МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е.В. ЛЕДОВСКАЯ, Р. И. ДЗЕРЖИНСКИЙ

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Дифференциальные уравнения – это уравнения, в которые входят переменная, неизвестная функция этой переменной, и производные неизвестной функции:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

Порядок уравнения определяется порядком старшей производной.

Определение1: ***Решением***, ***интегралом*** или ***интегральной кривой*** дифференциального уравнения называется n раз дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, удовлетворяющая этому уравнению, т.е. такая, что

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0 \qquad (1)$$

тождественно по x на некотором участке изменения x.

Определение2: ***Общим решением*** называют функцию

$$y = \Phi(x, C_1, C_2, ..., C_n), \qquad (2)$$

зависящую от аргумента x и констант $C_1, C_2, \ldots, C_n$ (количество констант определяется порядком уравнения), такую, что:

а) при произвольном выборе констант является решением заданного уравнения;

б) какие бы ни были заданы начальные условия

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0', ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \qquad (3)$$

существует единственный набор констант $C_1=C_{10}$, $C_2=C_{20}$, …, $C_n=C_{n0}$ такой, что функция $y = \Phi(x, C_{10}, C_{20}, ..., C_{n0})$ (4)

удовлетворяет начальным условиям (3).

Если в результате интегрирования дифференциального уравнения решение найдено в неявном виде $\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$, говорят, что найден ***общий интеграл*** дифференциального уравнения.

Определение 3:***Частным решением*** дифференциального уравнения называют функцию $y = \Phi(x, C_{10}, C_{20}, ..., C_{n0})$, которая получается из общего решения (2) при определенном значении констант $C_1=C_{10}$, $C_2=C_{20}$, …, $C_n=C_{n0}$

Геометрически общее решение (2) представляет собой семейство кривых на плоскости OXY, зависящее от n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, а частное решение (4) – одну интегральную кривую этого семейства, проходящую через точку (x_0, y_0) и удовлетворяющую условиям (3), наложенным на производные функции y.

Определение 4: ***Задачей Коши*** называется задача отыскания решения уравнения (1), удовлетворяющего начальным условиям (3).

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

2.1. Уравнения с разделяющимися переменными (Задача №1)

Уравнение вида $y' = f(x) \cdot g(y)$, (5)

где $f(x)$ и $g(y)$ *- непрерывные функции, называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.*

Для отыскания решения уравнения (5) надо разделить в нем переменные. Для этого заменяют в (5) y' на $\frac{dy}{dx}$, обе части уравнения (5) делят на $g(y)$ (предполагая $g(y) \neq 0$) и умножают на dx. Тогда уравнение (5) принимает вид:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx. \qquad (6)$$

В этом уравнении переменная x входит только в правую часть, а переменная y - только в левую (т.е переменные разделены). Интегрируя (6), получаем:

$$\int \frac{dy}{g(y)} + C_1 = \int f(x)dx + C_2, \text{ или } \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C, \qquad (7)$$

где $C = C_2 - C_1$ – произвольная постоянная.

Соотношение (7) определяет неявным образом общее решение уравнения (5) Возможна *другая форма записи уравнения с разделяющимися переменными*. А именно:

$$f_1(x) \cdot g_1(y)dx + f_2(x) \cdot g_2(y)dy = 0. \qquad (8)$$

Здесь дифференциалы переменных записаны отдельно, и каждый из них умножен на произведение функций, зависящих *только от одной* переменной. В этом случае все уравнение делят на “посторонние” сомножители каждого слагаемого (в том слагаемом, где есть дифференциал переменной x, “посторонним” будет множитель, зависящий от y, и наоборот, там где есть dy, “посторонним” является множитель, зависящий от x), т.е. уравнение (8) делят на $g_1(y)$ и $f_2(x)$ (предполагая $f_2(x) \neq 0$ *и* $g_1(y) \neq 0$). Уравнение принимает вид:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0. \qquad (9)$$

Интегрируя это равенство, получим:

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = C \qquad (10)$$

ПРИМЕР1. $20xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 5xy^2dx$

В этом уравнении дифференциалы переменных представлены в явном виде. Будем разделять переменные. Для этого перенесем все слагаемые, содержащие dy в правую часть, а dx - в левую часть уравнения:

$$20xdx + 5xy^2dx = 3x^2ydy + 3ydy$$

Вынесем общие множители в левой и правой частях уравнения:

$$5x(4+y^2)dx = 3y(x^2+1)dy\,.$$

Разделим левую и правую части уравнения на множители, являющиеся "посторонними" в каждом произведении. Для части, содержащей dx, "посторонним" будет множитель, зависящий от y, т.е. $4+y^2$, а для части, содержащей dy - множитель, зависящий от x, т.е. x^2+1.

Получим: $\dfrac{5xdx}{x^2+1} = \dfrac{3ydy}{y^2+4}$. Интегрируем полученное равенство:

$$\int \frac{5xdx}{x^2+1} + \widetilde{C} = \int \frac{3ydy}{y^2+4}\text{ , учитывая, что } tdt = \frac{1}{2}d(t^2 \pm a)\text{, перепишем:}$$

$$\frac{5}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \widetilde{C} = \frac{3}{2}\int \frac{d(y^2+4)}{y^2+4}\text{, т.к.} \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C\text{, получим}$$

$$\frac{5}{2}\ln\left|x^2+1\right| + \widetilde{C} = \frac{3}{2}\ln\left|y^2+4\right| \text{ или окончательно:}$$

$$\underline{5\ln\left|x^2+1\right| + C = 3\ln\left|y^2+4\right|}.$$

Решение получено в неявном виде, т.е. в виде общего интеграла.

2. 2. Уравнения с однородными функциями (Задача №2)

Определение 5: Функция двух переменных $f(x,y)$ называется ***однородной функцией измерения*** k**,** если при любом значении λ справедливо равенство

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x,y)\,. \qquad (11)$$

В частности, функция является ***однородной функцией нулевого измерения***, если при любом значении λ справедливо

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)\,. \qquad (12)$$

Т.к. λ выбирается произвольно, можно взять $\lambda = \dfrac{1}{x}$. Но тогда равенство (12) принимает вид: $f(1, \dfrac{y}{x}) = f(x,y)$.

Таким образом, ***однородная функция нулевого измерения зависит только от отношения*** $\dfrac{y}{x}$**.**

Например, функция $f(x,y) = 5y^3 - 2xy^2 + 3x^3$ - однородная функция третьего измерения, т.к.

$$f(\lambda x, \lambda y) = 5(\lambda y)^3 - 2\lambda x(\lambda y)^2 + 3(\lambda x)^3 = \lambda^3(5y^3 - 2xy^2 + 3x^3) = \lambda^3 \cdot f(x,y)\,.$$

А функция $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2-2y^2}+x}{2x-y}$ - однородная функция нулевого измерения, т.к. числитель и знаменатель дроби представляют собой однородные функции первого измерения (убедиться самостоятельно). Покажем, что данная функция может быть представлена как функция отношения $\dfrac{y}{x}$. Для этого вынесем переменную x за скобки под корнем, затем за скобки в числителе и знаменателе:

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{x^2\left(1-2\frac{y^2}{x^2}\right)}+x}{2x-y}=\frac{x\cdot\sqrt{1-2\frac{y^2}{x^2}}+x}{2x-y}=\frac{x\cdot\left(\sqrt{1-2\frac{y^2}{x^2}}+1\right)}{x\cdot\left(2-\frac{y}{x}\right)}=\frac{\sqrt{1-2\left(\frac{y}{x}\right)^2}+1}{2-\frac{y}{x}}=\tilde{f}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Уравнение вида $y'=f(x,y)$ (13)

где $f(x,y)$ *- однородная функция нулевого измерения, называется дифференциальным уравнением с однородными функциями.*

Решение уравнений такого вида основано на том факте, что однородная функция нулевого измерения зависит только от отношения $\frac{y}{x}$. Такие уравнения приводят к виду уравнений с разделяющимися переменными, вводя новую функцию по формуле

$$\frac{y}{x}=t \tag{14}$$

и учитывая, что $y=x\cdot t$, а значит

$$y'=t+x\cdot t'. \tag{15}$$

Подставляя (14) и (15) в (13), получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$t+x\cdot t'=\tilde{f}(t).$$

Перенося t в правую часть и заменяя t' на $\frac{dt}{dx}$, получаем

$$x\cdot\frac{dt}{dx}=\tilde{f}(t)-t.$$

Разделяя переменные, окончательно получим:

$$\frac{dt}{\tilde{f}(t)-t}=\frac{dx}{x}. \tag{16}$$

После интегрирования уравнения (16) выполняют обратную подстановку по формуле (14).

Еще одна форма уравнений с однородными функциями имеет вид:

$$y'\cdot F(x,y)=G(x,y), \tag{17}$$

где $F(x,y), G(x,y)$ - однородные функции одинакового измерения. Разделив такое уравнение на $F(x,y)\neq 0$, получают уравнение вида (13).

ПРИМЕР 2. $y'=\frac{x^2+2xy-5y^2}{2x^2-6xy}$

Убедившись, что функция в правой части является однородной функцией нулевого измерения (самостоятельно), вводим новую функцию по формулам: $y'=t+x\cdot t'$, $y=x\cdot t$, $y'=t+x\cdot t'$.

Получаем уравнение с новой функцией: $t+x\cdot t'=\frac{x^2+2x\cdot xt-5\cdot(xt)^2}{2x^2-6x\cdot xt}$. Вынесем в числителе и знаменателе правой части x^2 за скобки и сократим дробь.

Уравнение примет вид: $t + x \cdot t' = \dfrac{x^2(1+2t-5t^2)}{x^2(2-6t)}$ или $t + x \cdot t' = \dfrac{1+2t-5t^2}{2-6t}$. В полученном уравнении перенесем t в правую часть и приведем выражение в правой части к общему знаменателю: $x \cdot t' = \dfrac{1+2t-5t^2}{2-6t} - t$, или $x \cdot t' = \dfrac{1+2t-5t^2-2t+6t^2}{2-6t}$, т.е. $x \cdot t' = \dfrac{t^2+1}{2-6t}$.

Заменим t' на $\dfrac{dt}{dx}$ и разделим переменные: $x \cdot \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{t^2+1}{2-6t}$, тогда $\dfrac{(2-6t)dt}{t^2+1} = \dfrac{dx}{x}$.

Интегрируем полученное уравнение:

$$\int \frac{(2-6t)dt}{t^2+1} = \int \frac{dx}{x} + C \qquad \text{или} \qquad 2\int \frac{dt}{t^2+1} - 3\int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} = \ln|x| + C,$$

т.е. $2\,\mathrm{arctg}\,t - 3\ln\left|t^2+1\right| = \ln|x| + C$.

В полученное решение подставляем значение t и окончательно получаем решение заданного уравнения в неявном виде:

$$2\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} - 3\ln\left|\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1\right| = \ln|x| + C.$$

2.3. Уравнения, приводящиеся к виду "с однородными функциями" (Задача №3)

Уравнения вида $y' = \dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$ не являются уравнениями с однородными функциями, если $c_1 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$, но могут быть приведены к такому виду с помощью подстановки вида:

$$\begin{cases} x = x_1 + m \\ y = y_1 + k \end{cases}. \qquad (18)$$

В этом случае $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy_1}{dx_1}$. Числа m и k подбираются таким образом, чтобы дробь в правой части нового уравнения была однородной функцией нулевого измерения. Подставим равенства (18) в числитель и знаменатель правой части уравнения. Дробь примет вид $\dfrac{a_1(x_1+m) + b_1(y_1+k) + c_1}{a_2(x_1+m) + b_2(y_1+k) + c_2}$. Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получим дробь аналогичную исходной: $\dfrac{a_1x_1 + b_1y_1 + (a_1m + b_1k + c_1)}{a_2x_1 + b_2y_1 + (a_2m + b_2k + c_2)}$.

