(P8) *Interpolasi*

- **Pengertian dan tujuan Interpolasi**
- **Interpolasi vs Aproksimasi**
- **Kriteria pemilihan fungsi *interpolant***
- **Metode interpolasi:**
  - **Interpolasi Lagrange**
- **Analisis Kesalahan**

Pengertian Interpolasi

adalah suatu proses untuk menemukan formula (biasanya berupa suatu polinomial) yang grafiknya melalui setiap titik (t_i, y_i) *untuk* $i = 1, 2, ..., m$

dengan $t_1 < t_2 < \ldots < t_m,$

akan ditentukan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

sedemikian shg $f(t_i) = y_i, \quad i = 1, \ldots, m$

Tujuan Interpolasi

- Memplot kurva mulus pada data diskret
- Menurunkan atau mengintegralkan data dalam tabel
- Membaca informasi antar baris dalam tabel
- Mengevaluasi fungsi secara cepat dan mudah
- Merepresentasikan fungsi yang kompleks dalam bentuk yang lebih sederhana

Interpolasi vs Aproksimasi

- Fungsi interpolasi akan memfit titik-titik data secara tepat. Oleh karena itu, data tidak boleh mengandung kesalahan. Hanya digunakan untuk suatu *range* data
- Bila data mengandung kesalahan, maka metode aproksimasi lebih sesuai. Biasanya digunakan untuk sembarang *range* data. Sebagai contoh : *Least Square Method*

Kriteria untuk memilih Interpolant

- Apakah bentuk fungsi cukup mudah untuk
  - ditentukan parameternya?
  - dievaluasi nilainya?
  - diturunkan atau diintegralkan?
- Apakah sifat-sifat fungsi sudah sesuai dengan sifat-sifat data yang difitkan (kemonotonan, kemulusan, kecekungan, dll)?

Jenis fungsi Interpolasi

- Polynomials
- Piecewise polynomials
- Trigonometric functions
- Exponential functions
- Rational functions

Interpolasi polinomial

- Suatu polinomial *P(t)* derajat *n-1* yang unik dapat dikonstruksi yang melalui *n* titik *t* yang berbeda.
- Banyak cara untuk mengonstruksi fungsi polinomial, namun secara teori akan menghasilkan suatu fungsi polinomial yang sama

Interpolasi Lagrange

Yang paling sederhana, menghubungkan 2 buah titik (x_0, y_0) dan (x_1, y_1) dengan garis lurus

$$P_1(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x)$$

$$\begin{aligned} P_1(x) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1} y_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} y_1 \\ &= \frac{(x_1-x)\,y_0 + (x-x_0)\,y_1}{x_1-x_0} \\ &= y_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}[y_1-y_0] \\ &= y_0 + \left(\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\right)(x-x_0) \end{aligned}$$

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x$$

Contoh:

x	1	1.1	1.2	1.3
$\tan x$	1.5574	1.9648	2.5722	3.6021

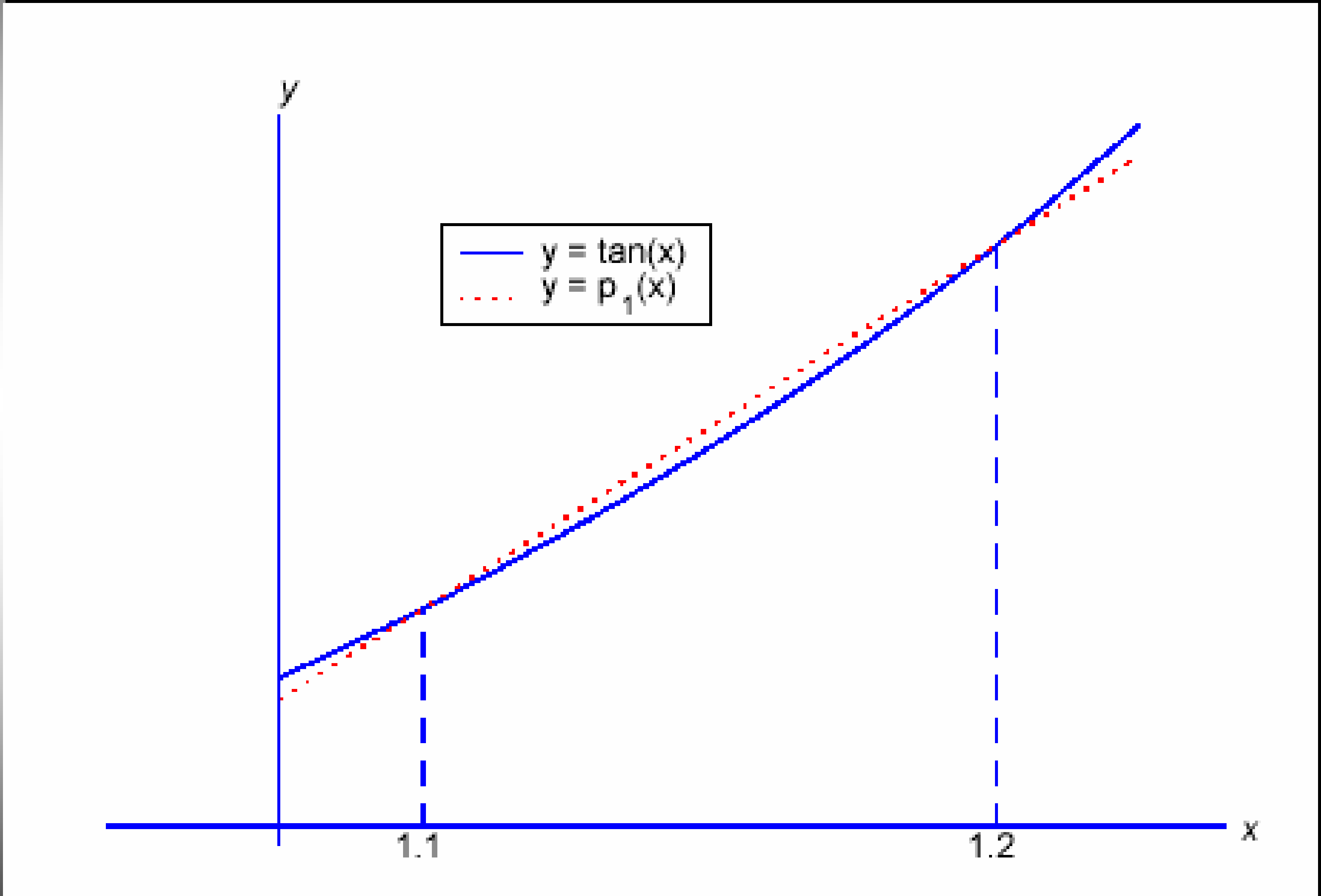
Menggunakan interpolasi linear dengan titik $x_1 = 1.1$ dan $x_2 = 1.2$ dengan nilai y yang bersesuaian, maka akan diperoleh :

