TEMA 4

TEOREMA DE PITÀGORES, PERÍMETRES I ÀREES

Nom :

Data :

Grup classe :

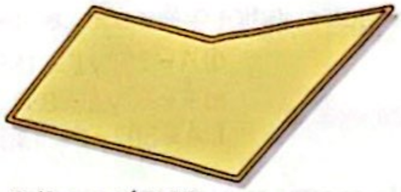
Curs :

3. Polígonos

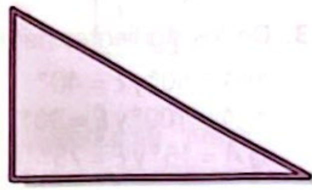
Un polígono es la parte del plano limitada por una línea poligonal cerrada. Los polígonos se pueden clasificar según el número de lados que presenten: el de tres lados es un triángulo, el de cuatro lados es un cuadrilátero, el de cinco es un pentágono, el de seis, un hexágono, etc.

Los **polígonos regulares** tienen todos sus lados y ángulos iguales; si no es así, hablamos de polígonos irregulares.

Un polígono es convexo cuando tiene todos sus ángulos menores de 180°; y es cóncavo cuando tiene algún ángulo mayor de 180°.



↑ Polígono cóncavo.



↑ Polígono convexo.

Triángulo

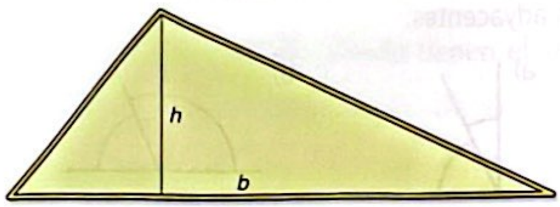
El triángulo simboliza la naturaleza triple del universo: cielo, tierra y hombre.

El triángulo equilátero simboliza la plenitud.

3.1. Triángulos

El triángulo es un polígono que tiene tres lados. En un triángulo podemos distinguir:

- **Base:** uno cualquiera de sus lados.
- **Altura:** es el segmento perpendicular a un lado.



Triángulos según sus ángulos

Acutángulo: tiene los tres ángulos agudos (< 90°).

Rectángulo: uno de los ángulos es recto (= 90°).

Obtusángulo: uno de los ángulos es obtuso (> 90° y < 180°).

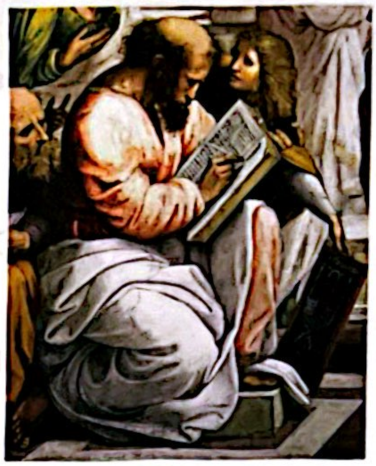
Los triángulos se clasifican según sean sus lados:

- **Triángulo equilátero:** tiene los tres lados y los tres ángulos iguales.
- **Triángulo isósceles:** tiene dos lados iguales y otro desigual. En este triángulo, los ángulos opuestos a los lados iguales también son iguales.
- **Triángulo escaleno:** tiene los tres lados y los tres ángulos desiguales.

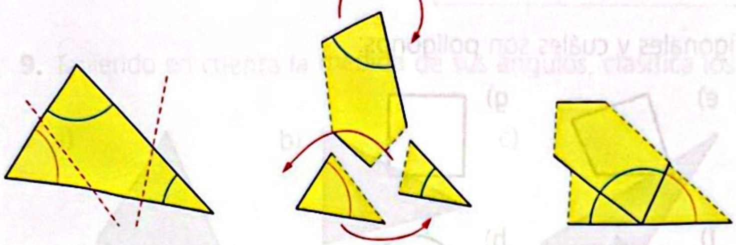
CLASIFICACIÓN EN FUNCIÓN DE LOS LADOS		
Escaleno	Isósceles	Equilátero
		

Propiedades de los triángulos

- Un lado cualquiera de un triángulo es siempre menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia. Si no se cumple esta propiedad no se puede dibujar un triángulo.
- La suma de los tres ángulos de un triángulo es 180º.
- Un triángulo es rectángulo si uno de sus ángulos es recto (90º). En estos triángulos, los lados perpendiculares se llaman catetos, y el lado opuesto, hipotenusa.