Для того, чтобы эта дробь была однородной, приравняем свободные коэффициенты в числителе и знаменателе к нулю:

$$\begin{cases} a_1m + b_1k + c_1 = 0 \\ a_2m + b_2k + c_2 = 0 \end{cases} \qquad (19)$$

Полученные условия (19) служат для определения чисел m и k.

С новыми переменными исходное уравнение примет вид: $y_1' = \dfrac{a_1x_1 + b_1y_1}{a_2x_1 + b_2y_1}$.

Это уравнение с однородными функциями, решение которых рассмотрено выше.

ПРИМЕР 3. $y' = \dfrac{y+2}{2x+y-4}$

Введем новые переменные по формулам (18) .Подставим эти выражения в исходное уравнение:

$$y_1' = \frac{y_1+k+2}{2(x_1+m)+(y_1+k)-4} \text{ или } y_1' = \frac{y_1+(k+2)}{2x_1+y_1+(2m+k-4)}.$$

Приравняем свободные коэффициенты к нулю и определим m и k.

$$\begin{cases} k+2=0 \\ 2m+k-4=0 \end{cases} \text{ тогда } \begin{cases} k=-2 \\ m=-1/2k+2 \end{cases} \text{ т.е. } \begin{cases} k=-2 \\ m=3 \end{cases}.$$

В данном случае формулы (18) принимают вид: $\begin{cases} x = x_1+3 \\ y = y_1-2 \end{cases}$.

При найденных значениях m и k уравнение примет вид: $y_1' = \dfrac{y_1}{2x_1+y_1}$. Выносим в знаменателе x_1 за скобки: $y_1' = \dfrac{y_1}{x_1(2+y_1/x_1)}$ или $y_1' = \dfrac{\frac{y_1}{x_1}}{2+\frac{y_1}{x_1}}$.Используя подстановку $\dfrac{y_1}{x_1} = t,\ y_1 = tx_1,\ y_1{}' = t'x_1 + t$, преобразуем уравнение к виду: $t'x_1 + t = \dfrac{t}{2+t}$. Переносим t в правую часть, приводим правую часть к общему знаменателю, получаем: $t'x_1 = \dfrac{t}{2+t} - t$ или $t'x_1 = \dfrac{-t-t^2}{2+t}$. Заменяем t' на $\dfrac{dt}{dx_1}$ и разделяем переменные: $\dfrac{dt}{dx_1}\cdot x_1 = \dfrac{-t-t^2}{2+t}$, тогда $\dfrac{(2+t)dt}{-t-t^2} = \dfrac{dx_1}{x_1}$. Интегрируем полученное уравнение: $\displaystyle\int \frac{(2+t)dt}{-t-t^2} = \int \frac{dx_1}{x_1} + C$.

Выполним преобразование первой подынтегральной функции:

$$\frac{t+2}{-t^2-t} = -\frac{t+2}{t^2+t} = -\frac{t+2}{t^2+2\cdot t\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}} = -\frac{t+2}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}} = \frac{3/2}{\frac{1}{4}-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{t+1/2}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}.$$

Уравнение примет вид: $3/2\displaystyle\int \frac{dt}{1/4-(t+1/2)^2} - 1/2\int \frac{d\left((t+1/2)^2-1/4\right)}{(t+1/2)^2-1/4} = \ln|x_1| + \widetilde{C}$.

Получаем: $\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{2\cdot 1/2}\ln\left|\dfrac{(t+1/2)+1/2}{(t+1/2)-1/2}\right| - \dfrac{1}{2}\ln\left|(t+1/2)^2-1/4\right| = \ln|x_1| + \widetilde{C}$. Запишем постоянную интегрирования $\widetilde{C}$ как $\ln|C|$ и, преобразовав, получим:

$\dfrac{3}{2}\ln\left|\dfrac{t+1}{t}\right| - \dfrac{1}{2}\ln\left|t^2+t\right| = \ln|x_1| + \ln|C|$, или $\ln\left|\dfrac{t+1}{t^2}\right| = \ln|C\cdot x_1|$.

Значит: $\frac{t+1}{t^2} = C \cdot x_1$ или $t+1 = C \cdot t^2 \cdot x_1$. Подставляем значение $t = \frac{y_1}{x_1}$, получим:

$\frac{y_1}{x_1} + 1 = C \cdot \left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2 \cdot x_1$. Умножая равенство на x_1, получим $y_1 + x_1 = C \cdot y_1^2$. Вернемся к исходным обозначениям по формулам $\begin{cases} x_1 = x-3 \\ y_1 = y+2 \end{cases}$. Получим решение исходного уравнения: $(y+2)+(x-3) = C \cdot (y+2)^2$. Либо окончательно: $\underline{x + y = C \cdot (y+2)^2 + 1}$.

2.4. Линейные уравнения. Решение задачи Коши. (Задача №4)

Уравнение вида

$$y' + p(x) \cdot y = f(x), \qquad (20)$$

где $p(x)$ и $f(x)$ - непрерывные функции, называется линейным уравнением первого порядка.

Один из методов решения таких уравнений – метод Бернулли. Он заключается в том, что решение ищут в виде произведения двух функций:

$$y = u(x) \cdot v(x) \qquad (21)$$

В этом случае $y' = u'v + uv'$ (22)

Подставляя y и y' в исходное уравнение, получают уравнение:

$$u'v + uv' + p \cdot u \cdot v = f \qquad (23)$$

Затем выполняют группировку слагаемых, содержащих одну из функций:

$$u \cdot (v' + pv) + u' \cdot v = f \qquad (24)$$

Каждая функция из произведения (21) может быть выбрана произвольно, только все произведение в целом должно удовлетворять уравнению (20). Поэтому ту функцию, которая осталась в скобках, находят из условия - выражение в скобках приравнивается к нулю:

$$v' + p \cdot v = 0 \qquad (25)$$

Полученное уравнение – с разделяющимися переменными. Его разрешают относительно неизвестной функции v. При этом находят только одну функцию, удовлетворяющую уравнению (25) (интегрируя уравнение (25), в решение не включают постоянную интегрирования).

Найденную функцию подставляют в уравнение (24), которое с учетом равенства (25), принимает вид:

$$u' \cdot v(x) = f(x) \qquad (26)$$

Это уравнение также является уравнением с разделяющимися переменными. Его разрешают относительно неизвестной функции $u(x)$. Найденные функции $v = v(x)$ и $u = u(x, C)$ подставляют в равенство (21).

ПРИМЕР 4. Найти решение задачи Коши. $y' - y/x = -2/x^2, \quad y(1) = 1.$ (27)

Для решения этой задачи сначала найдем общее решение заданного уравнения в виде $y = u \cdot v$, тогда $y' = u'v + uv'$. Уравнение принимает вид: $u'v + uv' - uv/x = -2/x^2$

Группируем слагаемые, содержащие функцию v, функцию u выносим за скобки: $u \cdot (v' - v/x) + u'v = -2/x^2$. (28)

Находим функцию v, приравняв к нулю выражение в скобках: $v' - v/x = 0$. Заменяем v' на $\frac{dv}{dx}$ и разделяем переменные: $\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}$, т.е. $\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}$. Интегрируя это равенство, находим одну функцию v, удовлетворяющую уравнению: $\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}$, значит $\ln|v| = \ln|x|$, т.е. $v = x$.

Подставляем найденную функцию v в уравнение (28), с учетом равенства нулю выражения в скобках, получаем уравнение относительно неизвестной функции u:

$u' \cdot x = -2/x^2$. Заменяем u' на $\frac{du}{dx}$ и разделяем переменные: $x \cdot \frac{du}{dx} = -\frac{2}{x^2}$, т.е. $du = -\frac{2dx}{x^3}$. Интегрируя, находим функцию u: $\int du = -2\int \frac{dx}{x^3} + C$ или $u = -2\int x^{-3}dx + C$, значит $u = \frac{1}{x^2} + C$. Подставляем найденные значения u и v, находим общее решение уравнения (27): $y = \left(\frac{1}{x^2} + C\right) \cdot x$ или

$$y = \frac{1}{x} + Cx. \qquad (29)$$

Т.к. поставлена задача Коши, необходимо из найденного семейства функций (29) выбрать такую функцию, которая удовлетворяет условию $y(1) = 1$. Т.е. используя заданные начальные условия, надо определить конкретное значение постоянной С. Для этого в найденное общее решение подставим $x = 1$ и $y = 1$. Получим уравнение для определения С: $1 = \frac{1}{1} + C \cdot 1$. Откуда следует, что $C = 0$. Подставляем это значение в общее решение (29) и находим частное решение исходного дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям: $y = \frac{1}{x}$.

Другой метод решения уравнений (20) – метод Лагранжа, который заключается в том, что сначала решают однородное уравнение, соответствующее исходному:

$$y' + p(x) \cdot y = 0, \qquad (30)$$

Общее решение уравнения (30) находят, разделяя переменные, в виде:

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}, \qquad (31)$$

где С – произвольная постоянная.

Общее решение уравнения (20) вариации ищут, вариацией произвольной постоянной в виде:

$$y = C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}, \qquad (32)$$

где *C(x)* – некоторая, подлежащая определению, дифференцируемая функция от x.
Для нахождения *C(x)* нужно подставить y в исходное уравнение, которое принимает вид уравнения с разделяющимися переменными.

ПРИМЕР. Проинтегрировать уравнение $y' + \frac{xy}{1-x^2} = arcsin\, x + x.$ (33)

Однородное уравнение, соответствующее исходному, имеет вид:

$$y' + \frac{xy}{1-x^2} = 0 .$$

Разделяя переменные, интегрируем это уравнение:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{xdx}{1-x^2};\ ln\, y = \frac{1}{2} ln\left(1-x^2\right) + ln\, C, \text{ т.е. } y = C\sqrt{1-x^2}. \quad (34)$$

Полагаем теперь $y = C(x)\sqrt{1-x^2}$; (35)

тогда $y' = C'(x)\sqrt{1-x^2} - \frac{xC(x)}{\sqrt{1-x^2}}$. (36)

Подставляя в уравнение (33) равенства (35) и (36), получим:

$$C'(x)\sqrt{1-x^2} - \frac{xC(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{1-x^2} C(x)\sqrt{1-x^2} = arcsin\, x + x, \quad (37)$$

т.е. $C'(x) = \frac{arcsin\, x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. (38)

Интегрируя, находим:

$$C(x) = \int \left(\frac{arcsin\, x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \frac{1}{2}\left(arcsin\, x\right)^2 - \sqrt{1-x^2} + C \quad (39)$$

Найденное значение (39) подставляем в равенство (35) и окончательно получаем общее решение уравнения (33):

$$y = \sqrt{1-x^2}\left(\frac{1}{2}\left(arcsin\, x\right)^2 - \sqrt{1-x^2} + C\right).$$

2.5. Уравнения Бернулли. (Задача №5)

Уравнение вида

$$y' + p(x)\cdot y = f(x)\cdot y^n, \quad (40)$$

где $p(x)$ и $f(x)$ *- непрерывные функции, называется уравнением Бернулли.*

Уравнения такого вида можно привести к виду линейных уравнений. Разделив уравнение на y^n, получают уравнение: $y' \cdot y^{-n} + p(x)\cdot y^{1-n} = f(x)$. Замена $z = y^{1-n};\ z' = y'\cdot y^{-n}$ приводит к линейному уравнению $z' + p(x)\cdot z = f(x)$.
Кроме того, такие уравнения можно сразу решать методом Бернулли, так же как и линейные уравнения.

