



中国研究生创新实践系列大赛
“华为杯”第二十一届中国研究生
数学建模竞赛

学 校	上海工程技术大学
--------	----------

参赛队号	24108560308
------	-------------

队员姓名	1. 杨永祺
	2. 李树凡
	3. 刘钢

中国研究生创新实践系列大赛
“华为杯”第二十一届中国研究生
数学建模竞赛

题 目： 基于数据驱动下磁性元件的磁芯损耗建模

摘 要：

磁芯损耗是指在交变磁场下磁性元件发生的能量损失,会影响设备的兼容性以及稳定性。本文通过建立磁芯损耗模型,利用数据驱动方法,分析了各种工况下的磁芯损耗。该问题的研究能为业内对磁芯损耗做出精确评估,从而对功率变换器的效率做出评估。本文是基于实验数据驱动下对磁性元件的损耗进行模型建立的。

针对问题一,根据实验数据中的磁通密度分布的变量特征,对三种波形(正弦波、三角波、梯形波)进行分类。通过提取磁通密度随着时间变化的值,对其的平均值,标准差,最小值,最大值,峰值等这些特征构成特征向量。然后,选择随机森林作为分类模型,对这些特征进行建模。训练集数据训练分类器后,通过测试集检验分类结果,得出的结果表明该模型可以对波形成功分类。

针对问题二,我们在传统斯坦麦茨方程的基础上加入了温度修正项,通过差分进化算法分别对传统斯坦麦茨方程和修正斯坦麦茨方程中的待拟合参数进行拟合,最后计算均方误差以及拟合优度来评估模型的预测效果,并将实际磁芯损耗与两种方程的预测结果进行了可视化分析。修正斯坦麦茨方程的预测结果比传统斯坦麦茨方程更接近实际磁芯损耗,说明该修正斯坦麦茨方程在温度变化的情况下更加具有稳定性以及适用性。

针对问题三,利用 CERO 搭建磁芯模型,使用 COMSOL 进行仿真,分别考察各因素单独作用时以及两两交互作用时对损耗的影响,对各种情况进行仿真模拟,计算出各个损耗,利用回归模型分析得到损耗最小时的各个因变量的参数,得到在材料四, 70℃, 50kHz 以及正弦波时磁芯损耗最小。

针对问题四,选择梯度提升决策树算法构建预测模型,通过处理过的数据对模型进行训练,最后计算均方误差以及拟合优度来评估模型的预测效果,并将实际磁芯损耗与预测模型预测的磁芯损耗进行了可视化分析。根据实验结果得出,该预测模型的预测能力较强,有较好的泛化能力。

关键词： 磁芯损耗、随机森林、差分进化、梯度提升决策树、仿真模拟

目录

一、问题重述	4
1.1 问题背景	4
1.2 问题提出	4
二、问题分析	5
2.1 数据分析	5
2.2 问题一的分析	5
2.3 问题二的分析	5
2.4 问题三的分析	5
2.5 问题四的分析	5
2.6 问题五的分析	5
三、模型假设	6
四、模型的建立与求解	7
4.1 数据预处理	7
4.1.1 数据清洗	7
4.1.2 数据转码	9
4.2 问题一的模型的建立与求解	10
4.2.1 分类模型的建立	10
4.2.2 分类结果	12
4.2.3 样本分类	13
4.3 问题二模型的建立与求解	14
4.3.1 分析斯坦麦茨方程的限制	14
4.3.2 构造温度修正斯坦麦茨方程	14
4.3.3 参数拟合	15
4.4 问题三模型的建立与求解	17
4.4.1 回归模型的建立与求解	17
4.4.2 交互模型的建立与求解	18
4.4.3 极值的求解	21
4.5 问题四模型的建立与求解	21
4.5.1 构建模型	21

4.5.2 模型训练	22
4.5.3 误差分析	22
4.5.4 预测结果	23
4.6 问题五模型的建立与求解	24
五、模型的分析与检验	25
5.1 模型优点	25
5.2 模型缺点	25
5.3 模型推广	25
六、参考文献	27

一、问题重述

1.1 问题背景

伴随着科学技术与社会经济的高速发展,我国高压直流输电也纳入了国家重点工程,尤其是双碳背景下,国家大力支持,技术飞速发展,同时伴随着一系列问题涌现,变压器的磁芯损耗问题就是其一,这直接关系着设备的效率、成本及电网的稳定性,为了提高效率,本文深入研究这些磁性元件的磁芯损耗^[1],因为磁芯损耗会受到多种因素影响而使得测量结果不准确,下面将利用 COMSOL 建模进行损耗仿真,重点考虑励磁波形、温度、频率、磁芯材料这四个要素。

1.2 问题提出

问题一:励磁波形分类

励磁波形是对影响磁芯损耗的重要原因之一。因此,准确分类不同的励磁波形对于深入理解磁芯损耗机制以及优化磁芯设计具有重要意义。本问题要求对实验数据中的磁通密度随时间变化的数据进行分析,提取相关特征变量,通过这些变量构建分类模型,识别出三种不同的励磁波形(正弦波、三角波、梯形波)。将最终模型的分类的结果填入 Excel 表格,并对特定样本进一步分类统计。

问题二:使用斯坦麦茨方程(Steinmetz-equation)修正

常规的斯坦麦茨方程并未提及温度的损耗的影响,且只适用于对正弦波的计算,本题需要在传统斯坦麦茨方程的基础上,考虑温度因素,对斯坦麦茨方程进行修正,构造一个适用于温度变化的函数,利用附件一的正弦波数据,分析添加了温度系数后的修正方程与传统的斯坦麦茨方程在预测磁芯损耗的差异。

问题三:磁芯损耗因素分析

考虑到温度、励磁波形、磁芯材料都会对磁芯损耗预测的结果造成影响,本问题通过分析这三个指标独立作用以及两两关联时的作用,建立损耗模型,对损耗数据进行分析,得出最低损耗时的最佳工作条件,组合。

问题四:基于数据驱动的磁芯损耗预测模型

为了克服传统磁芯损耗模型在不同材料和工况下预测精度的局限性,本研究目标是开发一个高精度的磁芯损耗预测模型,该模型能够适应不同的材料和工作环境。利用实验数据,使用回归模型或机器学习算法,并验证其预测准确性和适用性。此外,我们将对选定样本的磁芯损耗进行预测。将预测结果整理进 Excel 表格中,并展示这些样本的预测值。将最终模型的分类的结果填入附件三,并将附件三中的部分序号损耗结果呈现在论文中。

问题五:磁性元件的最优化条件

本问题基于问题四的磁芯损耗模型,将频率与磁通密度峰值的乘积作为整体进行运算,综合了温度、频率、励磁波形、材料这些条件及他们的组合,在整合了传输磁能的情况下,找到传输磁能的最大值,同时要做到磁芯损耗最小^[1],并给出最佳结果时的磁芯损耗与传输磁能的具体值。

二、问题分析

2.1 数据分析

在进行数据分析前,首先要对数据集进行彻底的审查,特别是要检查是否存在缺失值。利用 SPSS 中“分析”下的“描述统计”菜单中的“描述”选项来查看数据集的摘要统计信息,包括缺失值的情况。如果数据集中存在缺失值,可以选择“替换缺失值”功能,通过计算变量的平均值、中位数或其他适当的值来填补缺失值,以此来保证数据的完整性。

针对数据集中的材料种类和励磁波形等分类变量,必须将它们转换成计算机可识别的格式,即将字符串类型数据转化为数值类型。在 SPSS 软件中,可以通过“转换”菜单下的“重新编码为不同变量”选项来实现这一转换。对于含有多个采样点的磁通密度这样的时序数据,利用“转换”菜单的“计算变量”功能来抽取关键特征,例如平均值、标准偏差、最大值及等,将复杂的波形数据简化为有限的特征集,以便于后续模型的分析 and 处理。

2.2 问题一的分析

励磁波形的形态显著地影响磁芯的损耗特性。正弦波、三角波和梯形波这三种波形会在磁芯内部引发不同的磁通变化,进而影响损耗。因此,为了深入理解磁芯损耗的机制,准确识别和区分这三种励磁波形至关重要。通过分析附件一中提供的磁通密度数据,我们可以研究不同波形下磁通密度的分布和形状特征。通过计算波形的关键特征(如平均值、标准偏差、最大值和变化率),我们可以将复杂的波形数据简化为易于模型处理的特征数据。

接下来,我们根据已有数据来提取的特征数据来训练分类模型,以区分三种不同的波形,使用常用的分类算法,如随机森林或者支持向量机(SVM)。通过使用训练集来训练模型,并使用测试集进行评估模型的性能,验证模型的有效性。在训练完成模型之后,我们通过计算准确率、精准度等指标,来评估模型在识别三种励磁波形的准确性。

最后,我们将训练好的模型根据附件二中磁通密度的时序数据样本进行波形分类,并将分类的结果记录到附件四中。此外,我们还需要对特定样本的分类结果进行汇总、分析。

2.3 问题二的分析

经典斯坦麦茨方程存在只能应用在正弦波形以及固定温度下的缺点,对于非正弦波形或不同种类的磁芯材料及工作温度的变化,可能会导致较大的误差。因此,题目要求增加温度这个因素来构造修正斯坦麦茨方程^[3]。使用附件 1 的实验数据,利用差分进化算法拟合参数,通过计算均方误差以及拟合优度,评估模型的预测效果。

