9.2.2.1 ระบบพิกัดทรงกระบอก (Cylindrical Coordinates System)

เป็นระบบที่บอกพิกัดของจุด P ในปริภูมิเป็น (r, θ, z) เมื่อ (r, θ) เป็นภาพฉายของจุด P บนระนาบเชิงขั้ว $r\theta$ และ z เป็นระยะจากจุด P ถึงระนาบ $r\theta$ ดังรูป



จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดฉากและระบบพิกัดทรงกระบอก ดังนี้

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad \text{และ} \quad z = z$$

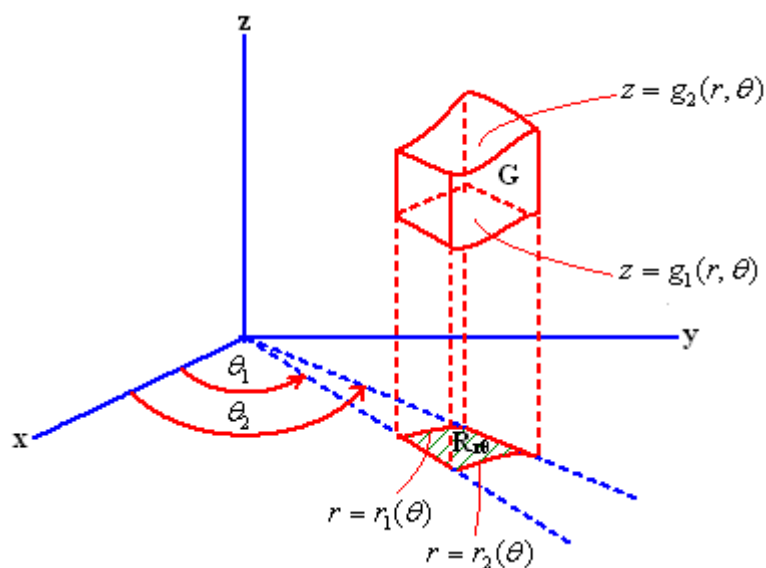
$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \quad \text{และ} \quad z = z$$

ทฤษฎีบท

ให้ G เป็นทรงสามมิติ

เชิงเดี่ยว พื้นผิวบนมีสมการเป็น $z = g_2(r, \theta)$ และพื้นผิวล่างมีสมการเป็น $z = g_1(r, \theta)$ ในระบบพิกัดทรงกระบอก ถ้า $R_{r\theta}$ เป็นภาพฉายของ G บนระนาบ $r\theta$ โดยที่ g_1, g_2 มีความต่อเนื่องบน $R_{r\theta}$ และ $f(r, \theta, z)$ มีความต่อเนื่องบน G แล้ว

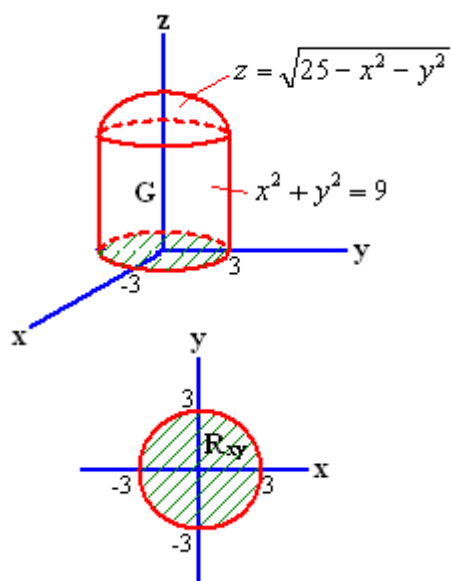
$$\begin{aligned} \iiint_G f(r, \theta, z) dV &= \iint_{R_{r\theta}} \left[\int_{g_1(r, \theta)}^{g_2(r, \theta)} f(r, \theta, z) dz \right] dA \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} \left[\int_{g_1(r, \theta)}^{g_2(r, \theta)} f(r, \theta, z) dz \right] r dr d\theta \end{aligned}$$



ตัวอย่าง จงหาปริมาตรของทรงสามมิติ G ในระบบพิกัดทรงกระบอก เมื่อ G ประกอบด้วยพื้นผิว

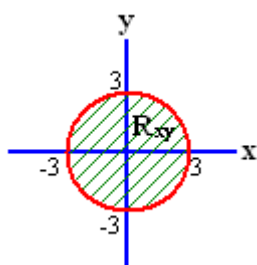
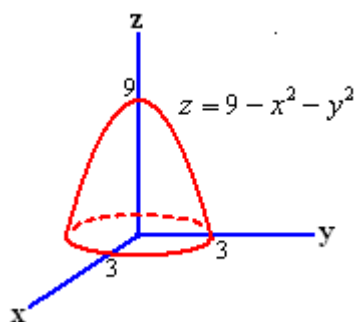
$$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}, \quad z = 0 \quad \text{และ} \quad x^2 + y^2 = 9$$

วิธีทำ



ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{9-x^2-y^2} x^2 dV$ โดยใช้ระบบพิกัดทรงกระบอก

