Programmieraufgaben

(1) Implementieren Sie die linke Rechtecksregel, die Mittelpunktsregel und die Simpson-Regel in Python. Übergeben Sie dazu eine Funktion, sowie Start- und Endpunkt des Integrationsintervalls und die Anzahl der Teilintervalle. Rückgabewert ist die Näherung ans Integral.
Berechnen Sie damit

$$\int_0^3 \cos(x)\,\mathrm{e}^{\sin(x)}\,\mathrm{d}x\,,$$

(2) Variieren Sie N und erstellen Sie ein Genauigkeit-Aufwandsdiagramm (vgl. Abb. 1.3 im Skript) für Aufgabe (1).

Theorieaufgaben

(3) Berechnen Sie die (eindeutige) Quadraturformel mit $s = 4$ Stufen und den Knoten $c_1 = 1/4$, $c_2 = 1/2$, $c_3 = 3/4$, $c_4 = 1$, welche mindestens Ordnung 4 hat. Hat diese Quadraturformel sogar eine höhere Ordnung?

(4) Seien $(b_i, c_i)_{i=1}^s$ die Gewichte und Knoten einer Quadraturformel der Ordnung $p \geq s$ (mit paarweise verschiedenen Knoten c_i).

(a) Setze für $i = 1, \dots, s$

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=1,\dots,s\\ j\neq i}} \frac{x - c_j}{c_i - c_j}\,.$$

Begründen Sie, dass die Polynome $\ell_1, \dots, \ell_s$ eine Basis vom Raum der reellen Polynome vom Grad kleiner gleich $s - 1$ bilden.

(b) Zeigen Sie, dass

$$b_i = \int_0^1 \ell_i(x)\mathrm{d}x \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, s.$$

(5) Berechnen Sie alle Quadraturformeln mit $s = 2$ Stufen der Ordnung 4 oder höher (ohne a priori Verwendung von Symmetrie, Eindeutigkeit etc.).
Hinweis: Bestimmen Sie die Gewichte b_1, b_2 und die Knoten c_1, c_2 so, dass die Ordnungsbedingungen bis einschließlich Ordnung 4 erfüllt sind (4 nichtlineare Gleichungen in 4 Unbekannten). Für c_1 ergibt sich durch geschickte Reduktion die quadratische Gleichung

$$c_1^2 - c_1 + \tfrac{1}{6} = 0$$

und daraus c_1, etc.