2.4 问题三的分析

针对问题三,为了能够更直观的得到温度、励磁波形、磁芯材料对磁芯损耗的影响,以 PQ0-DMR95 为例,使用了 CERO 搭建了磁芯模型,通过 COMSOL 进行了仿真。通过预设温度与磁芯材料得到仿真结果并与之前的数据进行对比,得出结论。

2.5 问题四的分析

针对问题四,为了能更好的适应更广泛的范围以及取得更高的精度,通过机器学习的方法^[4],建立在不同温度、波形以及磁芯材料下,能够较好的预测磁芯损耗的模型。利用梯度提升决策树模型求解,通过比较参数评估预测精度。

2.6 问题五的分析

针对问题五,在确保适应不同的工作环境的前提下,能够实现磁芯损耗的最小化以及传输磁能的最大化。本问题通过模拟退火算法对上述两项指标进行综合优化^[5],使用归一化权重确定权重比例,从而确定最佳的工作条件为实现最佳性能。

三、模型假设

为了构建一个既实用且可靠的模型,先对模型设定一些基本假设,使其更加完备,从而提高预测的准确性。

1. 假设提供的数据是准确无误的。
2. 假设数据中的异常值是可以接受的,并且有其合理性。
3. 在磁性元件设计中,磁芯损耗与传输磁能是两个核心且相互影响的性能指标。设计目标是在最小化磁芯的损耗的同时,最大化磁芯的传输磁能,在磁芯损耗和传输磁能的这两个方面能达到一个合适的平衡点。
4. 传输磁能计算假设:假设传输磁能与频率和磁通密度峰值的乘积直接相关。为提高精度,进一步考虑使用非线性关系或者引入其他参数(如材料特性)以更精细地描述传输磁能的计算。
5. 外部因素影响假设:假设磁芯材料、温度、工作频率、励磁波形和磁通密度峰值等外部因素对磁芯损耗和传输磁能的影响是确定的且可量化。
6. 性能指标独立性假设:假设传输磁能和磁芯损耗在一定范围内是可以独立优化的,即优化传输磁能时不会显著改变磁芯损耗。
7. 该修正模型假设磁芯损耗随温度的变化呈线性变化。

四、模型的建立与求解

4.1 数据预处理

4.1.1 数据清洗

利用 SPSS 中“分析”下面的“描述统计”菜单中的“描述”选项来查看数据集的摘要统计信息, 根据分析结果, 确认数据集没有缺失值。对数据进行是否正态分布的检验。为了更加直观的观察异常数据的存在与否, 利用 SPSS 绘制了四种材料的, 两种指标（频率, 磁芯损耗）的数据柱状图如下所示

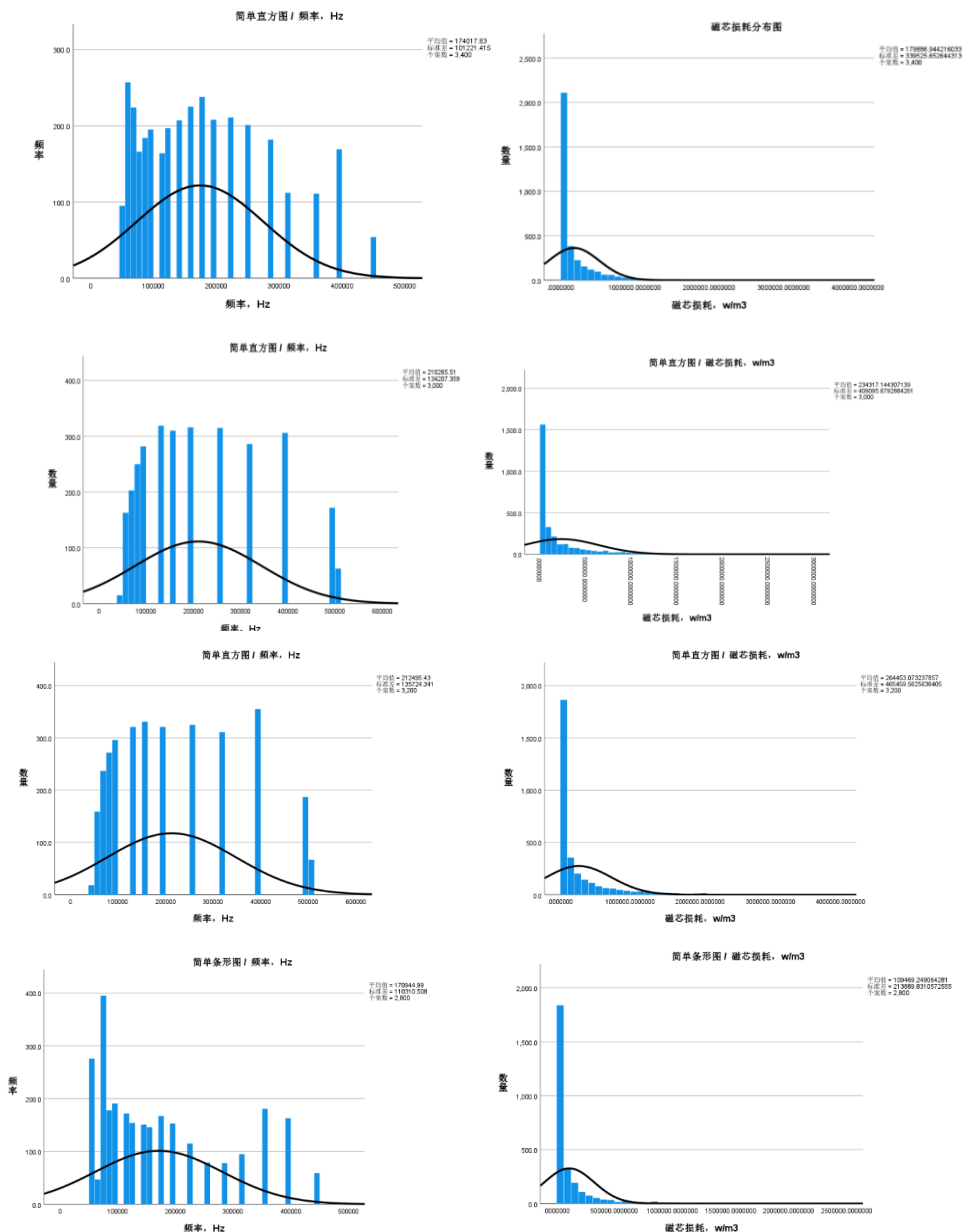


图 4-1 频率、磁芯损耗数据柱状图

我们利用 SPSS 对数据的频率分布和磁芯损耗分布进行了可视化分析, 从图中可以看出数据并不服从正态分布。对于异常值, 如果存在, 需要根据具体情况决定如何处理, 比如使

用截断、变换或者删除等方法。本题我们使用箱型图判定异常值。

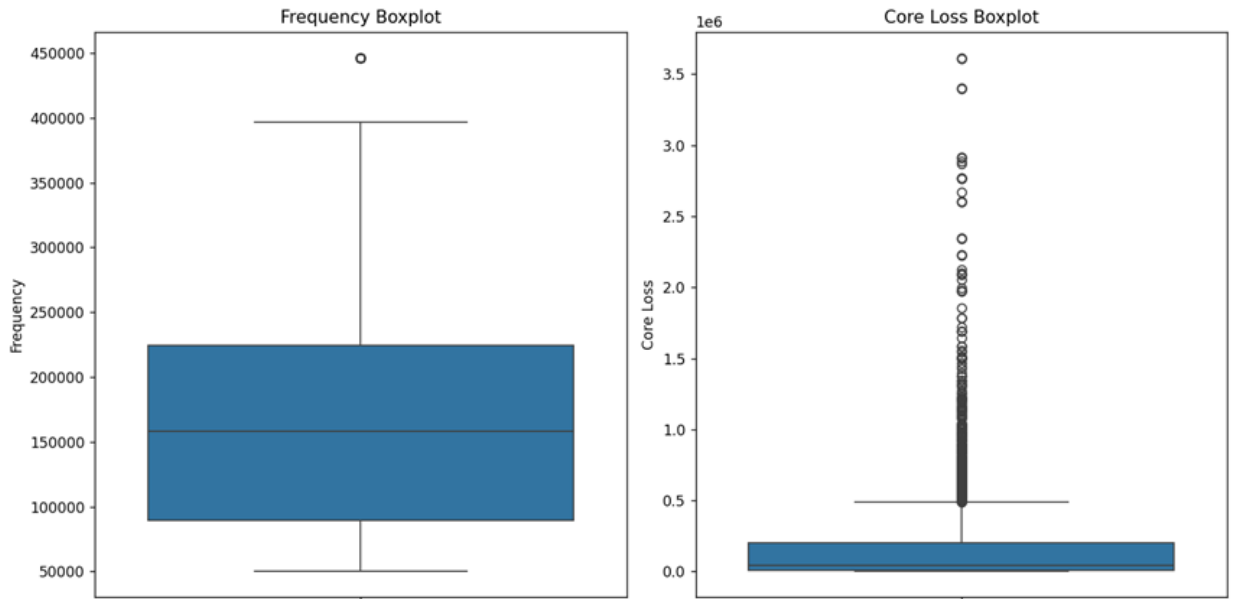


图 4-2 频率与磁芯损耗箱型图

箱型图是一种统计图表,用于展示数据集的分散情况,包括最小值、下四分位数($Q1$)、中位数($Q2$)、上四分位数($Q3$)和最大值。不受异常值影响,能准确稳定地描绘数据分布,有助于数据清洗。