วิธีทำ



$$\begin{aligned}
 \int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{9-x^2-y^2} x^2 dV &= \int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{9-x^2-y^2} x^2 dz dy dx \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^{9-r^2} r^2 \cos^2 \theta \, r dz dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^3 \cos^2 \theta [z]_0^{9-r^2} dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^3 \cos^2 \theta [9-r^2] dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \cos^2 \theta (9r^3 - r^5) dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \left[\frac{9}{4} r^4 - \frac{r^6}{6} \right]_0^3 d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \left[\frac{9}{4} (81) - \frac{729}{6} \right] d\theta \\
 &= \frac{243}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{243}{4} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\
 &= \frac{243}{4} \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{2\pi} \\
 &= \frac{243}{4} [\pi + 0 - (0 + 0)] = \frac{243\pi}{4}
 \end{aligned}$$

■

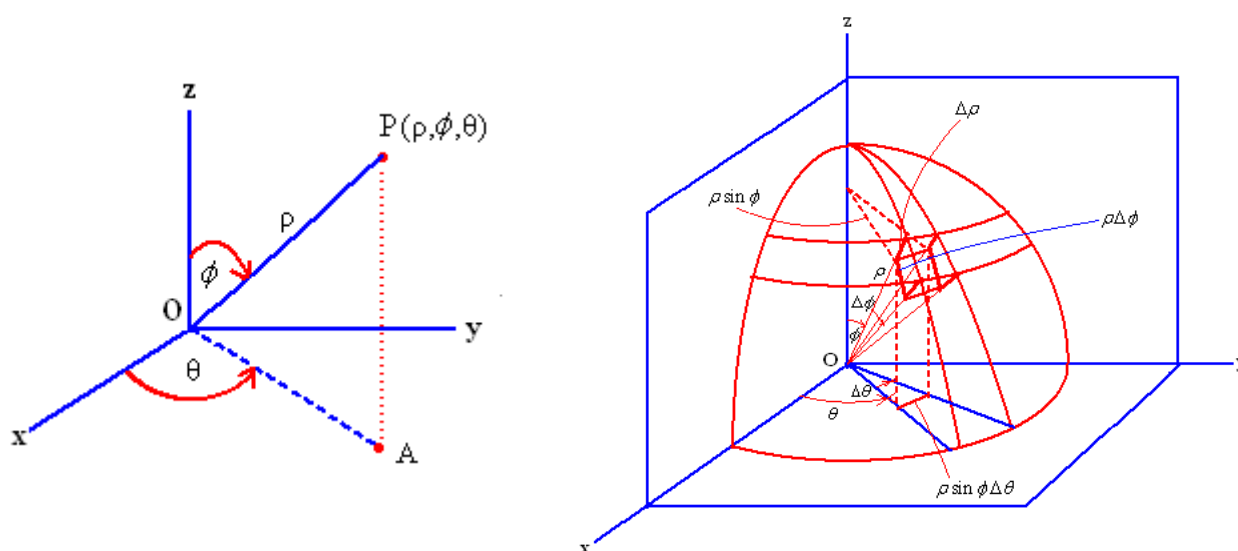
9.2.2.2 ระบบพิกัดทรงกลม (Spherical Coordinates System)

เป็นระบบที่บอกพิกัดของจุด P ในปริภูมิเป็น (ρ, ϕ, θ)

เมื่อ ρ เป็นระยะจากจุด P ไปยังจุดกำเนิด O

ϕ เป็นมุมที่ OP ทำกับแกน z โดยที่ $0 \leq \phi \leq \pi$

และ θ เป็นมุมที่เส้นตรง OA ทำกับแกน x เมื่อ A เป็นภาพฉายของ P บนระนาบ xy โดยที่ $0 \leq \theta < 2\pi$



$$dV = \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

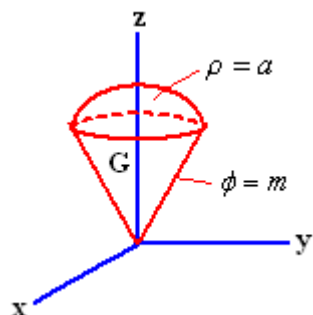
จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดฉากและระบบพิกัดทรงกลม ดังนี้

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \phi = \cos^{-1} \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta \quad z = \rho \cos \phi$$

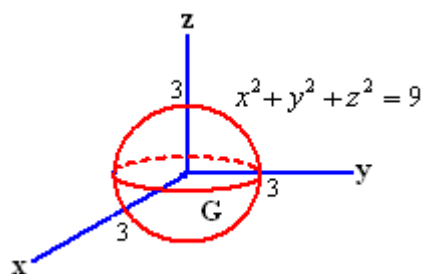
ตัวอย่าง จงหาปริมาตรของ G เมื่อ G เป็นทรงสามมิติที่ล้อมรอบด้วยพื้นผิวบนซึ่งเป็นทรงกลม $\rho = a$ ($a > 0$) และพื้นผิวล่างเป็นกรวยกลม $\phi = m$ ($0 < m < \pi/2$)

วิธีทำ



ตัวอย่าง จงหาปริมาตรของทรงกลมที่มีสมการ $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ โดยใช้ระบบพิกัดทรงกลม

