传感器线性度计算方法的研究

孙德辉

（自动控制系）

摘　要

线性度是各种仪表和传感器重要静态性能指标之一。在设计、制造、检定和使用仪表和传感器中，经常需要计算线性度。迄今，在国内外的公开出版物上除作者的论文外，尚极少见到有关传感器各种线性度及其工程算法的系统性论述。本文是作者多年研究传感器性能评定计算方法的一篇带总结性文章。本文参考国外一些权威标准，提出四种线性度的定义，并在作者多年独立研究的基础上提出了它们的简明的工程计算方法。经过作者及有关单位几年来的使用，表明这些计算方法是正确而有效的。本文提出的计算方法完全符合国际上 权威性标准机构（国际电工委员会）的有关标准的要求。

1 前　言

大多数传感器的输入输出具有比例关系，这就是线性传感器，绝大多数传感器是线性传感器。即使采用了非线性测量元件的传感器，我们也通过多种途径，使其特性线性化，从而也构成线性传感器。

衡量线性传感器线性优劣的指标为线性度。随参考直线的性质和引法不同，线性度有多种定义。定义一多，便易引起乱混。文献[1]列出四种定义，文献[2]列出五种，而文献[4,5]则列出三种，使人们无所适从。在上述文献中都未给出相应的计算方法，虽然有的计算方法已为人们熟知而不必要给出。

不应该引出众多的线性度定义，而只应该引出有实际意义和用途的定义。作者分析了现有的各种线性度定义，认为提出下列四种线性度是适宜的：

（1）绝对线性度(absolute linearity)；

（2）端基线性度(terminal-based linearty)；

（3）零基线性度(zero-based linearity)；

（4）独立线性度(independent linearity)。

值得提出的是，应该把为求线性度而引出的参考直线和为求经验公式而回归出的直线区别开来。求线性度是处理确定性误差问题，求回归直线则是处理随机误差问题。从这个观点来看，采用最小二乘直线作为计算线性度的参考直线并无什么大的优越性。它虽然能保证偏差的平方和最小，但偏差平方和最小又能保证什么呢？对于同一组试验数据，只有独立线性度才是可能达到的最高线性度。要使最小二乘直线最佳，只有用它来处理理想的线性传感器的试验数据。这种传感器不具有非线性误差，而只有按正态分布的随机误差，这就是在回归意义上使用

本文曾发表在《仪器仪表标准化信息》1987年第2期

最小二乘法。当然，把最小二乘法用在逼近意义上也无不可，甚至效果也不错，只是没有什么特点了。正因为这样，多数正式标准并未专门列出一种最小二乘直线线性度。

前面所列出的四种线性度，各有自己的特点，具有很好的概括性。从计算工作量来说，由小到大；从求最优化的约束来说，从严到宽；从可以获得的线性度数值来说，基本上是由低到高。文献[1]列出的也就是这四种线性度，其中三种则为文献[3,4]所列出。参考作者近年来的研究结果，本文将提出这四种线性度的定义，并讨论它们的特点和用途。最后，给出一个数字示例，以说明它们的具体算法。

2 定义及用法分析

(1) 绝对线性度。有时又称为理论线性度，为传感器实际平均输出特性曲线对一在其跨程内事先规定好的理论直线的最大偏差，以传感器满量程输出的百分比来表示。计算公式为

$$L_{ab} = \frac{\Delta Y_{ab.max}}{Y_{ab.max} - Y_{ab.min}} \times 100\% \tag{1}$$

图 1 所示为绝对线性度的定义。由于绝对线性度用的参考直线是事先按所需要求来确定好的，所以绝对线性度反映的实际上是一种线性精度，它在性质上与后面的几种线性度有很大不同。在几种线性度的要求中，绝对线性度的要求是最严的。