箱型图通过这些数值构建一个“箱子”,箱子的上下界通常由第一四分位数和第三四分位数确定,而箱子的中间线表示中位数。箱子外的“须”(whiskers)通常延伸到 1.5 倍的四分位距(即 $Q3 - Q1$ 的差值)之外的最小值和最大值,但不超过数据集中的实际最小值和最大值。

异常值通常定义为超出这个“须”范围的点。这种定义有助于识别那些可能对数据分析产生影响的极端值。

将检测数据按照从小到大的递增顺序依次排序 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, 得到有序数列, 其中中位数 M 记为:

$$M = \begin{cases} X_{n+1/2} & , n \text{ 为奇数} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{X_n}{2} + X_{(1+n/2)} \right) & , n \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (1)$$

异常值判定标准为

$$X_1 > U + K \bullet IQR \mid X_1 < L - K \bullet IQR \quad (2)$$

式子中:

U ——上四分位点, 区间 $[M, X_n]$ 的中位数, 代表样本中只有 $\frac{1}{4}$ 的数值大于 U ;

L ——上四分位点, 区间 $[X_1, M]$ 的中位数, 代表样本中只有 $\frac{1}{4}$ 的数值小于 L ;

IQR ——四分位距, $IQR = U - L$; L ——步长系数, 取 $K = 1.5$

对于不服从正态分布的数据, 箱型图是一种非常有效的数据可视化工具。它不依赖于数据的分布形态, 因此不会受到异常值的影响。箱型图通过以下几个关键数值来描述数据的分布情况:

最小值: 数据集中的最小数值。

第一四分位数($Q1$): 将数据集分为四等分后的第一个分位数, 即 25%的数据点小于或等于这个值。

中位数($Q2$): 数据集的中间值, 50%的数据点小于或等于这个值。

第三四分位数($Q3$): 第二个分位数, 即75%的数据点小于或等于这个值。

最大值: 数据集中的最大数值。

4.1.2 数据转码

励磁波形和磁芯材料等别名变量的特征在建模时并不能用作数值计算, 因为字符串不能被机器识别, 需要对其进行编码。

表 4-1 励磁波形分类

名称	编码	名称	编码
正弦波	1	材料 1	1
三角波	2	材料 2	2
梯形波	3	材料 3	3
		材料 4	4

为了更加直观地展示材料 1 到材料 4 励磁波形编码后结果, 绘制的可视化结果如下图所示:

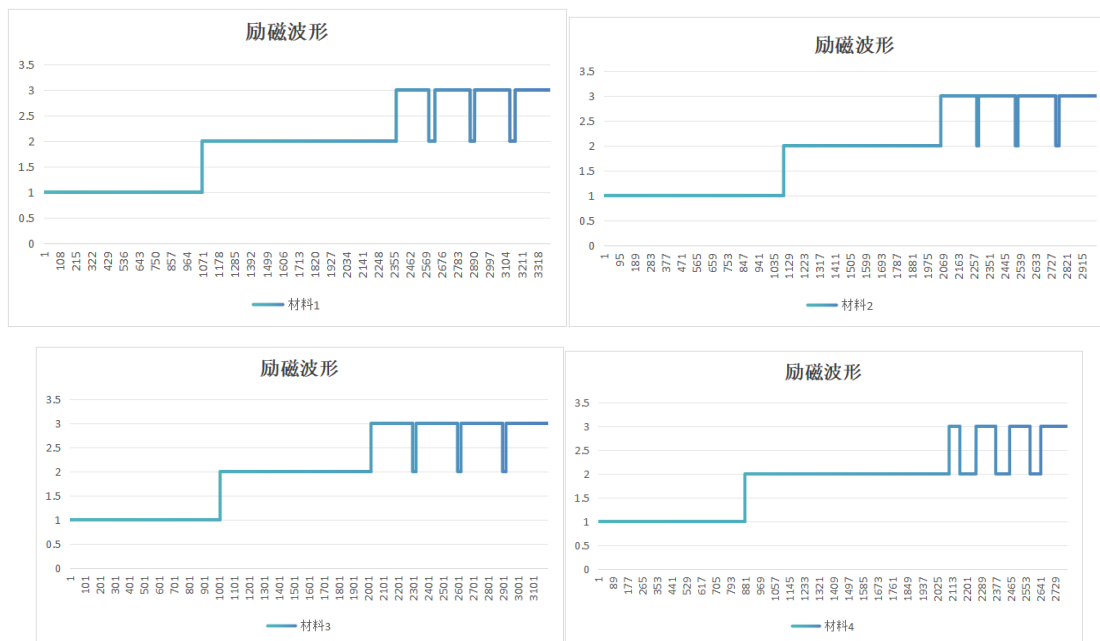


图 5-3 转码结果

4.2 问题一的模型的建立与求解

4.2.1 分类模型的建立

首先,从附件一中获取实验数据。样本中涵盖了温度、频率、磁芯损耗以及 1024 个磁通密度采样点。数据集中除了数值型变量外,还包含了表示波形类型的分类目标的字符变量。为了让这些数据适用于分类模型,需要先进行以下预处理步骤:

1 提取特征:磁通密度作为复杂的时序数据,包含 1024 个采样点,直接使用进行分类是不合适的。因此,首先要提取的是反应波形的特征变量。假设磁通密度随着时间的变化方程为 $B(t)$,提取的主要特征包括如下:

- 均值 $\mu = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T B_i$
- 标准差 $\sigma = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (B_i - \mu)^2}$
- 最大值 $\max(B_i)$
- 最小值 $\min(B_i)$
- 峰值:表示磁通密度达到最大值和最小值的采样点。

这些统计特征帮助我们将复杂的时序数据简化为有限的特征向量 X ,便于进行后续的分类和建模。

2 目标变量进行数值化:将数据集中励磁波形以字符的形式表示的内容(如“正弦波”、“三角波”、“梯形波”),为了使模型可以识别这些类别,将其转换为数值标签。具体地,令 y 表示目标变量:

- 正弦波记为 $y = 1$
- 三角波记为 $y = 2$
- 梯形波记为 $y = 3$

因此,对于每个样本而言,可以得到特征向量 X 和其对应的波形类型标签 y 。

为了评价模型的效能,数据被分为训练集和测试集。采用交叉验证的策略,随机选取 80% 的数据用于训练,剩下的 20% 用于测试。数据的具体分配可以通过以下公式来表示:

$$\text{Training Set: } (X_{\text{train}}, y_{\text{train}}), \text{ Validation Set: } (X_{\text{val}}, y_{\text{val}})$$

其中:

- X_{train} 表示训练集的特征矩阵
- y_{train} 表示训练集的波形标签
- X_{val} 和 y_{val} 分别表示验证集的特征矩阵和励磁波形标签序号。

使用交叉验证的策略能够有效避免模型过拟合,并确保模型的泛化能力。

随机森林 (Random Forest) 模型详细介绍如下

1 模型概述

随机森林^[6] (Random Forest) 是一种集成学习技术,属于监督学习算法的范畴,适用于分类和回归任务。它通过构建多个决策树并将它们的预测结果进行整合(例如通过投票)来做出最终预测。随机森林的关键在于利用多个弱学习器(决策树)的集成,形成一个强大的预测模型,它不仅具有较好的抗过拟合能力,而且泛化性能优异。

随机森林算法通过引入随机变量来增强模型的稳定性和多样性,这使得它在分析复杂数据集时尤为有效。其主要特征包括:

- 随机特征选择：在构建每一棵决策树时，随机挑选特征的子集进行训练。
- 样本子集抽样（袋外样本，OOB）：在训练每棵树的过程中，从训练集中随机抽取样本子集。

- 集成方法：每棵树独立训练，最终的分类或回归结果通过多数投票或平均值来确定。

2 随机森林的核心机制

随机森林的核心机制结合了自助采样（Bootstrap sampling）和随机特征选择技术。

2.1 自助采样（Bootstrap sampling）

在构建随机森林的过程中，算法会对每棵树执行有放回的随机抽样，从原始训练数据集中选取样本。这种做法导致每棵树的训练数据可能包含重复的实例，同时某些样本可能未被选中。未被选中的样本被称作为样本子集抽样（袋外样本，OOB）。这些样本可以用来评估模型的泛化能力，无需额外的测试集。

自助采样（Bootstrap sampling）的步骤如下：

- 首先从原始数据集中随机选择样本，并且每次抽取后都将样本放回，这样同一个样本可以在一次抽样过程中被多次选中。这个过程重复进行多次，抽样次数通常与原始数据集的大小相当。

- 由于每棵树使用的训练数据都具有差异性，这有助于增强模型的多样性和鲁棒性。每次抽样得到的样本集合合并起来，就形成了用于训练模型的新样本集。

2.2 随机特征选择

在构建每棵树时，并非使用所有可用特征进行分割，而是在每个决策节点随机挑选一个特征的子集。这种做法旨在避免任何单一特征在所有决策树中过度影响结果，从而增强模型的多样性和防止过拟合。