วิธีทำ

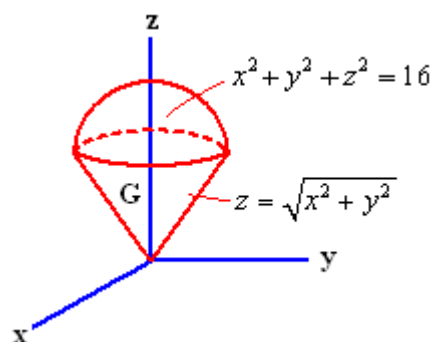


$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_G dV \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^3 \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \phi \left[\rho^3 \right]_0^3 d\phi \, d\theta \\
 &= \frac{3^3}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \phi \, d\phi \, d\theta \\
 &= -\frac{3^3}{3} \int_0^{2\pi} [\cos \phi]_0^\pi d\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{3^3}{3} \int_0^{2\pi} (-1-1) d\theta \\
&= \frac{2(3^3)}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \frac{2(3^3)\theta}{3} \Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{2(3^3)}{3} [2\pi - 0] \\
&= \frac{4}{3} \pi 3^3 \quad \text{ลูกบาศก์หน่วย} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงหาปริมาตรของทรงสามมิติ G ที่มีพื้นผิวบนซึ่งเป็นทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ และพื้นผิวล่างเป็นกรวยกลม $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ โดยใช้ระบบพิกัดทรงกลม

วิธีทำ



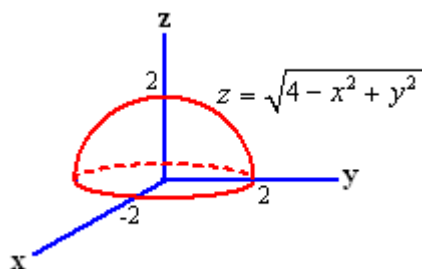
$$\begin{aligned}
\rho \cos \phi &= \rho \sin \phi \\
\tan \phi &= 1 \\
\therefore \phi &= \pi/4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_G dV \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^4 \rho^2 \sin \phi \, d\rho d\phi d\theta \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \sin \phi [\rho^3]_0^4 \, d\phi d\theta \\
&= \frac{64}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \sin \phi \, d\phi d\theta \\
&= -\frac{64}{3} \int_0^{2\pi} [\cos \phi]_0^{\pi/4} \, d\theta \\
&= -\frac{64}{3} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) d\theta \\
&= \frac{64}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \theta \Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{64}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) (2\pi - 0) \\
&= \frac{128\pi}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad \text{ลูกบาศก์หน่วย} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dz dy dx$ โดยใช้ระบบพิกัดทรงกลม

วิธีทำ

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2 \sqrt{x^2+y^2+z^2} \, dz dy dx = \iiint_G z^2 \sqrt{x^2+y^2+z^2} \, dV$$

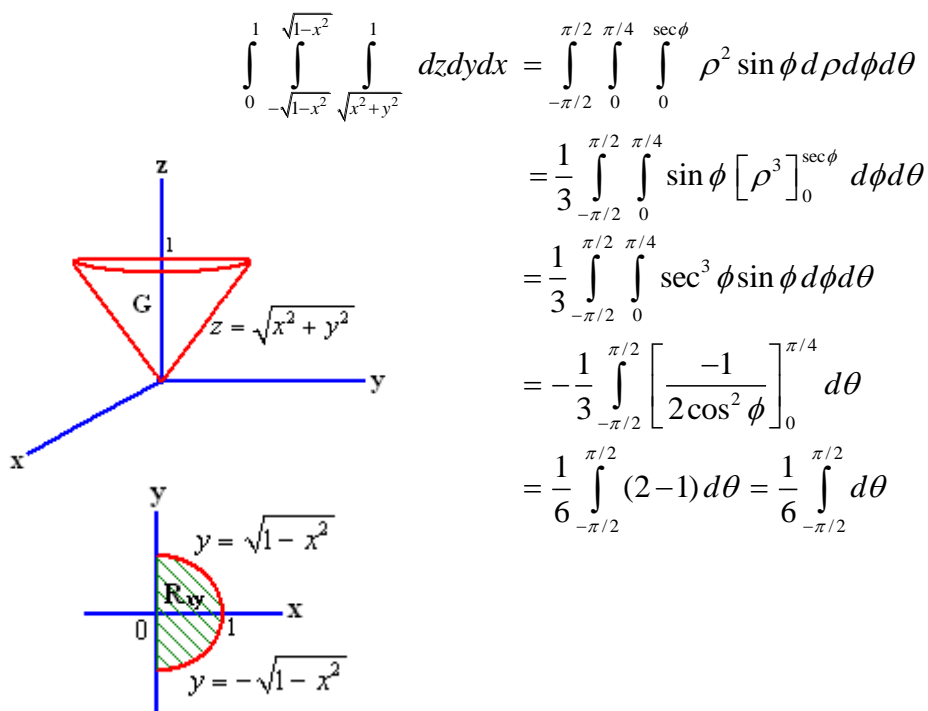


$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^2 (\rho \cos \phi)^2 \rho \rho^2 \sin \phi \, d\rho d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \rho^5 \cos^2 \phi \sin \phi \, d\rho d\phi d\theta \\ &= \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \phi \sin \phi \left[\rho^6 \right]_0^2 d\phi d\theta \\ &= \frac{32}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \cos^2 \phi \sin \phi \, d\phi d\theta \\ &= \frac{32}{3} \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3} \cos^3 \phi \right]_0^{\pi/4} d\theta \\ &= -\frac{32}{9} \int_0^{2\pi} (0-1) d\theta = \frac{32}{9} \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{32}{9} \theta \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{32}{9} (2\pi - 0) = \frac{64\pi}{9} \end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dz dy dx$ ในระบบพิกัดทรงกลม