ПРИМЕР 5.Найти решение задачи Коши.

$$y' - y\cdot tgx = -(2/3)y^4 \sin x, \quad y(0) = 1. \quad (41)$$

Будем искать решение сразу методом Бернулли: в виде произведения $y = u(x) \cdot v(x),\ y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Выполняя указанную подстановку, получаем уравнение: $u'v + uv' - u \cdot v \cdot tgx = -(2/3) \cdot u^4 \cdot v^4 \cdot \sin x$. Группируем слагаемые, содержащие функцию v, функцию u выносим за скобки:

$$u(v' - v \cdot tgx) + u'v = -(2/3) \cdot u^4 \cdot v^4 \cdot \sin x \qquad (42)$$

Находим функцию v, приравняв к нулю выражение в скобках: $v' - v \cdot \mathrm{tg}\, x = 0$. Заменяем v' на $\dfrac{dv}{dx}$ и разделяем переменные: $\dfrac{dv}{dx} = v \cdot \mathrm{tg}\, x$, т.е. $\dfrac{dv}{v} = \dfrac{\sin x \cdot dx}{\cos x}$. Интегрируя это равенство, находим <u>одну</u> функцию v, удовлетворяющую уравнению: $\displaystyle\int \frac{dv}{v} = \int \frac{\sin x \cdot dx}{\cos x}$ или $\displaystyle\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x}$. Значит $\ln|v| = -\ln|\cos x|$, т.е. $\ln|v| = \ln\left|(\cos x)^{-1}\right|$, т.е. $v = \dfrac{1}{\cos x}$.

Подставляем найденную функцию v в уравнение (42), с учетом равенства нулю выражения в скобках, получаем уравнение относительно неизвестной функции u:

$\dfrac{u'}{\cos x} = -\dfrac{2}{3} \cdot u^4 \cdot \dfrac{\sin x}{\cos^4 x}$. Заменяем u' на $\dfrac{du}{dx}$ и разделяем переменные: $\dfrac{du}{dx} = -\dfrac{2}{3} \cdot u^4 \cdot \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$, т.е. $u^{-4} du = -\dfrac{2}{3} \cdot u^4 \cdot \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$. Интегрируя, находим функцию u:

$\displaystyle\int u^{-4} du = -\frac{2}{3} \int \cos^{-3} x \cdot \sin x \cdot dx + \widetilde{C}$ или $\displaystyle\frac{u^{-3}}{-3} = \frac{2}{3} \int \cos^{-3} x \cdot d(\cos x) + \widetilde{C}$. Тогда $\dfrac{-1}{u^3} = \dfrac{2\cos^{-2} x}{-2} + \widetilde{C}$, или $\dfrac{1}{u^3} = \dfrac{1}{\cos^2 x} + C$, т.е. $\dfrac{1}{u^3} = \dfrac{1 + C\cos^2 x}{\cos^2 x}$ Значит $u^3 = \dfrac{\cos^2 x}{1 + C\cos^2 x}$, а $u = \left(\dfrac{\cos^2 x}{1 + C\cos^2 x}\right)^{\frac{1}{3}}$. Подставляем найденные значения u и v, находим общее решение уравнения (41):

$$y = \left(\frac{\cos^2 x}{1 + C\cos^2 x}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{\cos x} \text{ или } y = \frac{\cos^{2/3} x}{(1 + C\cos^2 x)^{1/3}} \cdot \frac{1}{\cos x}, \text{ т.е. } y = \frac{1}{\sqrt[3]{\cos x(1 + C\cos^2 x)}} \qquad (43)$$

Для решения задачи Коши необходимо найти функцию, удовлетворяющую начальным условиям $y(0) = 1$. Определим значение постоянной С, подставляя $x = 0,\ y = 1$ в общее решение (43). Получим: $1 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\cos 0(1 + C\cos^2 0)}}$ или $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1 + C}} = 1$; $1 + C = 1$; $C = 0$. Таким образом решением поставленной задачи является функция $\underline{y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\cos x}}}$.

2.6. Уравнения в полных дифференциалах (Задача №6)

Определение 6: ***Полным дифференциалом функции двух переменных F(x,y)*** называется выражение $dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$.

Уравнение вида

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \quad (44)$$

где левая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции двух переменных F(x,y) называется уравнением в полных дифференциалах.

Если уравнение (44) является уравнением в полных дифференциалах, то его можно записать следующим образом: $d\,F(x,y) = 0$.

Отсюда следует, что общее решение уравнения (44) в неявном виде определяется равенством

$$F(x,y) = C, \quad (45)$$

где С – произвольная постоянная.

Решая уравнения вида (44), необходимо сначала убедиться, что левая часть этого уравнения – действительно полный дифференциал некоторой функции *F(x,y)*. Т.е. проверить, что функции *M(x,y)* - частная производная по *x*, а *N(x,y)* – частная производная по *y* одной и той же функции:

$$M(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}; \quad N(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y} \quad (46)$$

Для этого используют следующее свойство частных производных: смешанные частные производные второго порядка функции двух переменных $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$ не зависят от порядка дифференцирования и совпадают, т.е. $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)$. Поэтому дифференцируют функцию *M(x,y)* по *y*, а функцию *N(x,y)* по *x* (чтобы получить смешанные частные производные второго порядка) и сравнивают полученные функции. Если они совпали, значит, уравнение действительно является уравнением в полных дифференциалах.

После того, как проверка выполнена, решение уравнения сводится к определению функции *F(x,y)* для подстановки его в решение (45).

Для этого интегрируют функцию *M(x,y)* по переменной *x* (т.к. она является частной производной по этой переменной):

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y), \quad (47)$$

где $\varphi(y)$ - постоянная интегрирования, которую считают зависящей от y. На этом этапе решения $\varphi(y)$ - ещё неопределенная. Для окончательного получения *F(x,y)* найденную функцию (47) дифференцируют по переменной у и приравнивают к уже известной частной производной функции *F(x,y)* по *y*, т.е. к функции *N(x,y)*:

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right) + \varphi'(y) = N(x,y)$. Полученное дифференциальное уравнение решают относительно неизвестной функции φ по переменной y.

Полученную функцию $\varphi(y)$ подставляют в (47), а окончательно определенную функцию $F(x,y)$ в решение (45).

ПРИМЕР 6. $x \cdot y^2 \cdot dx + y \cdot (x^2 + y^2) \cdot dy = 0$ (48)

Это уравнение имеет вид уравнения (44). Здесь $M(x,y) = xy^2$; $N(x,y) = y(x^2 + y^2)$.

Полагая, что $M(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}$; $N(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}$, проверим это. Вычислим смешанные производные второго порядка функции $F(x,y)$ по её частным производным первого порядка (при вычислении частной производной по переменной x, переменную y рассматриваем как константу, а при вычислении производной по переменной y, константой считаем переменную x).

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(M(x,y)\right) = \left(xy^2\right)'_y = x \cdot \left(y^2\right)'_y = x \cdot 2y = 2xy$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(N(x,y)\right) = \left(y(x^2 + y^2)\right)'_x = y \cdot \left(x^2 + y^2\right)'_x = y \cdot (2x + 0) = 2xy$$

Получили совпадение смешанных частных производных второго порядка. Будем определять функцию $F(x,y)$, интегрируя функцию $M(x,y)$ по переменной x. При этом полагаем $y=const$, и постоянную интегрирования (обозначаем $\varphi(y)$) считаем зависящей от y.

$$F(x,y) = \int xy^2 dx + \varphi(y) = y^2 \int x dx + \varphi(y) = y^2 \cdot \frac{x^2}{2} + \varphi(y) = \frac{1}{2}x^2 y^2 + \varphi(y). \quad (49)$$

Функция $F(x,y)$ определена с точность до постоянной интегрирования $\varphi(y)$.

Для определения $\varphi(y)$ продифференцируем полученную функцию (49) по переменной y (x считаем постоянной величиной) и приравняем к известной частной производной функции $F(x,y)$ по y, т.е. к функции $N(x,y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}x^2 y^2 + \varphi(y)\right) = \frac{1}{2}x^2\left(y^2\right)'_y + \varphi'(y) = \frac{1}{2}x^2 \cdot 2y + \varphi'(y) = x^2 y + \varphi';$$

с другой стороны, $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) = y(x^2 + y^2)$.

Приравнивая, получаем дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $\varphi(y): x^2 y + \varphi' = y(x^2 + y^2)$. В этом уравнении y – переменная величина, $x=const$.

Заменяем $\varphi'(y)$ на $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ и разделяем переменные: $x^2 y + \frac{d\varphi}{dy} = x^2 y + y^3$; $\frac{d\varphi}{dy} = y^3$; $d\varphi = y^3 dy$. Интегрируем полученное уравнение и находим $\varphi(y): \int d\varphi = \int y^3 dy + \hat{C}$; $\varphi = \frac{y^4}{4} + \hat{C}$.

Таким образом окончательно найдена функция $F(x,y)$: $F(x,y) = \frac{1}{2}x^2 y^2 + \frac{1}{4}y^4 + \hat{C}$.

Так как решение уравнения в полных дифференциалах выражается формулой (45), решение данного уравнения имеет вид:

$\frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 + \hat{C} = \widetilde{C}$,

или окончательно: $\underline{\frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 = C}$, где $C = \widetilde{C} - \hat{C}$ - произвольная постоянная.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

3.1. Уравнения вида $f(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ (Задача №7)

Уравнения такого вида не содержат в явном виде неизвестной функции y и её производных до (n-2)-го порядка включительно. Для понижения порядка уравнения вводят новую функцию по формуле: $z(x) = y^{(n-1)}$. Тогда $z'(x) = y^{(n)}$, и уравнение превращается в уравнение первого порядка. Решая его, находят функцию *z(x)*, которую затем интегрируют n-1 раз для получения функции *y(x)*.

Так как при каждом интегрировании в решение включается постоянная интегрирования, окончательная функция зависит от аргумента x и n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

ПРИМЕР 7. $x \cdot y''' + y'' = \frac{1}{\sqrt{x}}$. (50)

В этом уравнении старшей производной является производная третьего порядка, кроме того в уравнении представлена производная второго порядка, а искомая функция и её первая производная в явном виде отсутствуют. Поэтому понижение порядка уравнения выполняем по формулам: $z(x) = y''$; (51) $z'(x) = y'''$. Уравнение принимает вид: $x \cdot z' + z = \frac{1}{\sqrt{x}}$ или $z' + z \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x\sqrt{x}}$. Это линейное уравнение. Будем искать его решение в виде произведения двух функций: $z = u \cdot v$, тогда $z' = u'v + uv'$. Подставляем в уравнение: $u'v + uv' + uv\frac{1}{x} = \frac{1}{x\sqrt{x}}$. Группируем слагаемые, содержащие функцию v, функцию u выносим за скобки:

$$u'v + u(v' + v\frac{1}{x}) = \frac{1}{x\sqrt{x}} \qquad (52)$$

Функцию v находим, приравнивая к нулю выражение в скобках:

$$v' + v \cdot \frac{1}{x} = 0 \qquad (53)$$

Заменяем v' на $\frac{dv}{dx}$ и разделяем переменные: $\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}$; т.е. $\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$. Интегрируя, находим только одну функцию v, удовлетворяющую условию (53): $\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}$; значит $\ln|v| = -\ln|x|$ или $\ln|v| = \ln\left|\frac{1}{x}\right|$. Таким образом $v = \frac{1}{x}$.

