VEGOVA
ELEKTROTEHNIŠKO-RAČUNALNIŠKA
STROKOVNA ŠOLA IN GIMNAZIJA
LJUBLJANA
Vegova ulica 4, 1000 Ljubljana

Seminarska naloga pri predmetu matematika

Obrestni račun

Mentor: Karin Kastelic, prof. mat., spec.

Avtor: Jaka Kovač, G 4. b

Ljubljana, oktober 2023 – november 2023

Povzetek

V tej seminarski nalogi bom predstavil obrestni račun in njegove vrste ter primere uporabe.

Ključe besede: obrestni račun, obrestna mera, anuiteta, amortizacijski načrt

Abstract

This paper describes mathematics behind interest rates and their usecases.

Keywords: (compound) interest rate, annuity, amortization schedule

Kazalo

Tabele

1 Uvod

Že od nekdaj so ljudje med seboj trgovali. Včasih so med sabo menjali dobrine (naturalno gospodarstvo), ko pa so okoli leta 3000 pr. n. št. v Mezopotamiji [4] pričeli z menjavo izdelov za denar. Izumu denarja so botrovale tudi banke. Posojanje denarja v zameno za več denarja se sprva zdi precej nenavadno, vendar pa je to le ena izmed storitev modernejšega sveta.

2 Teorija

2.1 Pojmi, definicije in uporabljeni simboli

simbol	pojem	enota	definicija
G_0	glavnica	EUR	denarna vrednost, ki si jo od nekoga izposodimo ali jo mi posodimo nekomu
o	obresti	EUR	nadomestilo ali odškodnina za izposojeni denar, ker le-ta v času obrestovanja ni na voljo lastniku
p	obrestna mera	%	obresti podane v odstodkih navadno **letna obrestna mera**
p_k	konformna obrestna mera	%	obrestna mera, ki se uporablja za izračun obresti v posebnih primerih 2.3.2
r	obrestovalni faktor		$r = 1 + \frac{p}{100}$
r_k	konformni obrestovalni faktor		$r_k = 1 + \frac{p_k}{100}$
k	število kapitalizacijskih odbobji		kolikokrat smo izračunali obresti
c	anuiteta	EUR	redno odplačilo

povteto po [1]

Tabela 1: Simboli, pojmi in njihove definicije

2.1.1 Prikazovanje podatkov v tabelah in izračunih

Zaradi preprostosti prikazavanja so denarne vrednosti zaokrožene na cente natačno in prikazane v EUR. Številčne vrednosti so zaokrožene na 3 od 0 različna decimalna mesta. V izračunih se uporablja dejanska vrednost. Ničto leto označuje polog denarja, prikazane vrednosti pa stanje ob koncu leta razen kjer je navedeno drugače.

2.2 Obrestovanje

2.2.1 Navadno obrestovanje

Navadno obrestovanje je način obrestovanja, kjer so obresti odvisne le od glavnice in obrestne mere, ne pa tudi od prejšnjih obresti. Končna vrednost glavnice po n letih se izračuna po formuli:

$$G_n = G_0 \cdot (1 + \frac{p * n}{100}) \tag{1}$$

Vzemimo primer, kjer na banko položimo 10 000 € za 5 let pri 5% letni obrestni meri.

leto	**vrednost [EUR]**
0	10 000,00
1	10 500,00
2	11 000,00
3	11 500,00
4	12 000,00
5	12 500,00

Tabela 2: Navadno obrestovanje

2.2.2 Obrestno obrestovanje

Obrestno obrestovanje je način obrestovanja, kjer so obresti odvisne tako od glavnice, obrestne mere in prejšnjih obresti. Vsota glavnice in obresti torej postne glavnica za naslednje kapitalizacijsko obdobje. Končna vrednost glavnice po n letih se izračuna po formuli:

$$G_n = G_0 \cdot r^n \tag{2}$$

Obrestovalni faktor r izračunamo po formuli:

$$r = 1 + \frac{p}{100} \tag{3}$$

Enotna formula za izrčun vrdnosti glavnice:

$$G_n = G_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^n \tag{4}$$

Za primer vzemimo enake podatke kot pri navadnem obrestovanju.