วิธีทำ



$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dz dy dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sec \phi} \rho^2 \sin \phi \, d\rho d\phi d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} \sin \phi \left[\rho^3 \right]_0^{\sec \phi} d\phi d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} \sec^3 \phi \sin \phi \, d\phi d\theta \\ &= -\frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{-1}{2 \cos^2 \phi} \right]_0^{\pi/4} d\theta \\ &= \frac{1}{6} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2-1) d\theta = \frac{1}{6} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \end{aligned}$$

$$= \frac{\theta}{6} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{6}$$

■

9.2.3 การเปลี่ยนตัวแปรในอินทิกรัลสามชั้น

ทฤษฎีบท ให้ $x = g_1(u, v, w)$, $y = g_2(u, v, w)$ และ $z = g_3(u, v, w)$ โดยที่ g_1, g_2 และ g_3 สามารถหาอนุพันธ์ย่อยได้ จะได้ว่า

$$\iiint_{G_{xyz}} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{G_{uvw}} F(u, v, w) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw$$

โดยที่ $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \neq 0$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ และ $z = z$ จงแปลง $\iiint_{G_{xyz}} f(x, y, z) dx dy dz$ ให้อยู่ในระบบ

พิกัด (r, θ, z)

วิธีทำ
$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_z \\ y_r & y_\theta & y_z \\ z_r & z_\theta & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \iiint_{G_{xyz}} f(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_{G_{r\theta z}} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| dr d\theta dz \\ &= \iiint_{G_{r\theta z}} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) |r| dr d\theta dz \\ &= \iiint_{G_{r\theta z}} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz dr d\theta \end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง กำหนดให้ $x = \rho \sin \phi \cos \theta$, $y = \rho \sin \phi \sin \theta$ และ $z = \rho \cos \phi$

จงแปลง $\iiint_{G_{xyz}} f(x, y, z) dx dy dz$ ให้อยู่ในระบบพิกัด (ρ, ϕ, θ)

วิธีทำ $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = \begin{vmatrix} x_\rho & x_\phi & x_\theta \\ y_\rho & y_\phi & y_\theta \\ z_\rho & z_\phi & z_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \cos \theta & -\rho \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi & -\rho \sin \phi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \sin \phi$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \iiint_{G_{xyz}} f(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_{G_{\rho\phi\theta}} f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} \right| d\rho d\phi d\theta \\ &= \iiint_{G_{\rho\phi\theta}} f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \left| \rho^2 \sin \phi \right| d\rho d\phi d\theta \\ &= \iiint_{G_{\rho\phi\theta}} f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \end{aligned}$$

■

แบบฝึกหัดที่ 1

1 จงหาค่าอินทิกรัลสองชั้น

$$1.1 \int_0^1 \int_0^2 (x+3) dy dx$$

$$1.3 \int_0^{\ln 3} \int_0^{\ln 2} e^{x+y} dy dx$$

$$1.5 \int_{-1}^0 \int_2^5 dx dy$$

$$1.7 \int_0^{\ln 2} \int_0^1 xye^{y^2x} dy dx$$

$$1.8 \iint_R 4xy^3 dA \quad \text{เมื่อ } R = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1 \text{ และ } -2 \leq y \leq 2\}$$

$$1.9 \iint_R x\sqrt{1-x^2} dA \quad \text{เมื่อ } R = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1 \text{ และ } 2 \leq y \leq 3\}$$

$$1.10 \iint_R \cos(x+y) dA \quad \text{เมื่อ } R = \left\{ (x, y) \left| \frac{-\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ และ } 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4} \right. \right\}$$

$$1.2 \int_2^4 \int_0^1 x^2 y dx dy$$

$$1.4 \int_0^3 \int_0^1 x(x^2+y)^{1/2} dx dy$$

$$1.6 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x}{(xy+1)^2} dy dx$$

2 จงหาค่าอินทิกรัล

$$2.1 \int_1^2 \int_{1-x}^{\sqrt{x}} x^2 y dy dx$$

$$2.3 \int_1^2 \int_{x^3}^x e^{y/x} dy dx$$

$$2.5 \int_{\pi/6}^{\pi/4} \int_{\tan x}^{\sec x} (y + \sin x) dy dx$$

$$2.7 \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} y dx dy$$

$$2.9 \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{x^2} \frac{1}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) dy dx$$

$$2.11 \int_0^1 \int_0^x y\sqrt{x^2-y^2} dy dx$$

$$2.2 \int_0^2 \int_{y^2}^{2y} (4x-y) dx dy$$

$$2.4 \int_1^e \int_0^x \ln x dy dx$$

$$2.6 \int_0^1 \int_{x^2}^x xy^2 dy dx$$

$$2.8 \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x^3} \sin\left(\frac{y}{x}\right) dy dx$$

