TEMA 3

FIGURES EN EL PLA

I ANGLES

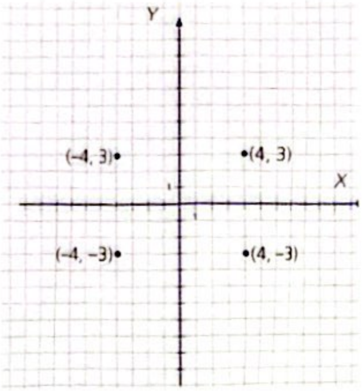
Nom :

Data :

Grup classe :

Curs :

1. Rectas y planos en el espacio



↑ Ejes de coordenadas.

Recordemos cómo definió Euclides los elementos del espacio:

- **Punto:** lo que no tiene dimensiones.
- **Recta:** lo que tiene una dimensión: largo.
- **Plano:** lo que tiene dos dimensiones: largo y ancho.

1.1. Posición y representación de un punto en el plano

Para identificar los puntos en un plano vamos a construir un sistema de coordenadas.

Este sistema de coordenadas está formado por dos rectas perpendiculares entre sí. La horizontal recibe el nombre de eje *X* o eje de abscisas y la vertical, eje *Y* o eje de ordenadas. Cada una de estas rectas está graduada. El punto en el que se cortan se denomina origen.

Cada punto estará determinado por dos coordenadas: una coordenada horizontal denominada abscisa *(x)* y otra vertical llamada ordenada *(y)*. De esta forma, un punto cualquiera del plano vendrá dado por un par de números que escribiremos *(x, y)*.

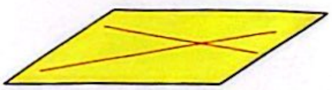
1.2. Posición de los puntos en el espacio

Dos puntos en el espacio

- Si los puntos coinciden son el mismo.
- Si los puntos no coinciden son exteriores.

Un punto y una recta

- Un punto está contenido en una recta si la recta pasa por el punto.
- Un punto será exterior a una recta si no está contenido en ella.

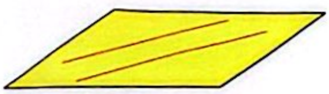


↑ Rectas secantes.

Un punto y un plano

- Un punto está contenido en el plano si está dentro del plano.
- Un punto es exterior al plano si el punto no pertenece al mismo.

1.3. Posición de las rectas en el espacio

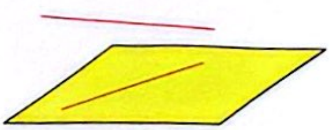


↑ Rectas paralelas.

Dos rectas en el espacio

En función de la posición que ocupen en el espacio, dos rectas pueden ser:

- **Coincidentes,** si comparten todos sus puntos.
- **Secantes,** si están contenidas en el mismo plano y tienen un punto común.



↑ Rectas que se cruzan.

- **Perpendiculares,** si son secantes y forman cuatro ángulos rectos.
- **Paralelas,** si están en el mismo plano pero no tienen ningún punto común.
- Se cruzan, si no pueden estar contenidas en el mismo plano.

Una recta y un plano

En función de la posición que ocupen una recta y un plano en el espacio se pueden dar las siguientes situaciones:

- La recta está contenida en el plano si todos los puntos de la recta pertenecen al plano.
- La recta es exterior al plano si no tienen ningún punto común.

1.4. Posición de los planos en el espacio

Dos planos en el espacio pueden ser:

- **Coincidentes,** si comparten todos sus puntos.
- **Secantes,** si se cortan. Cuando dos planos se cortan lo hacen en una recta.
- **Perpendiculares,** si son secantes y el ángulo que forman es recto.
- **Paralelos,** si no se cortan en ningún punto.

1.5. Diedro

Un **diedro** es un ángulo formado por dos semiplanos. También podemos decir que un diedro es el espacio engendrado por dos planos que se cortan en una recta. Dos planos perpendiculares forman un diedro recto.