$$\tan x \approx y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}[y_1 - y_0]$$

$$\begin{aligned}\tan x &\approx y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}[y_1 - y_0]\\ \tan(1.15) &\approx 1.9648 + \frac{1.15 - 1.1}{1.2 - 1.1}[2.5722 - 1.9648]\\ &= 2.2685\end{aligned}$$

$$\boxed{\tan 1.15 = 2.2345.}$$

Nilai yang sebenarnya : $\tan 1.15 = 2.2345.$



- Interpolasi kuadratik memerlukan tiga titik : (x_0, y_0), (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) untuk mendapatkan fungsi kuadratik $P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, yang memenuhi

$$P_2(x_i) = y_i, \qquad i = 0, 1, 2$$

Cara menghitung polinomial kuadratik:

$$P_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}, \qquad L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Fungsi $L_0(x)$, $L_1(x)$ dan $L_2(x)$ di atas disebut fungsi landasan Lagrange untuk interpolasi kuadratik.

Interpolasi menggunakan fungsi polinomial derajat n memerlukan $(n+1)$ buah titik (x_0, y_0), (x_1, y_1) … (x_n, y_n). Solusinya adalah :

$$P_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x)$$

Fungsi landasan Lagrange untuk interpolasi derajat tinggi tersebut adalah :

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)\,..(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})..\,(x - x_n)}{(x_k - x_0)\,..(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})..\,(x_k - x_n)}$$

untuk k = 1, 2, … n

Interpolasi ini ditemukan oleh Joseph-Louis Lagrange yang hidup pada tahun 1736-1813.

Karakteristik Polinomial Lagrange

- Mudah dicari
- Mahal biaya evaluasi fungsinya
- Lebih sulit diturunkan atau diintegralkan

Contoh:

Cari polinomial Lagrange derajat dua untuk menginterpolasi titik (-2,-27), (0,-1), (1,0)

Polinomial Lagrange derajat dua untuk menginterpolasi titik (t_1,y_1), (t_2,y_2), (t_3,y_3) adalah

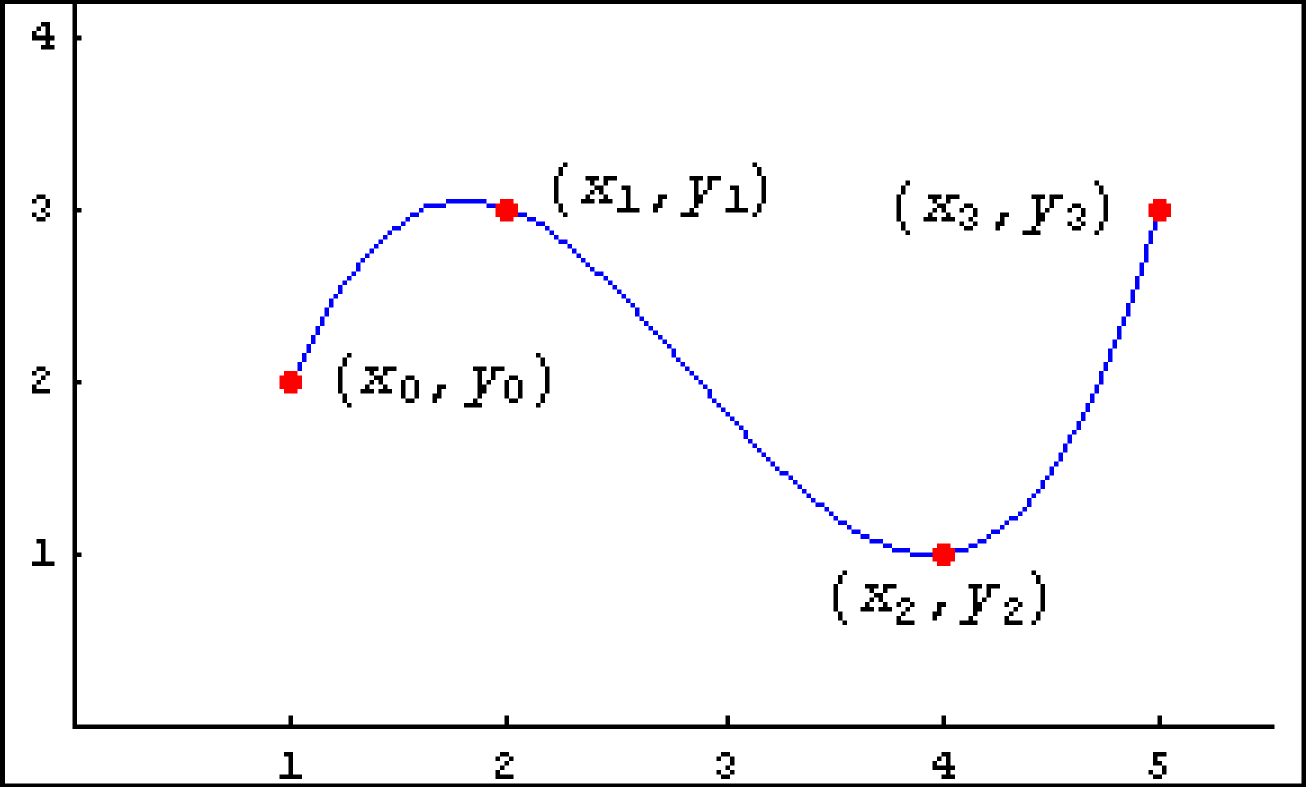
$$p_2(t) = y_1\frac{(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)} + y_2\frac{(t-t_1)(t-t_3)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)}$$