Найденную функцию подставляем в уравнение (52) и , с учетом равенства (53), получаем: $u' \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Определяем функцию u, интегрируя уравнение $\frac{du}{dx} = x^{-\frac{1}{2}}$ или $du = x^{-\frac{1}{2}}dx$:

$\int du = \int x^{-\frac{1}{2}}dx + C_1$. Значит $u = 2\sqrt{x} + C_1$. Подставляем найденные значения функций u и v, определяем функцию z : $z(x) = (2\sqrt{x} + C_1) \cdot \frac{1}{x}$. Найденную функцию подставляем в равенство (40): $y'' = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{C_1}{x}$ (54).

Интегрируя равенство (43), находим y': $y' = \int \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{C_1}{x} \right) dx + C_2$. Получаем $y' = 2\int x^{-\frac{1}{2}}dx + C_1 \int \frac{dx}{x} + C_2$ или $y' = 4\sqrt{x} + C_1 \ln|x| + C_2$. Интегрируя последнее равенство, находим y: $y = \int \left(4\sqrt{x} + C_1 \ln|x| + C_2 \right) dx + C_3$. Подробнее:

$$y = 4\int x^{\frac{1}{2}}dx + C_1 \int \ln|x| dx + C_2 \int dx + C_3 \qquad (55).$$

Т.к. $\int \ln x dx = x \ln x + x$, окончательно получаем $\underline{y = \frac{8}{3}\sqrt{x^3} + C_1(x \ln x + x) + C_2 x + C_3}$.

3.2. Уравнения вида $f(y'', y) = 0$ (Задача №8)

Уравнения такого вида не содержат в явном виде аргумент x. Для понижения порядка уравнения вводят новую функцию по формуле: $z(y) = y'$.

(56)

Тогда $y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z(y)$, и уравнение превращается в уравнение первого порядка относительно неизвестной функции *z(y)*. Решая его, находят функцию *z(y)*, которую подставляют в (56). Полученное дифференциальное уравнение первого порядка решают относительно функции *y(x)*.

ПРИМЕР 8. Решить задачу Коши $y^3 y'' = y^4 - 16$, $y(0) = 2\sqrt{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$. (57)

Т.к. данное уравнение не зависит явным образом от переменной х, понижаем порядок уравнения. Вводим новую функцию *z(y)* по формулам: $y' = z(y)$; $y'' = z' \cdot z$.

Уравнение принимает вид: $y^3 \cdot z' \cdot z = y^4 - 16$. Заменяем z' на $\frac{dz}{dy}$ и разделяем переменные: $y^3 \cdot \frac{dz}{dy} \cdot z = y^4 - 16$, т.е. $zdz = \frac{y^4 - 16}{y^3}dy$. Интегрируя, находим: $\int zdz = \int \frac{y^4 - 16}{y^3}dy + C_1$ или $\frac{z^2}{2} = \int ydy - 16\int y^{-3}dy + C_1$. Т.е. $\frac{z^2}{2} = \frac{y^2}{2} + \frac{8}{y^2} + C_1$.

Окончательно, выражая $z(y)$, получим: $z = \frac{\sqrt{y^4 + 2C_1y^2 + 16}}{y}$. Подстановка этой функции приводит к уравнению: $y' = \frac{\sqrt{y^4 + 2C_1y^2 + 16}}{y}$.

Т.к. в данном случае требуется найти частное решение, можно воспользоваться начальными условиями уже на этом этапе решения задачи для определения первой из двух констант, которые должны входить в общее решение дифференциального уравнения второго порядка. Это упростит следующий этап интегрирования.

Подставим в полученное выражение для производной начальное условие: $y_0 = 2\sqrt{2}; \quad y_0' = \sqrt{2}$, получим $\sqrt{2} = \frac{\sqrt{(2\sqrt{2})^4 + 2C_1(2\sqrt{2})^2 + 16}}{2\sqrt{2}}$, или $16C_1 + 80 = 16$.

Отсюда C_1=-4. Подставив C_1, получаем уравнение: $y' = \frac{\sqrt{y^4 - 8y^2 + 16}}{y}$ или $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 4}{y}$. Разделяем переменные и интегрируем: $\int \frac{ydy}{y^2 - 4} + \ln \tilde{C}_2 = \int dx$

Тогда: $\frac{1}{2}\int \frac{d(y^2 - 4)}{y^2 - 4} + \ln \tilde{C}_2 = x$ или: $\ln(y^2 - 4) + \ln C_2 = 2x$. Откуда, используя свойства логарифмов, получаем: $C_2 \cdot (y^2 - 4) = e^{2x}$. Для получения окончательного решения подставим начальные условия $x_0 = 0; \quad y_0 = 2\sqrt{2}$ и определим C_2: $C_2\left((2\sqrt{2})^2 - 4\right) = e^0; \quad C_2 \cdot (8 - 4) = 1; \quad C_2 = 1/4$ Таким образом, решением задачи Коши является функция $1/4(y^2 - 4) = e^{2x}; \quad y^2 - 4 = 4e^{2x}$ или $\underline{y = 2\sqrt{e^{2x} + 1}}$.

4. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

4.1. Основные понятия

<u>Определение 7.</u> Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называют уравнение вида:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

(58)

<u>Определение 8</u>. Функции $y_1, y_2, \ldots y_n$ называются линейно зависимыми, если существует такой набор чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ не равных нулю одновременно, что выполняется тождество: $\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 + \ldots + \lambda_n \cdot y_n \equiv 0$.

Если таких чисел подобрать нельзя, то указанные функции линейно независимы. Например:

функции $y_1=x$, $y_2=x^2$, $y_3=x^3$ - линейно независимы, т.к. алгебраическая сумма $\lambda_1 \cdot y_1+\lambda_2 \cdot y_2+\lambda_3 \cdot y_3=\lambda_1 \cdot x+\lambda_2 \cdot x^2+\lambda_3 \cdot x^3$ может быть тождественно равна нулю только при нулевых значениях коэффициентов;

функции $y_1=x$, $y_2=e^x$, $y_3=2e^x$ - линейно зависимы, т.к. при $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-2$ и $\lambda_3=1$ алгебраическая сумма $\lambda_1 \cdot y_1+\lambda_2 \cdot y_2+\lambda_3 \cdot y_3=0 \cdot x+(-2) \cdot e^x+1 \cdot (2e^x)$ тождественно равна нулю.

Для случая двух функций понятие линейной независимости может быть сформулировано так: две функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы, если их отношение не является постоянной величиной: $y_1 / y_2 \neq const$.

Определение 9. Линейными дифференциальными уравнениями n-го порядка называются уравнения вида: $a_0 y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1} y'+a_n y=f(x)$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – коэффициенты, которые в общем случае являются функциями от x.

В данном расчетном задании представлены уравнения с постоянными коэффициентами.

Если правая часть уравнения тождественно равна нулю, уравнение называется однородным.

В случае, когда правая часть зависит от x или равна ненулевой константе, уравнение называется неоднородным.

4.2. Общее решение однородных уравнений

Теорема.

Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – линейно независимые частные решения уравнения

$$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1} y'+a_n y=0 \qquad (59),$$

то общее решение уравнения (48) определяется равенством:

$$y=C_1 y_1+C_2 y_2+\ldots+C_n y_n \qquad (60)$$

Для нахождения частных решений уравнений (59) составляют характеристическое уравнение

$$k^n+a_1 k^{n-1}+a_2 k^{n-2}+\ldots+a_{n-1} k+a_n=0 \qquad (61),$$

которое получается из уравнения (59) заменой в нем производных искомой функции соответствующими степенями k, причем сама функция заменяется единицей. Уравнение (61) имеет n корней – действительных или комплексных (среди которых могут быть и равные, т.е. кратные). В зависимости от характера корней характеристического уравнения составляются n частных решений уравнения (59), а именно:

1) каждому действительному простому корню $k=k_0$ соответствует частное решение $y=e^{k_0 x}$;
2) каждому действительному корню $k_{1,\ldots,r}=k_0$ кратности r соответствует r частных решений $y_1=e^{k_0 x}$, $y_2=xe^{k_0 x}$, $y_3=x^2 e^{k_0 x}$, …, $y_r=x^{r-1}e^{k_0 x}$;
3) каждой паре комплексных сопряженных корней $k=\alpha+\beta i$ и $k=\alpha-\beta i$ соответствует пара частных решений $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta \cdot x$, $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta \cdot x$;

4) каждой паре комплексных сопряженных корней $k_{1,\dots,r} = \alpha+\beta i$ и $k_{r+1,\dots,2r} = \alpha-\beta i$ кратности r соответствует r пар частных решений:

$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2=xe^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_3=x^2e^{\alpha x}\cos\beta x,\dots$, $y_r= {}^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_{r+1}=e^{\alpha x}\sin\beta x$, $y_{r+2}=xe^{\alpha x}\sin\beta x$, $y_{r+3}= x^2e^{\alpha x}\sin\beta x,\dots$, $y_{2r-1}=e^{\alpha x}\sin\beta x$, $y_{2r}= x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Согласно теореме *общее решение однородного уравнения **n**-го порядка может быть получено как линейная комбинация **n** линейно независимых частных решений.*

После получения этих решений на основании корней характеристического уравнения обще решение однородного уравнения записывают в виде:

$y_{o.o.}= C_1\cdot y_1+ C_2\cdot y_2+\dots+ C_n\cdot y_n$

ПРИМЕР 9. Найти общее решение уравнения $y''' - 2y'' + y' = 0$ (62)

Составляем характеристическое уравнение: $k^3 - 2k^2 + k = 0$. Раскладывая левую часть на множители: $k(k^2 - 2k + 1) = 0$ или $k(k-1)^2 = 0$, находим корни характеристического уравнения $k_1 = 0; k_2 = k_3 = 1$. Корень k=0 – простой действительный корень, ему соответствует одно частное решение $y_1 = e^{0\cdot x} = 1$. Корень k=1 – действительный корень кратности 2, поэтому ему соответствуют 2 частных, линейно независимых решения $y_2 = e^{1\cdot x} = e^x$, $y_3 = x\cdot e^{1\cdot x} = x\cdot e^x$. Общее решение составляем как линейную комбинацию найденных трех частных решений по формуле (60):

$y = C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3$, т.е. $\underline{y = C_1 + C_2e^x + C_3 x e^x}$.

4.3. Линейные неоднородные уравнения

Структура общего решения неоднородного линейного уравнения (58) определяется следующей теоремой:

Если u=u(x) – частное решение неоднородного уравнения, а y1,y2,…yn – n линейно независимых частных решений соответствующего ему однородного уравнения, то общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид $y = u + C_1y_1 + C_2y_2 \dots + C_ny_n$, (63)

т.е. общее решение неоднородного уравнения равно сумме любого его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения

Метод получения общего решения однородного уравнения рассмотрен в предыдущем пункте.

Данный метод применим только к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами, имеющими правую часть специального вида

4.3.1. Линейные уравнения с правой частью вида: $f(x) = P_m(x)$ (Задача №9)

Если правая часть линейного уравнения – многочлен m-ой степени, т.е. имеет вид: $f(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_{m-1}x + A_m$ (многочлен может быть неполным, т.е.

среди коэффициентов $A_1, A_2, \ldots, A_m$ могут быть нулевые, в том числе одновременно), то частное решение $u(x)$ ищут в виде многочлена той же степени с неопределенными коэффициентами. При этом многочлен должен содержать все степени переменной x, вне зависимости от количества слагаемых в правой части.