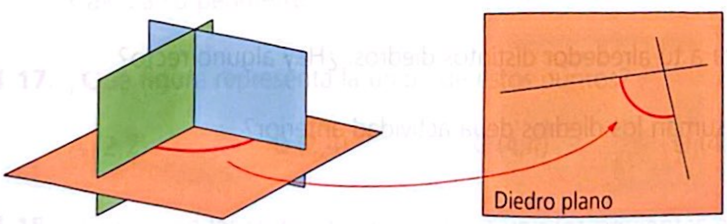
Elementos del diedro

Los elementos de un diedro son:

- **Arista:** es la recta en la que se cortan los semiplanos
- **Cara:** es cada uno de los planos que componen el diedro.

Cómo medir el ángulo de un diedro

Tenemos que conseguir que el ángulo diedro se convierta en un ángulo plano. ¿Qué ocurriría si al ángulo diedro le cortáramos con otro plano perpendicular a sus caras? Observemos la figura:



Efectivamente, obtenemos un ángulo plano que sí podemos medir. Pues bien, la medida de este ángulo plano es la medida del ángulo diedro.

J. Kepler dijo...

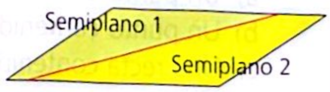
↑ *La geometría tiene dos grandes tesoros: uno es el teorema de Pitágoras y el otro el número aureo. El primero puede compararse a una medida de oro y el segundo a una piedra preciosa.*

Johannes Kepler fue un astrónomo y matemático que nació en Alemania en 1571 y murió en 1630.

Es una de las figuras clave del comienzo de la ciencia moderna. Partiendo de las observaciones que realizó su maestro, **Tycho Brahe** (1546-1601), estableció las leyes del movimiento de los planetas, conocidas como leyes de Kepler, y fue el primero en afirmar que el Sol ejercía una fuerza sobre los planetas lo que, posteriormente, desarrolló **Isaac Newton** (1642-1727) en su teoría de la gravitación universal. Además es el fundador de la óptica geométrica.

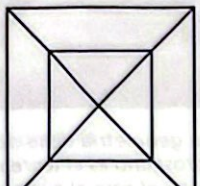
Semiplano

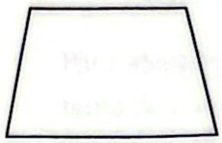
Llamamos **semiplano** a cada una de las partes en que queda dividido un plano por una recta contenida en él.

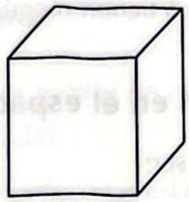


1. Comprueba, dibujando en tu cuaderno, las siguientes afirmaciones:
   a) Dos rectas se cortan en un punto.
   b) Por un punto pasan infinitas rectas.
   c) Por dos puntos pasa una única recta.
   d) Tres o más puntos determinan una recta, sólo si están alineados.

2. En las siguientes figuras, determina qué rectas son paralelas, cuáles son secantes y cuáles perpendiculares:

a) 

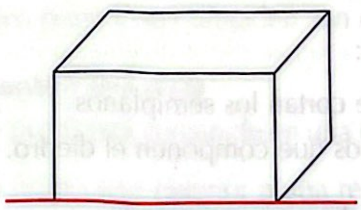
b) 

c) 

3. Busca a tu alrededor dos rectas que sean paralelas, dos rectas que sean secantes y otras dos que sean perpendiculares.

4. Busca las rectas paralelas y perpendiculares en la figura. Si es necesario prolonga los lados.

5. En un paralelepípedo, ¿cuántas rectas paralelas hay a la marcada?, ¿y cuántas perpendiculares?



6. En un tablero de ajedrez, ¿cuántas rectas paralelas y cuántas perpendiculares tiene cada línea?

7. Dibuja en tu cuaderno dos planos paralelos y dos planos secantes.

8. Representa un diedro recto. Busca a tu alrededor distintos diedros. ¿Hay alguno recto?

9. ¿Cuántas caras y cuántas aristas suman los diedros de la actividad anterior?

