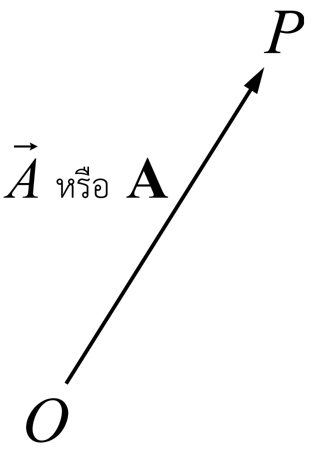
บทที่ 8
เวกเตอร์(Vector)

<u>ปริมาณสเกลาร์และปริมาณเวกเตอร์</u>

ปริมาณสเกลาร์ (*Scalar quantity*)	**ปริมาณเวกเตอร์** (*Vector quantity*)
คือ ปริมาณที่<u>**มีเฉพาะขนาด**</u> แต่ <u>**ไม่มีทิศทาง**</u> เช่น มวล, ความร้อน, ความยาว, เวลา, อุณหภูมิ	คือ ปริมาณที่<u>**มีทั้งขนาด**</u>**และ** <u>**ทิศทาง**</u> เช่น ระยะขจัด, แรง, ความเร็ว, ความเร่ง

ปริมาณเวกเตอร์หรือเรียกสั้นๆว่า**เวกเตอร์** เขียนแทนได้ด้วย<u>**ส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทาง**</u> (*directed line segment*) โดยที่

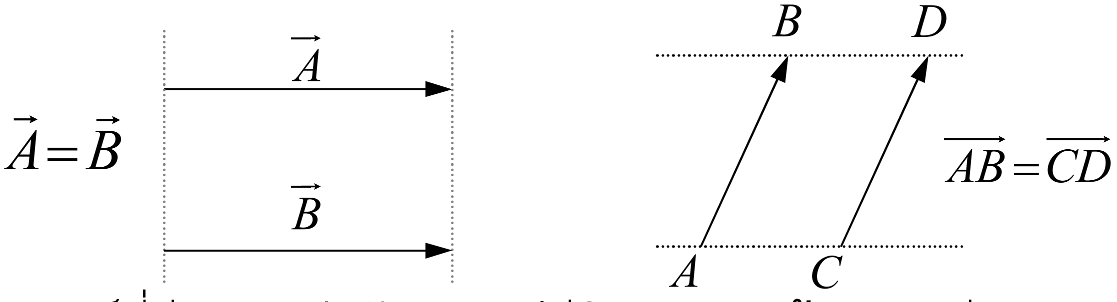


หางลูกศรแทน**จุดเริ่มต้น** (*initial point*)
หัวลูกศรแทน**จุดปลาย** (*terminal point*)
ความยาวของลูกศรแทน**ขนาด**ของเวกเตอร์
ทิศทางของลูกศรแทน**ทิศทาง**ของเวคเตอร์
เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่ O และจุดปลายที่ P เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์________________

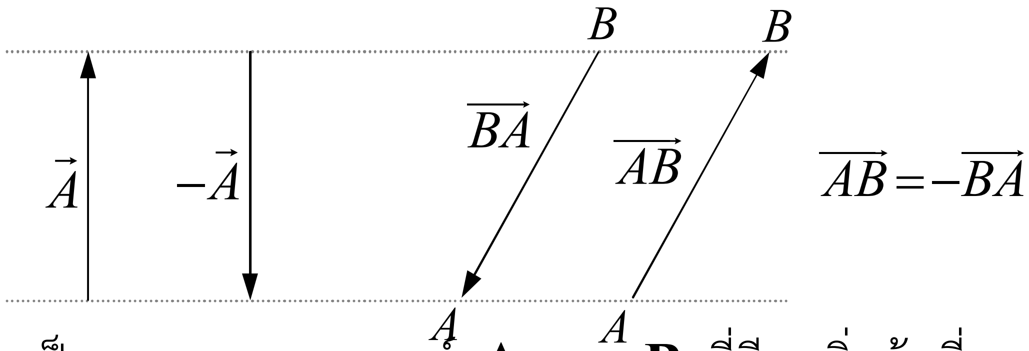
ขนาด (*magnitude* หรือ *length* หรือ *norm*) ของเวกเตอร์เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์_________________________________

<u>คุณสมบัติของเวคเตอร์</u>

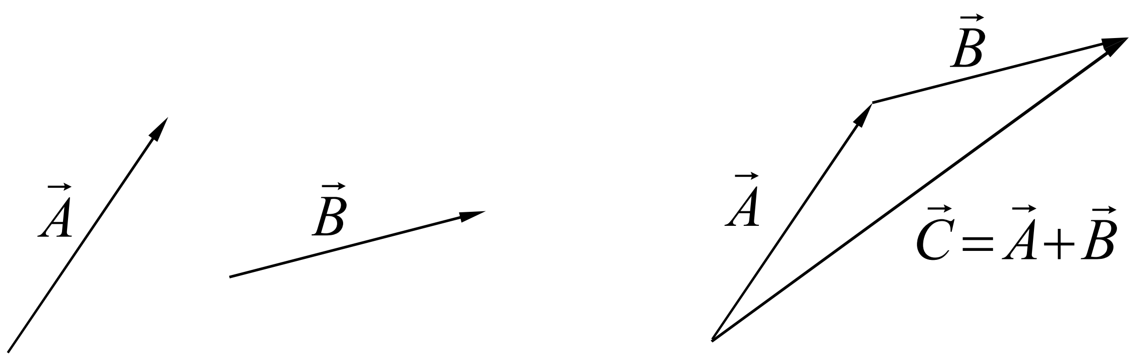
1. เวกเตอร์ $\mathbf{A}=\mathbf{B}$ ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ทั้งสองมี**ขนาด**เท่ากัน และมี**ทิศทาง**ไปทางเดียวกัน



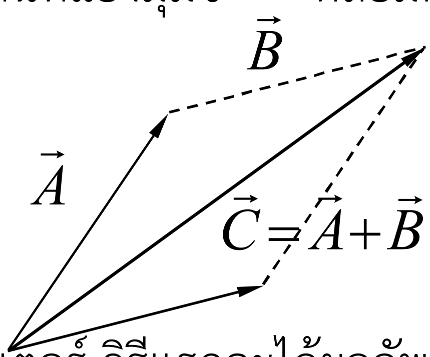
2. เวกเตอร์ที่มี**ขนาด**เท่ากับ $\mathbf{A}$ แต่มี**ทิศทางตรงข้าม** จะเขียนแทนด้วย $-\mathbf{A}$ เรียกเวกเตอร์ลบ $\mathbf{A}$ หรือลบเวกเตอร์ $\mathbf{A}$ หรือนิเสธของ $\mathbf{A}$



3. $\mathbf{C}$ จะเป็นผลบวกของเวกเตอร์ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{B}$ ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดเริ่มต้นของเวกเตอร์ $\mathbf{A}$ และมีจุดปลายที่จุดปลายของเวกเตอร์ $\mathbf{B}$ ภายหลังจากที่วางเวกเตอร์ $\mathbf{B}$ โดยให้จุดเริ่มต้นของ $\mathbf{B}$ ทับกับจุดปลายของ $\mathbf{A}$



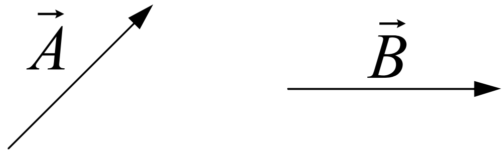
หรือใช้กฎของสี่เหลี่ยมด้านขนาน (*parallelgram law*) ที่มี $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{B}$ เป็นด้านประชิด, เส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมด้านขนานคือ $\mathbf{C}$

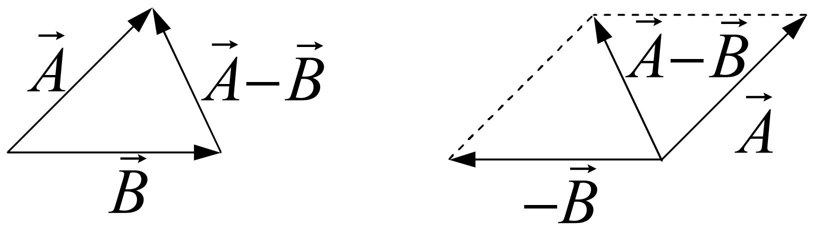


<u>หมายเหตุ</u> ถ้ามีหลายเวกเตอร์ วิธีแรกจะได้ผลลัพธ์เร็วกว่าวิธีที่ 2

4. $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ คือผลต่างของเวกเตอร์ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{B}$ ซึ่งเมื่อบวกกับ $\mathbf{B}$ แล้วจะได้ $\mathbf{A}$

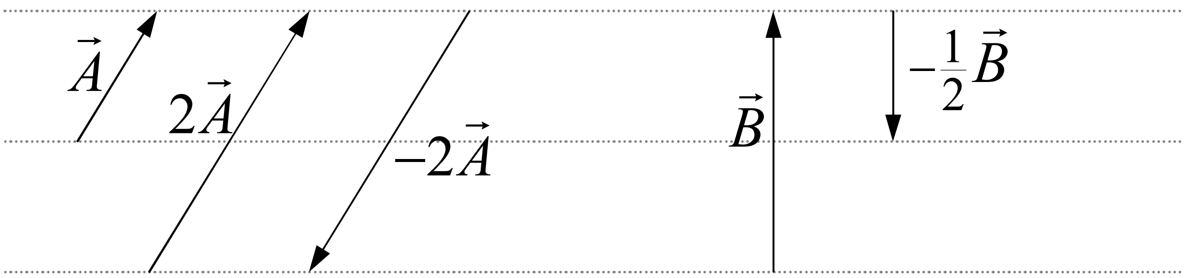
$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-\mathbf{B})$$





ถ้า $\mathbf{A}=\mathbf{B}$ แล้ว เวกเตอร์ผลลัพธ์จะเป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเป็นศูนย์และมีทิศทางไม่แน่นอน ซึ่งเรียกว่า **เวกเตอร์ศูนย์** (*zero vector* หรือ *null vector*) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{0}$ หรือ $\mathbf{0}$