↑ Imagen de Pitágoras, detalle de la escuela de Atenas, Rafael.



↑ Suma de los ángulos de un triángulo.

3.2. El teorema de Pitágoras

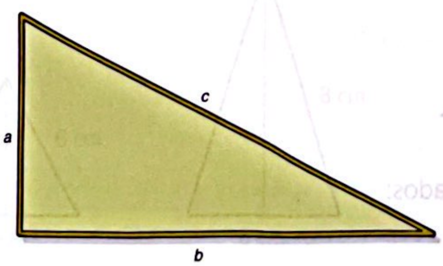
Pitágoras fue un filósofo nacido en Samos hacia el año 570 a.C. y muerto en el 480 a.C. Tuvo miles de discípulos y seguidores, los pitagóricos.

Pitágoras enseñaba que el número era la estructura esencial de todas las cosas, sabía que el lucero matutino y el vespertino eran la misma estrella, Venus, y que la Tierra era esférica. Pero este filósofo es más conocido por su teorema, muy útil a la hora de solucionar problemas con polígonos y, sobre todo, en la resolución de triángulos.

El **teorema de Pitágoras** dice así: en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Es decir:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

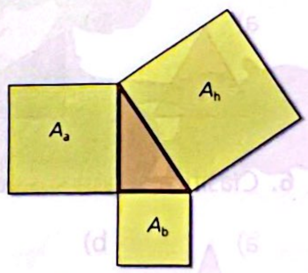
Comprobémoslo con un ejemplo. Calculamos la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 5 y 12 cm respectivamente.



Tenemos que $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$
Luego si $c^2 = 169 \rightarrow c = \sqrt{169} = 13$ cm

Interpretación geométrica del teorema de Pitágoras

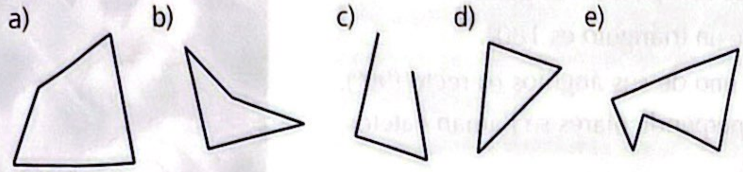
El teorema de Pitágoras también se puede enunciar diciendo que en todo triángulo rectángulo el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.