10. Dibuja en tu cuaderno:
    a) Un punto exterior a un plano.
    b) Un punto contenido en una recta.
    c) Una recta contenida en un plano.
    d) Dos rectas secantes.
    e) Dos rectas paralelas.
    f) Dos rectas que se cruzan.
    g) Una recta exterior a un plano.
    h) Un punto contenido en un plano.

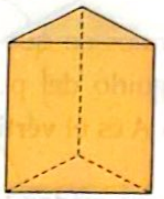
ACTIVIDADES

11. Busca en tu aula las siguientes situaciones:

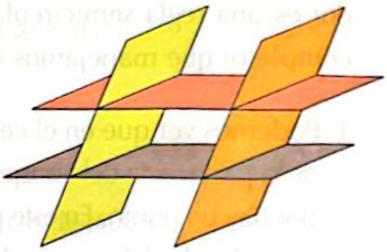
a) Dos rectas paralelas.
b) Una recta contenida en un plano.
c) Dos rectas que se cortan.
d) Dos rectas que se cruzan.
e) Un punto exterior a una recta.
f) Un punto perteneciente a una recta.

12. Encuentra en tu aula dos planos paralelos y dos planos secantes.

13. ¿Cuántos diedros hay en la siguiente figura?



14. ¿Cuántas caras y cuántas aristas suman los siguientes diedros?



15. Representa en el eje de coordenadas los siguientes puntos:

A (2,5)   B (3,-2)   C (0,4)   D (-5,0)
E (0,-2)   F (10,1)   G (4,0)   H (2,2)

16. ¿Qué figura se forma uniendo estos puntos?

A (0,5)   B (5,0)   C (-5,0)

Calcula su perímetro.

17. ¿Qué figura representa la unión de estos puntos?

A (2,2)   B (2,4)   C (4,4)   D (4,2)

18. ¿Cómo son las rectas que resultan de unir los siguientes pares de números?

$\left.\begin{array}{ll} A\ (2,0) & B\ (3,1) \\ C\ (2,-3) & D\ (1,2) \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{ll} X\ (0,2) & Y\ (3,2) \\ Z\ (1,4) & W\ (1,3) \end{array}\right\}$

2. Ángulos

Ángulo es la inclinación de una recta con respecto a otra que la corta en un punto.

- Un **ángulo** es la región comprendida entre dos semirrectas, llamadas lados, con el mismo origen.

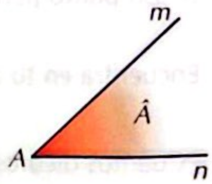
Vamos a observar el gráfico:

m → Será el primer lado

n → Será el segundo lado

$\hat{A}$ → Será el ángulo

A → Será el vértice

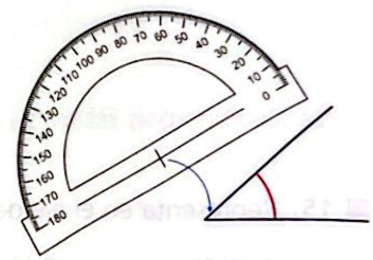


Fijémonos en que al ángulo le hemos llamado $\hat{A}$, pues hay que distinguirlo del punto *A*, origen de las semirrectas *m* y *n*. Este punto *A* es el **vértice** del ángulo.

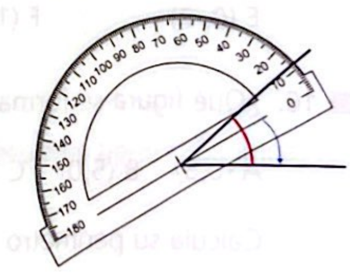
Cómo se miden los ángulos

Para medir los ángulos utilizamos el **transportador**. El transportador es una regla semicircular (aunque también las hay de círculo completo) que manejamos de la siguiente manera:

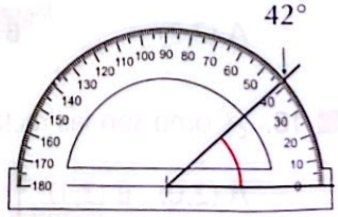
1. Podemos ver que en el centro de la parte recta del transportador hay un punto. En este punto es donde debemos colocar el vértice del ángulo que queremos medir.