5. ผลคูณของเวกเตอร์ $\mathbf{A}$ กับสเกลาร์ m จะได้ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์ $m\mathbf{A}$ ที่ขนานกับ $\mathbf{A}$ และมีขนาดเป็น m เท่าของขนาดของ $\mathbf{A}$
   - ถ้า $m>0$ แสดงว่า $m\mathbf{A}$ มีทิศทางเดียวกับ $\mathbf{A}$
   - ถ้า $m<0$ แสดงว่า $m\mathbf{A}$ มีทิศตรงข้ามกับ $\mathbf{A}$
   - ถ้า $m=0$ แสดงว่า $m\mathbf{A}=\mathbf{0}$



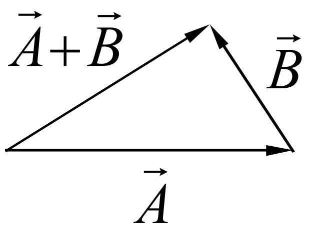
<u>คุณสมบัติทางพีชคณิตของเวกเตอร์</u>

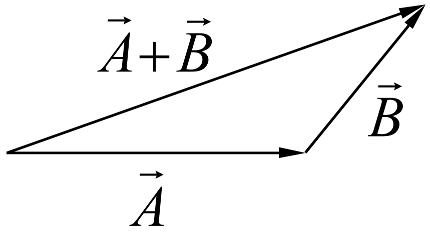
ถ้า $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ และ $\mathbf{C}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆในมิติเดียวกัน และ m, n เป็นสเกลาร์ใดๆ แล้ว

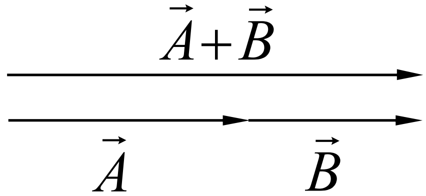
1. $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$ (*Commutative*)
2. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ (*Associative*)
3. $\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{A}=\mathbf{A}$
4. $m\mathbf{A}=\mathbf{A}m$
5. $m(n\mathbf{A})=(mn)\mathbf{A}$
6. $(m+n)\mathbf{A}=m\mathbf{A}+n\mathbf{A}$
7. $m(\mathbf{A}+\mathbf{B})=m\mathbf{A}+m\mathbf{B}$

<u>คุณสมบัติของ *norm* ของเวกเตอร์</u>

1. $\|\mathbf{A}\|>0$ และ $\|\mathbf{A}\|=0$ ก็ต่อเมื่อ $\mathbf{A}=\mathbf{0}$
2. $\|\mathbf{A}\|=\|-\mathbf{A}\|$
3. $\|m\mathbf{A}\|=|m|\,\|\mathbf{A}\|$, m เป็นสเกลาร์ใดๆ
4. $\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|=\|\mathbf{B}-\mathbf{A}\|$
5. $\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\|\le\|\mathbf{A}\|+\|\mathbf{B}\|$







<u>**เวกเตอร์หนึ่งหน่วย(Unit Vector)**</u>

ถ้า $\mathbf{A}$ เป็นเวกเตอร์ซึ่ง $\|\mathbf{A}\| = 1$ แล้วจะเรียก $\mathbf{A}$ ว่า **เวกเตอร์หนึ่งหน่วย(unit vector)**

และถ้า $\mathbf{B}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ซึ่งไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์(*zero vector*) แล้วเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางเดียวกับ $\mathbf{B}$ คือ $\mathbf{u_B} = \dfrac{\mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|}$

<u>**หมายเหตุ**</u> $\mathbf{u_B} = \dfrac{\mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|}$ เป็น *unit vector* ทิศทางเดียวกับ $\mathbf{B}$

และ $\mathbf{u_B} = -\dfrac{\mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|}$ เป็น *unit vector* ทิศตรงข้ามกับ $\mathbf{B}$

<u>การหา unit vector</u> :

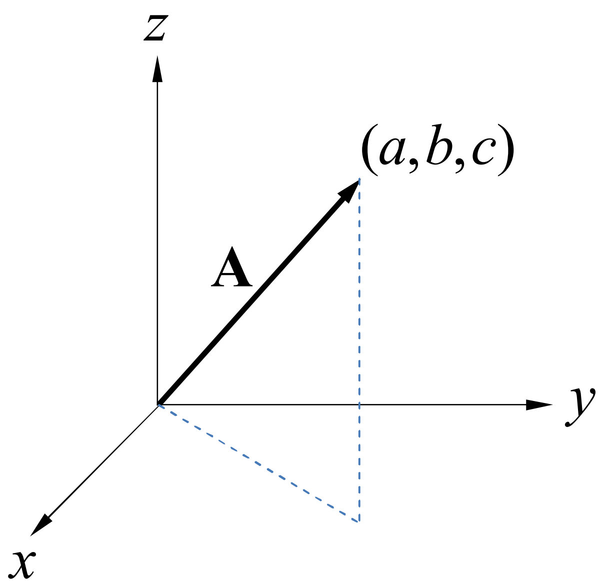
เนื่องจาก $\mathbf{u_B}$ เป็น *unit vector* ในทิศทางเดียวกับ $\mathbf{B}$ ดังนั้น

$\|\mathbf{u_B}\| = 1$ และ $\mathbf{u_B} = \alpha\mathbf{B}$ สำหรับบางค่า $\alpha > 0$

$$\therefore 1 = \|\mathbf{u_B}\| = \|\alpha\mathbf{B}\| = |\alpha|\,\|\mathbf{B}\| = \alpha\|\mathbf{B}\|$$

จะได้ว่า $\alpha = \dfrac{1}{\|\mathbf{B}\|}$ นั่นคือ $\mathbf{u_B} = \alpha\mathbf{B} = \dfrac{\mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|}$

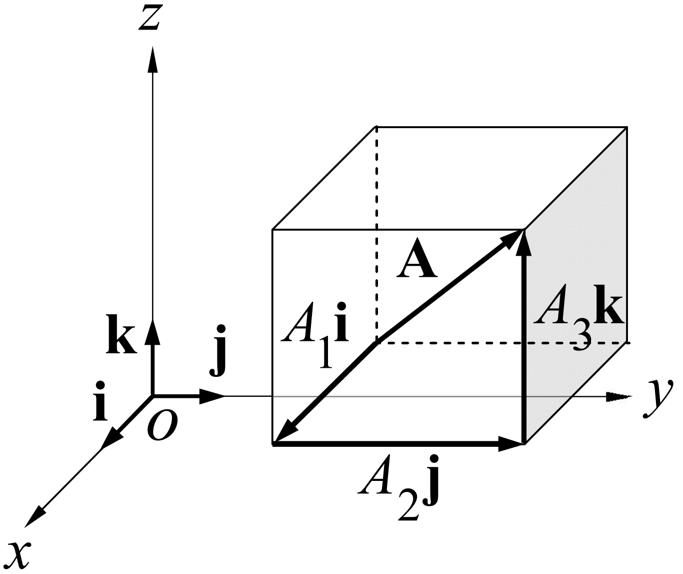
<u>**เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก**</u>



ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้วเวกเตอร์ $\mathbf{A}$ ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด $(0,0,0)$ และจุดสิ้นสุดที่ (a,b,c) สามารถเขียนแทนได้ในรูปส่วนประกอบ(component form) ดังนี้

$$\mathbf{A} = \langle a,b,c \rangle$$

กำหนดให้ $\mathbf{i}=\langle 1,0,0\rangle$, $\mathbf{j}=\langle 0,1,0\rangle$, $\mathbf{k}=\langle 0,0,1\rangle$ เป็น *unit vector* ในทิศทาง ox, oy และ oz ตามลำดับ

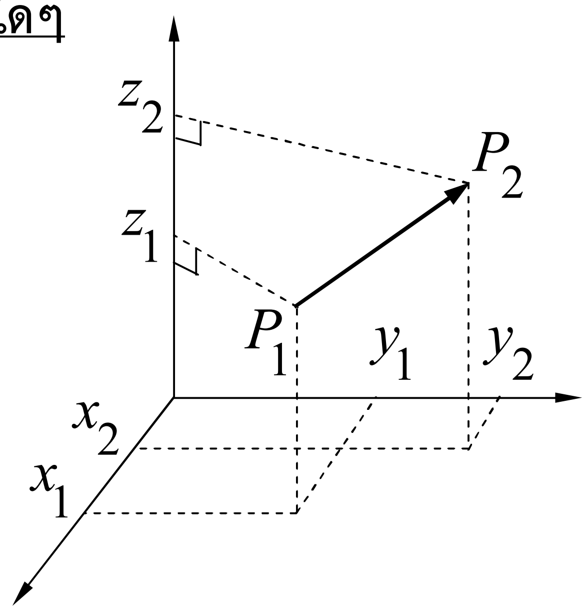


เรียกเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ นี้ว่า **เวกเตอร์ฐาน(*basis vector*)** ทุกๆเวคเตอร์ $\mathbf{A}$ ในระบบพิกัดฉาก สามารถเขียนได้ในรูป**ผลบวกเชิงเส้น** (*linear combination*) ของเวคเตอร์หนึ่งหน่วย $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ ได้ดังนี้

$$\mathbf{A}=A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}$$

โดยที่ A_1, A_2, A_3 เป็น *components* ของ $\mathbf{A}$ ในทิศทาง x, y และ z ตามลำดับ