$A_h = A_a + A_b$

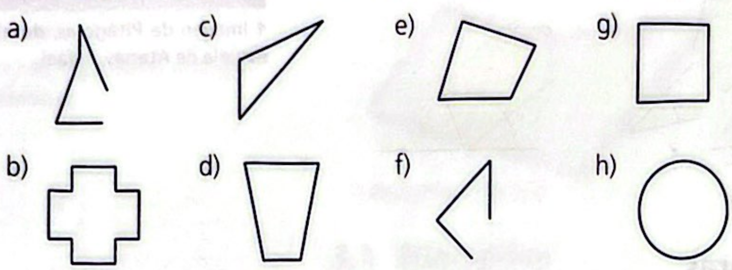
ACTIVIDADES

1. De las siguientes figuras, marca cuáles son polígonos y cuáles no:

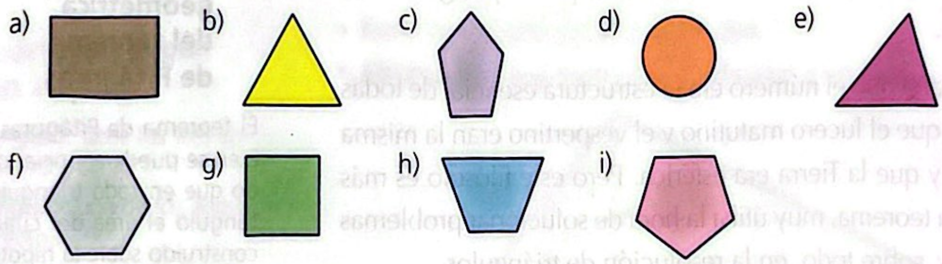


2. En el ejercicio 1 hay polígonos convexos y polígonos cóncavos. ¿Sabrías decir cuáles son?

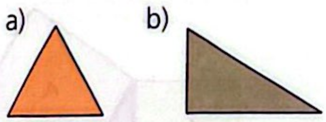
3. Señala qué figuras son líneas poligonales y cuáles son polígonos:



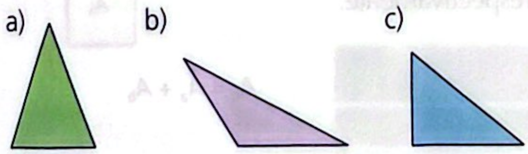
4. De entre las siguientes figuras, separa las que sean polígonos regulares de las que no:



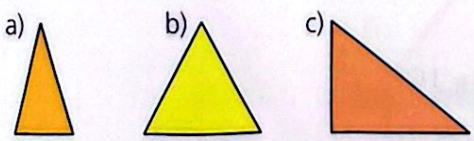
5. Clasifica según sus lados los siguientes triángulos:



6. Clasifica según sus ángulos los siguientes triángulos:



7. Clasifica los siguientes triángulos según sus lados:



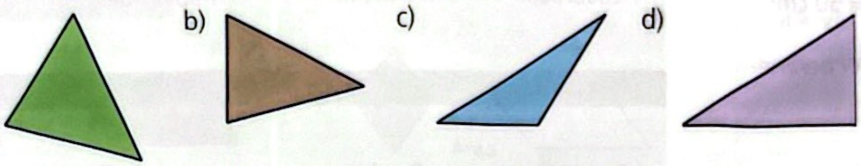
ACTIVIDADES

■ **8.** Si $\hat{A}$, $\hat{E}$ e $\hat{I}$ son los ángulos de un triángulo, completa en tu cuaderno la siguiente tabla:

$\hat{A}$	$\hat{E}$	$\hat{I}$
30°	50°	
	60°	90°
70°		100°
70°	80°	

■ **9.** Teniendo en cuenta la medida de sus ángulos, clasifica los siguientes triángulos:

a) b) c) d)



■ **10.** Los catetos de un triángulo rectángulo miden 3 y 4 cm. ¿Cuánto medirá la hipotenusa?

■ **11.** Los lados de un rectángulo miden 6 y 8 cm. ¿Cuánto mide la diagonal?

■ **12.** En un campo de fútbol las líneas de fondo y de banda miden 50 y 120 m respectivamente. ¿Cuántos metros tendrá que recorrer un futbolista si quiere ir de una esquina a la opuesta?

■ **13.** En un triángulo rectángulo el cateto mayor mide 8 cm y el menor 6 cm. ¿Cuánto mide la hipotenusa?

■ **14.** Si en un triángulo rectángulo a = hipotenusa, b = cateto mayor y c = cateto menor, resuelve:

a) $a = 5$, $b = 4$, $c = ?$

b) $a = 15$, $b = ?$, $c = 9$

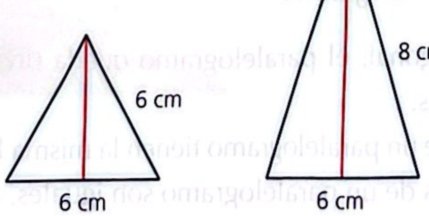
c) $a = ?$, $b = 12$, $c = 5$

d) $a = 10$, $b = 8$, $c = ?$

■ **15.** Un niño juega con una cometa que tiene 20 m de hilo. Su hermana se encuentra a 15 m de él y está justo debajo de la cometa. ¿A qué altura se encuentra la cometa?