2. Del centro del transportador parten dos semirrectas hacia derecha e izquierda que nos van a indicar el lado del ángulo que tomamos como base. Así pues, colocamos una de las semirrectas sobre la base del ángulo.



3. El otro lado del ángulo que queremos medir se prolonga hacia un número de la parte semicircular del transportador. Dicho número será la medida del ángulo.



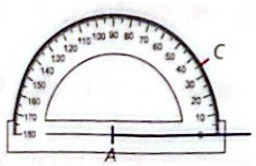
ACTIVIDADES Resueltas

Construye un ángulo de 35°.

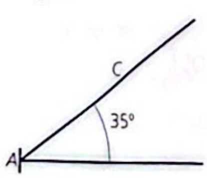
Solución

1. Representamos la semirrecta que hará de base:

2. Colocamos el transportador con el vértice en el origen (A) de la semirrecta. Buscamos en el transportador dónde se encuentran los 35° y marcamos el punto (C):



3. Se une el extremo A con el punto C y ya estaría construido el ángulo:

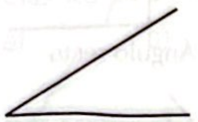


ACTIVIDADES

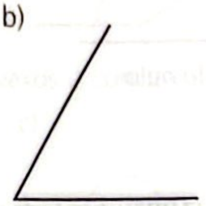
1. Dibuja tres ángulos que midan 25°, 76° y 100°.

2. Mide los ángulos:

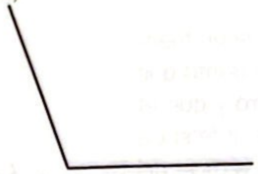
a)



b)

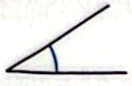


c)



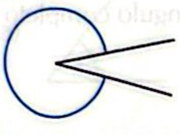
3. Mide los siguientes ángulos:

a)



c)

b)



d)

4. Dibuja en tu cuaderno ángulos que midan:

a) 35° d) 135°
b) 75° e) 225°
c) 105° f) 300°

5. Dibuja un cuadrado que tenga 7 cm de lado.

a) ¿Cuánto mide cada uno de sus ángulos?

b) ¿Y la suma total?

6. Dibuja un triángulo en el que todos sus lados midan 8 cm.

a) ¿Cuál es la medida de sus ángulos?

b) ¿Y la suma de todos ellos?

7. Une tres rectas, una de 5 cm, otra de 6 cm y una tercera de 7 cm formando un triángulo. ¿Cuál es la medida total de sus ángulos?

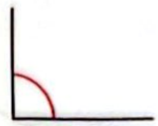
8. ¿Cómo conseguirías hacer un ángulo de 45° partiendo de un ángulo recto? No puedes utilizar el transportador.

2.1. Clasificación de los ángulos

Ángulos importantes

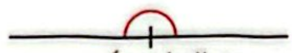
- **Ángulo nulo (0°)**: los dos lados son el mismo.
- **Ángulo recto (90°)**: los lados forman un ángulo de 90°.

Ángulo nulo

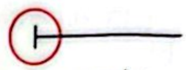


Ángulo recto

- **Ángulo llano (180°)**: los lados están sobre la misma recta, pero en sentido contrario.
- **Ángulo completo (360°)**: los lados están superpuestos después de que uno de ellos dé un giro completo.



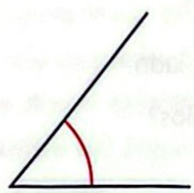
Ángulo llano



Ángulo completo

Clasificación respecto del ángulo recto

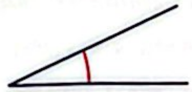
- **Agudo**: un ángulo es agudo cuando mide menos que un ángulo recto.
- **Obtuso**: un ángulo es obtuso si mide más que un ángulo recto y menos que un ángulo llano.



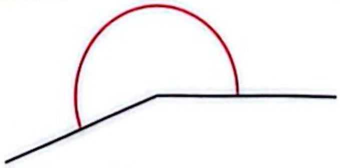
Ángulo agudo

Ángulo obtuso

- **Convexo**: un ángulo es convexo si mide menos que un ángulo llano.