<u>**เวคเตอร์ระหว่างจุด 2 จุดใดๆ**</u>



ถ้า $P_1(x_1, y_1, z_1)$ และ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ เป็นจุดในระบบพิกัดฉาก แล้วเวกเตอร์ที่กำหนดโดย $\overrightarrow{P_1P_2}$ จะอยู่ในรูป

$$(x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$$

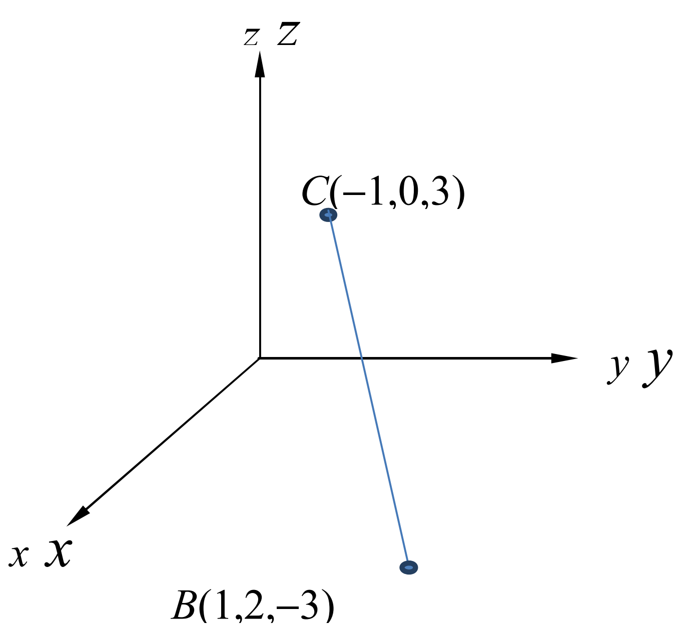
<u>คุณสมบัติของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก</u>

ถ้า $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ และ $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$ แล้วจะได้ว่า

1. $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ ก็ต่อเมื่อ $A_1 = B_1,\ A_2 = B_2$ และ $A_3 = B_3$
2. $\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (A_1 \pm B_1)\mathbf{i} + (A_2 \pm B_2)\mathbf{j} + (A_3 \pm B_3)\mathbf{k}$
3. $m\mathbf{A} = mA_1\mathbf{i} + mA_2\mathbf{j} + mA_3\mathbf{k}$ เมื่อ m เป็นสเกลาร์
4. $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$

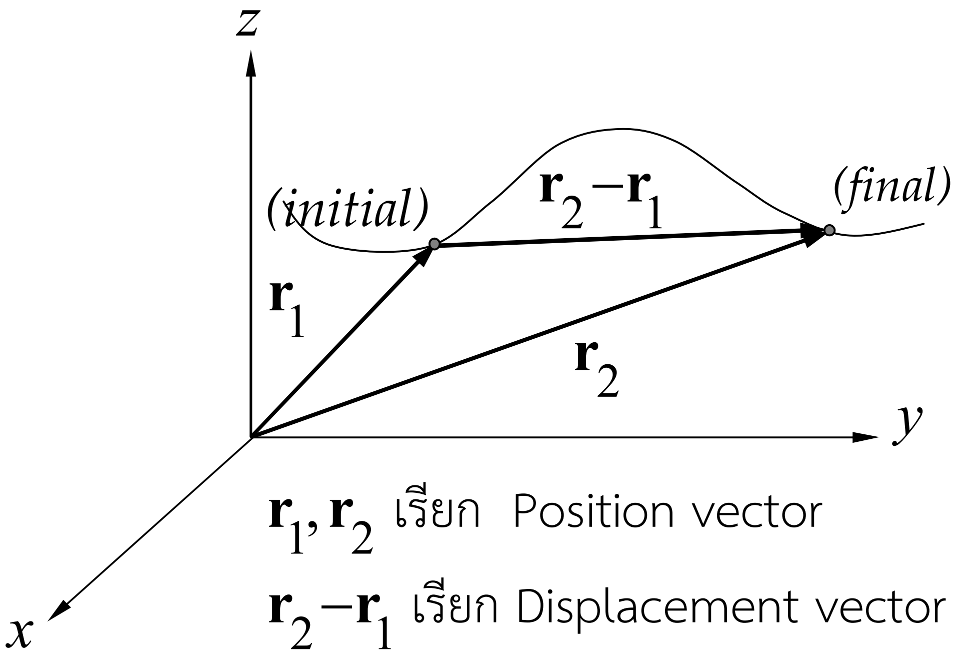
<u>ตัวอย่าง</u> จงหาส่วนประกอบของเวคเตอร์ $\mathbf{A}$ เมื่อเวคเตอร์ $\mathbf{A}$ มีขนาดเท่ากับ 15.3 และมีทิศทางเดียวกันกับส่วนของเส้นตรง $\overline{BC}$ ถ้า B และ C มีโคออร์ดิเนตอยู่ที่ (1, 2, −3) และ (−1, 0, 3)

<u>วิธีทำ</u>



<u>เวกเตอร์ตำแหน่งและเวกเตอร์ขจัด</u>

พิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุภาคไปตามเส้นโค้ง



$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ เรียก Position vector

$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ เรียก Displacement vector

1. **เวกเตอร์ตำแหน่ง**(position vector) ของอนุภาคคือ เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด $(0,0,0)$ และมีจุดสิ้นสุด (x, y, z) ณ ตำแหน่งที่อนุภาคอยู่ เขียนแทนได้ด้วย $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
2. **เวกเตอร์ขจัด**(displacement vector) ถ้าอนุภาคมีการเคลื่อนที่จากตำแหน่งเริ่มต้น (x_1, y_1, z_1) ไปยังตำแหน่งสุดท้าย (x_2, y_2, z_2) แล้วเวกเตอร์ขจัดของอนุภาคนี้คือ

$$(x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$$

<u>หมายเหตุ</u> ถ้าเวกเตอร์ตำแหน่งเริ่มต้น คือ $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$

และเวกเตอร์ตำแหน่งสุดท้าย คือ $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$

แล้วเวกเตอร์ขจัด คือ $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้จุด $P(0,2,4)$ และ $Q(-3,1,5)$ จงหา

ก) เวกเตอร์ตำแหน่งของ P

ข) เวกเตอร์ขจัดจาก P ไปยัง Q

ค) ระยะขจัดระหว่าง P กับ Q

ง) เวกเตอร์ขนาดเท่ากับ 10 ที่ขนานกับ $\overline{PQ}$

<u>วิธีทำ</u>

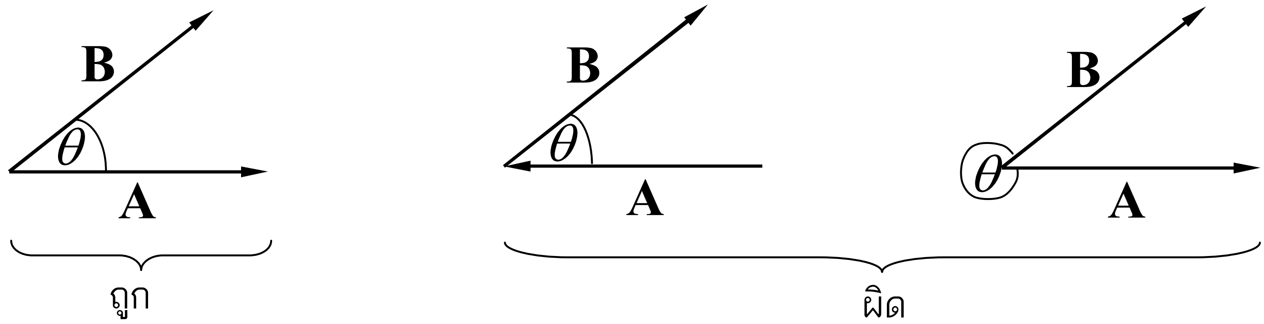
ผลคูณระหว่างเวกเตอร์

● The Scalar Product (ผลคูณเชิงสเกลาร์)

ผลคูณเชิงสเกลาร์ (*scalar product*) ของ 2 เวกเตอร์ $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ นิยามโดย

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \|\mathbf{A}\|\ \|\mathbf{B}\|\cos\theta$$

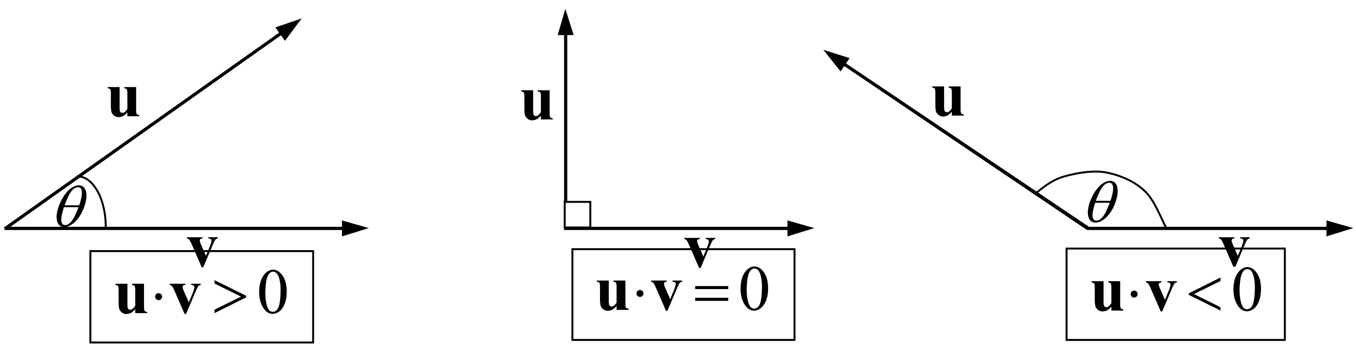
เมื่อ θ เป็นมุมที่น้อยที่สุดระหว่าง $\mathbf{A}$ กับ $\mathbf{B}$ $(0 \le \theta \le \pi)$



หมายเหตุ

- ผลคูณเชิงสเกลาร์ อาจเรียกว่า *dot product* หรือ *inner product*
- ผลคูณเชิงสเกลาร์ระหว่าง 2 เวกเตอร์ใดๆ มีค่าเป็นสเกลาร์ มิใช่เวกเตอร์

ตัวอย่าง พิจารณาผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\mathbf{u}$ และ $\mathbf{v}$ ต่อไปนี้