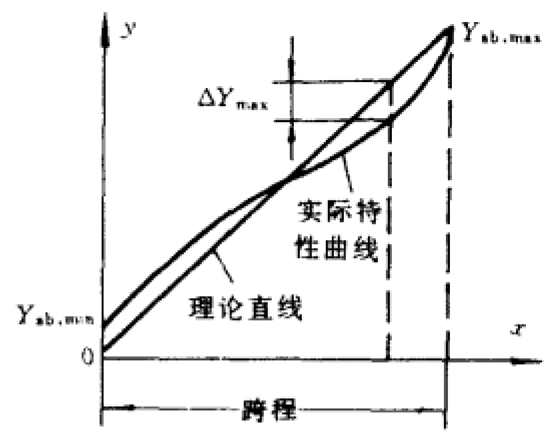


图 1 绝对线性度的定义

线性传感器，在下列情况下一般要求其绝对线性度：

1) 要求传感器具有良好的互换性时；

2) 当传感器用作解算元件时；

3) 当传感器用作大的测量和控制系统的一组成元件时，系统便通常对传感器提出绝对线性度的要求。例如，对具有标准输出的传感器，即变送器，提出的实际上就是绝对线性度要求。

在计算绝对线性度时应当注意，$Y_{ab.max}$和$Y_{ab.min}$并非传感器实际平均输出特性在量程高端和低端的数值，而是理论特性在量程高端和低端的数值。$Y_{ab.max} - Y_{ab.min}$通常可借助理论直线的斜率 b 按下式计算

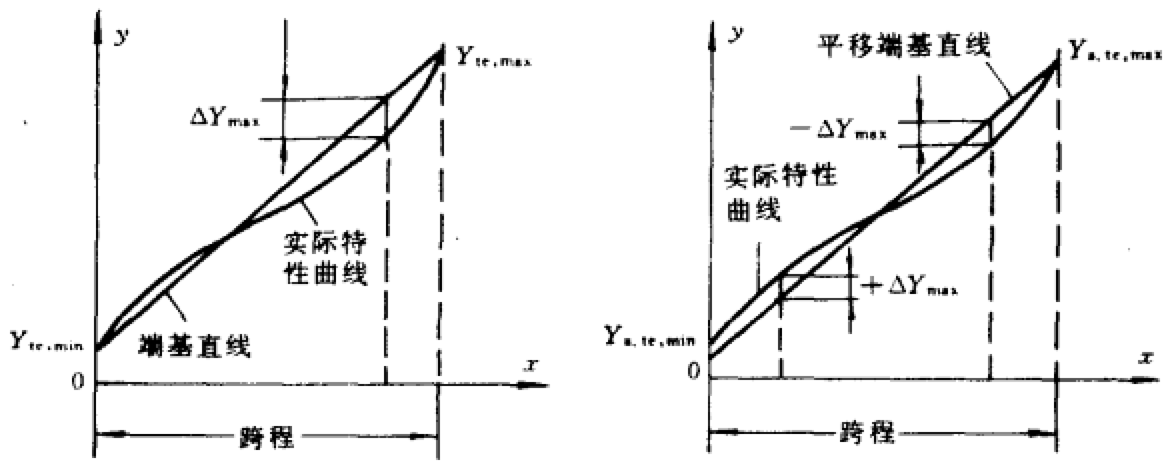
$$Y_{ab.max} - Y_{ab.min} = b(X_{max} - X_{min}) \tag{2}$$

而 $X_{max} - X_{min}$则称为传感器的测量跨程(span)，有的文献又称为测量范围，它是测量上限(高端)和测量下限(低端)的代数差。这一计算方法也适用于后面要讲的三种线性度，只是参考直线的斜率应取各该拟合直线的斜率而已。

(2) 端基线性度。有时又称端点线性度，为传感器实际平均输出特性曲线对端基(或端点)直线的最大偏差，以传感器满量程输出的百分比来表示，而端基直线则定义为由跨程所确定的传感器实际平均输出特性首、末两端点的连线。计算公式为

$$L_{te} = \frac{\Delta Y_{te.max}}{Y_{te.max} - Y_{te.min}} \times 100\% \tag{3}$$