$$+y_3\frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}$$

Bila digunakan pada titik yang diberikan, menghasilkan:

$$p_2(t) = -27\frac{t(t-1)}{(-2)(-2-1)} + (-1)\frac{(t+2)(t-1)}{(2)(-1)}$$

Kurva di bawah ini memberikan ilustrasi polinomial Lagrange derajat 3 yang melalui 4 titik (x_k, y_k) untuk $k = 0,1,2,3$.



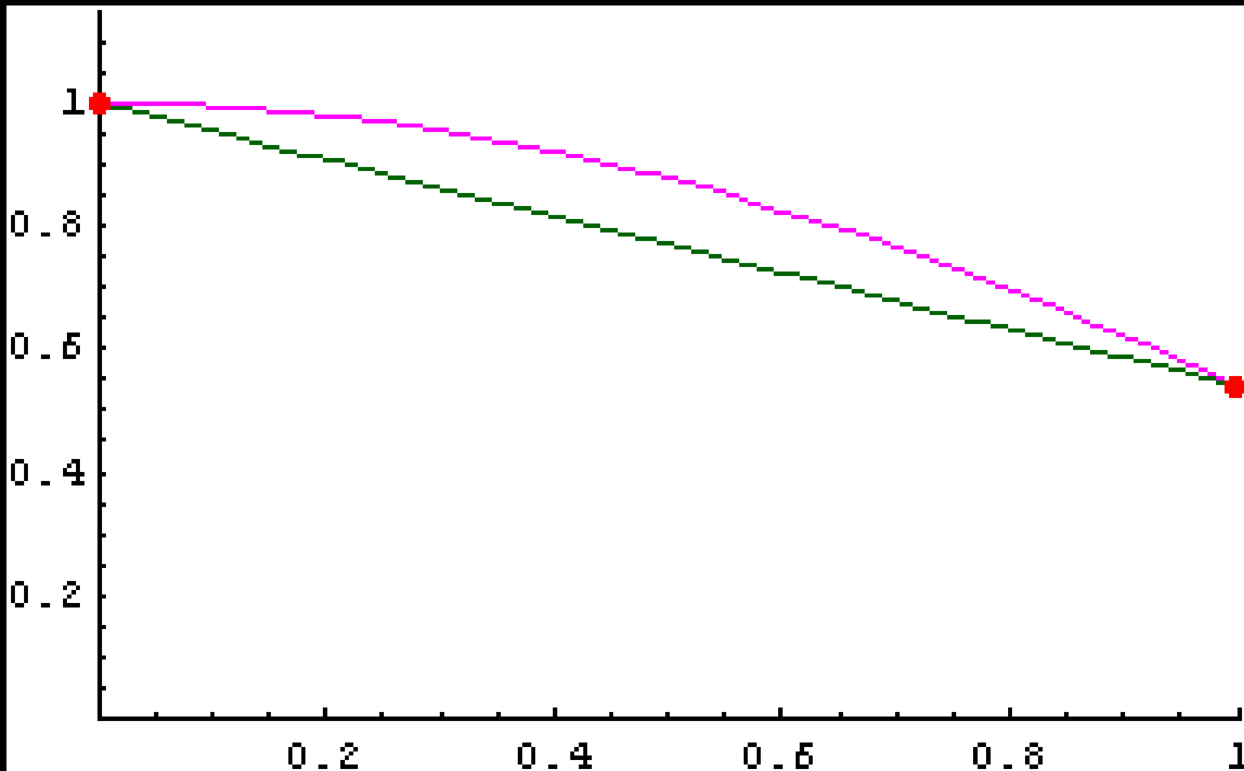
Contoh:

- Buat polinomial Lagrange derajat $n = 1, 2, 3, 4, 5$ untuk menghampiri fungsi $f(x) = \cos(x)$ pada interval $[x_0, x_n] = [0, 1]$, dengan partisi yang sama.