■ **16.** Calcula cuánto mide la altura de los siguientes triángulos:

a) b)

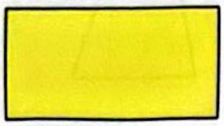


■ **17.** En un triángulo rectángulo un cateto mide 14 cm y la hipotenusa 50 cm ¿Cuánto mide el otro cateto?

4. Cuadriláteros

ACTIVIDADES Resueltas

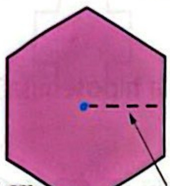
- *Calcula el área y el perímetro del rectángulo:*



Solución

$P = 2b + 2a = 2 \cdot 10 + 2 \cdot 5 =$
$= 20 + 10 = 30$ cm
$A = b \cdot a = 10 \cdot 5 = 50$ cm^2

- *Calcula el área y el perímetro del polígono:*

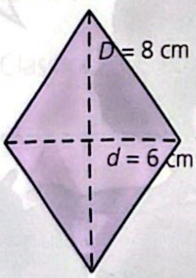


Solución

$P = 6 \cdot l = 6 \cdot 7 = 42$ cm

$$A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{42 \cdot 6}{2} = 126 \text{ cm}^2$$

- *Calcula el área y el perímetro del rombo:*



Solución

$$A = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24 \text{ cm}^2$$

$$P = 4 \cdot \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} =$$

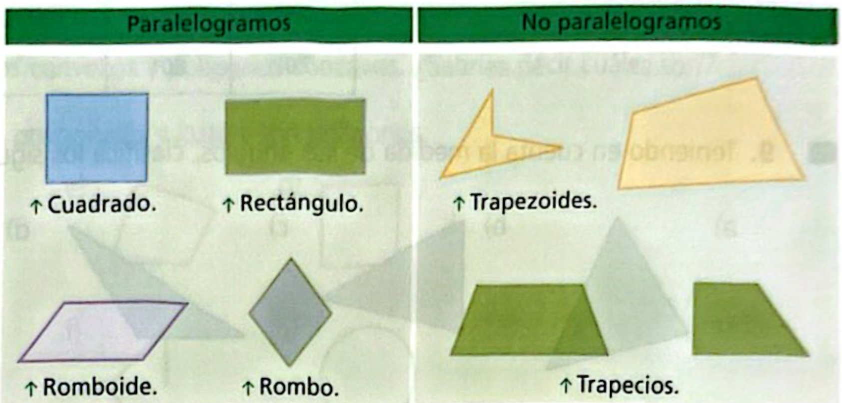
$$= 4 \cdot \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2} =$$

$$= 4 \cdot \sqrt{4^2 + 3^2} = 4 \cdot \sqrt{25} =$$

$$= 4 \cdot 5 = 20 \text{ cm}$$

Son polígonos de cuatro lados. En un cuadrilátero se cumple que la suma de todos sus ángulos mide 360º. Pueden ser:

- **Trapezoides:** si no tienen lados paralelos.
- **Trapecios:** si tienen dos lados paralelos.
- **Paralelogramos:** si tienen los cuatro lados paralelos dos a dos.



En un paralelogramo, los lados opuestos son iguales y paralelos. Un cuadrado es rectángulo y rombo a la vez. Las dos diagonales de un rectángulo son iguales, mientras que en un rombo son perpendiculares y en un romboide son oblicuas y desiguales. En un trapecio, la altura es la distancia entre las dos bases.

4.1. Trapecios

- **Trapecio rectángulo:** si tiene dos ángulos rectos.
- **Trapecio isósceles:** si tiene los lados no paralelos iguales.
- **Trapecio escaleno:** si no es rectángulo ni isósceles.

4.2. Paralelogramos

- **Cuadrado:** con cuatro ángulos rectos y cuatro lados iguales.
- **Rombo:** con los cuatro lados iguales.
- **Romboide:** con los cuatro lados paralelos dos a dos.
- **Rectángulo:** con cuatro ángulos rectos.

Propiedades de los paralelogramos

- Si trazamos una diagonal, el paralelogramo queda dividido en dos triángulos iguales.
- Los lados opuestos de un paralelogramo tienen la misma longitud.
- Los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales, mientras que los contiguos son suplementarios.
- Las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio de las dos.