端基线性度的定义示于图 2 中。端基直线方程可写为



(a) 端基线性度定义　　(b) 平移端基线性度定义

图　2

$$Y_{te} = y_{min} - \frac{y_{max} - y_{min}}{X_{max} - X_{min}} X_{min} + \frac{y_{max} - y_{min}}{X_{max} - X_{min}} X \tag{4}$$

或

$$Y_{te} = a + bx \tag{5}$$

式中　$b=\frac{y_{max}-y_{min}}{X_{max}-X_{min}}$——为端基直线斜率。其中,$y_{max}$、$y_{min}$分别为由传感器跨程所确定的实际平均输出特性的最大和最小值;

$a=y_{min}-bX_{min}$——为端基直线截距。

在一般情况下,按端基直线算出的最大正、负偏差绝对值并不相等。为了尽可能减小最大偏差,可将端基直线平移,以使最大正、负偏差绝对值相等,从而得到所谓的"平移端基直线",而按该直线算出的线性度则是所谓的"平移端基直线线性度"。在国外正式标准中未见有这种线性度定义,但在国内一些部门和单位中却颇流行,看来可以考虑把它作为端基线性度的一种补充,在非正式场合下使用。

平移端基直线的斜率和端基直线的相同,其截距则可用下式计算

$$a' = a + \frac{1}{2}[(+\Delta Y_{max}) + (-\Delta Y_{max})] \tag{6}$$

在求偏差时,规定一律应是实际值减理论值,即

$$\Delta Y_{te} = y - Y_{te} \tag{7}$$

端基直线,其定义清楚、求法简便,但却无严格准则可循。按它算出的端基线性度一般偏于保守,故在精密传感器或在需要精确评定线性度的情况下,其应用受到一定限制。平移端基直线已不具端基直线的特点,但它却在数值上改善了端基线性度。当传感器的校准特性曲线呈现单调渐增或渐减性质时,虽然此时按端基直线算出的线性度最保守,但若采用平移端基直线却能得到最高的线性度——独立线性度。因为此时的平移端基直线就是最佳直线。

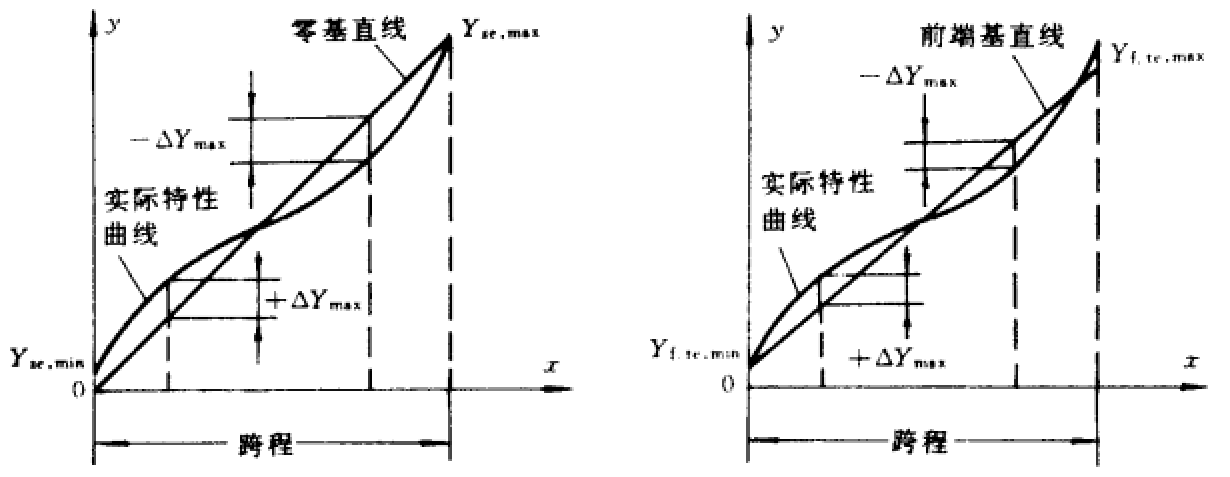
(3) 零基线性度。传感器实际平均输出特性曲线对零基直线的最大偏差,以传感器满量程输出的百分比来表示,而零基直线则定义为这样一条直线,它存在于传感器的跨程内,但可通过或延伸通过传感器的理论零点,并可改变其斜率,以把最大偏差减至最小。计算公式为