Jawab:

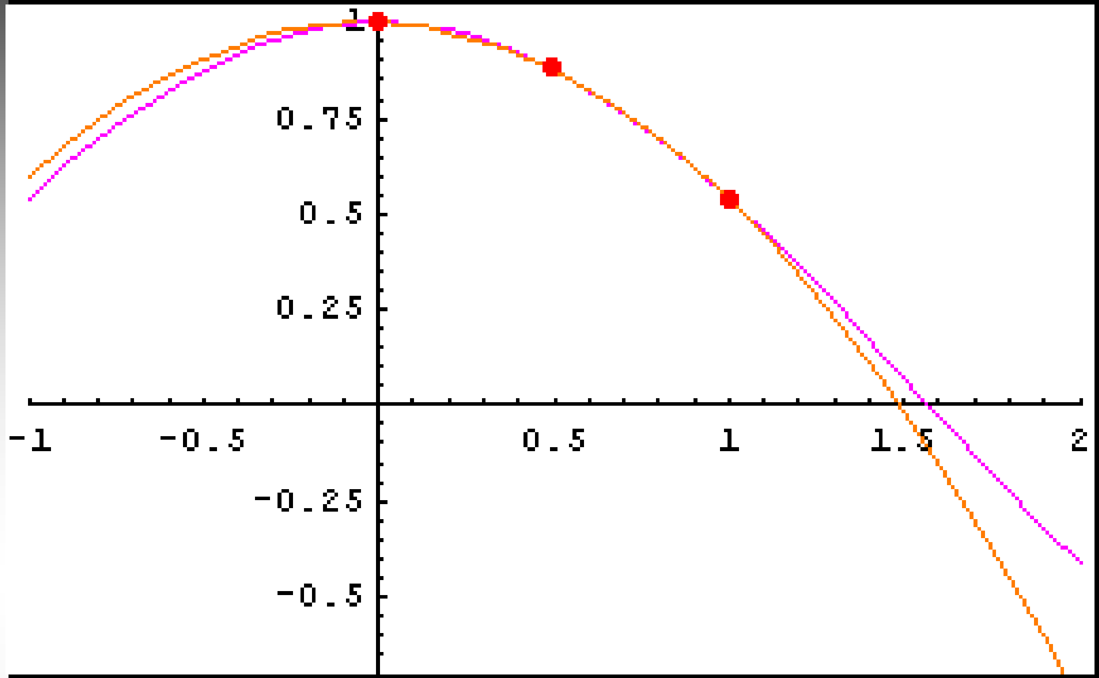
Bila digunakan 2 titik, yaitu (0, f(0)) dan (1, f(1)), diperoleh polinomial derajat 1 berikut :

$$p_1[x] = -1.\,(-1. + x) + 0.540302\,(0. + x)$$



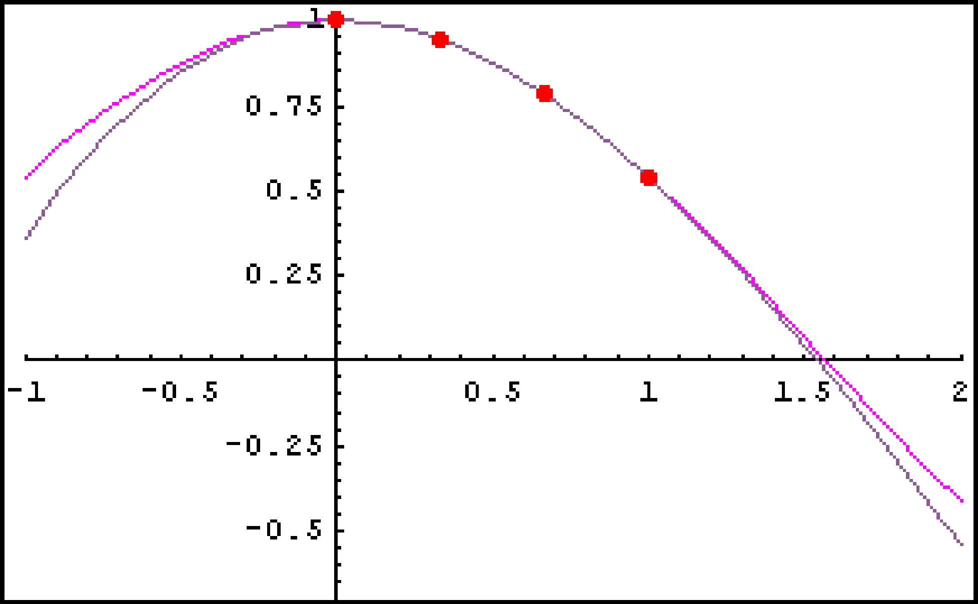
Bila digunakan 3 titik, yaitu (0, f(0)), (0.5, f(0.5)), (1, f(1)) diperoleh polinomial derajat 2 berikut :

