Programmieraufgaben

(1) Schreiben Sie eine python-Funktion, welche mittels der Gauß-Chebyscheff-Quadratur für s Stufen das Integral näherungsweise berechnet. Testen Sie Ihre Funktion an

$$\int_{-1}^{1} \log_{10}(1-x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = -\pi\log_{10}(2)$$

und $s = 10, 100, 1000, 10000$ Stufen und vergleichen Sie mit den Werten von (zusammengesetzten) Quadraturformeln mit der gleichen Anzahl von Funktionsauswertungen.

(2) Verwenden Sie den ε-Algorithmus, um die Konvergenz der Folge

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i}$$

zu beschleunigen. Berechnen Sie die Folgenglieder $S_n, \varepsilon_2^{(n)}, \varepsilon_4^{(n)}, \varepsilon_6^{(n)}, \ldots$ und diskutieren Sie die Konvergenz gegen $\log(2)$.

(3) Berechnen Sie das Fresnel-Integral

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\,.$$

Verwenden Sie eine Quadraturformel Ihrer Wahl, sowie den ε-Algorithmus. Berechnen Sie hierfür zunächst die Integrale

$$S_n = \int_0^{x_n} \sin(x^2)\mathrm{d}x \quad \text{mit} \quad x_n = \sqrt{n\pi}\,.$$

Theorieaufgaben

(4) Betrachten Sie die Gauß-Chebyscheff-Quadraturformel

$$\sum_{j=1}^{s} w_j f(x_j) \approx \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x,$$

wobei $x_j = \cos\left(\frac{2j-1}{2s}\pi\right)$ für $j = 1, \ldots, s$. Zeigen Sie: Wählt man $w_j = \frac{\pi}{s}$ für $j = 1, \ldots, s$ als Gewichte, so hat die Quadratuformel mindestens Ordnung s.
Hinweis: Verwenden Sie die Chebyshev-Polynome $T_k\colon [-1,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos(k \arccos x)$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und schreiben Sie die Cosinus-Funktion um mithilfe der komplexwertigen Exponentialfunktion.

(5) Die Folge $\{S_n\}$ besitze die Eigenschaft:

$$S_{n+1} - S = \rho_n(S_n - S) \qquad \text{mit } \rho_n \to \rho \text{ und } \rho \neq 1.$$

Zeigen Sie, dass die durch den Δ^2-Prozess von Aitken gegebene Folge $\{S'_n\}$ schneller gegen S konvergiert, als die ursprüngliche Folge $\{S_n\}$, d.h.

$$\frac{S'_n - S}{S_n - S} \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$