$$L_{ze} = \pm \frac{\Delta Y_{ze.max}}{Y_{ze.max} - Y_{ze.min}} \times 100\% \tag{8}$$

零基线性度的定义示于图 3 中,按照其定义,我们可写出零基直线的方程为

$$Y_{ze} = bx \tag{9}$$

式中 b——零基直线的斜率，即传感器的理论零点（即 $X=0,Y=0$ 的点）和最小的最大正、负偏差点的重心连线的斜率。



（a）零基线性度定义　　（b）前端基线性度定义

图 3

零基直线的特点是：通过理论零点并保证最大偏差最小。故零基直线有时又称为强制过零的最佳直线。显然，最大偏差最小必然有最大正、负偏差绝对值相等。还有，在各种参考直线中，零基直线具有最简单的方程形式，这无疑在使用上是最可取的。但是，零基直线一般并不能把一组试验点沿一条直线分布的潜力挖尽，而是牺牲一定线性潜力来求得方程形式最简单。零基直线作为传感器的理论直线看来甚为优越。

在某些情况下，我们为了减小传感器零点或其跨程前端点附近的偏差，而让传感器的工作特性直线通过其实际平均特性的前端点，但可改变其斜率，以尽可能减小最大偏差。这条参考直线可称之为"前端基直线"；但也有文献称之为"零基直线"；还有文献称之为"固定 y 截距的最佳直线"[5]。按该直线算出的线性度可相应地称为"前端基直线线性度"，可以把它作为零基线性度的一种补充。前端基直线的截距就是传感器实际平均特性前端点的 y 坐标值，其斜率的计算方法十分类同于零基直线斜率的求法。

（4）独立线性度。其定义如图 4 所示，为传感器实际平均输出特性曲线对最佳直线（best-fit line）的最大偏差，以传感器满量程输出的百分比来表示，而最佳直线则定义为传感器跨程内既相互最靠近而又能包容传感器实际平均输出特性曲线的两条平行线间的中位线。计算公式为

$$L_{in} = \pm \frac{\Delta Y_{in,max}}{Y_{in,max} - Y_{in,min}} \times 100\% \qquad (10)$$

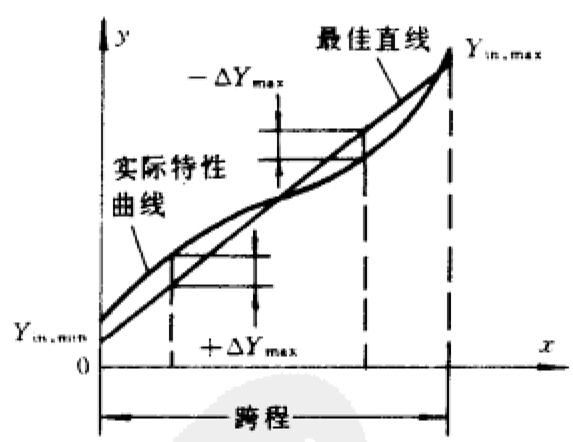


图 4　独立线性度的定义

最佳直线的本质特点，乃是它能保证最大偏差为最小，因而独立线性度是各种线性度中可以到达的最高的线性度*。优良的独立线性度是获得优良的其他线性度的基础。独立线性度是衡量传感器线性特性的最客观标准，现已在国际上获得广泛应用，国内也在推广使用中。通常，在传感