Например, если $f(x)=2x^3+1$ или $f(x)=x^3-2x^2+3x$, т.е. многочлен третьей степени, то частное решение ищут в виде: $u(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$.

Кроме того, необходимо учесть значение корней характеристического уравнения. А именно, если среди корней характеристического уравнения есть корень $k=0$ кратности r, то в частное решение добавляют множитель x^r.

Для определения коэффициентов частное решение подставляют в левую часть уравнения и приравнивают коэффициенты при равных степенях x в левой и правой части.

Пример 10. $y''' - 5y'' + 6y' = 6x^2 + 2x - 5$ (64)

Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение, соответствующее заданному: $y''' - 5y'' + 6y' = 0$ (65)

Для получения общего решения уравнения (65) составим характеристическое уравнение: $k^3-5k^2+6k=0$. (66)

Решим это уравнение, вынося за скобки множитель k и приравнивая к нулю каждый из полученных сомножителей: $k \cdot (k^2 - 5k + 6) = 0$;

$k=0$ и $k^2 - 5k + 6 = 0$.

Получаем 3 корня: $k_1=0$, $k_2=2$, $k_3=3$. Им соответствуют 3 частных решения:

$y_1=e^{0\cdot x}=1$; $y_2=e^{2\cdot x}$; $y_3=e^{3\cdot x}$.

Общее решение однородного уравнения $y_{о.о.}=C_1 y_1+C_2 y_2+C_3 y_3$ т.е.

$y_{о.о.}=C_1+ C_2 e^{2\cdot x} +C_3 e^{3\cdot x}$. (67)

Для получения частного решения неоднородного уравнения (64) – $u(x)$ рассмотрим правую часть уравнения $6x^2 + 2x - 5$ и корни характеристического уравнения (66). Так как правая часть уравнения (64) – многочлен второй степени, то частное решение следует искать также в виде многочлена второй степени с неопределенными коэффициентами: Ax^2+Bx+C. Но т.к. среди корней характеристического уравнения есть корень $k_1=0$, то этот многочлен необходимо домножить на x (корень характеристического уравнения $k_1=0$ – простой, поэтому домножать будем на x именно в первой степени). Таким образом, будем искать частное решение в виде

$u(x)=(Ax^2+Bx+C)\cdot x= Ax^3+Bx^2+C$ (68)

Для определения коэффициентов A, B и C вычислим три производные функции $u(x)$ и подставим их в уравнение (64). Для удобства, за чертой справа будем указывать коэффициенты, с которыми следует подставлять соответствующее слагаемое в уравнение:

$$\begin{array}{ll|l} u & = Ax^3 + Bx^2 + Cx & \cdot 0 \\ u' & = 3Ax^2 + 2Bx + C & \cdot 6 \\ u'' & = 6Ax + 2B & \cdot(-5) \\ u''' & = 6A & \cdot 1 \end{array}$$

Подставляя найденные производные в уравнение с указанными коэффициентами, получим:

$$6A - 5(6Ax + 2B) + 6(3Ax^2 + 2Bx + C) = 6x^2 + 2x - 5\ .$$

Или, раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые:

$$18Ax^2 + (12B - 30A)x + (6A - 10B + 6C) = 6x^2 + 2x - 5.$$

Составим систему уравнений, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, и определим значения A, B и C:

$$\left.\begin{array}{r} 18A = 6 \\ 12B - 30A = 2 \\ 6A - 10B + 6C = -5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \ \boldsymbol{A = 1/3} \\ \Rightarrow \ 12B = 30A + 2 \ \Rightarrow \boldsymbol{B = 1} \\ \Rightarrow \ 6C = 10B - 6A - 5 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{C = 1/2}\ . \end{array}$$

Подставим найденные значения коэффициентов в (57), получим частное решение

$$u(x) = 1/3\, x^3 + x^2 + 1/2x \qquad (69)$$

неоднородного уравнения (64).

Общее решение этого уравнения определяется формулой (63). Значит, с учетом формул (67) и (69), общее решение неоднородного линейного уравнения (64) имеет вид:

$$\underline{y_{\text{о.н.}} = 1/3\, x^3 + x^2 + 1/2x + C_1 + C_2\, e^{2\cdot x} + C_3\, e^{3\cdot x}}\ .$$

4.3.2. Линейные уравнения с правой частью вида: $f(x)=e^{\alpha x}P_m(x)$(Задача №10)

Если правая часть линейного уравнения – произведение экспоненты $e^{\alpha x}$ на многочлен m-ой степени, т.е. имеет вид: $f(x)=e^{\alpha x}(A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m)$ (и в этом случае среди коэффициентов $A_1, A_2, \ldots, A_m$ могут быть нулевые), то частное решение $u(x)$ ищут в виде аналогичного произведения $e^{\alpha x}$ на многочлен той же степени с неопределенными коэффициентами. При этом многочлен должен содержать все степени переменной x, вне зависимости от количества слагаемых входящих в многочлен в правой части.

Кроме того, в этом случае также учитывают значение корней характеристического уравнения. А именно, если среди корней характеристического уравнения есть действительный корень $k = \alpha$ (корень, совпадающий с числовым коэффициентом в степени экспоненты) кратности r, то в частное решение добавляют множитель x^r.

Для определения коэффициентов частное решение подставляют в левую часть уравнения и приравнивают коэффициенты при равных степенях x в левой и правой части.

Пример 10. $y''' + y'' - 6y' = (20x + 14)\cdot e^{2x}$ (70)

Для решения этого уравнения рассмотри однородное уравнение, ему соответствующее: $y''' + y'' - 6y' = 0$ (71)

и характеристическое уравнение : $k^3 + k^2 - 6k = 0$. Решением характеристического уравнения являются 3 действительных корня: $k_1=0$; $k_2=2$ и $k_3= - 3$. Этим корням соответствуют частные решения уравнения (71): $y_1=e^{0\cdot x}=1$; $y_2=e^{2\cdot x}$; $y_3=e^{-3\cdot x}$. Общее решение уравнения (71) – $y_{о.о.}=C_1+ C_2\, e^{2\cdot x} +C_3\, e^{-3\cdot x}$. (72)

Для получения частного решения неоднородного уравнения (70) рассмотрим его правую часть – функцию $f(x)= (20x+14)\cdot e^{2x}$. Это – произведение многочлена первой степени на e^{2x} (т.е. в этом случае α =2). Поэтому частное решение будем искать в виде произведения многочлена $Ax + B$ на e^{2x} . Кроме того, учтем, что значение простого корня $k_2=2$ совпадает с числом α. Поэтому добавим в произведение еще один множитель x.

Таким образом $u(x)= e^{2x}\cdot (Ax + B)\cdot x= e^{2x}\cdot (Ax^2+ Bx)$. (73)

Вычислим производные до третьего порядка включительно от данной функции. На каждом этапе вычисления производных, для удобства подстановки в исходное уравнение будем выносить e^{2x} за скобки, и группировать слагаемые по степеням x.

$$\left.\begin{aligned}
u' &= 2e^{2x}(Ax^2+Bx)+e^{2x}(2Ax+B)=e^{2x}(x^2\cdot 2A+x\cdot(2A+2B)+B)\\
u'' &= 2e^{2x}(2Ax^2+(2A+2B)x+B)+e^{2x}(4Ax+2A+2B)=e^{2x}(x^2\cdot 4A+x\cdot(8A+4B)+2A+4B)\\
u''' &= 2e^{2x}(4Ax^2+(8A+4B)x+2A+4B)+e^{2x}(8Ax+8A+4B)=e^{2x}(x^2\cdot 8A+x\cdot(24A+8B)+12A+12B)
\end{aligned}\right\|\begin{matrix}\cdot(-6)\\ \cdot 1\\ \cdot 1\end{matrix}$$

Подставим найденные производные в уравнение (70):

$$(x^2\cdot 0 + x\cdot 20A + 14A + 10B)\cdot e^{2x} = (20x +14)\cdot e^{2x}.$$

Для определения коэффициентов A и B составим систему двух уравнений, приравнивая коэффициенты при равных степенях x:

$$\left.\begin{aligned}20A&=20\\ 14A+10B&=14\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}A&=1\\ 10B&=14-14A\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}A&=1\\ B&=0\end{aligned}\right\}$$

После подстановки найденных коэффициентов в (73) получим частное решение неоднородного уравнения (70): $u(x)= e^{2x}\cdot x^2$. (74)

И окончательно, в соответствии с формулой (63), используя решения (72) и(74), запишем общее решение неоднородного уравнения (70):

$$\underline{y_{о.н.}= e^{2x}\cdot x^2 + C_1+ C_2\, e^{2\cdot x} +C_3\, e^{-3\cdot x}.}$$

4.3.3. Линейные уравнения с правой частью вида: $f(x)=e^{\alpha x}(M\cdot\cos\beta x + N\cdot\sin\beta x)$ (Задача №11)

Правая часть линейного уравнения – произведение экспоненты $e^{\alpha x}$ на линейную комбинацию тригонометрических функций $\sin\beta x$ и $\cos\beta x$ (аргументы функций должны совпадать) может быть представлена разными способами:

a) один из коэффициентов M или N равен нулю, т.е.

$f(x)= Me^{\alpha x}\cdot\cos\beta x$ или $f(x)= Ne^{\alpha x}\cdot\sin\beta x$

b) коэффициент α равен нулю, т.е. $f(x)=M\cdot\cos\beta x + N\cdot\sin\beta x$

с) коэффициент α равен нулю одновременно с одним из коэффициентов M или N, т.е. $f(x)= M\cdot\cos\beta x$ или $f(x)= N\cdot\sin\beta x$.

Во всех этих случаях частное решение ищут в полном виде (т.е. в виде, содержащем обе тригонометрические функции) с неопределенными коэффициентами.

При составлении $u(x)$ необходимо проверить значение корней характеристического уравнения. Если среди корней характеристического уравнения есть пара комплексный корней $k = \alpha + i\beta$ и $k = \alpha - i\beta$ (корни, содержащие в действительной части числовой коэффициент из степени экспоненты, а в мнимой части – числовой коэффициент из аргумента тригонометрических функций) кратности r, то в частное решение добавляют множитель x^r.

В частности, если правая часть не содержит экспоненты в явном виде, т.е. коэффициент α=0, то среди корней характеристического уравнения проверяют наличие чисто мнимых корней $k = i\beta$ и $k = -i\beta$.

Неопределенные коэффициенты можно найти из системы линейных уравнений, получаемых на основании равенства коэффициентов при подобных слагаемых в правой и левой части исходного уравнения после подстановки в него $u(x)$ вместо y.