$$2.10 \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x+y) dy dx$$

3 จงวาดรูปบริเวณ R ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้งของสมการในแต่ละข้อต่อไปนี้ แล้วเขียน $\iint_R f(x, y) dA$ ในรูปอินทิกรัลซ้ำ โดยที่ f มีความต่อเนื่องบน R (ไม่ต้องอินทิเกรตออกมา)

$$3.1 \quad y = \sqrt{x}, x = 4, y = 0$$

$$3.2 \quad y = x^3, x = 0, y = 8$$

$$3.3 \quad y = \sqrt{x}, y = x^3$$

$$3.4 \quad 8y = x^3, y - x = 4, 4x + y = 9$$

$$3.5 \quad x = \sqrt{3 - y}, y = 2x, x + y + 3 = 0$$

$$3.6 \quad y = e^x, y = \ln x, x + y = 1$$

4 จงหาค่าอินทิกรัลสองชั้นบนบริเวณ R ที่กำหนดให้

$$4.1 \quad \iint_R 6xy dA \text{ เมื่อ } R \text{ ล้อมรอบด้วยเส้นตรง } y = 0, x = 2 \text{ และเส้นโค้ง } y = x^2$$

$$4.2 \quad \iint_R x \cos xy dA \text{ เมื่อ } R \text{ ล้อมรอบด้วยเส้นตรง } x = 1, x = 2 \text{ และ } y = \pi/2 \text{ และเส้นโค้ง } y = 2\pi/x$$

$$4.3 \quad \iint_R x^2 dA \text{ เมื่อ } R \text{ ล้อมรอบด้วยเส้นตรง } y = x, x = 8 \text{ และเส้นโค้ง } y = 16/x$$

$$4.4 \quad \iint_R x(1 + y^2)^{-1/2} dA \text{ เมื่อ } R \text{ ล้อมรอบด้วยเส้นตรง } y = 4, x = 0 \text{ และเส้นโค้ง } y = x^2 \text{ ในจุดภาคที่ 1}$$

$$4.5 \quad \iint_R (3x - 2y) dA \text{ เมื่อ } R \text{ เป็นบริเวณภายในวงกลม } x^2 + y^2 = 1$$

$$4.6 \quad \iint_R \frac{1}{1 + x^2} dA \text{ เมื่อ } R \text{ เป็นบริเวณภายในสามเหลี่ยมซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ } (0, 0), (1, 1) \text{ และ } (0, 1)$$

$$4.7 \quad \iint_R xy dA \text{ เมื่อ } R \text{ ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง } y = \sqrt{x}, y = 6 - x \text{ และ } y = 0$$

$$4.8 \quad \iint_R (x - 1) dA \text{ เมื่อ } R \text{ ล้อมรอบด้วยเส้นตรง } y = x \text{ และเส้นโค้ง } y = x^3$$

5 จงสลับลำดับสำหรับการอินทิเกรตของ f

$$5.1 \quad \int_0^2 \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy dx$$

$$5.2 \quad \int_0^2 \int_1^{e^y} f(x, y) dx dy$$

$$5.3 \quad \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{1-x^2/4}}^{\sqrt{1-x^2/4}} f(x, y) dy dx$$

$$5.4 \quad \int_0^1 \int_{\sin^{-1} y}^{\pi/2} f(x, y) dx dy$$

6 จงหาค่าอินทิกรัลที่กำหนดให้โดยการสลับลำดับสำหรับการอินทิเกรต

$$6.1 \int_0^1 \int_{2x}^2 e^{y^2} dy dx$$

$$6.2 \int_0^2 \int_{y^2}^4 y \cos x^2 dx dy$$

$$6.3 \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 \frac{y}{\sqrt{16-x^7}} dx dy$$

$$6.4 \int_1^9 \int_{\sqrt{y}}^3 \sin x^3 dx dy$$

$$6.5 \int_1^e \int_0^{\ln x} y dy dx$$

$$6.6 \int_0^1 \int_x^1 \frac{1}{y} \sin y \cos \frac{x}{y} dy dx$$

คำตอบแบบฝึกหัดที่ 1

1

$$1.1 \quad 7 \qquad 1.2 \quad 2 \qquad 1.3 \quad 2 \qquad 1.4 \quad \frac{2}{15}(31-9\sqrt{3}) \qquad 1.5 \quad 3$$

$$1.6 \quad 1-\ln 2 \qquad 1.7 \quad \frac{1}{2}(1-\ln 2) \qquad 1.8 \quad 0 \qquad 1.9 \quad 1/3 \qquad 1.10 \quad 1$$

