Programmieraufgaben

(1) Implementieren Sie den asymptotisch korrekter Fehlerschätzer (aus Folgerung 1.40) für die Simpsonregel. Implementieren Sie weiters die Richardson-Extrapolation der Simpsonregel und bestimmen Sie die Ordnung dieses neuen Quadraturverfahrens aus einem Genauigkeits-Aufwandsdiagramm. Verwenden Sie zum Test das Integral von Aufgabe (1) auf Blatt 2.

(2) Implementieren Sie für die Trapezregel die Wahl der Gitterpunkte aus Abschnitt 1.6(i) und testen Sie Ihre Implementierung am Beispiel

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{10^{-4} + x^2}.$$

Theorieaufgaben

(3) Beweisen Sie die folgende Rekursionsformel für die Legendre-Polynome:

$$(k+1)P_{k+1}(x) = (2k+1)xP_k(x) - kP_{k-1}(x) \quad \text{für} \quad k \geq 1.$$

(4) Seien $c_1^{(s)}, \dots, c_s^{(s)}$ die Knoten der Gauß-Quadraturformel der Ordnung $2s$, aufsteigend geordnet, und $c_1^{(s+1)}, \dots, c_{s+1}^{(s+1)}$ die $s+1$ Knoten der Gauß-Quadraturformel der Ordnung $2s+2$. Zeigen Sie, dass die Knoten die Trennungseigenschaft

$$0 < c_1^{(s+1)} < c_1^{(s)} < c_2^{(s+1)} < c_2^{(s)} < \dots < c_s^{(s)} < c_{s+1}^{(s+1)} < 1$$

erfüllen.
Hinweis: Betrachten Sie die Nullstellen $\gamma_i^{(s)}$ der Legendre-Polynome P_s, führen Sie einen Induktionsbeweis unter Verwendung der Rekursionsformel für Legendre-Polynome aus Aufgabe (3). Diskutieren Sie das Vorzeichen von $P_s\left(\gamma_i^{(s+1)}\right)$ sowie $P_{s+2}\left(\gamma_i^{(s+1)}\right)$.

(5) Die Chebyshev-Polynome T_k sind in $[-1,1]$ folgendermaßen definiert:

$$T_k(x) = \cos(k \arccos(x)), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Zeigen Sie:

(a) $T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x$

(b) $T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$ für $k \in \mathbb{N}$.

(c) Für $k, j \in \mathbb{N}_0$ gilt $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_k(x)\, T_j(x) \mathrm{d}x = \begin{cases} \pi, & k = j = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & k = j > 0 \\ 0, & k \neq j. \end{cases}$

(d) Die Chebyshev-Polynome $T_0, T_1, \dots, T_n$ bilden eine Basis vom Raum der reellen Polynome vom Grad kleiner gleich n.