$$p_2[x] = 1. - 0.0299721\,x - 0.429726\,x^2$$

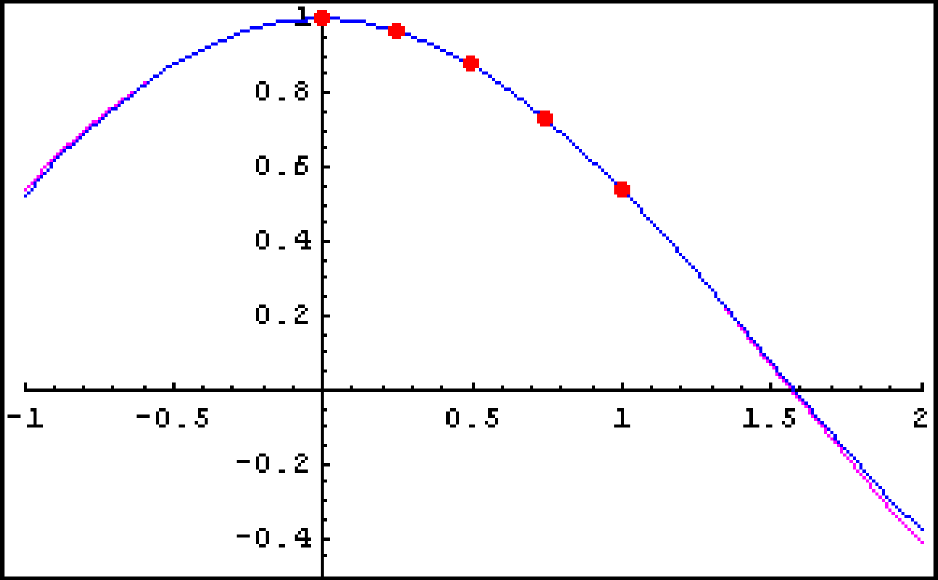


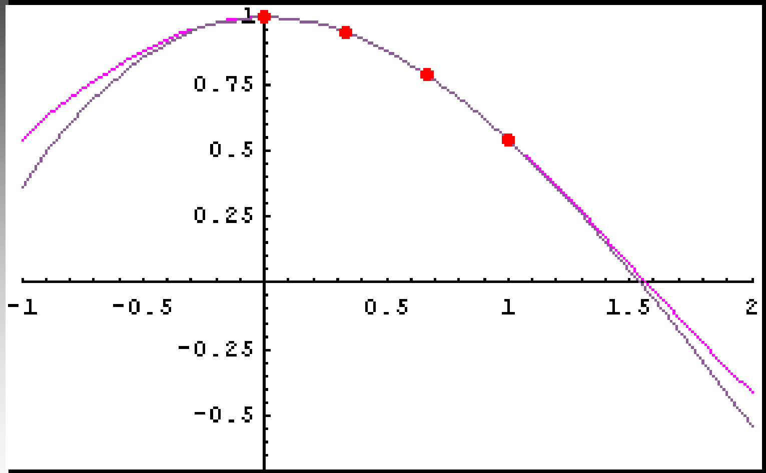
Bila digunakan 4 titik, yaitu (0, f(0)), (0.33, f(0.33)), (0.67, f(0.67)), (1, f(1)) diperoleh polinomial derajat 3 berikut :

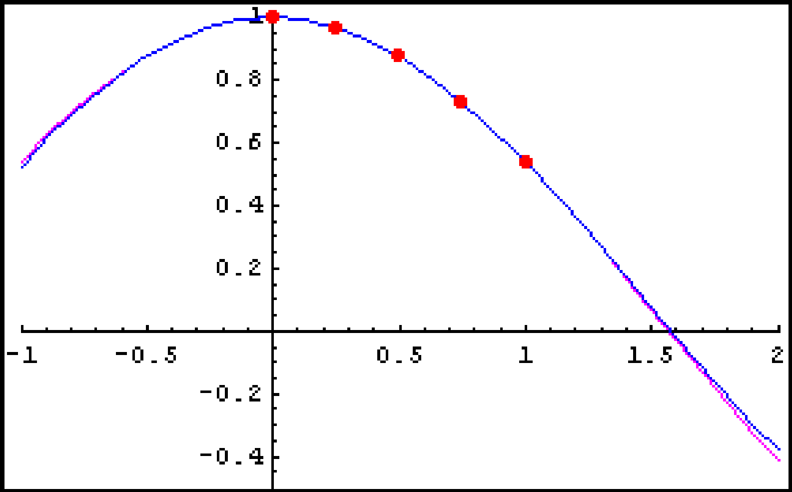
$$p_3[x] = 1. + 0.00842215\,x - 0.546921\,x^2 + 0.0788011\,x^3$$