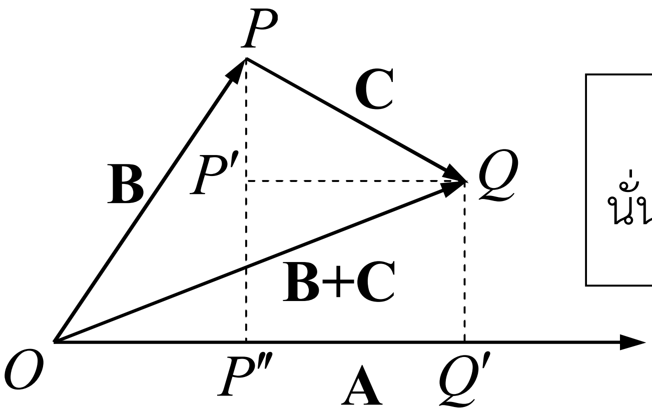
ตัวอย่าง พิจารณาผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ต่อไปนี้

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1 \quad \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = 1 \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1 \quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0 \quad \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0 \quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = 0$$

คุณสมบัติเบื้องต้นของผลคูณเชิงสเกลาร์

1. $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A} \;=\; \|\mathbf{B}\|\,\|\mathbf{A}\|\cos\theta \;=\; \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$

2. $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$ และ $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$



$$OP''+P'Q=OP''+P''Q'$$

นั่นคือ $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C})$

3. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}+\mathbf{D})=\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}$

$(\mathbf{A}+\mathbf{B}+\ldots)\cdot(\mathbf{P}+\mathbf{Q}+\ldots)=\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}+\ldots+\mathbf{B}\cdot\mathbf{P}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{Q}+\ldots$

4. ถ้า $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{B}$ ตั้งฉากซึ่งกันและกัน แล้ว

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \;=\; \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|\cos\frac{\pi}{2} \;=\; 0$$

นั่นคือ ถ้า $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0$ และ $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ ไม่ใช่ *zero vector* แล้ว $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{B}$ ต้องตั้งฉากซึ่งกันและกัน

5. ถ้า $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{B}$ ขนานกันแล้ว

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{cases} \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\| & \text{เมื่อ } \mathbf{A} \text{ และ } \mathbf{B} \text{ มีทิศเดียวกัน} \\ -\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\| & \text{เมื่อ } \mathbf{A} \text{ และ } \mathbf{B} \text{ มีทิศตรงข้ามกัน} \end{cases}$$

และถ้า $\mathbf{B}=\mathbf{A}$ แล้ว $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=\|\mathbf{A}\|^2$

6. $\mathbf{A}\cdot(m\mathbf{B})=(m\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}=m(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$ เมื่อ m เป็น *scalar* ใดๆ

7. $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1$

$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=0$ เพราะว่า $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ ตั้งได้ฉากซึ่งกันและกัน

ในกรณีที่ไม่ทราบมุมระหว่างเวกเตอร์ ค่าผลคูณเชิงสเกลาร์ของสองเวกเตอร์ใดๆที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ $\mathbf{A}=\langle A_1, A_2, A_3\rangle$ และ $\mathbf{B}=\langle B_1, B_2, B_3\rangle$ หาได้จาก

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3$$

<u>ตัวอย่าง</u> เวกเตอร์ $\mathbf{u}=10\mathbf{i}-2\mathbf{j}-7\mathbf{k}$ และ $\mathbf{v}=-4\mathbf{i}-5\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกันหรือไม่

<u>วิธีทำ</u>

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่าของ c ที่ทำให้ $\mathbf{a}=6\mathbf{i}+(c+3)\mathbf{j}-\mathbf{k}$ ตั้งฉากกับ $\mathbf{b}=5\mathbf{i}-2\mathbf{j}+c\mathbf{k}$

<u>วิธีทำ</u>

<u>มุมระหว่างเวคเตอร์</u>

ถ้า $\mathbf{A}\neq 0$, $\mathbf{B}\neq 0$ และ θ เป็นมุมระหว่าง $\mathbf{A}$ กับ $\mathbf{B}$ แล้วจะได้ว่า

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|\ \|\mathbf{B}\|}\right)$$

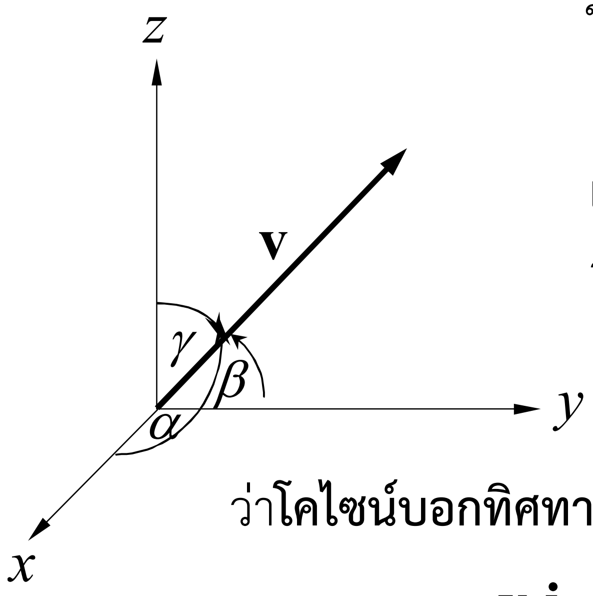
<u>ตัวอย่าง</u> จงหามุมระหว่างเวกเตอร์ $\mathbf{u}$ กับ $\mathbf{v}$ เมื่อกำหนด

$\mathbf{u} = 2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ และ $\mathbf{v} = -2\mathbf{i}-10\mathbf{j}+11\mathbf{k}$

<u>วิธีทำ</u>

<u>มุมบอกทิศทางและโคไซน์บอกทิศทางของเวกเตอร์</u>

(Direction angle and Direction cosine)



ให้ α, β, γ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ $\mathbf{v} = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ กับแกน x, y และ z ตามลำดับ

จะเรียก α, β, γ ว่า**มุมบอกทิศทาง** (direction angle) ของ $\mathbf{v}$ และเรียก $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ว่า**โคไซน์บอกทิศทาง** (direction cosine) ของ $\mathbf{v}$ โดยที่

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{i}}{\|\mathbf{v}\|\ \|\mathbf{i}\|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{j}}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{j}\|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{k}\|} = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

หมายเหตุ 1) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1$

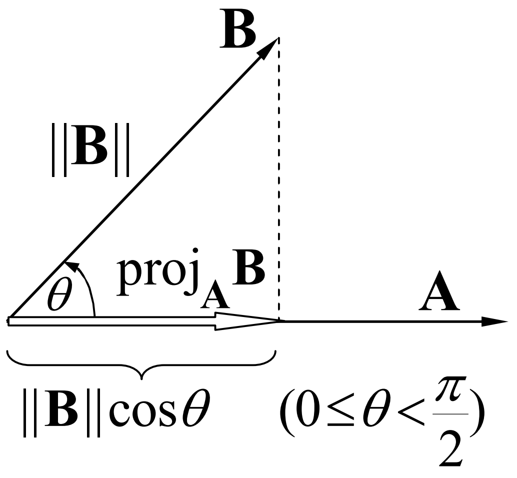
2) เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\mathbf{v}$ คือ

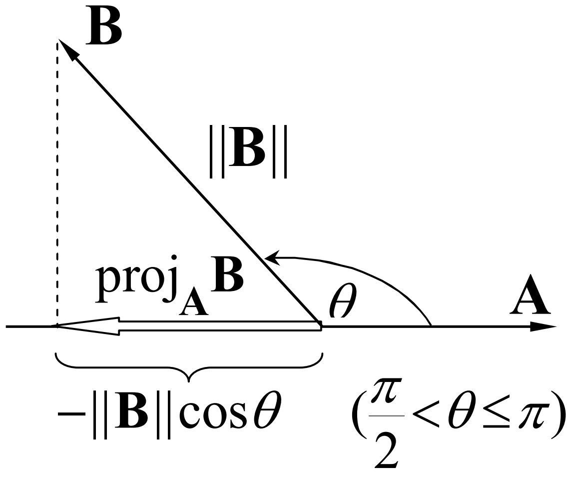
$\cos\alpha\,\mathbf{i}+\cos\beta\,\mathbf{j}+\cos\gamma\,\mathbf{k}$

<u>ตัวอย่าง</u> ให้ $P(3,-2,5)$ และ $Q(-4,1,7)$ จงหาโคไซน์ระบุทิศทางของเวกเตอร์ $\overrightarrow{PQ}$

<u>วิธีทำ</u>

<u>**เวกเตอร์ภาพฉาย**</u> (Vector Projection)





Vector projection ของ $\mathbf{B}$ บนเวกเตอร์ $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ คือ เวกเตอร์ที่อยู่ในรูปผลคูณเชิงสเกลาร์ของ *scalar component* ของ $\mathbf{B}$ ในทิศทางของ $\mathbf{A}$ กับ $\dfrac{\mathbf{A}}{\|\mathbf{A}\|}$ เขียนแทนด้วย $\text{proj}_{\mathbf{A}}\mathbf{B}$ นั่นคือ

$$\boxed{\text{proj}_{\mathbf{A}}\mathbf{B} = \left(\mathbf{B}\cdot\frac{\mathbf{A}}{\|\mathbf{A}\|}\right)\frac{\mathbf{A}}{\|\mathbf{A}\|}} \qquad \boxed{\text{proj}_{\mathbf{A}}\mathbf{B} = -\left(\mathbf{B}\cdot\frac{\mathbf{A}}{\|\mathbf{A}\|}\right)\frac{\mathbf{A}}{\|\mathbf{A}\|}}$$