2

$$2.1 \quad \frac{163}{120} \qquad 2.2 \quad \frac{36}{5} \qquad 2.3 \quad \frac{1}{2}(4e-e^4) \qquad 2.4 \quad \frac{1}{4}(e^2+1) \qquad 2.5 \quad 0.2087$$

$$2.6 \quad \frac{1}{40} \qquad 2.7 \quad 9 \qquad 2.8 \quad \pi/2 \qquad 2.9 \quad 1 \qquad 2.10 \quad \frac{2a^2}{3}$$

$$2.11 \quad 1/12$$

3

$$3.1 \quad \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy dx \quad \text{หรือ} \quad \int_0^2 \int_{y^2}^4 f(x, y) dx dy$$

$$3.2 \quad \int_0^2 \int_{x^3}^8 f(x, y) dy dx \quad \text{หรือ} \quad \int_0^8 \int_0^{y^{1/3}} f(x, y) dx dy$$

$$3.3 \quad \int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy dx \quad \text{หรือ} \quad \int_0^1 \int_{y^2}^{y^{1/3}} f(x, y) dx dy$$

$$3.4 \quad \int_1^2 \int_{9-4x}^{4+x} f(x, y) dy dx + \int_2^4 \int_{x^3/8}^{4+x} f(x, y) dy dx \quad \text{หรือ} \quad \int_1^5 \int_{\frac{9-y}{4}}^{2y^{1/3}} f(x, y) dx dy + \int_5^8 \int_{y-4}^{2y^{1/3}} f(x, y) dx dy$$

$$3.5 \quad \int_{-1-x-3}^1 \int_{2x}^{3-x^2} f(x, y) dy dx + \int_1^3 \int_{-x-3}^{3-x^2} f(x, y) dy dx \quad \text{หรือ} \quad \int_{-6}^2 \int_{-y-3}^{\sqrt{3-y}} f(x, y) dx dy + \int_{-2}^2 \int_{y/2}^{\sqrt{3-y}} f(x, y) dx dy$$

$$3.6 \quad \int_0^1 \int_{1-x}^{e^x} f(x, y) dy dx + \int_1^e \int_{\ln x}^{1+e-x} f(x, y) dy dx \quad \text{หรือ} \quad \int_0^1 \int_{1-y}^{e^y} f(x, y) dx dy + \int_1^e \int_{\ln y}^{1+e-y} f(x, y) dx dy$$

4

$$4.1 \quad 32 \qquad 4.2 \quad -2/\pi \qquad 4.3 \quad 576 \qquad 4.4 \quad \frac{1}{2}(\sqrt{17}-1) \qquad 4.5 \quad 0$$

$$4.6 \quad \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \quad 4.7 \quad 50/3 \quad 4.8 \quad -1/2$$

5

$$5.1 \quad \int_0^{\sqrt{2}} \int_{y^2}^2 f(x, y) dx dy \qquad 5.2 \quad \int_1^{e^2} \int_{\ln x}^2 f(x, y) dy dx$$

$$5.3 \quad \int_{-1}^1 \int_{-2\sqrt{1-y^2}}^{2\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx dy \qquad 5.4 \quad \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin x} f(x, y) dy dx$$

6

$$6.1 \quad \int_0^2 \int_0^{y/2} e^{y^2} dx dy = \frac{e^4 - 1}{4}$$

$$6.2 \quad \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} y \cos x^2 dy dx = \frac{1}{4} \sin 16$$

$$6.3 \quad \int_0^2 \int_0^{x^3} \frac{y}{\sqrt{16+x^7}} dy dx = \frac{8}{7}$$

$$6.4 \quad \int_0^3 \int_0^{x^2} \sin x^3 dy dx = -\frac{1}{3} \cos 27$$

$$6.5 \quad \int_0^1 \int_{e^y}^e y dx dy = \frac{e}{2} - 1$$

$$6.6 \quad \int_0^1 \int_0^y \frac{1}{y} \sin y \cos \frac{x}{y} dx dy = -(\sin 1)(\cos 1 - 1)$$

แบบฝึกหัดที่ 2

1 จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ล้อมรอบด้วยกราฟที่กำหนดให้ โดยใช้อินทิกรัลสองชั้น

1.1 $y = 1/x^2$, $y = -x^2$, $x = 1$, $x = 2$

1.2 $y = \sqrt{x}$, $y = -x$, $x = 1$, $x = 4$

1.3 $y^2 = -x$, $x - y = 4$, $y = -1$, $y = 2$

1.4 $x = y^2$, $y - x = 2$, $y = -2$, $y = 3$

1.5 $y = x$, $y = 3x$, $x + y = 4$

1.6 $x - y + 1 = 0$, $7x - y - 17 = 0$, $2x + y + 2 = 0$

1.7 $y = e^x$, $y = \sin x$, $x = -\pi$, $x = \pi$

1.8 $y = \ln|x|$, $y = 0$, $y = 1$

1.9 $y^2 = 9 - x$, $y^2 = 9 - 9x$

1.10 $y = \cosh x$, $y = \sinh x$, $x = -1$, $x = 1$

1.11 $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \pi/4$

1.12 $y = x^2$, $y = \frac{1}{1+x^2}$

2 จงหาปริมาตรของทรงสามมิติในแต่ละข้อต่อไปนี้ โดยใช้อินทิกรัลสองชั้น

2.1 ทรงสามมิติที่อยู่ใต้ผิว $z = 4x^2 + y^2$ และเหนือบริเวณสี่เหลี่ยมผืนผ้า R ในระนาบ xy ที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(2,0,0)$ และ $(2,1,0)$

2.2 ทรงสามมิติที่อยู่ใต้ผิว $z = x^2 + 4y^2$ และเหนือบริเวณสามเหลี่ยม R ในระนาบ xy ที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0,0,0)$, $(1,0,0)$ และ $(1,2,0)$