* 在各种参考直线中，最佳直线所造成的 ΔY_{max} 无疑是最小的，但因各参考直线的 $Y_{max}-Y_{min}$ 不相同，也有可能在极个别情况下独立线性度 L_{in} 不是最高的

器的标称性能指标中，如无特别说明，所列线性度便一律指独立线性度。

求独立线性度的关键在于求最佳直线。把最佳直线认为就是最小二乘直线，这是一种误解。最佳直线是客观地存在于一组确定的试验数据中的，并有其唯一性。求最佳直线的方法有计算法和图解法，或二者的结合。但是，以图解法配合一定的计算最简便，本文后面的数字示例将给予具体说明。

下面，我们再稍微谈谈独立线性度和最佳直线的使用。如果是独立研制一种传感器，其理论特性直线可以在一批传感器标定之后，选定一条合适的参考直线来充当即可。端基直线、平移端基直线、最小二乘直线，以及其他一些采用某种平均法求出的直线，由于他们并无很大的使用特点，看来只有零基直线和最佳直线是最值得加以考虑的候选直线。

当传感器作为一台独立的测量设备使用时，我们当然希望它的特性既线性而又过零，这有利于判读和使用。这时，采用零基直线作为理论直线是适宜的。不过，传感器在使用时应能调零才行。当需要对一批传感器比较它们的线性特性时，采用独立线性度就很必要了。

因而，我们可以这样说，传感器在工厂中生产、调试时用独立线性度较好；而传感器的用户则可能更喜欢使用零基线性度。一台独立线性度高而又能调零（一台测试装置通常都必须具有这种功能）的传感器，无疑便能保证高的零基线性度。

3 计算数字示例

试求下列一组试验数据的各种线性度（表 1）。

表 1

x	0	1	2	3	4	5
y	0.1	1.0	1.8	2.6	3.0	3.8

x——传感器的输入量；

y——传感器的平均输出量。

（1）绝对线性度。设给定的理论特性为

$$Y_{ab} = 0.8x$$

该组数据对理论特性直线的偏差可求得为（表 2）。

表 2

x	0	1	2	3	4	5
ΔY_{ab}	0.10	0.20	0.20	0.20	−0.20	−0.20

因而，绝对线性度为

$$L_{ab} = \frac{\Delta Y_{ab.max}}{Y_{ab.max} - Y_{ab.min}} = \frac{\pm 0.2}{0.8(5-0)} = \pm 5.00\%$$

（2）端基线性度。不难求出端基直线方程为

$$Y_{te} = 0.10 + 0.74x$$

该组数据对端基直线的偏差则为（表 3）。

表 3

x	0	1	2	3	4	5
ΔY_{te}	0	0.16	0.22	0.28	−0.06	0

因而，端基线性度为

$$L_{te}=\frac{\Delta Y_{te,max}}{Y_{te,max}-Y_{te,min}}=\frac{0.28}{0.74(5-0)}=7.57\%$$

下面，再来求一下平移端基直线线性度。平移端基直线的截距为

$$a'=a+\frac{1}{2}[(+\Delta Y_{te,max})+(-\Delta Y_{te,max})]=0.1+\frac{1}{2}[0.28-0.06]=0.21$$

因而，平移端基直线方程为

$$Y_{s,te}=0.21+0.74x$$

所给一组数据对该直线的偏差则为(表 4)。

表 4

x	0	1	2	3	4	5
$\Delta Y_{s,te}$	−0.11	0.05	0.11	0.17	−0.17	−0.11

故平移端基直线线性度为

$$L_{s,te}=\pm\frac{\Delta Y_{s,te,max}}{Y_{s,te,max}-Y_{s,te,min}}=\frac{\pm 0.17}{0.74(5-0)}=\pm 4.59\%$$