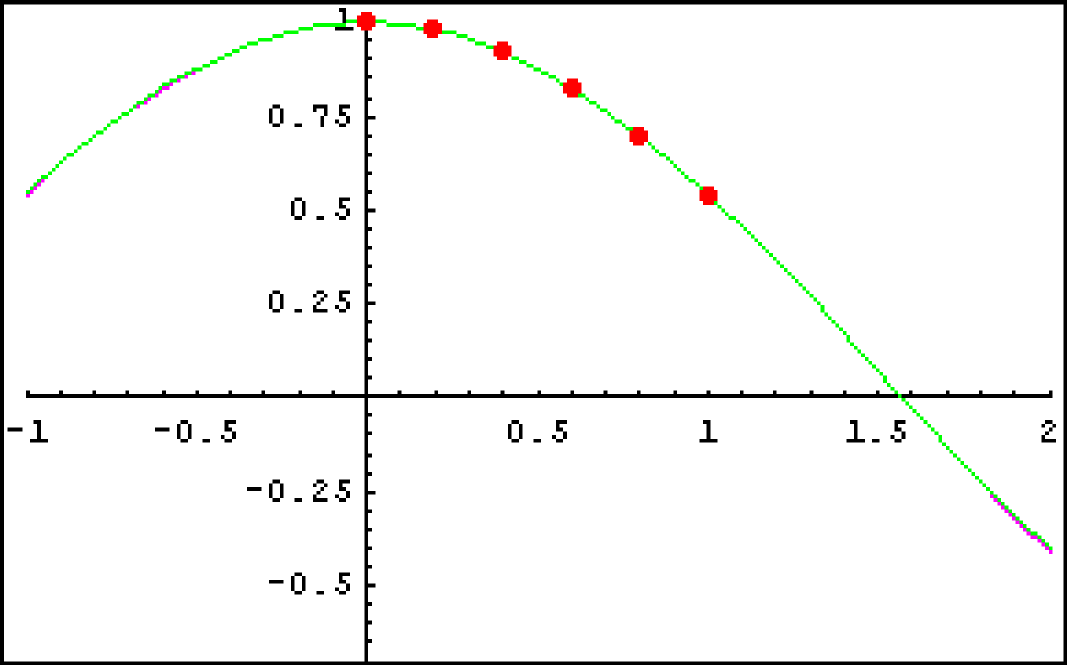


dst




1
0.75
0.5
0.25
-1
-0.5
0.5
1
1.5
2
-0.25
-0.5


1
0.8
0.6
0.4
0.2
-1
-0.5
0.5
1
1.5
2
-0.2
-0.4


1
0.75
0.5
0.25
-1
-0.5
0.5
1
1.5
2
-0.25
-0.5

Teorema Batas Kesalahan

- Andaikan *f(x)* didefinisikan pada [a, b] yang memuat partisi yang sama $x_k = x_0 + kh$
- Andaikan pula *f* dan turunan *f* sampai orde *(n+1)* kontinyu serta terbatas pada subinterval $[x_0, x_1]$, $[x_0, x_2]$, $[x_0, x_3]$, $[x_0, x_4]$, *dan* $[x_0, x_5]$, yaitu $| f^{(n+1)}(x) | \leq M_{(n+1)}$ untuk $x_0 < x < x_n$ dengan $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Faktor kesalahan yang bersesuaian dengan kasus-kasus tersebut memiliki batas atas berikut

$$|R_1(x)| \le \frac{M_2}{8} h^2 \quad \text{utk} \quad x \in [x_0, x_1]$$

$$|R_2(x)| \le \frac{M_3}{9\sqrt{3}} h^3 \quad \text{utk} \quad x \in [x_0, x_2]$$