leto	letne obresti [EUR]	skupne obresti [EUR]	vrednost [EUR]
0	N/A	N/A	10 000,00
1	500,00	500,00	10 500,00
2	525,00	1 025,00	11 025,00
3	551,25	1 576,25	11 576,25
4	578,81	2 155,06	12 155,06
5	636,69	2 762,82	12 762,82

Tabela 3: Obrestno obrestovanje

2.3 Obrestna mera

2.3.1 Relativna obrestna mera

Če je v enem letu več kapitalizacijskih obdobji, nam pa je podana letna obrestna mera si lahko s formulo (5) izračunamo obrestno mero, ki se dejansko uporabi za izračun obresti na koncu vsakega kapitalizacijskega obdobja.

$$p(k) = \frac{p(letna)}{k} \tag{5}$$

Formula za obrestovalni faktor je:

$$\begin{aligned} r &= 1 + \frac{p(k)}{100} \\ r &= 1 + \frac{\frac{p(letna)}{k}}{100} \\ r &= 1 + \frac{p(letna)}{k \cdot 100} \end{aligned} \tag{6}$$

s tem pa je enačba za izračun glavnice po k kapitalizacijskih obdobjih ($k = k(letno) \cdot n$):

$$\begin{aligned} G_n &= G_0 \cdot r^k \\ G_n &= G_0 \cdot (1 + \frac{p(na\ kapitalizacijsko\ obdobje)}{100 \cdot k})^k \end{aligned} \tag{7}$$

leto	četrtletje	k	letno [EUR]	četrtletno [EUR]
0	0	0	10000,00	10000,00
1	1	1	10000,00	10125,00
	2	2	10000,00	10251,56
	3	3	10000,00	10379,71
	4	4	10500,00	10509,45

2	1	5	10500,00	10640,82
	2	6	10500,00	10773,83
	3	7	10500,00	10908,50
	4	8	11025,00	11044,86
3	1	9	11025,00	11182,92
	2	10	11025,00	11322,71
	3	11	11025,00	11464,24
	4	12	11576,25	11607,55
4	1	13	11576,25	11752,64
	2	14	11576,25	11899,55
	3	15	11576,25	12048,29
	4	16	12155,06	12198,90
5	1	17	12155,06	12351,38
	2	18	12155,06	12505,77
	3	19	12155,06	12662,10
	4	20	12762,82	12820,37

Tabela 4: Četrtletno obrestno obrestovanje

Opazimo lahko, da smo z obrestovanjem na koncu vsakega četrtletja pridobili več obresti kot pri obrestovanju letno. Od tod izvira tudi Eulerjevo število e, ki predstavlja 100 $\%$ obrestno mero. Če imamo v enem letu neskončno kapitalizacijskih obdobji, predstavlja število e obrestovalni faktor, če bi ekvivalentne obresti računali letno. Izračunamo ga lahko po formuli: [3]

$$e = \lim_{k \to \infty} (1 + \frac{1}{k})^k \tag{8}$$

2.3.2 Konformna obrestna mera

Konformna obrestna mera je obrestna mera, ki se uporablja za izračun obresti, ko banka letno obrestno mero preračuna na več kapitalizacijskih obdobji letno tako, da je skupna vrednost obresti enaka kot če bi obrestovali letno.

$$\begin{aligned} G_n = G_0 \cdot r &= G_0 \cdot r_k^k \\ r &= r_k^k \\ r_k &= \sqrt[k]{r} \\ 1 + \frac{p_k}{100} &= \sqrt[k]{1 + \frac{p}{100}} \\ p_k &= 100 \cdot (\sqrt[k]{1 + \frac{p}{100}} - 1) \end{aligned} \tag{9}$$

Konformni obrestovalni faktor:

$$
\begin{aligned}
r_k &= 1 + \frac{p_k}{100} \\
r_k &= 1 + \frac{100 \cdot (\sqrt[k]{1 + \frac{p}{100}} - 1)}{100} \\
r_k &= \sqrt[k]{1 + \frac{p}{100}}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Ob prejšnjem primeru vzemimo, da nam banka izračuna obresti na vsako četrtletje, vendar pri tem uporabijo konformno obrestno mero.