随机特征选择的步骤如下：

- 在构建每棵树时，在每个决策节点处要从所有特征中随机选择的特征数量。这个数量通常远小于总特征数。

- 对随机森林中的每棵树重复整个随机特征选择的过程，确保每棵树都具有不同的特征选择。所有树构建完成后，通过投票机制或平均值等集成方法来整合每棵树的预测结果，形成最终的模型输出。

3 随机森林分类的过程

随机森林的分类过程可以分为以下几个步骤：

3.1 构建决策树

每棵决策树 T_i 在构建中遵循如下步骤：

- Step 1: 通过自助采样（Bootstrap sampling）从原始训练数据集中提取新的子训练集 D_b ，子训练集的生成确保了每棵树训练数据的多样性。

- Step 2: 特征选择，在每棵树的每个节点，随机选择一个特征子集，从这个子集中选择最佳特征进行分裂。

- Step 3: 使用选定的特征递归地划分子训练集，直到满足停止条件如达到预设的最大深度，叶节点中的样本数量低于某个阈值。

- Step 4: 每个叶节点代表一个类别，该类别由该节点中样本数最多的类别决定。

- Step 5: 对于一个新的样本，每棵树独立地进行预测，每棵树根据新样本的特征，沿着树进行决策，直到达到叶节点，叶节点的类别即为该树对新样本的预测。

3.2 分类预测

在分类问题中,随机森林通过集成各决策树的预测结果来确定最终的类别。具体来说,如果一个随机森林由 T 棵决策树构成,每棵树 T_i 独立地对给定样本进行分类,并给出自己的预测 \hat{y}_i 。最终的类别选择是基于这些预测中得票最多的那一类:

$$\hat{y} = \text{Mode}(\{\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_T\})$$

其中,Mode 函数表示为取值出现频率最多的类别。

4.2.2 分类结果

模型训练完成后,使用验证集对模型进行评估,计算其分类准确率。假设预测结果为 \hat{y}_{val} ,验证集上的准确率 A 可以通过以下公式计算:

$$A = \frac{1}{N_{\text{val}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{val}}} \mathbb{I}(\hat{y}_i = y_{\text{val},i})$$

其中:

N_{val} 表示验证集的样本数量

\hat{y}_i 表示模型对第 i 个验证样本的预测结果

$y_{\text{val},i}$ 表示验证集第 i 个样本的真实标签

\mathbb{I} 表示指示函数,在预测正确时取值为 1,否则取值为 0。

通过验证集的准确率,可以评估模型的分类可行性。

在模型验证完成后,使用已训练好的模型对附件二中的测试数据进行预测。首先对测试数据进行同样的特征提取,将其转化为特征矩阵 X_{test} 。随后,利用训练好的随机森林模型对每个测试样本进行分类,预测其波形类型:

$$\hat{y}_{\text{test}} = \text{TreeBagger}(X_{\text{test}})$$

将训练好的随机森林模型对每个材料二的测试样本进行分类,预测样本中数据的波形类型。最后,将预测结果转换为对应的波形名称,输出分类结果。

混淆矩阵是机器学习中用来评估分类模型性能的工具。它通过一个矩阵的形式,展示了模型预测的结果与实际标签之间的关系。通过混淆矩阵来展示分类模型的准确率。

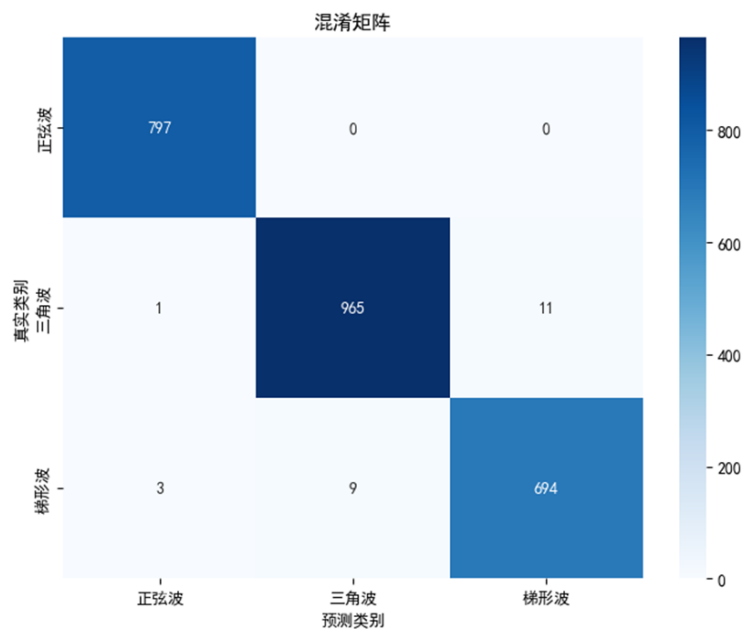


图 4-3 混淆矩阵

第一行显示模型对类别 1 的预测, 有 797 次预测正确, 模型没有出现错误, 为分类类别 1. 预测准确率为 100%。

第二行显示对类别 2 模型的预测, 有 965 次预测正确, 12 次预测错误. 预测准确率为 98. 7%。

第三行显示对类别 3 模型的预测, 有 694 次预测正确, 12 次预测错误. 预测准确率为 98. 3%

4.2.3 样本分类

使用训练好的模型对附件二中的磁通密度数据进行分类预测, 将预测结果填入附件四中的相应位置。对于每个样本, 其分类结果为数字形式 (1 表示正弦波, 2 表示三角波, 3 表示梯形波)

统计出附件二中三种波形的各自数量, 正弦波的数量是 20 个, 三角波的数量为 44 个, 梯形波的数量是 16 个, 如下表 1 三种波形各自数量

表 4-2 三种波形各种数量

波形统计	波形预测结果
1	20
2	44
3	16

附件二中样本序号为: 1、5、15、25、35、45、55、65、75、80 的分类结果, 如下表 2 部分序号分类结果

表 4-3 部分序号分类结果

样本序号	分类结果
1	2
5	2
15	1
25	2
35	3
45	3
55	2
65	2
75	2
80	1

为了更加直观地展示问题一结果, 绘制如下图 5-2 三种波形可视化结果:

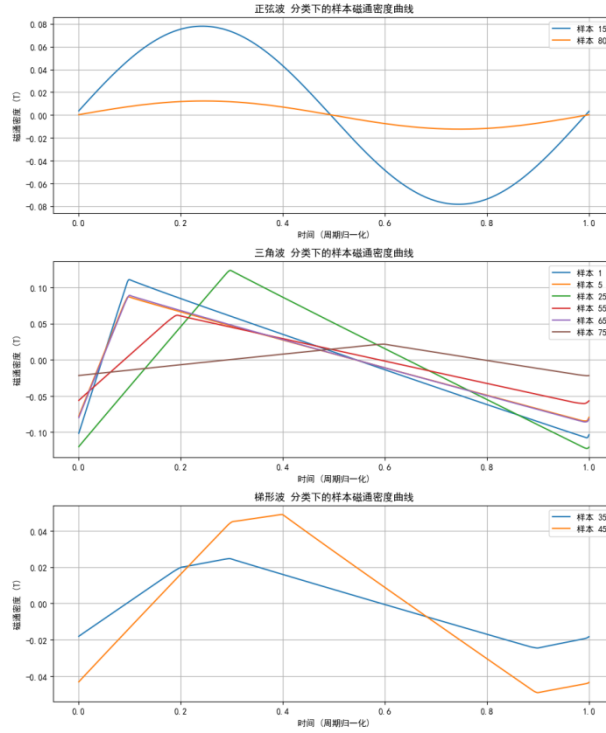


图 4-4：三种波形可视化结果

4.3 问题二模型的建立与求解

4.3.1 分析斯坦麦茨方程的限制

斯坦麦茨方程是在交变磁场下计算磁芯损耗的经验公式。该方程主要应用在设计变压器和电机等电气设备时的磁芯损耗预测。它描述了在交变磁场中, 磁性材料的磁滞损耗, 涡流损耗和剩余损耗。其形式为:

$$P = k_1 \cdot f^a \cdot B_m^b$$

其中

- P 为磁芯损耗 ;
- f 为频率;
- B_m 为磁通密度的峰值;
- k_1 、 a 和 b 是需要通过数据计算得出的待拟合参数。

然而, 经典斯坦麦茨方程存在只能应用在正弦波形以及固定温度下的缺点, 对于非正弦波形或不同种类的磁芯材料及工作温度的变化, 可能会导致较大的误差。

4.3.2 构造温度修正斯坦麦茨方程

为了构造一个适用于不同温度变化的磁芯损耗修正斯坦麦茨方程, 我们可以在原斯坦麦茨方程的基础上引入温度修正项, 使得模型可以在温度变化的情况下仍然能够保持其准确性。修正后的斯坦麦茨方程形式为:

$$P = k_1 \cdot f^a \cdot B_m^b \cdot (1 + c \cdot T)$$

其中:

- T 为温度;

- c 为温度修正系数。

该修正项 $(1 + c \cdot T)$ 表示了磁芯损耗在温度变化下的影响部分, 参数 c 表示温度变化对磁芯损耗的影响幅度。当 $c > 0$ 时, 温度升高会增加磁芯损耗, 而 $c < 0$ 时, 温度升高会减小损耗。