(3) 零基线性度。传感器理论零点和最小的最大正、负偏差点的重心的连线，一般不可能一次求得，而只能逐次逼近。

1) 第一次逼近直线。我们取理论零点和实际特性的后端点连线，其方程不难求得为

$$Y_{ze,(1)}=\frac{3.8}{5}x=0.76x$$

所给一组数据对该直线的偏差则为(表 5)。

表 5

x	0	1	2	3	4	5
$\Delta Y_{ze,(1)}$	0.1	0.24	0.28	0.32	0.04	0

由上表显然可见，不存在最小的最大正、负偏差，因而应继续逼近。

2) 第二次逼近直线。由于所给一组数据对第一次逼近直线的偏差无负偏差点，故可以求最大和最小正偏差点的重心，让零基直线的逼近直线通过该重心，以期得到最小的最大正、负偏差。为此，可求 $x=3$ 和 $x=5$ 这两点的重心点坐标为

$$x_{3,5}=\frac{3+5}{2}=4;\quad y_{3,5}=\frac{2.6+3.8}{2}=3.2$$

故第二次逼近直线方程可求得为

$$Y_{ze,(2)}=\frac{y_{3,5}}{x_{3,5}}x=\frac{3.2}{4}x=0.8x$$

所给一组数据对该直线的偏差则为(表 6)。

表 6

x	0	1	2	3	4	5
$\Delta Y_{ze,(2)}$	0.10	0.20	0.20	0.20	−0.20	−0.20

由上表显然可见，求得了最小的最大正、负偏差。$x=3$ 和 $x=5$ 点分别具有绝对值相同的最大正、负偏差，因而本次逼近直线即为所求的零基直线。而零基线性度则为

$$L_{ze} = \pm \frac{\Delta Y_{ze.\max}}{Y_{ze.\max} - Y_{ze.\min}} = \frac{\pm 0.2}{0.8(5-0)} = \pm 5.00\%$$

它在数值上同于前面的绝对线性度，实际上前面所给的理论直线就是一条零基直线。

下面，我们再来附带求一下所谓的前端基直线线性度。首先求前端基直线。

1）第一次逼近直线。取其为端基直线，前面已经求出，即

$$Y_{f.te.(1)} = 0.10 + 0.74x$$

由前面的所给一组数据对端基直线的偏差看出，最大正、负偏差绝对值不相等，故它不是前端基直线。

2）第二次逼近直线。求最大正、负端基偏差点，即 $x=3$ 和 $x=4$ 的两点的重心点坐标

$$x_{3.4} = \frac{3+4}{2} = 3.5$$

$$y_{3.4} = \frac{2.6+3}{2} = 2.8$$

因而，第二次逼近直线为

$$Y_{f.te.(2)} = 0.1 + \frac{2.8-0.1}{3.5-0}x = 0.1 + 0.7714x$$

按该直线算出的偏差为(表 7)。

表 7

x	0	1	2	3	4	5
$\Delta Y_{f.te.(2)}$	0	0.1286	0.1572	0.1858*	−0.1856*	−0.1570

显然，在 $x=3$ 和 $x=4$ 两点上获得了最小的最大偏差（符号交替出现，如表 7 中带 * 号数据所示），故此第二次逼近直线即所求的前端基直线。而前端基直线线性度则为

$$L_{f.te} = \pm \frac{\Delta Y_{f.te.\max}}{Y_{f.te.\max} - Y_{f.te.\min}} = \pm \frac{0.1857}{0.7714(5-0)} = \pm 4.81\%$$

（4）独立线性度—— 我们这里采用图解加计算的方法，步骤如下：

1）求出该组数据的端基直线方程，前面已求出为

$$Y_{te} = 0.10 + 0.74x$$

2）求出各数据点对端基直线的偏差，并把各偏差适当地等比例放大，视具体情况，我们这里取放大倍数为 100，偏差数值见表 8.