4.3. Áreas de cuadriláteros y triángulos

Cuadrado

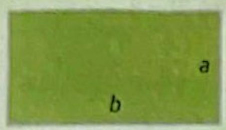
Área

$A = \text{lado} \times \text{lado} = l^2$

Perímetro

$P = 4l$

Rectángulo y romboide



Área

$A = \text{base} \times \text{altura}$

Perímetro

$P = 2b + 2a$

Polígono regular

Área

$$A = \frac{\text{perímetro} \times \text{apotema}}{2}$$

Perímetro

$P = \text{n.º lados} \times l$

Rombo

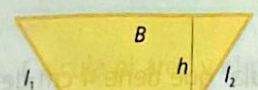
Área

$$A = \frac{\text{diagonal mayor} \times \text{diagonal menor}}{2}$$

Perímetro

$P = 4l$

Trapecio



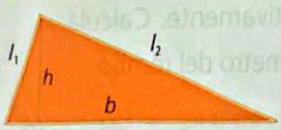
Área

$$A = \frac{B + b}{2} \cdot h$$

Perímetro

$P = B + b + l_1 + l_2$

Triángulo



Área

$$A = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

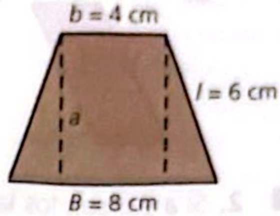
Perímetro

$P = l_1 + l_2 + b$

En un polígono, se denomina **perímetro** la suma de las longitudes de todos sus lados, y **apotema,** la distancia desde el punto medio hasta la base.

ACTIVIDADES Resueltas

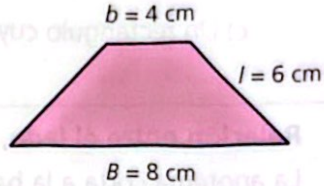
- *Calcula el área y el perímetro del trapecio:*



Solución

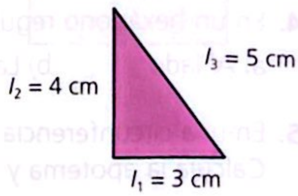
$P_{trapecio} = B + b + l_1 + l_2 =$
$= 8 + 4 + 6 + 6 = 24$ cm

$a = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{36 - 4} =$
$= \sqrt{32} = 5'6$ cm



$$A_{trapecio} = \frac{a \cdot (B + b)}{2} = \frac{5'6 \cdot (8 + 4)}{2} = \frac{5'6 \cdot 12}{2} = 33'6 \text{ cm}^2$$

- *Calcula el área y el perímetro del triángulo:*

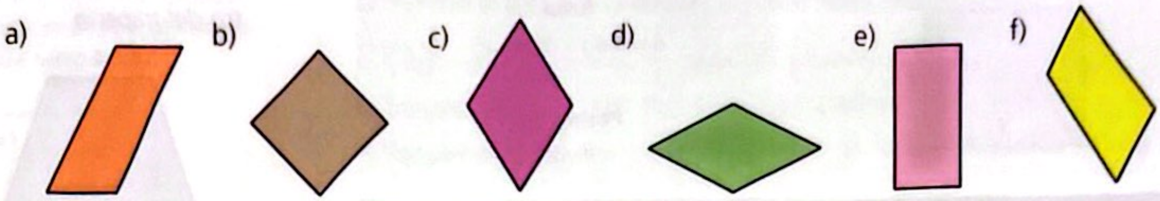


Solución

$$A = \frac{b \cdot a}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

$P = l_1 + l_2 + l_3 = 3 + 4 + 5 =$
$= 12$ cm

1. Clasifica los siguientes paralelogramos:



2. Si *a* y *b* son los lados de un rectángulo, calcula las siguientes áreas:

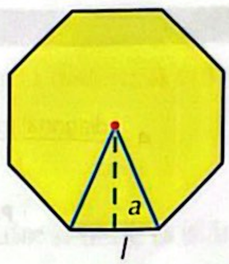
a	4 cm	2 cm	3'5 cm
b	3 cm	3'5 cm	3'5 cm
Área			

3. Calcula el perímetro de las siguientes figuras:
a) Un cuadrado de 6 cm de lado. b) Un rectángulo cuyos lados miden 4 y 2'5 cm.
c) Un rectángulo cuyos lados miden $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$ cm.