2.3 ทรงสี่หน้าในอวกาศที่หนึ่งปิดล้อมรอบด้วยระนาบพิกัด และระนาบ $z = 5 - 2x - y$

2.4 ทรงสามมิติที่ล้อมรอบด้วยทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 9$ และระนาบ $z = 0$, $z = 3 - x$

2.5 ทรงสามมิติที่มีผิวบนเป็นพาราโบลอยด์ $z = 9x^2 + y^2$ และด้านล่างอยู่บนระนาบ $z = 0$ และด้านข้างล้อมรอบด้วยระนาบ $x = 0$, $y = 0$, $x = 3$ และ $y = 2$

2.6 ทรงสามมิติที่มีผิวบนเป็นพาราโบลอยด์ $z = x^2 + y^2$ ด้านข้างเป็นทรงกระบอก $x^2 + (y-1)^2 = 1$ และด้านล่างอยู่บนระนาบ xy

2.7 ทรงสามมิติซึ่งล้อมรอบด้วยพื้นผิว $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = x^2 + y^2$ และ $x + y = 2$

2.8 ทรงสามมิติซึ่งล้อมรอบด้วยพื้นผิว $z = 0$, $z = x$ และ $y^2 = 2 - x$

2.9 ทรงสามมิติซึ่งล้อมรอบด้วยพื้นผิว $z = x^2 - y^2$, $z = 0$, $x = 1$ และ $x = 3$

2.10 ทรงสามมิติในอวกาศที่หนึ่งซึ่งล้อมรอบด้วยพื้นผิว $z = x^2 + y^2$, $x + 3y = 6$

2.11 ทรงสามมิติที่ล้อมรอบด้วยทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 25$ และ $x^2 + z^2 = 25$

คำตอบแบบฝึกหัดที่ 2

- 1.1 $17/6$ 1.3 $33/2$ 1.5 2 1.7 $e^\pi - e^{-\pi}$ 1.9 32
 1.11 $\sqrt{2}-1$ 1.12 $2(\tan^{-1} \sqrt{a} - \sqrt{a^3}/3)$ เมื่อ $a = (-1 + \sqrt{5})/2$
 2.1 $34/3$ 2.3 $125/12$ 2.5 170 2.7 $8/3$ 2.8 $32\sqrt{2}/15$
 2.9 $80/3$ 2.10 $13/2$ 2.11 $2000/3$

แบบฝึกหัดที่ 3

1 จงหาพื้นที่ของบริเวณที่กำหนดให้โดยใช้อินทิกรัลเชิงขั้วสองชั้น

- 1.1 รูปวงหนึ่งส่วนของ $r^2 = 9 \sin 2\theta$
 1.2 ภายใน $r = 2 - 2 \cos \theta$ และภายนอก $r = 3$
 1.3 ภายในเส้นโค้งเลมนิสเคต $r^2 = 8 \cos 2\theta$ และภายนอกวงกลม $r = 2$
 1.4 ภายในบ่วงใหญ่ แต่อยู่ภายนอกบ่วงเล็กของเส้นโค้งลิมาซอง $r = 2 - 4 \cos \theta$
 1.5 บริเวณทางซ้ายมือคือเส้นตรง $\theta = 3\pi/4$ ทางขวามือคือเส้นโค้งคาร์ดิอยด์ $r = 3(1 - \cos \theta)$

2 จงแปลงอินทิกรัลต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอินทิกรัลเชิงขั้ว พร้อมทั้งหาค่าด้วย

- 2.1 $\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} \int_{-\sqrt{\pi-y^2}}^{\sqrt{\pi-y^2}} \sin(x^2 + y^2) dx dy$ 2.2 $\int_0^1 \int_0^{(1-y^2)^{1/2}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$
 2.3 $\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx \quad (a > 0)$ 2.4 $\int_0^1 \int_{x^2}^x (x^2 + y^2)^{1/2} dy dx$

3 จงแปลงอินทิกรัลที่กำหนดให้ ให้อยู่ในรูปอินทิกรัลเชิงขั้วสองชั้น

- 3.1 $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy$ 3.2 $\int_0^1 \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx$
 3.3 $\int_0^2 \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$

4 จงหาค่าต่อไปนี้โดยใช้อินทิกรัลเชิงขั้วสองชั้น

- 4.1 จงหาพื้นที่ที่อยู่นอกวงกลม $x^2 + y^2 = a^2$ และอยู่ภายในวงกลม $x^2 + y^2 = 2ax \quad (a > 0)$
 4.2 จงหาปริมาตรของทรงสามมิติในอวกาศที่หนึ่ง ซึ่งล้อมรอบด้วยพื้นผิว $z = x^2$ และ $x^2 + y^2 = 4$

5 จงใช้การแปลงเชิงเส้นที่เหมาะสม หาค่าอินทิกรัลสองชั้น $\iint_R (x-y)^2 \sin(x+y) dx dy$ เมื่อ R คือรูป

สี่เหลี่ยมด้านขนานซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ และ $(0, \pi)$

6 จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $xy = 4$, $xy = 8$, $xy^3 = 5$ และ $xy^3 = 15$

7 จงใช้การแปลง $x+y=u$ และ $y=uv$ แสดงว่า

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} e^{y/x+y} dy dx = \frac{e-1}{2}$$