Пример 11. $y'' - 4y' + 8y = e^x(-\sin x + 2\cos x)$ (75)

Для решения этого уравнения рассмотри однородное уравнение, ему соответствующее: $y'' - 4y' + 8y = 0$ (76)

и характеристическое уравнение : $k^2 - 4k + 8 = 0$. Решая это квадратное уравнение, получаем отрицательный дискриминант: $D= (-4)^2 - 4\cdot 8 = 16 - 32= -16$. Значит корни характеристического уравнения – комплексные числа: $k_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{-16}}{2} = 2 \pm 2i$. Этим корням соответствуют два частных решения однородного уравнения (76): $y_1=e^{2\cdot x}\cos 2x$; $y_3=e^{2\cdot x}\sin 2x$. Общее решение уравнения (76)

$y_{о.о.}=C_1e^{2\cdot x}\cos 2x +C_2 e^{2\cdot x}\sin 2x$. (77)

Будем искать частное решение неоднородного уравнения (75) в соответствии с видом его правой части: $f(x)= e^x(- \sin x + 2 \cos x)$. Здесь представлено произведение экспоненты на линейную комбинацию тригонометрических функций с одинаковыми аргументами, числовые коэффициенты в степени экспоненты и аргументах тригонометрических функций совпадают и равны единице, т.е. $\alpha = 1$ и $\beta = 1$. Т.к. пара комплексных корней характеристического уравнения не совпадает с числами $1 \pm i$, то частное решение $u(x)$ будем искать в виде совпадающем с видом функции $f(x)$:

$u(x)=e^x(A \sin x +B \cos x)$. (78)

Для подстановки в исходное уравнение вычислим первую и вторую производные функции u(x).. Будем группировать слагаемые, содержащие одинаковые тригонометрические сомножители.

$$\left.\begin{aligned}
&u = e^x(A\sin x + B\cos x) \\
&u' = e^x(A\sin x + B\cos x) + e^x(A\cos x - B\sin x) = e^x(\sin x(A-B) + \cos x(A+B)) \\
&u'' = e^x(\sin x(A-B) + \cos x(A+B)) + e^x(\cos x(A-B) - \sin x(A+B)) = e^x(\sin x\cdot(-2B) + \cos x\cdot(2A))
\end{aligned}\right\|\begin{aligned}&\cdot 8\\&\cdot(-4)\\&\cdot 1\end{aligned}$$

Подставляем найденные производные в исходное уравнение (75):

$$e^x((4A+2B)\sin x + (4B-2A)\cos x) = e^x(-\sin x + 2\cos x).$$

Для определения коэффициентов A и B составим систему двух уравнений, приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях:

$$\left.\begin{aligned}4A+2B&=-1\\4B-2A&=2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}2B&=-1-4A\\-2-10A&=2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}A&=-0{,}4\\B&=0{,}6\end{aligned}\right\}$$

Подставляем найденные коэффициенты в (78), получаем частное решение уравнения (75):

$$u(x) = e^x(0{,}6\cos x - 0{,}4\sin x). \qquad (79)$$

И окончательно, в соответствии с формулой (63), используя решения (77) и (79), получаем общее решение неоднородного уравнения (75):

$$\underline{y_{о.н.} = e^x(0{,}6\cos x - 0{,}4\sin x) + e^{2\cdot x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x).}$$

4.3.4. Линейные уравнения с правой частью вида: $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ (Задача №12)

Правая часть линейного уравнения – суперпозиция двух функций может быть представлена разными способами:

a) $f_1(x)=\mathrm{M}\cdot\cos\beta x + \mathrm{N}\cdot\sin\beta x$, $f_2(x)=e^{\alpha x}P_m(x)$

b) $f_1(x)=\mathrm{M}_1\cdot\cos\beta_1 x + \mathrm{N}_1\cdot\sin\beta_1 x$, $f_2(x)=\mathrm{M}_2\cdot\cos\beta_2 x + \mathrm{N}_2\cdot\sin\beta_2 x$

c) $f_1(x)=e^{\alpha 1x}P(x)$, $f_2(x)=e^{\alpha 2x}Q(x)$.

Во всех этих случаях частное решение ищут также в виде суперпозиции двух функций с неопределенными коэффициентами.

При этом для каждой части $f(x)$ при составлении $u(x)$ необходимо проверить значение корней характеристического уравнения в соответствии со всеми вышеизложенными правилами.

Пример 12. $y''' - 100y' = 20e^{10x} + 100\cos 10x \qquad (80)$

Для решения этого уравнения рассмотри однородное уравнение, ему соответствующее: $y''' - 100y' = 0 \qquad (81)$

и характеристическое уравнение : $k^3 - 100k = 0$. Решая это кубическое уравнение, получаем корни характеристического уравнения – действительные числа: $k_1 = 0$, $k_2 = 10$, $k_3 = -10$. Этим корням соответствуют три частных решения однородного уравнения (81): $y_1=e^{0\cdot x}=1$; $y_2=e^{10x}$; $y_3=e^{-10\cdot x}$.

Общее решение уравнения (81):

$$y_{о.о.} = C_1 + C_2\, e^{10\cdot x} + C_3\, e^{-10\cdot x}. \qquad (82)$$

Будем искать частное решение неоднородного уравнения (80) в соответствии с видом его правой части: $f(x) = 20e^{10x} + 100\cos 10x$. Здесь представлена суперпозиция двух функций $f_1(x) = 20e^{10x}$ и $f_2(x) = 100\cos 10x$. При этом, для анализа корней характеристического уравнения необходимо рассмотреть $\alpha_1=10, \beta_1=0$ и $\alpha_2=0, \beta_2=10$.

Т.к. число $\alpha_1=10$ совпадает с действительным корнем $k_2=10$ характеристического уравнения , то частное решение $u_1(x)$ будем искать в виде совпадающем с видом функции $f_1(x)$, домноженном на x:

$u_1(x)= A\,xe^{10x}$ (83)

Т.к. среди корней характеристического уравнения не совпадает с числами $\pm 10i$, то частное решение $u_2(x)$ будем искать в виде совпадающем с видом функции $f_2(x)$:

$u_2(x)=B\sin 10x +D\cos 10x.$ (84)

Таким образом, будем искать частное решение неоднородного уравнения (80) в виде:

$u(x)= A\,xe^{10x} +B\sin 10x +D\cos 10x.$ (85)

Для подстановки в исходное уравнение вычислим первую, вторую и третью производные функции u(x). Будем группировать слагаемые, содержащие функции одного типа.

$$\left.\begin{aligned}
&u = Axe^{10x} + B\sin 10x + D\cos 10x\\
&u' = Ae^{10x} + 10Axe^{10x} + 10B\cos 10x - 10D\sin 10x = (10Ax + A)e^{10x} + (-10D)\sin 10x + 10B\cos 10x\\
&u'' = 10Ae^{10x} + (100Ax + 10A)e^{10x} - 100D\cos 10x - 100B\sin 10x =\\
&\quad = (100Ax + 20A)e^{10x} + (-100B)\sin 10x + (-100D)\cos 10x\\
&u''' = 100Ae^{10x} + (1000Ax + 200A)e^{10x} - 1000B\cos 10x + 1000D\sin 10x =\\
&\quad = (1000Ax + 300A)e^{10x} + 1000D\sin 10x + (-1000B)\cos 10x
\end{aligned}\right|\begin{aligned}&\cdot(-100)\\ \\ \\ &\cdot 1\end{aligned}$$

Подставляем найденные производные в исходное уравнение (80):

$$(1000Ax + 300A)e^{10x} + 1000D\sin 10x + (-1000B)\cos 10x -$$
$$-100\big((10Ax + A)e^{10x} + (-10D)\sin 10x + 10B\cos 10x\big) = 20e^{10x} + 100\cos 10x$$

или

$$200\,Ae^{10x} + 2000\,D\sin 10x + (-2000\,B)\cos 10x = 20e^{10x} + 100\cos 10x$$

Для определения коэффициентов A, B и D составим систему трёх уравнений, приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях:

$$\left.\begin{aligned}200A &= 20\\ 2000D &= 0\\ -2000B &= 100\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}A &= 0{,}1\\ B &= -0{,}05\\ D &= 0\end{aligned}\right\}$$

Подставляем найденные коэффициенты в (85), получаем частное решение уравнения (80):

$u(x)= 0{,}1\,xe^{10x} - 0{,}05\sin 10x.$ (86)

И окончательно, в соответствии с формулой (63), используя решения (82) и (86), получаем общее решение неоднородного уравнения (80):

$\underline{y_{о.н.}= 0{,}1\,xe^{10x} - 0{,}05\sin 10x\; C_1 +C_2\, e^{10\cdot x}+C_3\, e^{-10\cdot x}}$

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ТИПОВОГО РАСЧЕТА ПО ТЕМЕ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

Вариант № 1.

1. $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$
2. $y' = \frac{y2}{x2} + 4\frac{y}{x} + 2$
3. $y' = \frac{x+2y-3}{2x-2}$
4. $y' - \frac{y}{x} = x^2,\ \ y(1) = 0$
5. $y' + xy = (1+x)e^{-x}y^2,\ y(0) = 1$
6. $3x^2e^ydx + (x^3e^y - 1)dy = 0$
7. $y'''x\ln x = y''$
8. $4y^3y'' = y^4 - 1;$ $y(0) = \sqrt{2};\ y'(0) = 1/(2\sqrt{2})$
9. $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2$
10. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = (16 - 12x)e^{-x}$
11. $y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$
12. $y'' - 2y' = 2ch2x$

Вариант № 2.

1. $\sqrt{4+y^2}dx - ydy = x^2ydy$
2. $xy' = \frac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}$
3. $y' = \frac{x+y-2}{2x-2}$
4. $y' - y\,ctgx = 2x\sin x,\ \ y(\frac{\pi}{2}) = 0$
5. $xy' + y = 2y^2\ln x,\ y(1) = 1/2$
6. $(3x^2 + \frac{2}{y}\cos\frac{2x}{y})dx - \frac{2x}{y^2}\cos\frac{2x}{y}dy = 0$
7. $xy''' + y'' = 1$
8. $y'' = 128y^3;\ y(0) = 1;\ y'(0) = 8$
9. $y''' - y'' = 6x^2 + 3x$
10. $y''' - 3y'' + 2y' = (1-2x)e^x$
11. $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 6x$
12. $y'' + y = 2\sin x - 6\cos x = 2e^x$

Вариант № 3.

1. $6x\,dx - 6y\,dy = 2x^2y\,dy - 3xy^2dx$
2. $y' = \frac{x+y}{x-y}$
3. $y' = \frac{3y-x-4}{3x+3}$
4. $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x,\ \ y(0) = 0$
5. $2(xy' + y) = xy^2,\ y(1) = 2$
6. $(3x^2 + 4y^2)dx + (8xy + e^y)dy = 0$
7. $2xy''' = y''$
8. $y^3y'' + 64 = 0;\ y(0) = 4;\ y'(0) = 2$
9. $y''' - y' = x^2 + x$
10. $y''' - y'' - y' + y = (3x+7)e^{2x}$
11. $y'' + 2y' = -2e^x(\sin x + \cos x)$
12. $y''' - y' = 2e^x + \cos x$

Вариант № 4.

1. $\sqrt{3+y^2}\,dx - ydy = x^2 ydy$
2. $xy' = \sqrt{x^2+y^2} + y$
3. $y' = \dfrac{2y-2}{x+y-2}$
4. $y' + y\,tgx = \cos^2 x,\ \ y(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$
5. $y' + 4x^3 y = 4(1+x^3)e^{-4x}y^2,\ y(0)=1$
6. $(2x-1-\frac{y}{x^2})dx - (2y-\frac{1}{x})dy = 0$
7. $xy''' + y'' = x+1$
8. $y'' + 2\sin y\cos^3 y = 0;\ y(0)=0;\ y'(0)=1$
9. $y^{\mathrm{IV}} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x$
10. $y''' - 2y'' + y' = (2x+5)e^{2x}$
11. $y'' + y = 2\cos 7x + 3\sin 7x$
12. $y'' - 3y' = 2ch3x$

Вариант № 5.