Izračun konformne obrestne mere:

$$
\begin{aligned}
p_k &= 100 \cdot (\sqrt[k]{1 + \frac{p}{100}} - 1) \\
p_k &= 100 \cdot (\sqrt[4]{1 + \frac{5}{100}} - 1) \\
p_k &\approx 1.22
\end{aligned}
\tag{11}
$$

in izračun konformnega obrestovalnega faktorja:

$$
\begin{aligned}
r_k &= \sqrt[k]{1 + \frac{p}{100}} \\
r_k &= \sqrt[4]{1 + \frac{5}{100}} \\
r_k &\approx 1.01
\end{aligned}
\tag{12}
$$

leto	**četrtletje**	**k**	**letno [EUR]**	**četrtletno [EUR]**
0	0	0	10000,00	10000,00
1	1	1	10500,00	10122,72
	2	2	10500,00	10246,95
	3	3	10500,00	10372,70
	4	4	10500,00	10500,00
2	1	5	11025,00	10628,86
	2	6	11025,00	10759,30
	3	7	11025,00	10891,34
	4	8	11025,00	11025,00
3	1	9	11576,25	11160,30
	2	10	11576,25	11297,26
	3	11	11576,25	11435,91
	4	12	11576,25	11576,25
4	1	13	12155,06	11718,32
	2	14	12155,06	11862,13
	3	15	12155,06	12007,70
	4	16	12155,06	12155,06

5	1	17	12762,82	12304,23
	2	18	12762,82	12455,23
	3	19	12762,82	12608,09
	4	20	12762,82	12762,82

Tabela 5: Četrtletno obrestno obrestovanje s konformno obrestno mero

2.4 Krediti

Do sedaj smo obravnavali le obrestovanje na depozite, kjer smo mi banki posodili denar. Krediti so v osnovi precej podobni, le da sta vlogi obrnjenji, saj banka nam posodi denar, mi pa ga moramo z obrestmi vrniti.

Ko pri banki zaprosimo za kredit, nam ponavadi pošljejo amportizacijski načrt, ki nam pove koliko moramo plačati vsak mesec in koliko denarja bomo plačali skupaj. Navadno vsebuje podatke o mesečnem obroku (anuiteti), obrestih, razdolžnini in stanju dolga.

$$\text{ANUITETA} = \text{OBRESTI} + \text{RAZDOLŽNINA}$$

Privzemimo, da smo si na banki izposodili G_n denarja. Z banko se dogovorimo, da bomo kredit vrnili z n letnimi anuitetami, kjer prvo anuiteto vrnemo čez eno leto. Banka uporablja letno kapitalizacijo, letna obrestna mera a je p. Anuiteta G_0 je torej:

$$\begin{aligned} G_n \cdot r^n &= G_0 \cdot r^{n-1} + G_0 \cdot r^{n-2} + \cdots + G_0 \cdot r + G_0 \\ G_n \cdot r^n &= G_0 \cdot (r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + r + 1) \\ G_n \cdot r^n &= G_0 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} \\ \frac{G_n \cdot r^n}{G_0} &= \frac{r^n - 1}{r - 1} \\ \frac{G_0}{G_n \cdot r^n} &= \frac{r - 1}{r^n - 1} \\ G_0 &= \frac{G_n \cdot r^n \cdot (r - 1)}{r^n - 1} \end{aligned} \tag{13}$$

Za primer vzemimo kredit v višini 150 000 € za 20 let pri 4% letni obrestni meri.

$$\begin{aligned} G_0 &= \frac{G_n \cdot r^n \cdot (r - 1)}{r^n - 1} \\ G_0 &= \frac{150\ \ 000\text{ €} \cdot 1.04^{20} \cdot (1.04 - 1)}{1.04^{20} - 1} \\ G_0 &\approx 11\ \ 037.26\text{ €} \end{aligned} \tag{14}$$

Izračunali smo torej, da bomo naslednjih 20 let plačevali 11 037,26 € letno. Ker bomo banki vsako leto manj dolžni, bodo naše obresti manjše (kar si v tem primeru želimo) hkrati pa bo večja razdolžnina (delež dolga, ki ga odplačamo).