คำตอบแบบฝึกหัดที่ 3

1

$$1.1 \quad 9/4 \quad 1.2 \quad \frac{9\sqrt{3}}{2} - \pi \quad 1.3 \quad 4\sqrt{3} - \frac{4\pi}{3} \quad 1.4 \quad 4\pi + 12\sqrt{3} \quad 1.5 \quad \frac{9}{8} \left(\frac{9}{2}\pi - 4\sqrt{2} - 1 \right)$$

2

$$2.6 \quad 2\pi \quad 2.7 \quad \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{e} \right) \quad 2.8 \quad \frac{3}{4} \pi a^4 \quad 2.9 \quad \sqrt{2} - 1$$

3

$$3.1 \quad \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sec \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_{\csc \theta}^0 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

$$3.2 \quad \int_0^{\pi/2} \int_{1/(\cos \theta + \sin \theta)}^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

$$3.3 \quad \int_0^{\pi} \int_0^{2 \sin \theta} f(r) r dr d\theta$$

4

$$4.1 \quad \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a^2 \quad 4.2 \quad \pi$$

$$5 \quad \frac{\pi^4}{3}$$

$$6 \quad 2 \ln 3$$

แบบฝึกหัดที่ 4

ข้อ 1-5 จงหาค่าอินทิกรัลสามชั้นต่อไปนี้

1 $\iiint_G (1+x+y+z)^{-3} dx dy dz$ เมื่อ G คือรูปทรงสามมิติในอวกาศที่หนึ่งซึ่งล้อมรอบด้วยระนาบ

$x+y+z=1$ และระนาบพิกัดทั้งสาม

2 $\iiint_G x dx dy dz$ เมื่อ G คือทรงสามมิติซึ่งล้อมรอบด้วยระนาบ $y=0$, $z=0$, $y=x$, $x+y=2$

และ $x+y+z=3$

3 $\iiint_G \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz$ เมื่อ G คือทรงสามมิติซึ่งล้อมรอบทรงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ โดยที่ a, b

และ c เป็นค่าคงตัวบวก

4 $\iiint_G \sqrt{x^2+y^2} dx dy dz$ เมื่อ G คือทรงสามมิติซึ่งล้อมรอบด้วยส่วนบนของกรวยเชิงวงรี $z^2 = x^2 + y^2$

และระนาบ $z=1$

5 $\iiint_G dV$ เมื่อ G คือรูปทรงสามมิติซึ่งล้อมรอบด้วย $y=x^2$ และ $z^2=4-y$

ข้อ 6-8 จงหาค่าอินทิกรัลสามชั้นต่อไปนี้ โดยแปลงให้อยู่ในรูปพิกัดทรงกระบอก

6 $\iiint_G (x^2+y^2) dx dy dz$ เมื่อ G คือทรงสามมิติที่ล้อมรอบพื้นผิว $x^2+y^2=2z$ และระนาบ $z=2$

7 $\iiint_G dx dy dz$ เมื่อ G คือทรงสามมิติที่ล้อมรอบพื้นผิว $z=x^2+y^2$ และ $z=27-2x^2-2y^2$

8 $\iiint_G z dx dy dz$ เมื่อ G คือทรงสามมิติซึ่งล้อมรอบด้วยระนาบ $x=0$, $y=0$, $z=0$ และพื้นผิว

$x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4-z$

ข้อ 9-11 จงหาค่าอินทิกรัลสามชั้นต่อไปนี้ โดยแปลงให้อยู่ในรูปพิกัดทรงกลม

9 $\iiint_G k\sqrt{x^2+y^2+z^2} dx dy dz$ เมื่อ G คือทรงสามมิติซึ่งอยู่ระหว่างทรงกลม $x^2+y^2+z^2=a^2$ และ

$x^2+y^2+z^2=b^2$ เมื่อ $0 < a < b$

10 $\iiint_G xyz dx dy dz$ เมื่อ $G = \{(x, y, z) | x^2+y^2+z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0 \text{ และ } z \geq 0\}$

11 $\iiint_G [(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{-1/2} dx dy dz$ เมื่อ G คือทรงกลมซึ่งมีรัศมี R และจุดศูนย์กลางอยู่ที่

จุดกำเนิด และจุด (a, b, c) เป็นจุดคงที่ซึ่งอยู่นอกทรงกลม

12 จงหาปริมาตรซึ่งอยู่ภายในทรงกระบอก $x^2+y^2=2x$ และล้อมรอบด้านบนด้วยกรวยกลม

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ และด้านล่างด้วยระนาบ $z=0$

- 13 จงหาปริมาตรซึ่งอยู่ภายในทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 4x$ และล้อมรอบด้านบนด้วยทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ และด้านล่างด้วยระนาบ $z = 0$

คำตอบแบบฝึกหัดที่ 4

1 $\log \sqrt{2} - \frac{5}{16}$

2 $3/2$

3 $\frac{4}{5}\pi abc$

4 $\pi/6$

5 8π

6 $16\pi/3$

7 $243\pi/2$

8 $37\pi/24$

9 $\pi k(b^4 - a^4)$

10 $1/48$

11 $\frac{4}{3}\pi R^3(a^2 + b^2 + c^2)^{-1/2}$

12 $32/9$

13 $\frac{64}{9}(3\pi - 4)$