1. $x\sqrt{3+y^2}\,dx + y\sqrt{2+x^2}\,dy = 0$
2. $2y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 6\dfrac{y}{x} + 3$
3. $y' = \dfrac{x+y-2}{3x-y-2}$
4. $y' - \dfrac{y}{x+2} = x^2 + 2x,\ \ y(-1) = \dfrac{3}{2}$
5. $xy' - y = -y^2(\ln x + 2)\ln x,\ y(1)=1$
6. $(y^2 + y\sec^2 x)dx + (2xy + tgx)dy = 0$
7. $\mathrm{tg}\,x\,y'' - y' + \dfrac{1}{\sin x} = 0$
8. $y'' = 32\sin^3 y\cos y;\ y(1) = \pi/2;\ y'(1) = 4$
9. $y^{\mathrm{IV}} - y''' = 5(x+2)^2$
10. $y''' - 3y'' + 4y = (18x-21)e^{-x}$
11. $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$
12. $y'' + 4y = -8\sin 2x + 32\cos 2x + 4e^{2x}$

Вариант № 6.

1. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$
2. $xy' = \dfrac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}$
3. $y' = \dfrac{2x+y-3}{x-1}$
4. $y' - \dfrac{1}{x+1}y = e^x(x+1),\ \ y(0) = 1$
5. $2(y' + xy) = (1+x)e^{-x}y^2,\ y(0) = 2$
6. $(3x^2 y + 2y + 3)dx + (x^3 + 2x + 3y^2)dy = 0$
7. $x^2 y'' + xy' = 1$
8. $y'' = 98y^3;\ y(1) = 1;\ y'(1) = 7$
9. $y^{\mathrm{IV}} - 2y''' + y'' = 2x(1-x)$
10. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = (2x-5)e^x$
11. $y'' - y' + 8y = e^x(5\sin x - 3\cos x)$
12. $y''' - y' = 10\sin x + 6\cos x + 4e^x$

Вариант № 7.

1. $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x}dx = 0$
2. $y' = \dfrac{x+2y}{2x-y}$
3. $y' = \dfrac{x+7y-8}{9x-y-8}$
4. $y' - \dfrac{y}{x} = x\sin x,\ \ y(\frac{\pi}{2}) = 1$
5. $3(xy' + y) = y^2\ln x,\ y(1) = 3$
6. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)dx + \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{y^2}\right)dy = 0$
7. $y'''\,\mathrm{ctg}\,2x + 2y'' = 0$
8. $y^3 y'' + 49 = 0;\ y(3) = -7;\ y'(3) = -1$
9. $y^{\mathrm{IV}} + y''' + y'' = x^2 + x - 1$
10. $y''' - 4y'' + 4y' = (x-1)e^x$
11. $y'' + 2y' = e^x(\sin x + \cos x)$
12. $y'' - 4y' = 16ch4x$

Вариант № 8.

1. $6xdx-6ydy=3x^2ydy-2xy^2dx$
2. $xy'=2\sqrt{x^2+y^2}+y$
3. $y'=\dfrac{x+3y+4}{3x-6}$
4. $y'+\dfrac{y}{x}=\sin x,\ \ y(\pi)=\dfrac{1}{\pi}$
5. $2y'+y\cos x=y^{-1}\cos x(1+\sin x),\ y(0)=1$
6. $[\sin 2x-2\cos(x+y)]dx-2\cos(x+y)dy=0$
7. $x^3y'''+x^2y''=1$
8. $4y^3y''=16y^4-1;\ y(0)=\sqrt{2}/2;\ y'(0)=1/\sqrt{2}$
9. $y^{V}-y^{IV}=2x+3$
10. $y'''+2y''+y'=(18x+21)e^{2x}$
11. $y''-4y'+4y=e^{2x}\sin 3x$
12. $y''+9y=-18\sin 3x-18e^{3x}$

Вариант № 9.

1. $x\sqrt{5+y^2}dx+y\sqrt{4+x^2}dy=0$
2. $3y'=\dfrac{y^2}{x^2}+8\dfrac{y}{x}+4$
3. $y'=\dfrac{3y+3}{2x+y-1}$
4. $y'+\dfrac{y}{2x}=x^2,\ \ y(1)=1$
5. $y'+4x^3y=4y^2e^{4x}(1-x^3),\ y(0)=-1$
6. $(xy^2+x/y^2)dx+(x^2y-x^2/y^3)dy=0$
7. $y'''\operatorname{tg}x=2y''$
8. $y''+8\sin y\cos^3 y=0;\ y(0)=0;\ y'(0)=2$
9. $3y^{IV}+y'''=6x-1$
10. $y'''-3y'-2y=4xe^{x}$
11. $y''+6y'+13y=e^{-3x}\cos 4x$
12. $y'''-4y'=24e^{2x}-4\cos 2x+8\sin 2x$

Вариант № 10.

1. $y(4+e^x)dy-e^xdx=0$
2. $xy'=\dfrac{3y^3+6yx^2}{2y^2+3x^2}$
3. $y'=\dfrac{x+2y-3}{4x-y-3}$
4. $y'+\dfrac{2x}{1+x^2}y=\dfrac{2x^2}{1+x^2},\ \ y(0)=\dfrac{2}{3}$
5. $3y'+2xy=2xy^{-2}e^{-2x^2},\ y(0)=-1$
6. $(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3y^2}{x^4})dx-\dfrac{2y}{x^3}dy=0$
7. $y'''\operatorname{cth}2x=2y''$
8. $y''=72y^3;\ y(2)=1;\ y'(2)=6$
9. $y^{IV}+2y'''+y''=4x^2$
10. $y'''-3y'-2y=-4xe^{x}$
11. $y''+y=2\cos 3x-3\sin 3x$
12. $y''-5y'=50\operatorname{ch}5x$

Вариант № 11.

1. $\sqrt{4-x^2}y'+xy^2+x=0$
2. $y'=\dfrac{x^2+xy-y^2}{x^2-2xy}$
3. $y'=\dfrac{x-2y+3}{-2x-2}$
4. $y'-\dfrac{2x-5}{x^2}y=5,\ \ y(2)=4$
5. $2xy'-3y=-(5x^2+3)y^3,\ y(1)=1/\sqrt{2}$
6. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\right)dx+\left(x+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy=0$
7. $x^4y''+x^3y'=1$
8. $y^3y''+36=0;\ y(0)=3;\ y'(0)=2$
9. $y'''+y''=5x^2-1$

10. $y''' - 3y' + 2y = (4x+9)e^{2x}$

11. $y'' + 2y' + 5y = -2\sin x$

12. $y'' + 16y = 16\cos 4x - 16e^{4x}$

Вариант № 12.

1. $2xdx - 2ydy = x^2 ydy - 2xy^2 dx$
2. $xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y$
3. $y' = \dfrac{x+8y-9}{10x-y-9}$
4. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{x+1}{x}e^x, \ \ y(1) = e$
5. $3xy' + 5y = (4x-5)y^4, \ y(1) = 1$
6. $\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}dx - (\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x} + 2y)dy = 0$
7. $xy''' + 2y'' = 0$
8. $y'' = 18\sin^3 y\cos y; \ y(1) = \pi/2; \ y'(1) = 3$
9. $y^{IV} + 4y''' + 4y'' = x - x^2$
10. $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = (12x+16)e^x$
11. $y'' - 4y' + 8y = e^x(-3\sin x + 4\cos x)$
12. $y''' - 9y' = -9e^{3x} - 9\cos 3x + 18\sin 3x$

Вариант № 13.

1. $x\sqrt{4+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$
2. $2y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 6\dfrac{y}{x} + 6$
3. $y' = \dfrac{2x+3y-5}{5x-5}$
4. $y' - \dfrac{y}{x} = -2\dfrac{\ln x}{x}, \ \ y(1) = 1$
5. $2y' + 3y\cos x = e^{2x}(2+3\cos x)y^{-1}, \ y(0) = 1$
6. $\dfrac{1+xy}{x^2 y}dx + \dfrac{1-xy}{xy^2}dy = 0$
7. $(1+x^2)y'' + 2xy' = x^3$
8. $4y^3 y'' = y^4 - 16; \ y(0) = 2\sqrt{2}; \ y'(0) = 1/\sqrt{2}$
9. $7y''' - y'' = 12x$
10. $y''' - y'' - 2y' = (6x-11)e^{-x}$
11. $y'' + 2y' = 10e^x(\sin x + \cos x)$
12. $y'' - y' = 2\,ch\,x$

Вариант № 14.

1. $(e^x + 8)dy - ye^x dx = 0$
2. $xy' = \dfrac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}$
3. $y' = \dfrac{4y-8}{3x+2y-7}$
4. $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{-12}{x^3}, \ \ y(1) = 4$
5. $3(xy' + y) = xy^2, \ y(1) = 3$
6. $\dfrac{dx}{y} - \dfrac{x+y^2}{y^2}dy = 0$
7. $x^5 y''' + x^4 y'' = 1$
8. $y'' = 50y^3; \ y(3) = 1; \ y'(3) = 5$
9. $y''' + 3y'' + 2y' = 3x^2 + 2x$
10. $y''' + y'' - 2y' = (6x+5)e^x$
11. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 5x$
12. $y'' + 25y = 20\cos 5x - 10\sin 5x + 50e^{5x}$

Вариант № 15.

1. $\sqrt{5+y^2} + y'y\sqrt{1-x^2} = 0$
2. $y' = \dfrac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}$
3. $y' = \dfrac{x+3y-4}{5x-y-4}$
4. $y' + \dfrac{2y}{x} = x^3, \ \ y(1) = -5/6$

5. $y' - y = 2xy^2$, $y(0) = 1/2$

6. $\frac{y}{x}dx - \frac{xy+1}{x}dy = 0$

7. $xy''' - y'' + 1/x = 0$

8. $y^3 y'' + 25 = 0;\ y(2) = -5;\ y'(2) = -1$

9. $y''' - y' = 3x^2 - 2x + 1$

10. $y''' + 4y'' + 4y' = (9x + 15)e^x$

11. $y'' + y = 2\cos 5x + 3\sin 5x$

12. $y''' - 16y' = 48e^{4x} + 64\cos 4x - 64\sin 4x$

Вариант № 16.

1. $6x\,dx - 2y\,dy = yx^2dy - 3xy^2dx$

2. $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$

3. $y' = \frac{y - 2x + 3}{x - 1}$

4. $y' + \frac{y}{x} = 3x$, $y(1) = 1$

5. $2xy' - 3y = -(20x^2 + 12)y^3$, $y(1) = 1/2\sqrt{2}$

6. $\left(xe^x + \frac{y}{x^2}\right)dx - \frac{1}{x}dy = 0$

7. $xy''' + y'' + x = 0$

8. $y'' + 18\sin y\cos^3 y = 0;\ y(0) = 0;\ y'(0) = 3$

9. $y''' - y'' = 4x^2 - 3x + 2$

10. $y''' - 3y'' - y' + 3y = (4 - 8x)e^x$

11. $y'' + 2y' + 5y = -17\sin 2x$

12. $y'' + 2y' = 2sh2x$

Вариант № 17.

1. $y\ln y + xy' = 0$

2. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8$

3. $y' = \frac{x + 2y - 3}{x - 1}$

4. $y' - \frac{2xy}{1 + x^2} = 1 + x^2$, $y(1) = 3$

5. $y' + 2xy = 2x^3y^3$, $y(0) = \sqrt{2}$

6. $(10xy - \frac{1}{\sin y})dx + (5x^2 + \frac{x\cos y}{\sin^2 y} - y^2\sin y^3)dy = 0$

7. $\operatorname{th} x\, y^{IV} = y'''$

8. $y'' = 8\sin^3 y\cos y;\ y(1) = \pi/2;\ y'(1) = 2$

9. $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = x - 3$

10. $y''' - y'' - 4y' + 4y = (7 - 6x)e^x$

11. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos x$

12. $y'' + 36y = 24\sin 6x - 12\cos 6x + 36e^{6x}$

Вариант № 18.