$$|R_3(x)| \le \frac{M_4}{24} h^4 \quad \text{utk} \quad x \in [x_0, x_3]$$

$$|R_4(x)| \le \frac{\sqrt{4750 + 290\sqrt{145}}}{3000} M_5 h^5$$

untuk $x \in [x_0, x_4]$

$$|R_5(x)| \le \frac{10 + 7\sqrt{7}}{1215} M_6 h^6$$

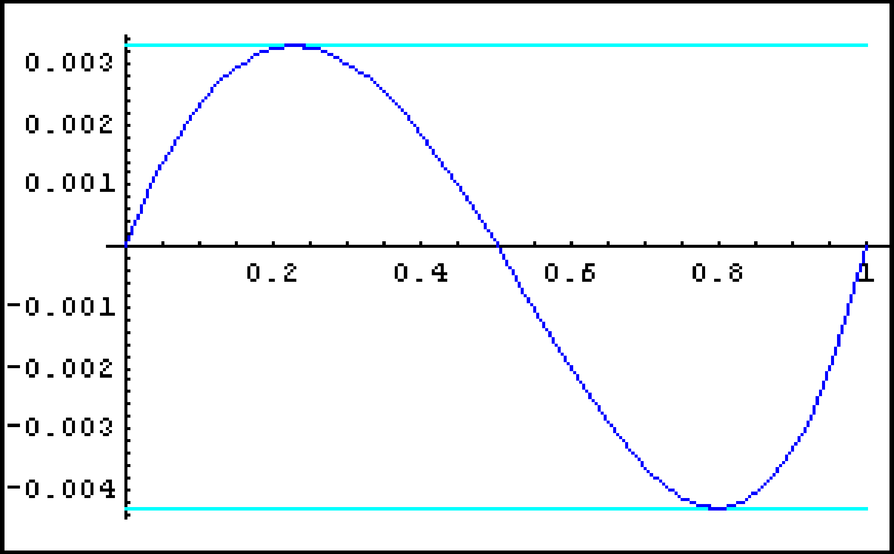
untuk $x \in [x_0, x_5]$

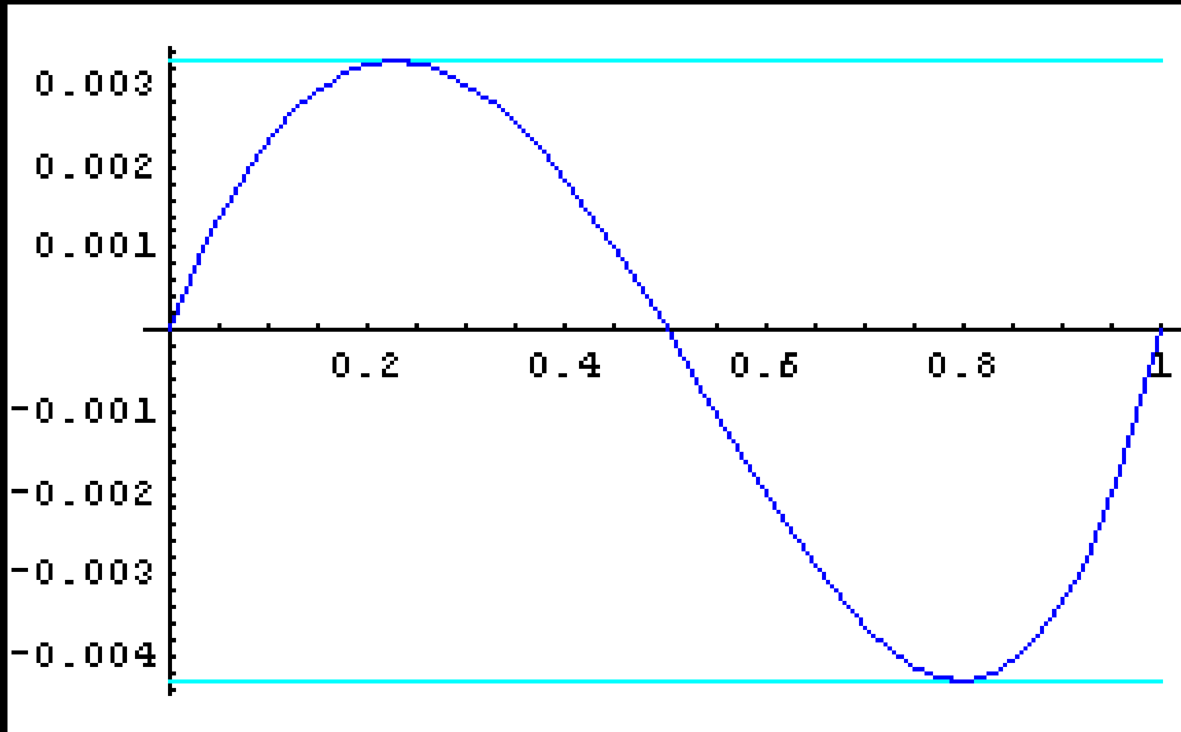
Contoh:

- Selidiki kesalahan yang timbul akibat penggunaan metode hampiran Lagrange orde n = 2, 3, 4, dan 5 pada contoh di atas.

Jawab: untuk n=2

Kesalahan yang terjadi : $e_2(x) = f(x) – P_2(x)$,

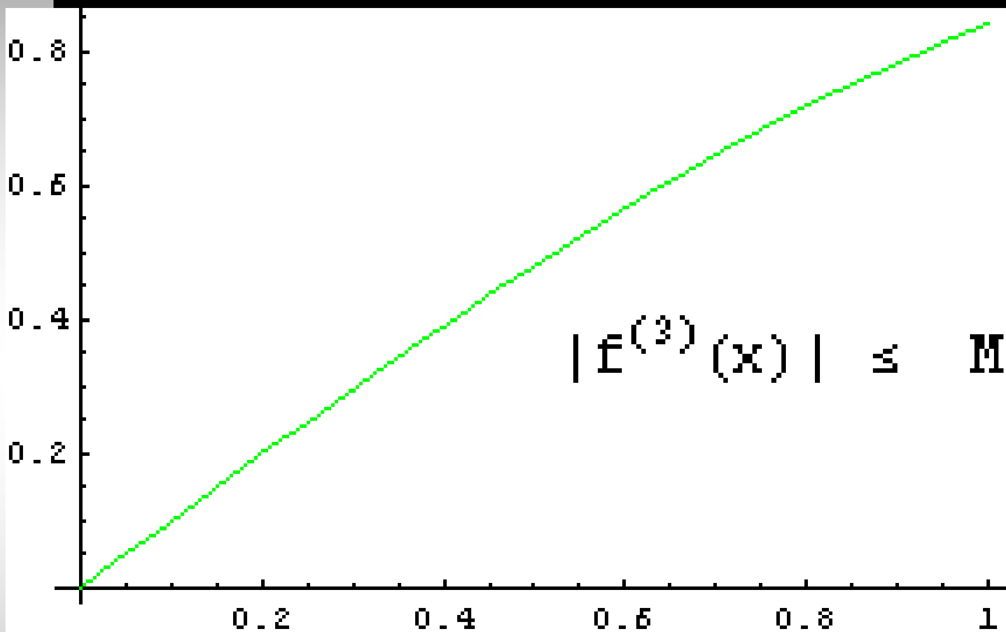




Dari grafik tersebut dapat dibuat perkiraan

$$|e_2[x]| \le 0.00329294$$

f(x) = cos x ; $f^{(3)}(x) = \sin x$



$$|f^{(3)}(x)| \le M_3 = \text{Sin}[1] = 0.841471$$

$$|R_2(x)| \le \frac{M_3}{9\sqrt{3}} h^3 = \frac{\text{Sin}[1]}{72\sqrt{3}} = 0.00674755$$