Unit vector ในแนวภาพฉาย

B·unit vector ในแนวภาพฉาย

<u>**หมายเหตุ**</u>

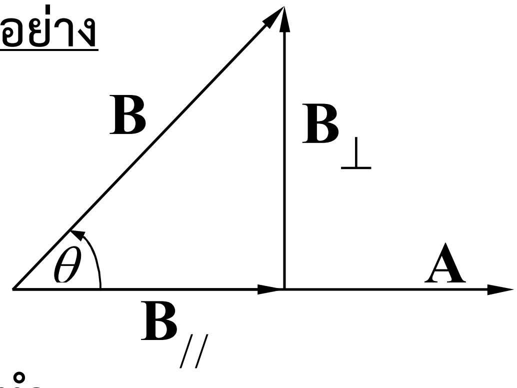
1. $\|\mathbf{B}\|\cos\theta$ เป็น *scalar component* ของ $\mathbf{B}$ ในทิศทางของ $\mathbf{A}$ โดยที่ $\|\mathbf{B}\|\cos\theta = \mathbf{B}\cdot\dfrac{\mathbf{A}}{\|\mathbf{A}\|}$
2. จะเรียก $\left|\mathbf{B}\cdot\dfrac{\mathbf{A}}{\|\mathbf{A}\|}\right|$ ว่า *scalar projection* ของ $\mathbf{B}$ บน $\mathbf{A}$

<u>**ข้อสังเกต**</u>

1. *Vector projection* เป็นเวคเตอร์
2. *Scalar projection* เป็นความยาวของภาพฉาย (ต้องไม่ติดลบ)

3. *Scalar component* อาจติดลบได้ ถ้ามุมระหว่าง $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{B}$ เป็นมุมป้าน

ตัวอย่าง



กำหนดเวคเตอร์ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{B}$ ดังรูป
ถ้า $\mathbf{A} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ และ
$\mathbf{B} = 6\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k}$
จงหา $\mathbf{B}_{\perp}$ และ $\mathbf{B}_{//}$

วิธีทำ

ตัวอย่าง กำหนดให้ $\mathbf{A}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ และ $\mathbf{B}=6\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$

1) *Scalar component* ของ $\mathbf{B}$ บน $\mathbf{A}$

2) *Scalar projection* ของ $\mathbf{B}$ บน $\mathbf{A}$

3) *Vector projection* ของ $\mathbf{B}$ บน $\mathbf{A}$

4) เวกเตอร์ภาพฉายของ $\mathbf{B}$ ที่ตั้งฉากกับ $\mathbf{A}$

วิธีทำ

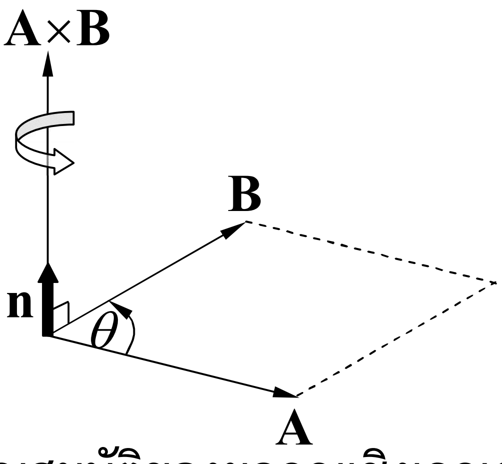
● The Vector Product (ผลคูณเชิงเวกเตอร์)

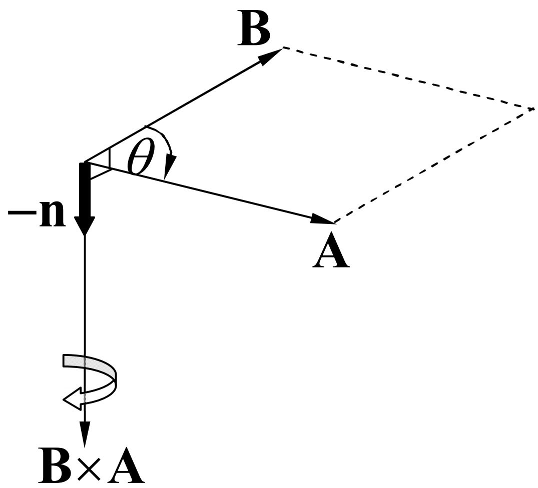
ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (*vector product*) ของ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{B}$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ ซึ่งนิยามโดย

$$\boxed{\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|\sin\theta\ \mathbf{n}}$$ (ผลลัพธ์เป็นเวคเตอร์)

เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\mathbf{A}$ กับ $\mathbf{B}$ $(0\le\theta\le\pi)$

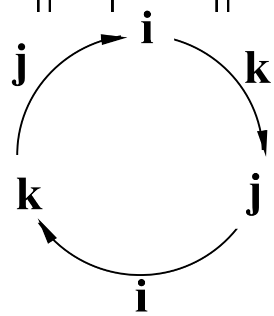
$\mathbf{n}$ เป็น *unit vector* ที่ตั้งฉากกับ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{B}$ ตามกฎมือขวา



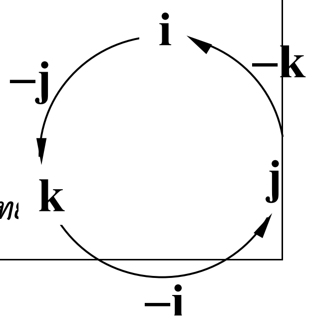


<u>คุณสมบัติของผลคูณเชิงเวกเตอร์</u>

1. $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A}$ (ผลคูณเชิงเวคเตอร์ไม่มีคุณสมบัติการสลับที่)
2. $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\times\mathbf{B})+(\mathbf{A}\times\mathbf{C})$
3. ถ้า $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{B}$ ขนานกัน แล้ว $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\vec{0}$
   ในทางกลับกัน ถ้า $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\vec{0}$ โดยที่ $\mathbf{A}\neq\vec{0}$, $\mathbf{B}\neq\vec{0}$ แล้ว $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{B}$ ต้องขนานกัน
4. ถ้า $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{B}$ ตั้งฉากกัน แล้ว $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|\sin 90^\circ\,\mathbf{n}$
   เมื่อ $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ และ $\mathbf{n}$ อยู่ในระบบกฎมือขวา



5. $\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = 0$
   $\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\quad \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\quad \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$



$$\mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k},\quad \mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i},\quad \mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}$$

หมายเหตุ

เราสามารถหา *vector product* ของ $\mathbf{A}=A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}$ และ $\mathbf{B}=B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k}$ ได้จาก *determinant* ดังนี้

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

ตัวอย่าง กำหนดเวกเตอร์ $\mathbf{P}=2\mathbf{i}-\mathbf{k}$, $\mathbf{Q}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ และ $\mathbf{R}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$ จงหา

1) $(\mathbf{P}+\mathbf{Q})\times(\mathbf{P}-\mathbf{Q})$

2) $\sin\theta$ เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\mathbf{Q}$ กับ $\mathbf{R}$

3) *unit vector* ที่ตั้งฉากกับทั้ง $\mathbf{Q}$ และ $\mathbf{R}$

4) *component* ของ $\mathbf{P}$ ในทิศทางของ $\mathbf{Q}$

วิธีทำ

Triple Product (ผลคูณของสามเวกเตอร์)

เวกเตอร์ $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ มีผลคูณได้ 3 แบบ คือ

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) \quad \text{หรือ} \quad (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C} \quad \text{หรือ} \quad \mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$$

- *Scalar triple product* (ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์)

การคูณ 3 เวกเตอร์ $\mathbf{A}=A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}$, $\mathbf{B}=B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k}$ และ $\mathbf{C}=C_1\mathbf{i}+C_2\mathbf{j}+C_3\mathbf{k}$ เข้าด้วยกันเพื่อให้ได้ผลลัพธ์เป็นสเกลาร์ ทำได้โดยใช้รูปผลคูณ

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$$

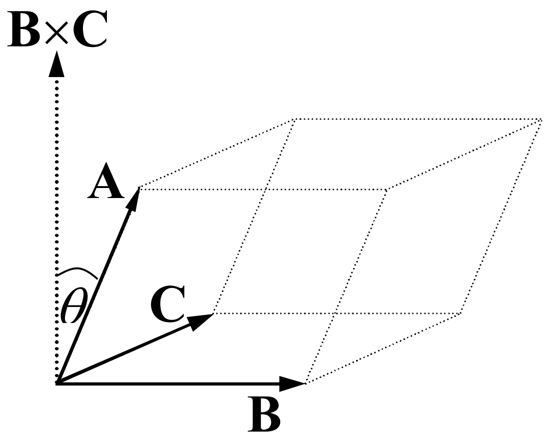
และจะหาค่า $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ ได้ง่ายโดยใช้ดีเทอร์มิแนนท์ช่วยดังนี้

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

คุณสมบัติของ scalar triple product

1. $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ (โดยการสลับ $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ แบบอันดับเป็นวงกลม (cyclic order) ค่าผลคูณสเกลาร์ไม่เปลี่ยนแปลง
2. เวคเตอร์ $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ และ $\mathbf{C}$ จะอยู่บนระนาบเดียวกัน ก็ต่อเมื่อ $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=0$

3. $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ อาจหมายถึง ปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน (*parallelopiped*) ที่มี $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ เป็นด้านประกอบ โดยจะมีค่าเป็นบวกถ้า $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ เรียงตามกฎมือขวา

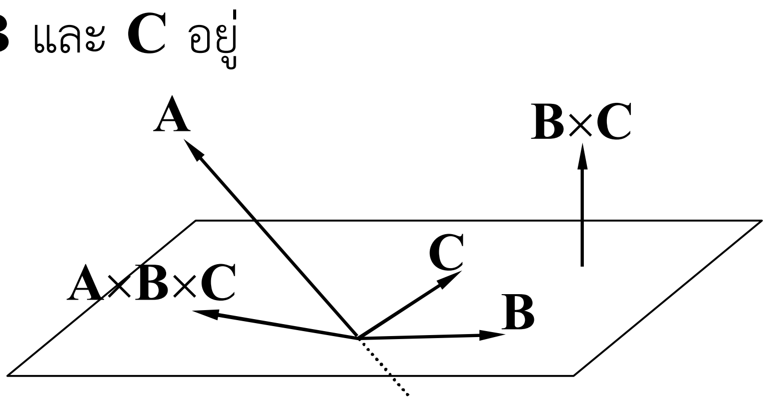


$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=0$ หมายความว่า ปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานมีค่าเป็นศูนย์ หรือรูปทรงนี้มีส่วนสูงเป็นศูนย์ นั่นคือ $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ อยู่บนระนาบเดียวกัน

