Programmieraufgaben

(1) (a) Zeichnen Sie in python die Graphen der Sinus- und Cosinus-Funktion in einem gemeinsamen Plot. Zeichnen Sie die Funktionen in unterschiedlichen Farben und ergänzen Sie Ihren Plot durch eine Legende und eine Überschrift.

(b) Berechnen Sie mit python die Werte der Funktionen

$$f_1(x) = x^8 - 8x^7 + 28x^6 - 56x^5 + 70x^4 - 56x^3 + 28x^2 - 8x + 1$$
$$f_2(x) = (((((((x-8)x+28)x-56)x+70)x-56)x+28)x-8)x+1$$
$$f_3(x) = (x-1)^8$$

an 101 gleichverteilten Stellen aus dem Intervall $[0.99, 1.01]$ und zeichnen Sie diese. Verwenden Sie exakt die gegebenen Funktionsvorschriften. *Hinweis:* Alle drei Funktionen sind identisch und sollten eigentlich die gleichen Funktionswerte liefern.

(2) (a) Zeichnen Sie in python den Graphen der beiden Funktionen f, g mit $f(x) = 5 \cdot 3^x$ und $g(x) = 2 \cdot x^3$ bei einfacher und doppelt-logarithmischer Achsenskalierung. Was beobachten Sie?

(b) Geben Sie allgemein an, welche Graphen von welchen Funktionen in einfacher bzw. doppelt-logarithmischer Achsenskalierung als Gerade erscheinen, und begründen Sie Ihre Aussagen.

(c) Bei der Durchführung eines Experiments werden folgende Daten gemessen:

x	2	3	4	5	7.5	10	16
y	3.53553	2.88675	2.5	2.23607	1.82574	1.58114	1.25

Zeichnen Sie in python die Daten bei einfacher und doppelt-logarithmischer Achsenskalierung und bestimmen Sie die Funktion, die den Zusammenhang der beiden Variablen x und y beschreibt.

(3) Es sei $x_0 > 0$ und die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ rekursiv durch

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \tfrac{2}{x_n}\right) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0$$

definiert. Die Folge konvergiert gegen $\sqrt{2}$.

(a) Schreiben Sie eine Funktion, welche bei Übergabe von $x_0 > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ die ersten N Folgenglieder berechnet und zeichnet.

(b) Schreiben Sie eine weitere Funktion, welche bei Übergabe von $x_0 > 0$ und $\varepsilon > 0$ den ersten Index n_0 findet, sodass $\left|x_{n_0} - \sqrt{2}\right| < \varepsilon$. Lassen Sie den Index n_0 zurückgeben.

Theorieaufgaben

(4) *Landau-Symbol.*

(a) Zeigen Sie: Ist $f(x) = o(g(x))$ für $x \to x_0$, so ist auch $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ für $x \to x_0$.

(b) Zeigen Sie: Ist $f(x) = o(x^k)$ für $x \to 0$, so ist auch $f(x) = o(x^\ell)$ für $\ell < k$.

(c) Zeigen oder widerlegen Sie: Ist $f(x) = \mathcal{O}(h(x))$ für $x \to x_0$ und $g(x) = \mathcal{O}(h(x))$ für $x \to x_0$, so ist $f(x) + g(x) = \mathcal{O}(h(x))$

(d) Zeigen oder widerlegen Sie:

(i) $2^x = \mathcal{O}(4^x)$ für $x \to \infty$.

(ii) $\frac{x}{1-x^2} = x + x^3 + o(x^4)$ für $x \to 0$

(iii) $\frac{x}{1-x^2} = x + x^3 + \mathcal{O}(x^5)$ für $x \to 0$

(iv) $\cos(x) = \mathcal{O}(1)$ für $x \to \infty$.

(5) Schreibe die folgenden Ausdrücke in der Form $f(h) = \mathcal{O}(h^p)$ für $h \searrow 0$ mit möglichst großem $p \in \mathbb{N}$ bzw. $g(n) = \mathcal{O}(n^q)$ für $n \in \mathbb{N}$, $n \to \infty$ mit möglichst kleinem $q \in \mathbb{N}$.

(a) $f(h) = 4\left(h^3 + h\right)^2 - 4h^2$

(b) $f(h) = \dfrac{\mathrm{e}^h - \mathrm{e}^{-h}}{2h} - 1$

(c) $g(n) = 4\left(n^3 + n\right)^2 - 4n^2$

(d) $g(n) = \sup\limits_{x>0} \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-nx}}{1 - \mathrm{e}^{-x}}$

Wiederholung Landau-Symbole: Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ und $f, g\colon B_\delta(x_0) \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Es gelte $g(x) \neq 0$ für x nahe bei x_0. Dann schreibt man

$$f(x) = o(g(x)) \text{ für } x \to x_0 \iff \lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$$

und

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \text{ für } x \to x_0 \iff \exists C > 0\ \exists \varepsilon > 0\ \forall x \in B_\varepsilon(x_0)\colon |f(x)| \leq C|g(x)|.$$

Analog für $x \to \pm\infty$ oder Folgen.
Sind beispielsweise $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei reelle Folgen, so schreibt man

$$a_n = \mathcal{O}(b_n) \text{ für } n \to \infty$$

falls es eine Konstante $C > 0$ gibt und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt sodass

$$|a_n| \leq C|b_n| \quad \text{für alle} \quad n \geq n_0.$$