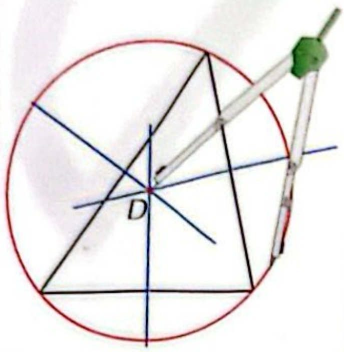
- **Cóncavo**: un ángulo es cóncavo si mide más que un ángulo llano.



Mediatriz

Las **mediatrices** de un triángulo son las rectas perpendiculares a los lados que pasan por sus puntos medios.

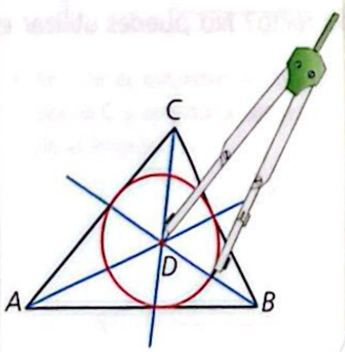
Las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un punto que se llama **circuncentro** y que es el centro de la circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo a la vez.



Bisectriz

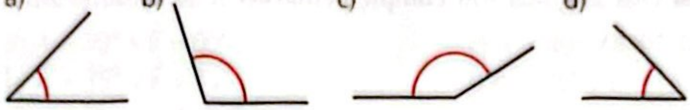
Las **bisectrices** de un triángulo son las semirrectas con origen en los vértices que dividen sus ángulos respectivos en dos ángulos iguales.

Las tres bisectrices se cortan en un punto interior del triángulo que se llama **incentro.** El incentro es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo, esto significa que los lados del triángulo son tangentes a esta circunferencia.



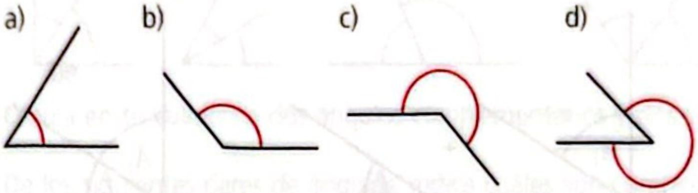
1. Clasifica los siguientes ángulos como agudos u obtusos según sea el caso:

a) b) c) d)



2. Clasifica los ángulos en convexos o cóncavos:

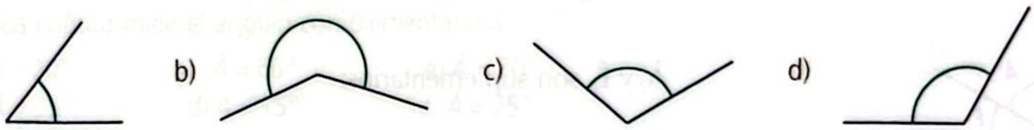
a) b) c) d)



3. Dibuja en tu cuaderno dos ángulos agudos, dos obtusos, dos convexos y dos cóncavos.

4. Clasifica los ángulos en cóncavos, convexos, agudos y obtusos:

a) b) c) d)



5. Dibuja en tu cuaderno dos ángulos convexos y dos agudos. ¿Podrían ser los mismos?

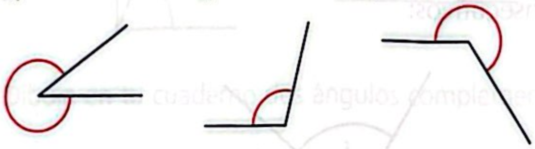
6. Dibuja en tu cuaderno dos ángulos cóncavos.

7. Clasifica los siguientes ángulos:

a) 190° b) 251° c) 45° d) 90° e) 280° f) 60°

8. Clasifica los siguientes ángulos en agudos, obtusos, cóncavos y convexos:

a) b) c)



9. ¿Puede un triángulo tener algún ángulo cóncavo?

10. Clasifica:

Grados	Nulo	Recto	Llano	Completo	Agudo	Obtuso	Cóncavo	Convexo
180°								
210°								
50°								
90°								
75°								
300°								