Relación entre el lado, el radio y la apotema

La apotema corta a la base en su punto medio, por tanto, por el teorema de Pitágoras obtenemos:

$$r^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + a^2 \rightarrow a = \sqrt{r^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$



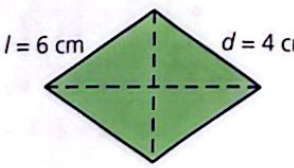
4. En un hexágono regular que está inscrito en una circunferencia de 9 cm de radio, calcula:
a) Al lado b) La apotema c) El perímetro d) El área

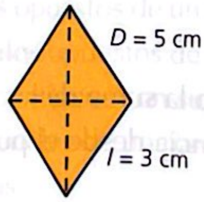
5. En una circunferencia de 5'4 cm de radio inscribimos un octógono regular que tiene 4 cm de lado. Calcula la apotema y el área.

6. ¿Qué medidas tendrá un cuadrado inscrito en una circunferencia de 10 cm de radio? ¿Cuánto mide su perímetro? ¿Cuánto mide su área?

7. Las diagonales mayor y menor de un rombo miden 6 y 12 cm respectivamente. Calcula:
a) La longitud de cada lado b) El área del rombo c) El perímetro del rombo

8. Calcula el área y el perímetro de los siguientes rombos:

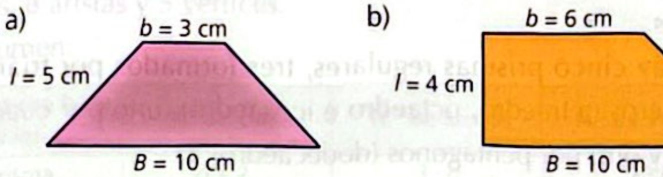




ACTIVIDADES

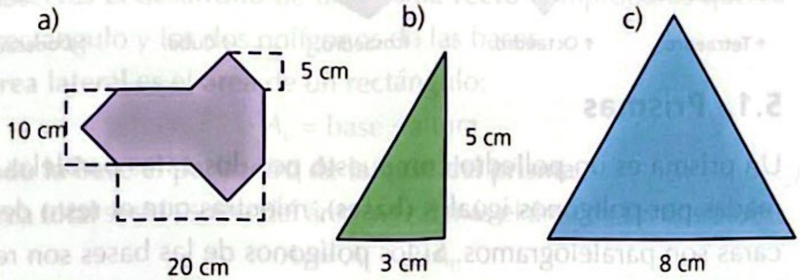
9. Calcula el área de un trapecio que tiene por bases dos segmentos que miden 8 y 4 cm y su altura es 3 cm.