Izdelajmo amortizacijski načrt:

leto	anuiteta [EUR]	obresti [EUR]	razolžnina [EUR]	dolg [EUR]
0	/	/	/	150 000,00
1	11 037,26	6 000,00	5 037,26	144 962,74
2	11 037,26	5 798,51	5 238,75	139 723,98
3	11 037,26	5 588,96	5 448,30	134 275,68
4	11 037,26	5 371,03	5 666,24	128 609,45
5	11 037,26	5 144,38	5 892,88	122 716,56
6	11 037,26	4 908,66	6 128,60	116 587,96
7	11 037,26	4 663,52	6 373,74	110 214,22
8	11 037,26	4 408,57	6 628,69	103 585,52
9	11 037,26	4 143,42	6 893,84	96 691,68
10	11 037,26	3 867,67	7 169,60	89 522,09
11	11 037,26	3 580,88	7 456,38	82 065,71
12	11 037,26	3 282,63	7 754,63	74 311,07
13	11 037,26	2 972,44	8 064,82	66 246,25
14	11 037,26	2 649,85	8 387,41	57 858,84
15	11 037,26	2 314,35	8 722,91	49 135,93
16	11 037,26	1 965,44	9 071,83	40 064,11
17	11 037,26	1 602,56	9 434,70	30 629,41
18	11 037,26	1 225,18	9 812,09	20 817,32
19	11 037,26	832,69	10 204,57	10 612,75
20	11 037,26	424,51	10 612,75	0,00
SKUPAJ	220 745,25	70 745,25	150 000,00	

Tabela 6: Amortizacijski načrt

Iz načrta je razvidno, da prvih nekaj obrokov plačujemo obresti, nato pa se obresti zmanjšujejo, razdolžnina pa povečuje. V zadnjih letih včinsko plačujemo le še razdolžnino.

To je sicer odvisno od banke, vendar se pogosto splača kredit odplačevati predčasno, saj se po plačanih obresith ves znesek prišteje razolžnini.

3 Avtentični primer

4 Ugotovitve

-
-
- LaTeXje čudovito orodje, ki močno poenostavi pisanje tokumentov z matematičnimi izrazi. Če želiš uporabljati git (orodje za nadzor inaičic) se bolje obnese kot Word, ker je .docx v bistvu binarna datoteka standard pa ni javno objavljen.

5 Zaključek

6 Viri in literatura

[1] A. Kramar et. al. *Vega 4, E-učbenik za matematiko v 4. letniku gimnazije,* (2020), spletni naslov: https://www.iucbeniki.si/vega4/index.html (dostopano: 25. 11. 2023).

[2] B. Murovec. *Napotki za piseanje diplomskih nalog in drugih tehničnih besedil,* (2014), spletni naslov: http://lie.fe.uni-lj.si/Napotki_TehnicnaBesedila.pdf (dostopano: 29. 10. 2022).

[3] sodelavci Wikipedia-je. *E (mathematical constant).* (2023), spletni naslov: https://en.wikipedia.org/wiki/E_(mathematical_constant) (dostopano: 26. 11. 2023).

[4] sodelavci Wikipedia-je. *Money,* (2023), spletni naslov: https://en.wikipedia.org/wiki/Money (dostopano: 25. 11. 2023).

Izjava o avtorstvu

Izjavljam, da je seminarska naloga v celoti moje avtorsko delo, ki sem ga izdelal samostojno s pomočjo navedene literature in pod vodstvom mentorja.

28. november 2023 Jaka Kovač, G 4. b