● *Vector triple product* (ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของสามเวกเตอร์)
การคูณเวกเตอร์ 3 เวกเตอร์ $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ และ $\mathbf{C}$ เข้าด้วยกันเพื่อให้ได้ผลลัพธ์เป็นเวคเตอร์ ทำได้โดยใช้รูปผลคูณดังนี้

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C} \quad \text{หรือ} \quad \mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$$

จากคุณสมบัติของ *vector product* ทำให้ทราบว่า $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ เป็นเวคเตอร์ที่ตั้งฉากกับ $\mathbf{A}$ และตั้งฉากกับ $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ และเนื่องจาก $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ ตั้งฉากกับ $\mathbf{B}$ และ $\mathbf{C}$ ทำให้ได้ว่า $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ จะต้องอยู่บนระนาบเดียวกันกับที่ $\mathbf{B}$ และ $\mathbf{C}$ อยู่



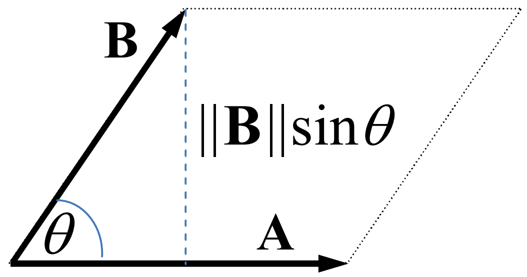
คุณสมบัติของ vector triple product

1. $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C} \neq \mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$ (กฎการจัดหมู่ใช้ไม่ได้ในผลคูณแบบนี้)
2. $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) \neq (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$
3. $\left.\begin{aligned}\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) &= (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}\\ (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} &= (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}-(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\mathbf{A}\end{aligned}\right\}$ Middle term's rule (กฎเทอมกลาง)

<u>วิธีการจำ</u> *vector triple product* จะเท่ากับเวกเตอร์ตัวกลางที่มีสัมประสิทธิ์เป็น *scalar product* ของอีก 2 เวกเตอร์ ลบด้วยเวกเตอร์ในวงเล็บที่มีสัมประสิทธิ์เป็น *scalar product* ของอีก 2 เวกเตอร์

Area and Volume (พื้นที่และปริมาตร)

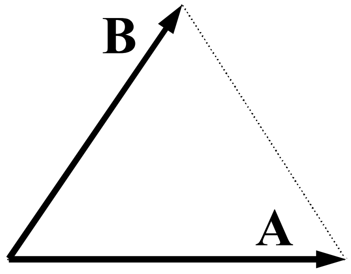
- **พื้นที่ของสี่เหลี่ยมด้านขนาน**ที่มี $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{B}$ เป็นด้านประกอบ



พ.ท. □ ด้านขนาน = (ฐาน)(สูง)

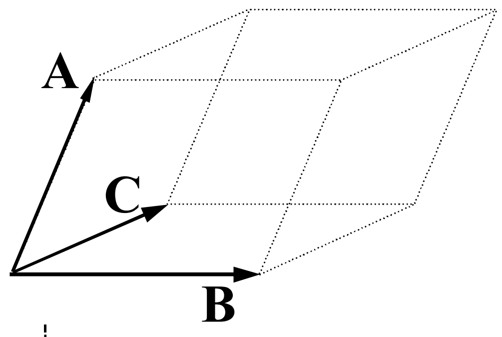
$$= \|\mathbf{A}\|(\|\mathbf{B}\|\sin\theta)$$
$$= \|\mathbf{A}\times\mathbf{B}\|$$

- **พื้นที่ของสามเหลี่ยม**ที่มี $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{B}$ เป็นด้านประกอบ



พ.ท. Δ ที่มี $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{B}$ เป็นด้านประกอบ $= \dfrac{1}{2}\|\mathbf{A}\times\mathbf{B}\|$

● **ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน**ที่มี $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ และ $\mathbf{C}$ เป็นด้านประกอบ



พื้นที่ฐาน $= ||\mathbf{B}\times\mathbf{C}||$

สูง $= \text{proj}_{\mathbf{B}\times\mathbf{C}}\mathbf{A}$

ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ และ $\mathbf{C}$ เป็นด้านประกอบ

$$= (\text{พื้นที่ฐาน})(\text{สูง})$$

$$= \left(||\mathbf{B}\times\mathbf{C}||\right)\left(\frac{|\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})|}{||\mathbf{B}\times\mathbf{C}||}\right)$$

$$= |\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})|$$

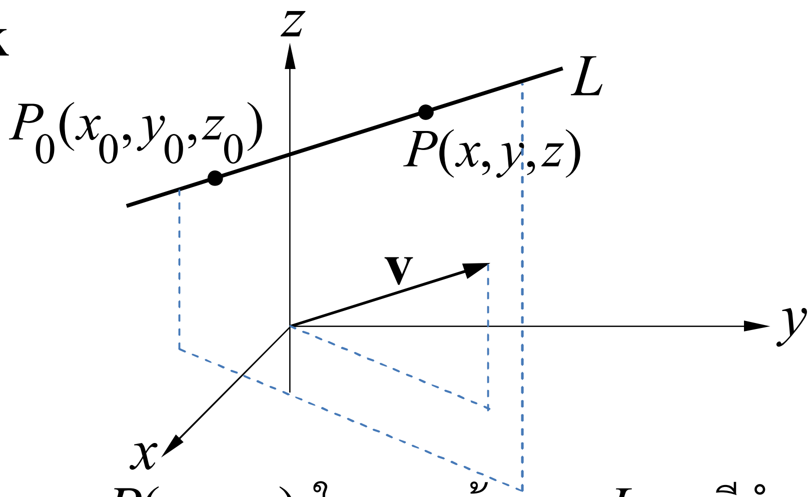
<u>**แบบฝึกหัด**</u> ให้ $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ และ $\mathbf{w} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ จงหา

1) จงหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านของสี่เหลี่ยมเป็น $\mathbf{u}$ และ $\mathbf{v}$

2) จงหาปริมาตรของกล่องสี่เหลี่ยมด้านขนานที่ประกอบจาก $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ และ $\mathbf{w}$

<u>เส้นตรงในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ</u>

ให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_0(x_0,y_0,z_0)$ และขนานกับเวกเตอร์ $\mathbf{v} = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$



ดังนั้น สำหรับทุกๆ จุด $P(x,y,z)$ ใดๆบนเส้นตรง L จะมีจำนวนจริง t ที่ทำให้

$$\overrightarrow{P_0P} = t\,\mathbf{v} \tag{1}$$

หรือ $\langle x-x_0, y-y_0, z-z_0\rangle = \langle ta, tb, tc\rangle$

ซึ่งจะได้

สมการของเส้นตรง L ที่ผ่านจุด $P_0(x_0,y_0,z_0)$ และขนานกับเวกเตอร์ $\mathbf{v} = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ ในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม(parametric equation) คือ

$$x = x_0+at,\quad y = y_0+bt,\quad z = z_0+ct$$

หมายเหตุ

1) $\mathbf{v}$ เรียกว่า<u>เวกเตอร์บอกทิศทาง</u> (*direction vector*)ของเส้นตรง L และเรียก a, b, c ว่า <u>จำนวนบอกทิศทาง</u> (*direction number*)

2) จะเรียกสมการของเส้นตรง L ในรูปแบบ

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

โดยที่ a, b, c ไม่เป็นศูนย์ว่า สมการสมมาตร(*symmetric equation*) ของเส้นตรง L

แต่ถ้ามี a, b หรือ c บางตัวเป็นศูนย์ เช่น $c=0$ สมการสมมาตรของเส้นตรง จะอยู่ในรูป

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b} \quad \text{และ} \quad z-z_0$$

3) จากสมการ (1) ถ้า $\mathbf{r}_0$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของจุด P_0 และ $\mathbf{r}$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของจุด P แล้วสมการเส้นตรง L ในรูปเวกเตอร์คือ

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+t\mathbf{v}$$

ตัวอย่าง จงหาสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-3,1,5)$ และขนานกับเวกเตอร์ $\mathbf{v}=4\mathbf{i}+5\mathbf{j}-6\mathbf{k}$

วิธีทำ

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นตรง L ที่ผ่านจุด $A(-3,4,-8)$ และ $B(10,2,-1)$ พร้อมทั้งพิจารณาว่าเส้นตรง L ตัดระนาบพิกัด xy ที่จุดใด

<u>วิธีทำ</u>

<u>ตัวอย่าง</u> ให้เส้นตรง L ผ่านจุด $A(-1,2,3)$ และ $B(0,1,2)$ จงพิจารณาว่า จุด $C(1,1,5)$ และ $D(-3,4,5)$ อยู่บนเส้นตรง L หรือไม่