1. $(1 + e^x)y' = ye^x$

2. $xy' = \frac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}$

3. $y' = \frac{3x + 2y - 1}{x + 1}$

4. $y' + \frac{1 - 2x}{x^2}y = 1$, $y(1) = 1$

5. $xy' + y = y^2\ln x$, $y(1) = 1$

6. $\left(\frac{y}{x^2 + y^2} + e^x\right)dx - \frac{xdy}{x^2 + y^2} = 0$

7. $xy''' + y'' = \sqrt{x}$

8. $y'' = 32y^3;\ y(4) = 1;\ y'(4) = 4$

9. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 12x^2 - 6x$

10. $y''' + 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^{-x}$

11. $y'' - 4y' + 8y = e^x(3\sin x + 5\cos x)$

12. $y''' - 25y' = 25(\sin 5x + \cos 5x) - 50e^{5x}$

Вариант № 19.

1. $\sqrt{1-x^2}\,y' + xy^2 + x = 0$
2. $y' = \dfrac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}$
3. $y' = \dfrac{5y+5}{4x+3y-1}$
4. $y' + \dfrac{3y}{x} = \dfrac{2}{x^3}$, $y(1) = 1$
5. $2y' + 3y\cos x = (8 + 12\cos x)e^{2x}y^{-1}$, $y(0) = 2$
6. $e^y dx + (\cos y + xe^y)dy = 0$
7. $y''' \operatorname{tg} x = y'' + 1$
8. $y^3 y'' + 16 = 0$; $y(1) = 2$; $y'(1) = 2$
9. $y''' - 4y'' = 32 - 384x^2$
10. $y''' - 5y'' + 7y' - 3y = (20 - 16x)e^{-x}$
11. $y'' + 2y' = 6e^x(\sin x + \cos x)$
12. $y'' + 3y' = 2sh3x$

Вариант № 20.

1. $6xdx - 2ydy = 2yx^2dy - 3xy^2dx$
2. $xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y$
3. $y' = \dfrac{x+4y-5}{6x-y-5}$
4. $y' + 2xy = -2x^3$, $y(1) = e^{-1}$
5. $4y' + x^3y = (8 + x^3)e^{-2x}y^2$, $y(0) = 1$
6. $(y^3 + \cos x)dx + (3xy^2 + e^y)dy = 0$
7. $y''' \operatorname{tg} 5x = 5y''$
8. $y'' + 32\sin y\cos^3 y = 0$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 4$
9. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 2 - 3x^2$
10. $y''' - 4y'' + 3y' = -4xe^x$
11. $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 4x$
12. $y'' + 49y = 14\sin 7x + 7\cos 7x - 98e^{7x}$

Вариант № 21.

1. $y(1 + \ln y) + xy' = 0$
2. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 8\dfrac{y}{x} + 12$
3. $y' = \dfrac{x+y+2}{x+1}$
4. $y' + \dfrac{xy}{2(1-x^2)} = \dfrac{x}{2}$, $y(0) = 2/3$
5. $8xy' - 12y = -(5x^2 + 3)y^3$, $y(1) = \sqrt{2}$
6. $xe^{y^2}dx + (x^2ye^{y^2} + tg^2 y)dy = 0$
7. $y''' \operatorname{tg} 7x = 7y''$
8. $y'' = 50\sin^3 y\cos y$; $y(1) = \pi/2$; $y'(1) = 5$
9. $y''' + y'' = 49 - 24x^2$
10. $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = (32x - 32)e^{-x}$
11. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 5x$
12. $y''' - 36y' = 36e^{6x} - 72(\cos 6x + \sin 6x)$

Вариант № 22.

1. $(3 + e^x)yy' = e^x$
2. $xy' = \dfrac{3y^3 + 12yx^2}{2y^2 + 6x^2}$
3. $y' = \dfrac{2x+y-3}{4x-4}$
4. $y' + xy = -x^3$, $y(0) = 3$
5. $2(y' + y) = xy^2$, $y(0) = 2$
6. $(5xy^2 - x^3)dx + (5x^2y - y)dy = 0$
7. $x^3y''' + x^2y'' = \sqrt{x}$
8. $y'' = 18y^3$; $y(1) = 1$; $y'(1) = 3$
9. $y''' - 2y'' = 3x^2 + x - 4$
10. $y''' - 6y'' + 9y' = 4xe^x$
11. $y'' + y = -3\sin 7x + 2\cos 7x$
12. $y'' + 4y' = 16sh4x$

Вариант № 23.

1. $\sqrt{3+y^2}+\sqrt{1-x^2}\,yy'=0$
2. $y'=\dfrac{x^2+xy-3y^2}{x^2-4xy}$
3. $y'=\dfrac{2x+y-3}{2x-2}$
4. $y'-\dfrac{2y}{x+1}=e^x(x+1)^2,\ \ y(0)=1$
5. $y'+xy=(x-1)e^x y^2,\ y(0)=1$
6. $\left[\cos(x+y^2)+\sin x\right]dx+2y\cos(x+y^2)dy=0$
7. $\operatorname{cth} x\, y''-y'+\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}=0$
8. $y^3y''+9=0;\ y(1)=1;\ y'(1)=3$
9. $y'''-13y''+12y'=x-1$
10. $y'''-7y''+15y'-9y=(8x-12)e^x$
11. $y''+2y'+5y=-\cos x$
12. $y''+64y=16\sin 8x-16\cos 8x-64e^{8x}$

Вариант № 24.

1. $xdx-ydy=yx^2dy-xy^2dx$
2. $xy'=2\sqrt{3x^2+y^2}+y$
3. $y'=\dfrac{y}{2x+2y-2}$
4. $y'+2xy=xe^{-x^2}\sin x,\ \ y(0)=1$
5. $2y'-3y\cos x=-e^{-2x}(2+3\cos x)y^{-1},\ y(0)=1$
6. $(x^2-4xy-2y^2)dx+(y^2-4xy-2x^2)dy=0$
7. $(x+1)y'''+y''=(x+1)$
8. $y^3y''=4(y^4-1);\ y(0)=\sqrt{2};\ y'(0)=\sqrt{2}$
9. $y^{IV}+y'''=x$
10. $y'''-y''-5y'-3y=-(8x+4)e^x$
11. $y''-4y'+8y=e^x(2\sin x-\cos x)$
12. $y'''-49y'=14e^{7x}-49(\cos 7x+\sin 7x)$

Вариант № 25.

1. $y'y\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}}+1=0$
2. $4y'=\dfrac{y^2}{x^2}+10\dfrac{y}{x}+5$
3. $y'=\dfrac{x+5y-6}{7x-y-6}$
4. $y'-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^3,\ \ y(0)=1/2$
5. $y'-y=xy^2,\ y(0)=1$
6. $(\sin y+y\sin x+\dfrac{1}{x})dx+(x\cos y-\cos x+\dfrac{1}{y})dy=0$
7. $(1+\sin x)y'''=\cos x\, y''$
8. $y''+50\sin y\cos^3 y=0;\ y(0)=0;\ y'(0)=5$
9. $y^{V}-y''=6x+5$
10. $y'''+5y''+7y'+3y=(16x+20)e^x$
11. $y''+2y'=3e^x(\sin x+\cos x)$
12. $y''+5y'=50sh5x$

Вариант № 26.

1. $\sqrt{5+y^2}dx+4(x^2y+y)dy=0$
2. $xy'=\dfrac{3y^3+14yx^2}{2y^2+7x^2}$
3. $y'=\dfrac{x+y-4}{x-2}$
4. $y'-y\cos x=-\sin 2x, y(0)=3$
5. $2(xy'+y)=y^2\ln x, y(1)=2$
6. $(1+\dfrac{1}{y}e^{x/y})dx+(1-\dfrac{x}{y^2}e^{x/y})dy=0$
7. $(1+x^2)y''+2xy'=12x^3$
8. $y''=8y^3;y(0)=1;y'(0)=2$
9. $y'''+3y''+2y'=x^2+2x+3$
10. $y'''-2y''-3y'=(8x-14)e^{-x}$

11. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 4x$

12. $y'' + 81y = 9\sin 9x + 3\cos 9x + 162e^{9x}$

Вариант № 27.

1. $(1+e^x)yy' = e^x$
2. $y' = \dfrac{x^2 + xy - 5y^2}{x^2 - 6xy}$
3. $y' = \dfrac{2x + y - 1}{2x - 2}$
4. $y' - 4xy = -4x^3, y(0) = -1/2$
5. $y' + y = xy^2, \quad y(0) = 1$
6. $\dfrac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2} = 0$
7. $-xy''' + 2y'' = \dfrac{2}{x^2}$
8. $y^3y'' + 4 = 0; y(0) = -1; y'(0) = -2$
9. $y''' - 5y'' + 6y' = (1-x)^2$
10. $y''' + 2y'' - 3y' = (8x+6)e^x$
11. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 8x$
12. $y''' - 64y' = 128\cos 8x - 64e^{8x}$

Вариант № 28.

1. $\sqrt{2+y^2}\,dx + 3(x^2y + y)dy = 0$
2. $xy' = 4\sqrt{x^2+y^2} + y$
3. $y' = \dfrac{3y - 2x + 1}{3x + 3}$
4. $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{\ln x}{x}, y(1) = 1$
5. $2(y' + xy) = (x-1)e^x y^2, y(0) = 2$
6. $2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2y + y^2)dy = 0$
7. $\mathrm{cth}\,x y'' + y' = \mathrm{ch}\,x$
8. $y'' = 2\sin^3 y\cos y; y(1) = \pi/2; y'(1) = 1$
9. $y''' - 13y'' + 12y' = 18x^2 - 39$
10. $y''' + 6y'' + 9y' = (16x + 24)e^x$
11. $y'' + 2y' + 5y = 10\cos x$
12. $y'' + y' = 2shx$

Вариант № 29.

1. $2xdx - ydy = x^2ydy - xy^2dx$
2. $3y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 10\dfrac{y}{x} + 10$
3. $y' = \dfrac{6y - 6}{5x + 4y - 9}$
4. $y' - 3x^2y = x^2(1+x^3)/3, y(0) = 0$
5. $2(y' + xy) = (x-1)e^x y^2, y(0) = 2$
6. $(3x^3 + 6x^2y + 3xy^2)dx + (2x^3 + 3x^2y)dy = 0$
7. $x^4y'' + x^3y' = 4$
8. $y^3y'' + 1 = 0; y(1) = -1; y'(1) = -1$
9. $y^{IV} - 6y''' + 9y'' = 3x - 1$
10. $y''' - y'' - 9y' + 9y = (12 - 16x)e^x$
11. $y'' + y = 2\cos 4x + 3\sin 4x$
12. $y'' + 100y = 20\sin 10x - 30\cos 10x - 200e^{10x}$

Вариант № 30.

1. $\sqrt{2-x^2}\,y' + 2xy^2 + 2x = 0$
2. $xy' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y$
3. $y' = \dfrac{x + 6y - 7}{8x - y - 7}$
4. $y' - y\cos x = \sin 2x, y(0) = -1$
5. $xy' + y) = xy^2, y(1) = 1$
6. $xdx + ydy + (xdy - ydx)/(x^2 + y^2) = 0$
7. $y'' + \dfrac{2x}{1+x^2}y' = 2x$
8. $y'' = 2y^3; y(-1) = 1; y'(-1) = 1$
9. $y^{IV} + y''' = 12x + 6$
10. $y''' + 4y'' + 3y' = 4(1-x)e^{-x}$
11. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 6x$
12. $y''' - 81y' = 162e^{9x} + 81\sin 9x$