表 8

x	0	1	2	3	4	5
ΔY_{te}	0	0.16	0.22	0.28	−0.06	0
$100\Delta Y_{te}$	0	16	22	28	−6	0

3）将放大后的偏差点标在直角坐标纸上，由这些偏差点作一凸多边形，使之把全部偏差点包容在凸多边形之内，或置于凸多边形的各边之上，如图 5 所示。

4）由凸多边形的各顶点向对边引铅垂线（即平行于 ΔY 轴的直线）。在凸多边形内最长一根铅垂线段所交的对边的两端点和引出此最长一根铅垂线段的凸多边形的一个顶点，必然构成一个三角形，其底边就是该对边。在图 5 中即为三个偏差点 ΔY_0、ΔY_3 和 ΔY_4 构成的三角形，且称 ΔY_0 和 ΔY_4 连线为底边。与这三个偏差点相应的数据点 y_0、y_3 和 y_4 也构成一个三角形，

我们称之为最佳三角形(图中未示出)，且称 y_0 和 y_4 连线为底边。

5）在最佳三角形中，平行于底边的中位线即为所求最佳直线。它也就是底边前端点和顶点的重心点，与底边后端点和顶点的重心点的连线。在本例中，此两重心点的坐标为

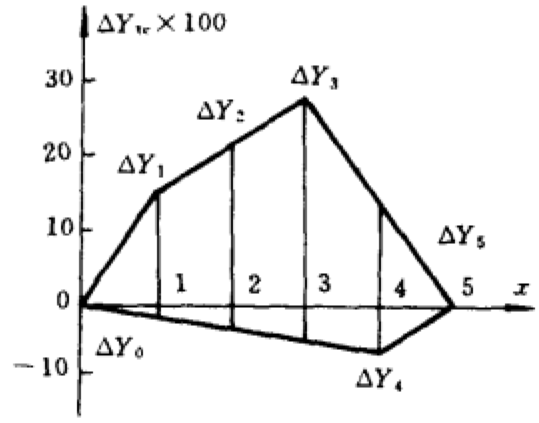


图 5 求最佳直线用的端基偏差点凸多边形

$$0,3 \text{ 点重心：} x_{0,3}=\frac{0+3}{2}=1.5$$

$$y_{0,3}=\frac{0.1+2.6}{2}=1.35$$

$$3,4 \text{ 点重心：} x_{3,4}=\frac{3+4}{2}=3.5$$

$$y_{3,4}=\frac{2.6+3}{2}=2.8$$

于是，可立即求出通过此两点的直线方程，亦即最佳直线方程

$$Y_{\text{in}}=0.2625+0.7250x$$

按最佳直线算出的偏差为(表 9)。

表 9

x	0	1	2	3	4	5
ΔY_{in}	-0.1625*	0.0125	0.0875	0.1625*	-0.1625*	-0.0875

因而，所求独立线性度为

$$L_{\text{in}}=\pm\frac{\Delta Y_{\text{in,max}}}{Y_{\text{in,max}}-Y_{\text{in,min}}}=\pm\frac{0.1625}{0.7250(5-0)}=\pm 4.48\%$$

在表 9 中，带 * 号的数据为在三个交错点上的最小的最大偏差，按它算出的线性度确是前面所求各种线性度中可能达到的最高线性度。采用独立线性度无疑是最充分地利用了一台线性传感器的线性潜力。

作为比较，本组数据的最小二乘直线线性度为 $L_{1.s}=5.21\%$，显然比独立线性度差。

4 结束语

比较全面论述传感器线性度的定义和算法的文献不多，本文在这方面是一个尝试。作者希望本文有助于统一人们对传感器线性度种类和定义的认识，所提出的计算方法能提供有关同志参考。现在是应该制定在理论上严格、在实践上切实可行的有关传感器的标准的时候了。在这方面，作者希望本文能起到抛砖引玉的作用。