<u>วิธีทำ</u>

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นตรง L_1 และ L_2 ดังนี้

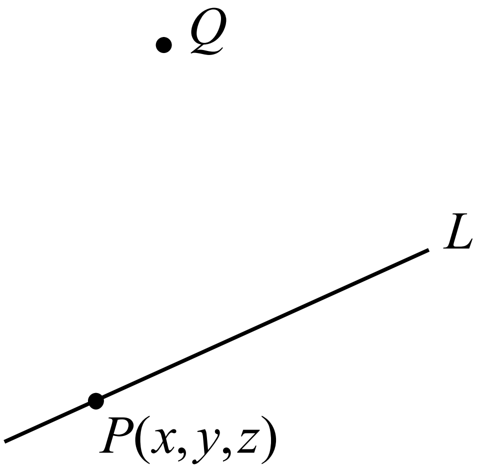
$$L_1 : x=-1+t\ ,\ y=2-t\ ,\ z=2t$$

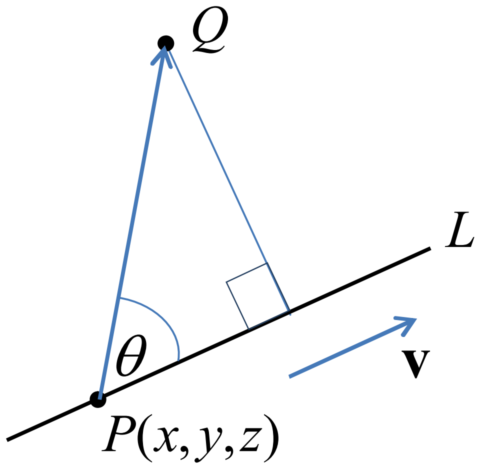
$$L_2 : x=1-s\ ,\ y=-2s\ ,\ z=2+s$$

จงพิจารณาว่าเส้นตรง L_1 และ L_2 ขนานกัน/ตั้งฉาก/ตัดกัน หรือไม่

<u>วิธีทำ</u>

ระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรง



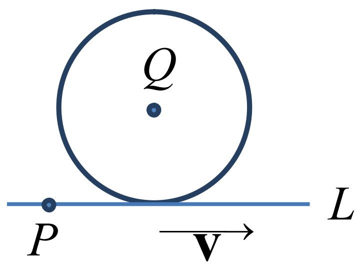


ให้เส้นตรง L ตัดผ่านจุด $P(x,y,z)$ และขนานกับเวกเตอร์ $\mathbf{v}$

ระยะทางระหว่างจุด Q กับเส้นตรง L $=\|\overrightarrow{PQ}\|\sin\theta=\dfrac{\|\overrightarrow{PQ}\times\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}$

ตัวอย่าง ทรงกลมหนึ่งมีเส้นตรง $L: x=1+3t\ ,\ y=6-2t\ ,z=4t$ เป็นเส้นสัมผัส ถ้าทรงกลมนี้มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $Q(2,3,-4)$ จงหารัศมีของทรงกลม

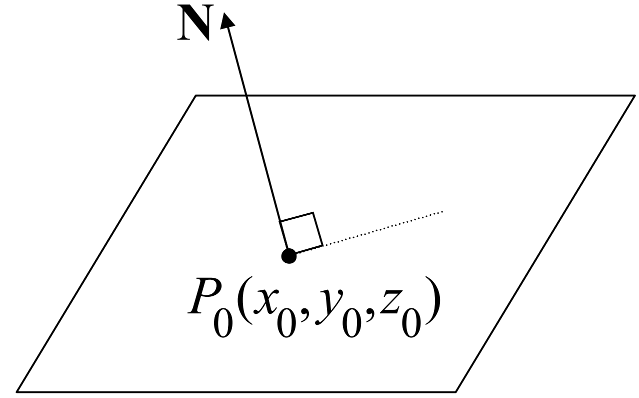
วิธีทำ



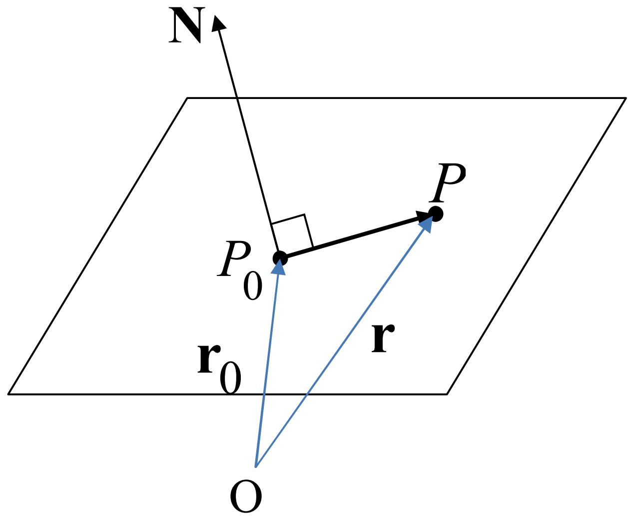
<u>สมการระนาบ</u>

ระนาบ คือ เซตของจุด (x,y,z) ที่สอดคล้องกับสมการ

$$Ax+By+Cz+D=0$$



พิจารณาระนาบที่ผ่านจุด $P_0(x_0,y_0,z_0)$ และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\mathbf{N}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$



ให้ $P(x,y,z)$ เป็นจุดใดๆบนระนาบ
$\mathbf{r}_0$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของจุด P_0
$\mathbf{r}$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของจุด P
แล้วจะได้ว่าเวกเตอร์ขจัด $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ (หรือ $\overline{P_0P}$) ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\mathbf{N}$ ดังนั้น

$$\mathbf{N}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=0$$

$$\langle a,b,c\rangle\cdot\langle x-x_0,y-y_0,z-z_0\rangle=0$$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

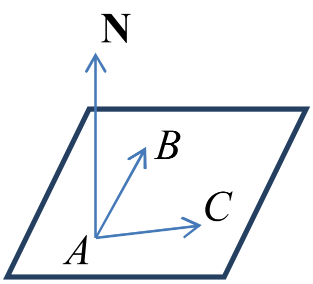
<u>**หมายเหตุ**</u> สำหรับสมการระนาบ $ax+by+cz+d=0$ ถ้า a,b,c,d เป็นค่าคงที่ที่ไม่เท่ากับ 0 แล้ว จะมีเวกเตอร์ตั้งฉากเป็น $a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาสมการของระนาบที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $4\mathbf{i}+2\mathbf{j}-5\mathbf{k}$ และผ่านจุด $(5,-4,10)$

<u>วิธีทำ</u> ระนาบที่ผ่านจุด (x_0, y_0, z_0) และ $\perp$ กับ $\mathbf{N} = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ จะมีรูปสมการเป็น $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0) = 0$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุด $A(4,2,3)$, $B(3,1,-2)$ และ $C(5,3,-6)$

<u>วิธีทำ</u> หา normal vector ของระนาบได้จาก $\mathbf{N} = \overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}$



ตัวอย่าง จงหาจุดที่เส้นตรง $L: x=\frac{8}{3}+2t\ ,\ y=-2t\ ,\ z=1+t$ ตัดกับระนาบ $3x+2y+6z=6$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุด $A(2,3,1)$, ตั้งฉากกับระนาบ $3x-3y+2z=17$ และตัดแกน x ที่พิกัด $(4,0,0)$

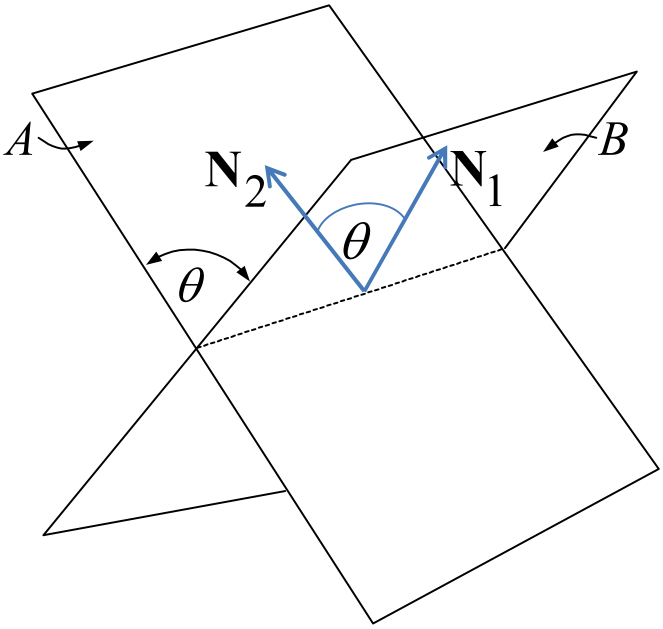
วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุด $P(1,2,-1)$ และขนานกับระนาบที่ผ่านจุด $A(1,-2,0)$, $B(0,2,1)$ และ $C(0,1,0)$

วิธีทำ

มุมและรอยตัดระหว่างระนาบ

● **มุมระหว่างระนาบ** จะมีค่าเท่ากับมุมระหว่าง *normal vector* ของระนาบทั้งสองกระทำกัน



ให้ $\mathbf{N}_1$ และ $\mathbf{N}_2$ เป็น normal vector ของระนาบ A และ B ตามลำดับ

θ เป็นมุมระหว่างระนาบ A และ B

แล้วจะได้ว่า

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2}{\|\mathbf{N}_1\|\,\|\mathbf{N}_2\|}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2}{\|\mathbf{N}_1\|\,\|\mathbf{N}_2\|}\right)$$

●**รอยตัดระหว่างระนาบ**

ระนาบสองระนาบถ้าไม่ขนานกันจะต้องตัดกันเสมอ และรอยตัดของทั้งสอบระนาบจะเป็นเส้นตรงใน 3 มิติ และ $\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$ จะเป็นเวกเตอร์ที่ขนานกับรอยตัดของระนาบทั้งสอง

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดสมการระนาบ

$$T_1 : 2x - y + z - 10 = 0$$

$$T_2 : x + y + z - 5 = \cdots 0$$

1) จงหามุมระหว่างระนาบ T_1 กับ T_2

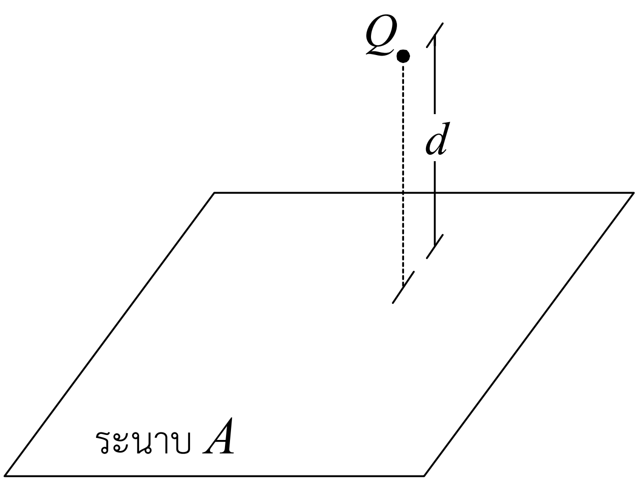
2) จงหาสมการอิงตัวแปรเสริมของสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (1, 2, 3) และขนานกับรอยตัดของระนาบ T_1 กับ T_2