10. Calcula el área y el perímetro de las siguientes figuras:

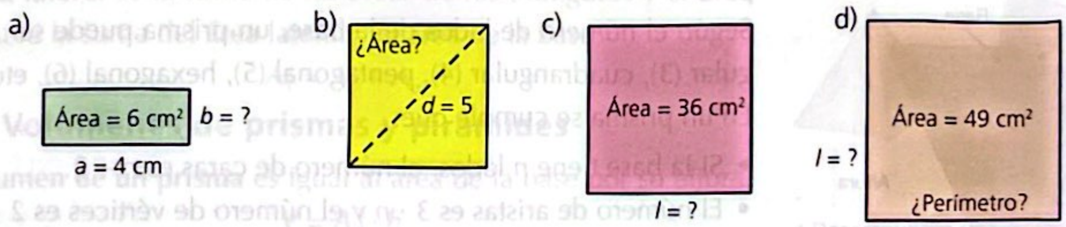


11. Calcula el área de un triángulo que tiene 5 cm de base y 6 cm de altura.

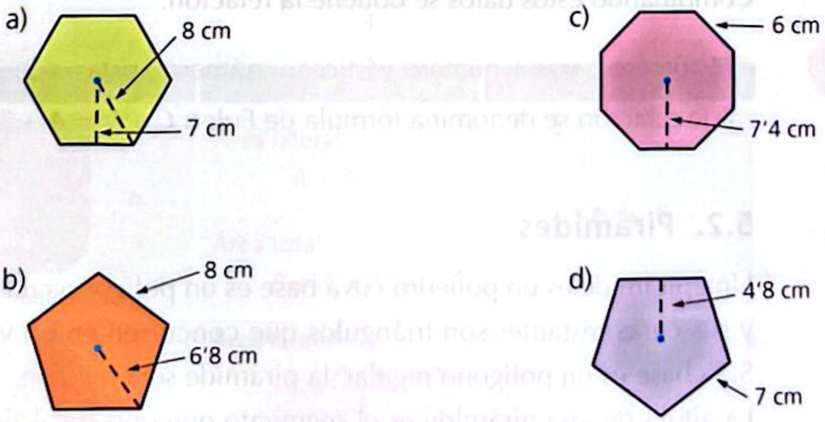
12. Calcula el área y el perímetro de las siguientes figuras:



13. En cada figura calcula el dato que falta:



14. Calcula el área y el perímetro de las siguientes figuras:



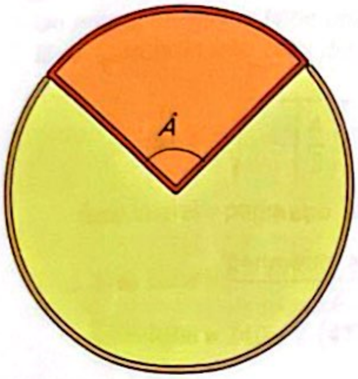
6. La circunferencia y el círculo

> **Recuerda...**
>
> **Ángulo nulo (0º)**
> **Ángulo recto (90º)**
> **Ángulo llano (180º)**
> **Ángulo completo (360º)**
> **Ángulo agudo:** mide menos que un ángulo recto.
> **Ángulo obtuso:** mide más que un ángulo llano.

La **circunferencia** es una curva cerrada y plana, donde todos los puntos están a la misma distancia de un punto central llamado centro.

En una circunferencia podemos encontrar los siguientes segmentos:

- **Radio:** es el segmento que une el centro con un punto cualquiera de la circunferencia.
- **Cuerda:** es el segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia.
- **Diámetro:** es la cuerda que pasa por el centro. Es la mayor de todas las cuerdas y equivale a dos veces el radio.



↑ Sector circular.

Al trazar el diámetro te habrás dado cuenta de que una circunferencia completa recorre dos ángulos llanos y que como cada uno de ellos mide 180º, la circunferencia tiene una amplitud de 360º. Si dividiéramos la circunferencia en cuatro cuadrantes, cada uno de ellos tendría un ángulo de 90º.

Longitud de la circunferencia

La longitud de la circunferencia se calcula multiplicando el diámetro por el número *pi*, tomando este como 3,14.

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r$$

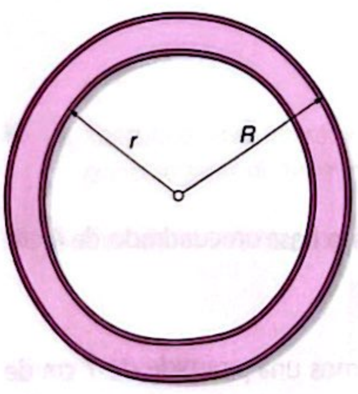
> **Área del sector circular**
>
> $$A = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\hat{A}}{360^\circ}$$

Área del círculo

Ya hemos visto que la circunferencia es una línea, pero en su interior encierra una superficie que llamamos **círculo.** El área de un círculo de radio *r* es igual al producto de *pi* por el radio al cuadrado.

$$A = \pi \cdot r^2$$

Un **sector circular** es la región del plano comprendida entre dos radios.



↑ Corona circular.