4.3.3 参数拟合

差分进化算法^[7] (Differential Evolution, DE) 是一种基于种群的优化算法, 广泛应用于复杂优化问题中, 差分进化算法在参数拟合中的优势主要体现在其强大的全局搜索能力、对导数信息无依赖、易于实现和调整、对多目标和约束问题的适应性强, 以及其在复杂、不确定问题中的鲁棒性。这些特点使其在复杂模型的参数优化和拟合中具有显著的优势。

本文使用了差分进化算法, 从实验数据中拟合斯坦麦茨方程中的参数 k_1 、 a 和 b 。给定一组实验数据, 包括频率 f 、磁通密度峰值 B_m 和对应的磁芯损耗 P , 最小化以下目标函数:

$$\min_{k_1, a, b} \sum_{i=1}^n (P_i - k_1 \cdot f_i^a \cdot B_{m,i}^b)^2$$

其中 P_i 是第 i 个样本的实际损耗值, f_i 和 $B_{m,i}$ 分别是第 i 个样本的频率和磁通密度峰值, n 为样本总数。

通过非线性回归, 得到传统斯坦麦茨方程的拟合参数为:

- $k_1 = 1.4998$
- $a = 1.4296$
- $b = 2.4713$

拟合后的斯坦麦茨方程可以写作:

$$P = 1.4998 \cdot f^{1.4296} \cdot B_m^{2.4713}$$

类似于传统斯坦麦茨方程的拟合方法, 通过最小化损耗预测与实际损耗之间的误差来拟合修正后的方程。目标函数为:

$$\min_{k_1, a, b, c} \sum_{i=1}^n (P_i - k_1 \cdot f_i^a \cdot B_{m,i}^b \cdot (1 + c \cdot T_i))^2$$

其中 T_i 是第 i 个样本的温度。

通过非线性回归, 得到修正斯坦麦茨方程的拟合参数为:

- $k_1 = 1.7884$
- $a = 1.4427$
- $b = 2.4325$
- $c = -0.0054$

修正后的斯坦麦茨方程为:

$$P = 1.7884 \cdot f^{1.4427} \cdot B_m^{2.4325} \cdot (1 - 0.0054 \cdot T)$$

4.3.4 误差分析

为了评估模型的预测效果,本文计算了拟合优度^[8] (Goodness of Fit) 和均方误差 (Mean Squared Error, MSE)。

均方误差是一种评价指标,常被用来衡量预测值与实际值之间差异。它通过计算预测值与实际值之差的平方的平均值来反映模型的准确性。对于传统斯坦麦茨方程以及修正斯坦麦茨方程他们的均方误差分别为:

$$\begin{aligned} \text{MSE}_{\text{traditional}} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(P_{\text{loss}} - \hat{P}_{\text{loss}}^{\text{tradition}, i} \right)^2 = 1638190471.8135 \\ \text{MSE}_{\text{corrected}} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(P_{\text{loss}} - \hat{P}_{\text{loss}}^{\text{correct}, i} \right)^2 = 273624838.1098 \end{aligned}$$

显然,修正斯坦麦茨方程比传统斯坦麦茨方程的均方误差更低,由此说明修正斯坦麦茨方程比传统斯坦麦茨方程的预测准确性得到了提升。

拟合优度,用于衡量线性回归模型的拟合效果。它表示实际磁芯损耗与预测磁芯损耗之间的相关性,数值范围在 0 到 1 之间,越接近 1,表示模型对数据的解释能力越强。拟合优度的公式为:

$$R^2 = 1 - \frac{SS_{\text{res}}}{SS_{\text{tot}}}$$

其中:

SS_{res} 是残差平方和,即实际磁芯损耗与预测磁芯损耗之间差异的平方和:

$$SS_{\text{res}} = \sum (y_{\text{true}} - y_{\text{pred}})^2$$

SS_{tot} 是总平方和,即实际磁芯损耗与实际磁芯损耗均值之间差异的平方和:

$$SS_{\text{tot}} = \sum (y_{\text{true}} - \bar{y})^2$$

其中, \bar{y} 是实际磁芯损耗的平均值。

对于传统斯坦麦茨方程和修正斯坦麦茨方程,拟合优度分别为:

$$\begin{aligned} R_{\text{traditional}}^2 &= 0.9448 \\ R_{\text{corrected}}^2 &= 0.9908 \end{aligned}$$

修正斯坦麦茨方程比传统斯坦麦茨方程的拟合优度 R^2 值更高,由此说明修正斯坦麦茨方程比传统斯坦麦茨方程可以更好的对数据进行解释。

具体结果比对图,如下所示

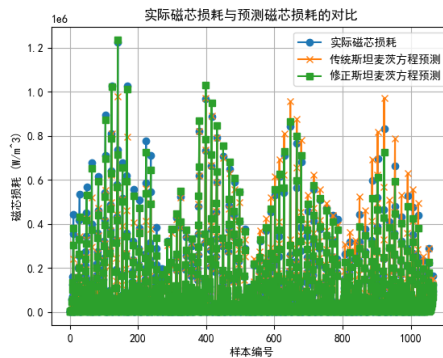


图 4-5: 结果比对图

传统斯坦麦茨方程与修正斯坦麦茨方程对磁芯损耗预测结果和实际磁芯损耗之间的对比图, 每个样本的编号由横坐标表示, 样本由纵坐标表示该在两个方程预测下的磁芯损耗以及实际的磁芯损耗。

- 实际磁芯损耗：蓝色圆点表示实际的磁芯损耗数据。
- 传统斯坦麦茨方程预测：黄色叉号表示传统斯坦麦茨方程的预测结果。
- 修正斯坦麦茨方程预测：绿色方块表示修正斯坦麦茨方程的预测结果。

为了更加直观的看到预测磁芯损耗与实际磁芯损耗之间的区别, 本文截取了其中 50 个样本的磁芯损耗数据, 结果如下图所示

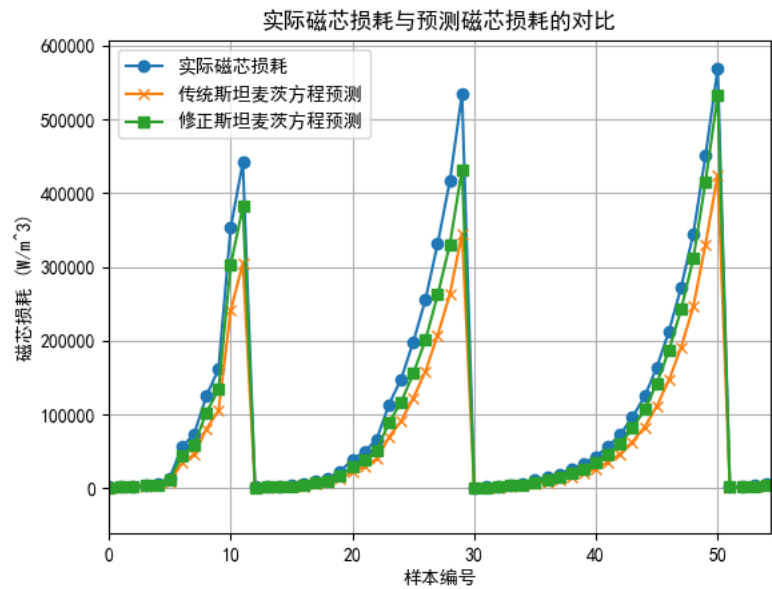


图 4-6 实际磁芯损耗与预测磁芯损耗的对比图

通过对比图, 我们不难看出修正斯坦麦茨方程的预测结果和传统斯坦麦茨方程的预测结果相比更加接近实际磁芯损耗, 说明该修正斯坦麦茨方程相比于传统斯坦麦茨方程在温度变化的情况下更加具有稳定性以及适用性, 从而可以预测出更加符合实际磁芯损耗的结果。

4.4 问题三模型的建立与求解

4.4.1 回归模型的建立与求解

在附件提供的数据集中, 包含了材料(材料一、材料二、材料三、材料四), 励磁波形(正弦波、三角波、梯形波), 温度(25 ℃、50 ℃、70 ℃、90 ℃), 频率(), 要深入研究其中每个量独立变化时的影响以及两两交互作用找出了最优条件下的最低磁芯损耗及其对应的工作参数。四种材料分别是铁氧体、硅钢片、软磁合金、粉末铁。

使用线性回归模型对数据进行拟合, 单变量线性回归方程为:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$$

其中, y 为目标变量(磁芯损耗), x 为特征变量(温度, 频率, 励磁波形, 材料), β_0 为截距, β_1 为斜率, ϵ 为必然误差。

多变量线性回归方程为:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n + \epsilon$$

模型训练:

1. 损失函数: 线性回归方程的损失函数为均方误差:

$$J(\beta) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i)^2$$

2. 参数估计

参数 β 利用最小二乘法来估计:

$$\beta = (X^T X)^{-1} X^T y$$

使用 simulink 对函数表达式建模, 得到残差图为:

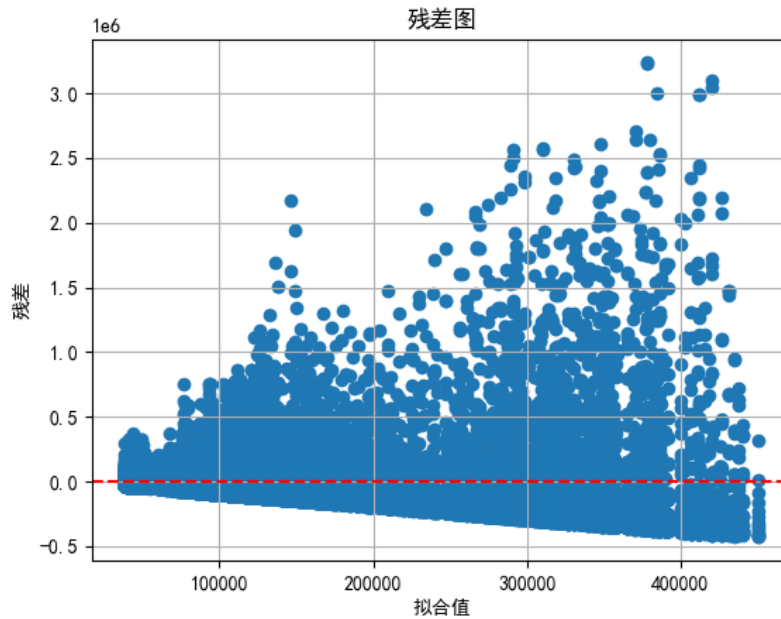


图 4-7 残差图

4.4.2 交互模型的建立与求解

随着磁通密度的增加, 材料的磁滞回线面积增大, 导致滞后损耗增加。这意味着在高磁通密度下, 损耗会显著增加。同时随着涡流损耗与磁通密度的平方成正比。高磁通密度下, 涡流的强度增加, 从而导致损耗增加。因此我们通过 COMSOL 仿真得到的磁通密度图, 间接的得到磁芯损耗的情况。作为影响磁芯损耗的三大要素, 温度、励磁波形、磁芯材料作为变量添加到模型中, 第一组以材料一、25 ℃为基准, 分别观察三种波形时的磁芯损耗, 第二组采取温度为50 ℃, 材料一为基准, 分别观察三种波形时的磁芯损耗, 第三组采取温度为70 ℃, 材料一为基准, 分别观察三种波形时的磁芯损耗, 第四组采取温度为90 ℃, 材料一为基准, 分别观察三种波形时的磁芯损耗, 第五组以材料一、25 ℃为基准, 分别观察三种波形时的磁芯损耗, 第六组以材料二、25 ℃为基准, 分别观察三种波形时的磁芯损耗, 第七组以材料三、

25 ℃为基准, 分别观察三种波形时的磁芯损耗, 以此类推, 固定两个变量, 剩下的作为考察变量分别输入, 对比输出的损耗结果。使用 CERO 建立磁芯模型, 使用 COMSOL 设定参数进行仿真。

搭建的磁芯模型如图：

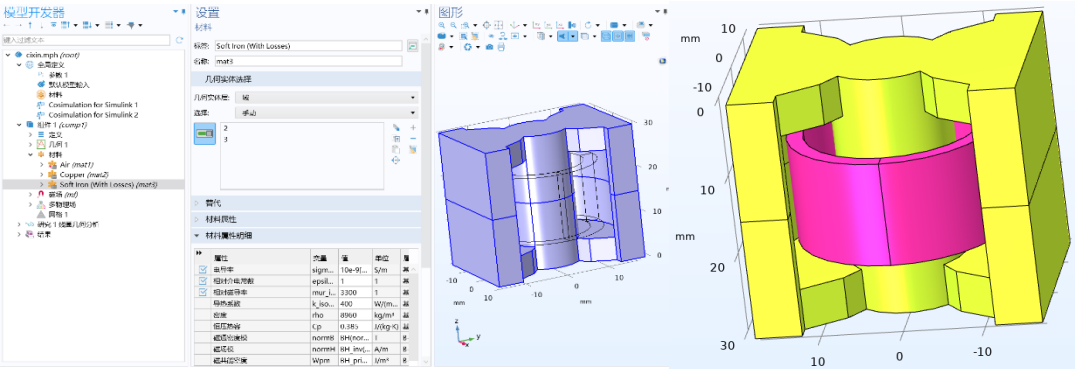


图 4-8 磁芯模型仿真图

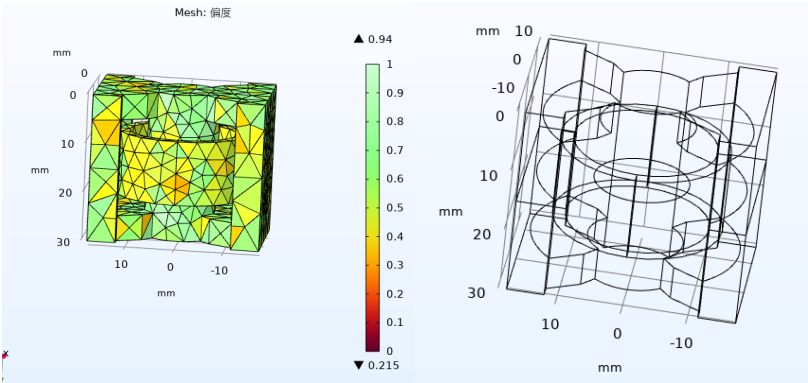


图 4-9 磁芯质量及线框渲染图

得到磁通密度图(25 ℃,材料一情况下的磁通密度图)：

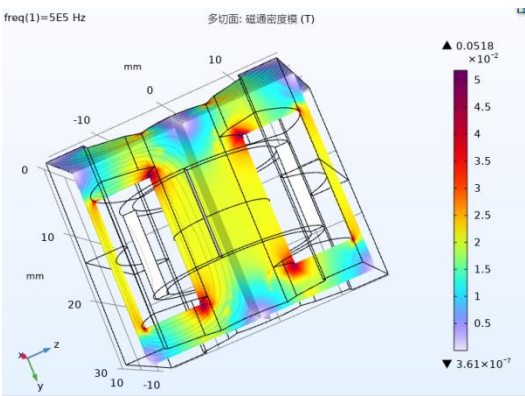


图 4-10 第一组磁通密度图

图示为25 ℃,材料二情况下的磁通密度图,以此类推,得到仿真磁通密度图示。

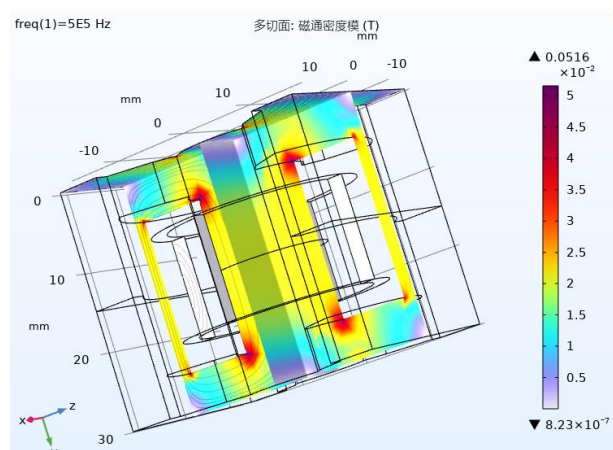


图 4-11 第二组磁通密度图

图示为25℃,材料三情况下的磁通密度图,以此类推,得到仿真磁通密度图示。

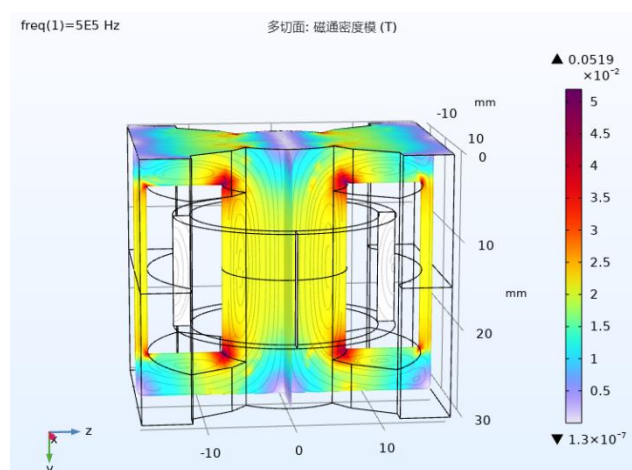


图 4-12 第三组磁通密度图

图示为25℃,材料四情况下的磁通密度图,以此类推,得到仿真磁通密度图示。

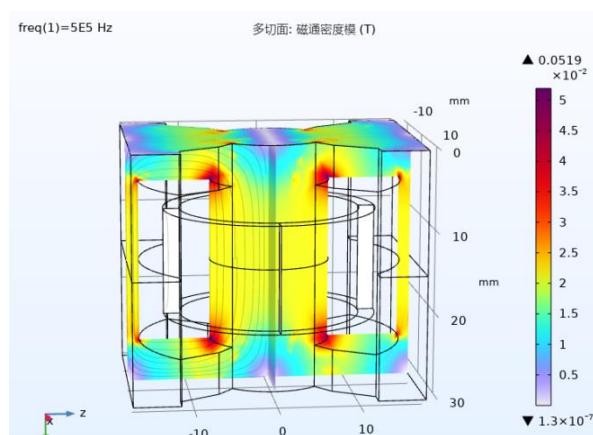


图 4-13 第四组磁通密度图

得到交互作用图为：

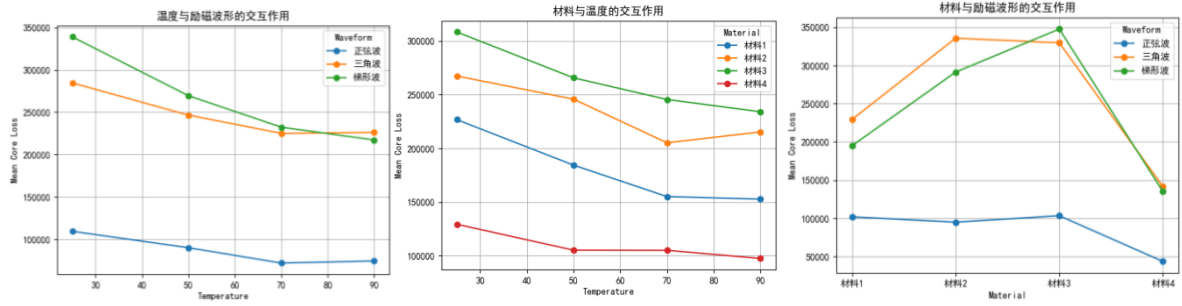


图 4-14 目标因素交互作用折线图

4.4.3 极值的求解

通过回归模型的预测,找出了在不同组合条件下磁心损耗的最小值。根据模型的预测结果,最低损耗为:

$$\min(\hat{P}) = \min_{M,T,W,f} \hat{P}(M,T,W,f)$$

即最优条件下,损耗达到最小值的条件为在温度为 70 摄氏度,频率为 50kHz,波形为正弦波,采用材料四的情况下,在该条件下,磁心损耗的最小值为 $3.7930e4W/m^3$ 。

4.5 问题四模型的建立与求解

4.5.1 构建模型

梯度提升决策树[9](GBDT)是一种高效的集成学习算法,它通过逐次增加决策树来逐步减少预测误差,广泛应用于回归和分类任务。GBDT 的核心思想是使用前一轮模型的残差(即真实值与预测值的差异)作为当前模型的学习目标,逐步引入弱学习器(通常是决策树)以减少训练数据的损失函数,直到达到预设的停止条件。梯度提升树的预测公式可以表示为:

$$\hat{y}_{\text{GBT}} = \sum_{m=1}^M \eta \hat{h}_m(X)$$

其中, \hat{y}_{GBT} 是预测结果, M 是树的数量, η 是学习率, $\hat{h}_m(X)$ 是第 m 棵树的输出。通过不断更新模型残差,最终得到损耗的精确预测。

GBDT 算法的流程如下:

初始化: 首先,GBDT 使用一个简单的模型(如常数模型)对所有样本进行初始预测。

迭代过程: 在每次迭代中,计算当前模型的预测结果与真实标签之间的残差,然后训练一个新的决策树来拟合这些残差。新训练的决策树会加入模型,并更新每个样本的预测值,方法是将新决策树的输出加到原预测值上。这个过程会不断重复,直到达到设定的迭代次数或停止条件。

损失函数与梯度: GBDT 的核心在于如何利用梯度信息引导决策树的生成。不同任务对应不同的损失函数,梯度信息直接用于修正当前的错误。

参数调整: 在实际应用中,可以通过调整如迭代次数($n_{\text{estimators}}$)、学习率($learning_rate$)、决策树最大深度(max_depth)等关键参数来优化模型表现。

GBDT 的优势体现在高精度、良好的泛化能力、可解释性、鲁棒性以及快速预测等方面。

因此,本文选择梯度提升决策树算法构建回归模型,迭代次数选择 100 次,学习率选择 0.1,决策树最大深度选择 3。

4.5.2 模型训练

我们选择上文整理好的数据集,数据被分为训练集和测试集。采用交叉验证的策略,随机选取 80% 的数据用于训练,剩下的 20% 用于测试。

4.5.3 误差分析

为了评估模型的预测效果,本文计算了拟合优度 (Goodness of Fit) 和均方误差 (Mean Squared Error, MSE)。

均方误差是一种评价指标,常被用来衡量预测值与实际值之间差异。它通过计算预测值与实际值之差的平方的平均值来反映模型的准确性。公式如下

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (P_{loss} - \hat{P}_{loss}^{pred})^2 = 359027.4725098504$$

拟合优度,用于衡量线性回归模型的拟合效果。它表示实际磁芯损耗与预测磁芯损耗之间的相关性,数值范围在 0 到 1 之间,越接近 1,表示模型对数据的解释能力越强。拟合优度的公式为:

$$R^2 = 1 - \frac{SS_{res}}{SS_{tot}}$$

其中:

SS_{res} 是残差平方和,即实际磁芯损耗与预测磁芯损耗之间差异的平方和:

$$SS_{res} = \sum (y_{true} - y_{pred})^2$$

SS_{tot} 是总平方和,即实际磁芯损耗与实际磁芯损耗均值之间差异的平方和:

$$SS_{tot} = \sum (y_{true} - \bar{y})^2$$

其中, \bar{y} 是实际磁芯损耗的平均值。

对于磁芯损耗预测模型,拟合优度为:

$$R^2 = 0.10114302362035388$$

具体结果比对图,如下所示

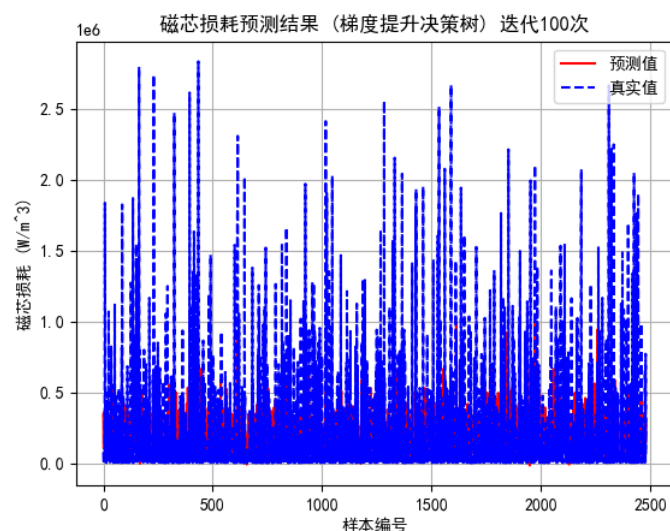


图 4-15 磁芯损耗预测结果图

预测模型磁芯损耗预测结果与实际磁芯损耗之间的对比图,横坐标表示每个样本的编号,纵坐标表示该样本在预测模型预测下的磁芯损耗以及实际的磁芯损耗。

实际磁芯损耗：蓝色虚线表示实际的磁芯损耗数据。

预测模型预测损耗：红色实线表示预测模型的预测值。

为了更加直观的看到预测磁芯损耗与实际磁芯损耗之间的区别,本文截取了其中 100 个样本的磁芯损耗数据,结果如下图所示

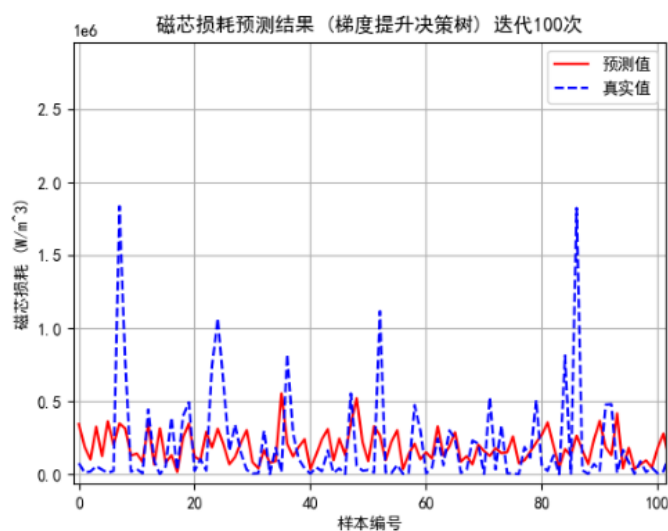


图 4-16 磁芯损耗预测迭代结果图

4.5.4 预测结果

使用训练好的模型对附件三中样本的磁芯损耗进行预测,将预测结果填入附件四中的相应位置。附件三中样本序号为：16、76、98、126、168、230、271、338、348、379 的磁芯损耗预测结果。

表 4-4 励磁波形分类

样本序号	预测结果
16	85290.40569
76	257089.0392
98	187528.5915
126	98595.16384
168	476878.9983
230	86529.23048
271	330352.1121
338	174084.8297
348	184061.3766
379	195018.4589

4.6 问题五模型的建立与求解

找到磁芯损耗与传输磁能最佳搭配, 在满足磁芯损耗最小的前提下实现磁能最多的传输, 通过遗传算法, 寻找最优解集

遗传算法的步骤:

1. 初始化种群: 在参数空间内随机生成一组初始解, 每个解对应模型中的参数 (a, b, c, d, e, g)
 2. 适应度函数: 使用模型的 MSE 作为适应度函数, 目标是最小化 MSE 。
 3. 选择: 选择适应度较高的个体进入下一代, 适应度值由 $\frac{1}{MSE}$ 计算得出
 4. 交叉与变异: 在下一代中对部分个体进行交叉操作, 生成新的解; 开对部分个体进行变异, 增加解的多样性。
 5. 终止条件: 当达到预定的迭代次数或适应度不再提升时, 算法停止, 并返回最优解。
- 适应度函数的定义:

$$Fitness = \frac{1}{MSE}$$

通过遗传算法优化模型参数 a, b, c, d, e, g , 可以有效提升模型对磁芯损耗的预测精度。

五、模型的分析与检验

5.1 模型优点

1. 模型的预测精度高

因为结合多种模型集成方法,通过多种随机森林、线性回归、梯度提升树等多种机器学习算法的方式,大大提高了预测精度,减少了单一模型可能出现的偏差,所以其精确性较高。

2. 鲁棒性强

多模型集成能在相同的数据条件下的预测结果保持较好的表现,避免因某个模型过于依赖特定的数据特征而导致的过拟合,所以稳定性较强。

3. 适应性强

通过引入实验数据驱动的建模方法,可以随时根据实验数据的变化灵活调整模型,使其适用于不同材料、工况等其他变量变化时候的情况。

4. 全局优化能力

例如使用 Simulated Annealing(模拟退火算法)算法,通过模拟“冷却”过程来寻找问题的最优解,可以有效在较大的搜索空间中找到全局最优解,避免陷入局部最优,适用于复杂的多目标优化问题。

5.2 模型缺点

1. 复杂度增加

采用多模型融合的方法虽然提升了预测的准确性,但同时也使得模型结构变得更加复杂。每个模型都需要单独进行训练和参数调整以获得预测结果,部分数据还需要在加权平均的基础上进行优化,这无疑增加了数据处理的计算量 and 时间成本。

2. 数据质量依赖强

模型的表现很大程度上依赖于实验数据的质量和数量,如果数据存在模糊值、异常值或缺失值,模型的预测效果大概率会大打折扣。

3. 不可解释性

使用机器学习模型算法如随机森林、梯度提升树,决策树等算法虽然能提供较高的预测精度,但因模型内部结构复杂,缺乏物理解释性,决策过程较为“黑箱化”。

4. 时间复杂度高

这些模型的训练和预测时间随数据量和模型复杂度的增加而上升,可能会在大数据集或实际应用中受到硬件资源等情况的限制。

5.3 模型推广

1. 适用于多目标优化领域

模型的多模型集成和 SA 全局优化方法,不仅适用于磁性元件设计,这种方法同样适用于其他需要进行多目标优化的领域,包括供应链管理、能源系统规划、工业生产优化等。

2. 适应不同工业场景

数据驱动的建模方法在具有大量历史数据的领域(如航空航天、汽车制造、制药行业等)具有很强的适应性。通过实验数据不断调整模型,使其适用于复杂的实际环境。

3. 其他性能优化场景

在材料性能预测、机器故障诊断、金融风险预测等需要综合考虑多个因素的领域,这种多模型集成方法可以大大提升预测的精度和实用性。

4. 跨行业应用的可能性

由于模型具有较强的灵活性和可移植性,可以扩展到其他工业问题中,不局限于特定的磁性元件设计。结合实际需求,可以调整模型的结构和参数,提升其在其他领域的表现。

六、参考文献

- [1] 陈恒林, 钱照明. 功率变流器中磁性元件损耗的影响因素[J]. 电力电子技术, 2007, 41(2):81-84
- [2] 孟瑞, 旷建军. 最小二乘法在磁芯损耗参数拟合中的应用[J]. 现代科学仪器, 2013, 30(1):91-9296
- [3] 汪晶慧, 陈为. 矩形波激励下磁芯损耗的研究[J]. 磁性元件与电源, 2015(11):117-121
- [4] 石磊, 李天, 高宇飞, 卫琳, 李翠霞, 陶永才. 基于机器学习的数据库系统参数优化方法综述[J]. 郑州大学学报(工学版), 2024, 45(1):1-1128
- [5] 林峻宁, 严柏平, 冯浩文, 陈聪, 黄大卓, 沈春城. 基于模拟退火改进 PSO 算法的 J-A 磁滞模型参数辨识[J]. 变压器, 2024, 61(2):26-34
- [6] 李慧, 李正, 余堃. 一种基于综合不放回抽样的随机森林算法改进[J]. 计算机工程与科学, 2015, 37(7):1233-1238
- [7] 齐郑, 徐希茜, 熊巍, 陈艳波. 基于变时段设计改进多目标差分进化算法的风/光/火/储日前优化调度[J]. 电力系统保护与控制, 2024, 52(16):62-71
- [8] 张世强. 曲线回归的拟合优度指标的探讨[J]. 中国卫生统计, 2002, 19(1):9-11
- [9] 陈世炳, 潘晶晶, 王斌, 林金山, 罗雁. 基于改进梯度提升决策树的 10 kV 及以下配电网线损率预测[J]. 系统仿真技术, 2023, 19(2):120-123
- [10] 徐怡, 邱紫恒. 基于遗传算法的划分序乘积空间问题求解层选择[J]. 软件学报, 2024, 35(4):1945-1963

[11] 八、附录

% 读取 Excel 文件,指定从第二行开始读取数据,第一行是表头

filename = '附件一（训练集）.xlsx'; % 请将文件名替换为实际文件名

data = readtable(filename, 'ReadVariableNames', true);

% 提取第二列（频率）和第三列（磁芯损耗）数据

frequency = data{2:3400, 2};

core_loss = data{2:3400, 3};

% 绘制频率和磁芯损耗的分布图

figure;

subplot(1, 2, 1);

histogram(frequency, 'Normalization', 'pdf');

hold on;

pd_freq = fitdist(frequency, 'Normal');

x_values = linspace(min(frequency), max(frequency), 100);

plot(x_values, pdf(pd_freq, x_values), 'r', 'LineWidth', 2);%

title('Frequency Distribution with Fitted Normal Curve');

xlabel('Frequency');

ylabel('Probability Density');

subplot(1, 2, 2);

histogram(core_loss, 'Normalization', 'pdf');

hold on;

pd_core_loss = fitdist(core_loss, 'Normal');

x_values = linspace(min(core_loss), max(core_loss), 100);

plot(x_values, pdf(pd_core_loss, x_values), 'r', 'LineWidth', 2);

title('Core Loss Distribution with Fitted Normal Curve');

xlabel('Core Loss');

ylabel('Probability Density');

% 正态性检验 (Kolmogorov-Smirnov test)

[h_freq, p_freq] = kstest((frequency - mean(frequency)) / std(frequency));

[h_core_loss, p_core_loss] = kstest((core_loss - mean(core_loss)) / std(core_loss));

```

% 判断正态分布并应用 3  $\sigma$  法或箱线图检测异常值

if p_freq > 0.05
    disp('Frequency follows a normal distribution, applying 3-Sigma method. ');
    mean_freq = mean(frequency);
    std_freq = std(frequency);
    upper_bound_freq = mean_freq + 3 * std_freq;
    lower_bound_freq = mean_freq - 3 * std_freq;

    % 3  $\sigma$  法检测频率异常值

    freq_outliers = frequency(frequency > upper_bound_freq | frequency <
lower_bound_freq);

    % 绘制结果

    figure;
    histogram(frequency, 'Normalization', 'pdf');
    hold on;

    xline(upper_bound_freq, 'r--', 'LineWidth', 2, 'Label', 'Upper 3  $\sigma$  Bound');

    xline(lower_bound_freq, 'r--', 'LineWidth', 2, 'Label', 'Lower 3  $\sigma$  Bound');

    title('3-Sigma Method for Frequency');
    xlabel('Frequency');
    ylabel('Probability Density');
else
    disp('Frequency does not follow a normal distribution, applying Boxplot method. ');

    % 绘制箱线图检测频率的异常值

    figure;
    boxplot(frequency);
    title('Boxplot for Frequency');
end

if p_core_loss > 0.05
    disp('Core loss follows a normal distribution, applying 3-Sigma method. ');
    mean_core_loss = mean(core_loss);
    std_core_loss = std(core_loss);
    upper_bound_core_loss = mean_core_loss + 3 * std_core_loss;

```

```

lower_bound_core_loss = mean_core_loss - 3 * std_core_loss;

% 3σ 法检测磁芯损耗的异常值
core_loss_outliers = core_loss(core_loss > upper_bound_core_loss | core_loss <
lower_bound_core_loss);

% 绘制结果
figure;
histogram(core_loss, 'Normalization', 'pdf');
hold on;
xline(upper_bound_core_loss, 'r--', 'LineWidth', 2, 'Label', 'Upper 3σ Bound');

xline(lower_bound_core_loss, 'r--', 'LineWidth', 2, 'Label', 'Lower 3σ Bound');%
title('3-Sigma Method for Core Loss');
xlabel('Core Loss');
ylabel('Probability Density');
else
disp('Core loss does not follow a normal distribution, applying Boxplot method.');
```

% 绘制箱线图检测磁芯损耗的异常值

```

figure;
boxplot(core_loss);
title('Boxplot for Core Loss');
end
```

% Model: cixinsunhaomoxingcailiao2.mph
% Version: COMSOL 6.2.0.290
% Date: Sep 25 2024, 00:30
% Table: Evaluation 3D - 交互的三维值

% x	y
z	Value
-4.6884195903373893E-7	9.680608255706753
7.192074396644786	0.022586092806300063