实际上线性度计算问题不仅仪表和传感器有，模数和数模变换器等许多电子产品有，机床和其它一些机器制造中也有。本文所讨论的问题原则上也适用于前述后几种技术中的有关测试和检定工作。现在，我们已经完成了本文所提出的计算方法的计算机软件包。读者如对本文的细节有兴趣，建议参阅参考文献[6～10]。

参 考 文 献

1 International Electrotechnical Commission. IEC Standard. No. 393－3 Potentiometers, 1977

2 Standard,Electrical Transducer,Nomenclature and Terminology. ANSI MC6,1—1975,ISA—S37.1,Approved 1982

3 SAMA Standard PMC 20.1—1973,Instrument Engineers'Handbook,Revised Edition. Chilton Book Company,1982

4 Ferson L M. Standards and Practice for Instrumentation. Seventh Edition,1983

5 Norton H N. Handbook of Transducers for Electronic Measuring Systems. New York;printice-Hall,Inc,1969

6 Sun D H. Fitting Straight Lines to Data. Machine Design,March 10,1983

7 孙德辉.使最大偏差为最小的直线拟合法.计量学报,1984(2)

8 孙德辉.求仪表独立线性度的图解法.计量学报,1986(3)

9 孙德辉.仪表和传感器零基线性度的研究.北京航空学院学报,1985(4)

10.孙德辉.求仪表独立线性度的双重心连线法.计量技术,1987(9)

捷联惯导可靠性的均衡向量及其补偿方法

以光衢　　吴　奋　　武　玮

(自动控制系)

摘　　要

本文用均衡向量(Parity vector)讨论了捷联惯导的可靠性问题,建立均衡方程,利用假设检验求取故障检测的决策函数和隔离函数。重点研究了均衡向量的补偿方法,应用卡尔曼滤波对均衡向量的补偿,实现了用常值门限进行故障检测和隔离,提高了故障检测能力。

1　引　言

实践证明,捷联惯导系统中的陀螺仪是可靠性比较低的惯性仪表。为提高系统可靠性,一方面要求设计出平均故障时间(MTBF)大的元件,另一方面可以构造余度测量系统。

本文用均衡向量的方法研究了捷联惯导系统的可靠性问题。参考文献[2]基于广义似然比检验(GLT)推导了一组均衡方程,由这组方程得到与飞行状态(角速度或线加速度)无关的均衡向量;由均衡向量得到故障的决策函数和隔离函数,以此与检测门限比较,实现故障仪表的检测和隔离。但是,在实际系统中,惯性仪表的动态过程误差、测量的刻度系数误差、仪表输入轴的安装误差及仪表偏置误差等都会影响均衡向量,以至于造成均衡向量与飞行状态有关。因而在飞行器作机动飞行时,降低了故障检测和隔离性能。本文用卡尔曼滤波方法对影响均衡向量的上述误差进行估计和补偿,用补偿后的均衡向量进行余度测量系统的故障检测与隔离;众所周知,系统故障检测和隔离的可靠程度主要取决于检测门限的选取,由于补偿后的均衡向量与飞行状态无关,从而实现用常值门限进行故障检测和隔离。

文中所述虽以陀螺仪配置为主线,但所讨论的方法也适于加速度计配置方案。

2　均衡方程

设有 n 个惯性传感器,有测量噪声 ε,则测量方程为

$$m = Hx + \varepsilon \tag{1}$$

式中 x 是真实的状态(角速度或线加速度);一般情况 m 是 $n\times1$ 维,H 是 $n\times3$ 维几何分布矩阵,x 是 3×1 维,ε 是 $n\times1$ 维。为了检测故障,均衡方程应设置成与待测量的状态无关,即应选择 V 矩阵,使

$$VH = 0 \ (|V| \neq 0) \tag{2}$$

于是得均衡方程为

$$P = Vm \tag{3}$$

(1) 式代入(3) 式,得

本文曾发表在《中国惯性技术学会学报》1991 年第 1 期