Área de la corona circular

Si tenemos dos circunferencias, una dentro de otra (concéntricas y con el mismo centro), la mayor de radio *R* y la menor de radio *r*, el área de la **corona circular** se obtiene al restar el área del círculo menor del área del círculo mayor.

$$A = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

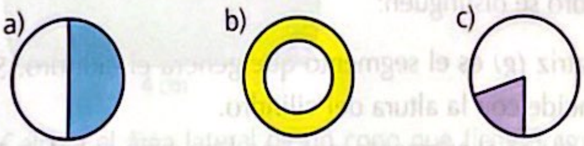
ACTIVIDADES

1. Nombra cada uno de los elementos representados en las circunferencias:

a) b) c) d) e)

2. Nombra cada una de las siguientes figuras:

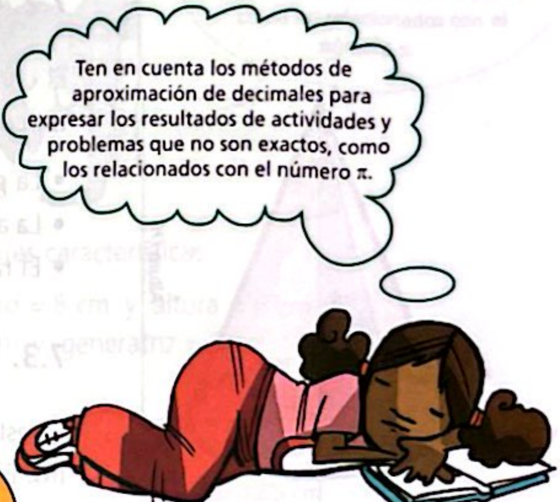
a) b) c)



3. Calcula la longitud de las circunferencias que tienen:

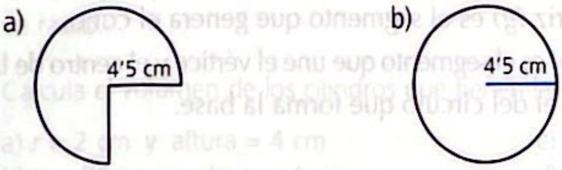
a) Radio = 5 cm
b) Diámetro = 6 cm
c) Radio = 10 cm
d) Diámetro = $\frac{5}{4}$ cm
e) Radio = 2'5 cm
f) Radio = 7 cm

4. Calcula la longitud de un cuarto de circunferencia de 6 cm de radio.



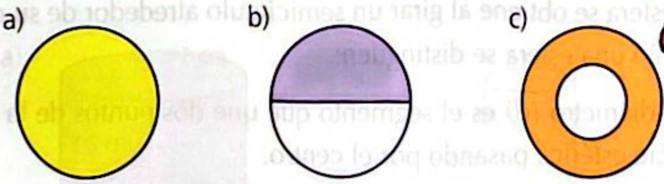
5. Calcula la longitud de las siguientes figuras:

a) b)



6. Calcula el área de las siguientes figuras:

a) b) c)



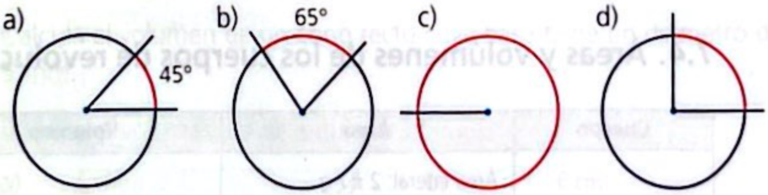
$r = 3$ cm

$r = 3$ cm
$\hat{A} = 180°$

$r_2 = 3$ cm
$r_1 = 1'5$ cm

7. Si el radio mide 3 cm, calcula la longitud de:

a) b) c) d)



8. Si r = radio de una circunferencia, calcula la longitud y el área de las siguientes:

a) $r = 40$ cm
b) $r = 2,3$ m
c) $r = 0,8$ cm

9. Un caballo atado a una cuerda gira en torno a un poste. ¿Qué longitud recorrerá si la cuerda mide 10 m de largo?