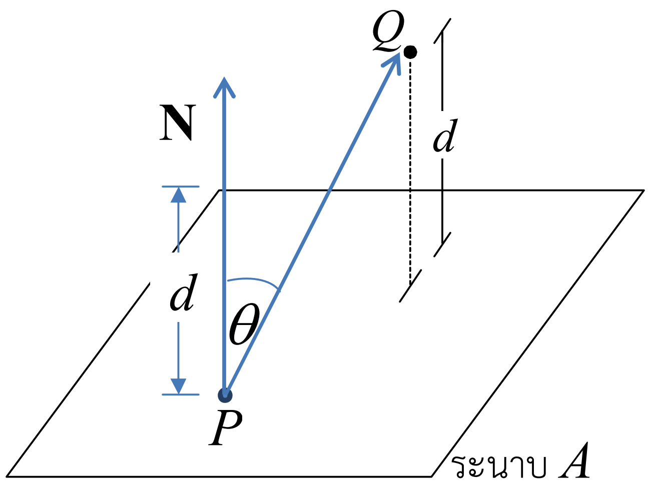
<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงหาสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นตรงที่เป็นรอยตัดระหว่างระนาบ $3x-6y-2z=15$ กับ $2x+y-2z=5$

วิธีทำ

ระยะทางระหว่างจุดกับระนาบ





คำถาม	คำตอบ
ระยะทาง d จากจุด Q ไปยังระนาบ A มีค่าเท่าใด?	ให้ P เป็นจุดใดๆบนระนาบ $d =$

ตัวอย่าง จงหาระยะทางระหว่างจุด $Q(2,-3,4)$ กับระนาบ $x+2y+2z=13$

วิธีทำ

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาระยะทางระหว่างระนาบ $2x-3y+z=7$ กับระนาบ $6x-9y+3z=9$

<u>วิธีทำ</u>

<u>แบบฝึกหัด 1</u>

1. กำหนดเวกเตอร์ $\mathbf{u} = 2\mathbf{i}-4\mathbf{j}+\sqrt{5}\mathbf{k}$ และ $\mathbf{v} = -2\mathbf{i}+4\mathbf{j}-\sqrt{5}\mathbf{k}$

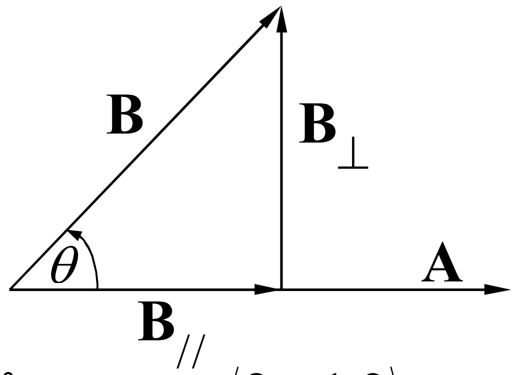
   a) จงหา $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$, $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$

   b) $\cos\theta$ เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\mathbf{u}$ และ $\mathbf{v}$

   c) scalar component ของ $\mathbf{v}$ ในทิศทางของ $\mathbf{u}$

   d) vector projection ของ $\mathbf{v}$ บน $\mathbf{u}$

2. จงหามุมระหว่างเวกเตอร์ $\mathbf{u} = \mathbf{i}+\sqrt{2}\mathbf{j}-\sqrt{2}\mathbf{k}$ และ $\mathbf{v} = -\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$

3. 

กำหนดเวคเตอร์ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{B}$ ดังรูป ถ้า $\mathbf{A} = \mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ และ

$$\mathbf{B} = 8\mathbf{i}+4\mathbf{j}-12\mathbf{k}$$

จงหา $\mathbf{B}_{\perp}$ และ $\mathbf{B}_{//}$

4. กำหนด $\mathbf{u} = \langle 2,-1,3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 0,1,7\rangle$ และ $\mathbf{w} = \langle 1,4,5\rangle$ จงหา

   a) $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ b) $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}$

   c) $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}-2\mathbf{w})$ d) $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})-2\mathbf{w}$

   e) $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ f) $(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$

5. กำหนด $\mathbf{u} = \langle 5,-1,1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 0,1,-5\rangle$ และ $\mathbf{w} = \langle -15,3,-3\rangle$ มีเวกเตอร์ใดบ้างที่ตั้งฉากกัน และเวกเตอร์ใดบ้างที่ขนานกัน

6. จงพิจารณาว่าเวกเตอร์ $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ ที่กำหนดให้ อยู่บนระนาบเดียวกันหรือไม่

   a) $\mathbf{u} = \langle 1,-2,1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3,0,-2\rangle$ และ $\mathbf{w} = \langle 5,-4,0\rangle$

   b) $\mathbf{u} = \langle 4,-8,1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2,1,-2\rangle$ และ $\mathbf{w} = \langle 3,-4,12\rangle$

7. ให้ $P(1,2,-1)$, $Q(3,-1,4)$ และ $R(2,6,2)$ เป็นจุดยอดของสี่เหลี่ยมด้านขนาน $PQRS$ จงหาพิกัดของจุด S

เฉลยแบบฝึกหัด 1

1. a) -25, 5, 5 b) -1 c) -5 d) $\mathbf{v} = -2\mathbf{i}+4\mathbf{j}-\sqrt{5}\mathbf{k}$

2. $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{15}}\right) \approx 1.83 \text{ rad}$

3. $\mathbf{B}_{//} = \frac{14}{3}(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k})$ $\mathbf{B}_{\perp} = \frac{10}{3}\mathbf{i}-\frac{16}{3}\mathbf{j}-\frac{22}{3}\mathbf{k}$

4. a) (-20, -67, -9) b) (-78, 52, -26) c) (24, 0, -16)
   d) (-12, -22, -8) e) (0, -56, -392) f) (0,56, 392)

5. ไม่มีเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกัน; $\mathbf{u}, \mathbf{w}$ เป็นเวกเตอร์ที่ขนานกัน

6. a) อยู่ b) ไม่อยู่ 7. (0, 9, -3)

แบบฝึกหัด 2

1. กำหนดเวกเตอร์

$\vec{A} = \langle 1,3 \rangle$ $\vec{B} = \langle -4,0 \rangle$ $\vec{C} = \langle -2,1,4 \rangle$

$\vec{D} = \langle 4,-2,-8 \rangle$ $\vec{E} = \langle 2,-1,1 \rangle$ $\vec{F} = \langle 1,1,2 \rangle$

จงหา

a) $\vec{B}-2\vec{A}$ b) $\|-2\vec{B}\|\vec{C}+\vec{F}$

c) เวกเตอร์ขนาด 4 หน่วยตามทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{D}$

d) เวกเตอร์คู่ใดบ้างที่ขนานกัน

e) ถ้าจุดสิ้นสุดของ $\vec{E}$ คือ $(2,1,1)$ แล้วจุดเริ่มต้นของ $\vec{E}$ คือพิกัดใด

2. กำหนดเวกเตอร์ให้

$\vec{A} = \vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$ $\vec{B} = -\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$

$\mathbf{C} = 2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ $\mathbf{D} = 3\mathbf{i}-4\mathbf{k}$

จงหา

a) $\|-\mathbf{D}\|(\vec{A}+\vec{B})\cdot\mathbf{D}$

b) มุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{B}$ และ $\mathbf{C}$

c) ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมที่มีเวกเตอร์ $\vec{A}, \vec{B}, \mathbf{C}$ เป็นด้านประกอบ

d) เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับ $\vec{C}$ และ $\vec{D}$

3. กำหนดจุดให้

$$P_1(1,3,-1) \qquad P_2(2,0,4) \qquad P_3(3,-1,-1)$$
$$P_4(-2,2,0) \qquad P_5(7,-2,-1)$$

จงตอบคำถามต่อไปนี้

a) เวกเตอร์ $\overrightarrow{P_2P_3}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\overrightarrow{P_1P_5}$ หรือไม่

b) ถ้า $||k\overrightarrow{P_3P_2}|| = \sqrt{54}$ จงหาค่า k

c) จงหาพื้นที่สามเหลี่ยมที่มีจุด P_1, P_2, P_3 เป็นจุดยอด

d) จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุด P_1, P_2, P_4

e) จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด P_5 และขนานกับเวกเตอร์ $\overrightarrow{P_5P_4}$

4. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-2,0,5)$ และขนานกับเส้นตรง $x = y+1,\ z = 2$

5. จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุด $(-1,2,-5)$ และตั้งฉากกับระนาบ $2x-y+z=1$ และระนาบ $x+y-2z=3$

6. เส้นตรง $\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+1}{-4}$ และระนาบ $3x+2y+z-7=0$ ขนานกันหรือตั้งฉากกัน

7. จงหาระยะทางจากจุด $(2,-3,4)$ ไปยังระนาบ $x+2y+2z=13$

8. จงหามุมระหว่างระนาบ $3x+6y+2z=5$ กับ $4x-y-3z=8$

เฉลยแบบฝึกหัด 2

1. a) $\left\langle -6,6 \right\rangle$ b) $\left\langle -15,9,34 \right\rangle$ c) $\dfrac{4}{\sqrt{84}}\left\langle 4,-2,-8 \right\rangle$

   d) $\vec{C},\vec{D}$ e) $(0,2,0)$

2. a) 20 b) $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{-7}{\sqrt{143}}\right)$ c) 7

   d) $\pm\dfrac{1}{\sqrt{181}}(-8\vec{i}+9\vec{j}-6\vec{k})$

3. a) ไม่ตั้งฉาก b) $k=\pm\sqrt{2}$ c) $\dfrac{1}{2}\sqrt{504}$

   d) $x-8y-5z+18=0$ e) $\dfrac{x-7}{-9}=\dfrac{y+2}{4}=z+1$

4. $x+2=y,\ z=5$ 5. $x+5y+3z+6=0$

6. ขนานกัน 7. 3 8. $\dfrac{\pi}{2}$