$$|R_2(x)| \le \frac{M_3}{9\sqrt{3}} h^3$$

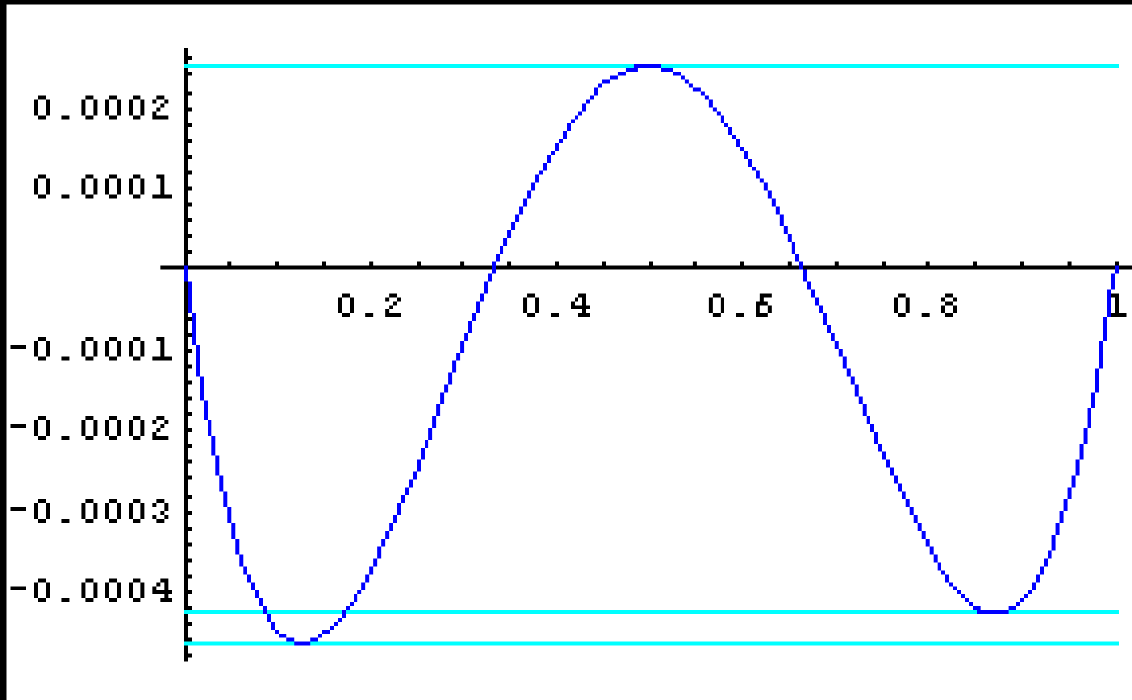
Jadi batas atas kesalahan

$|R_2(x)| \le 0.00674755$ untuk $x \in [0, 1]$

yang ternyata sedikit lebih besar dari kesalahan terbesar, yakni 0.00329294

Jawab: untuk n=3

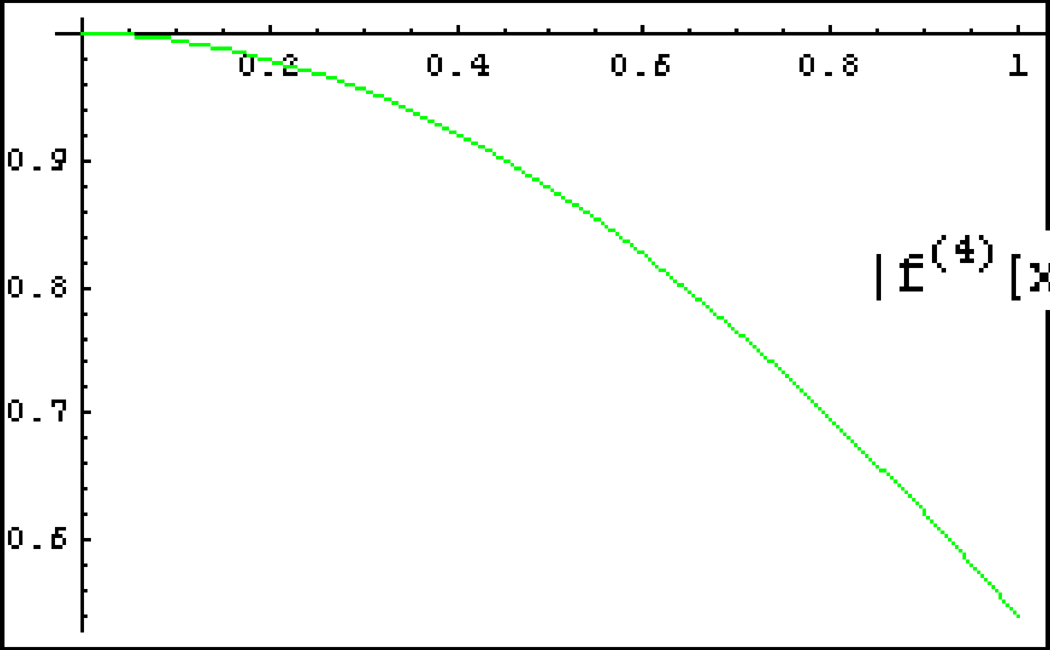
Kesalahan yang terjadi : $e_3(x) = f(x) - P_3(x)$,



Dari grafik tersebut dapat dibuat perkiraan

$$|e_3[x]| \le 0.000463413$$

$f(x) = \cos x$; $f^{(4)}(x) = \cos x$



$$|f^{(4)}[x]| \le M_4 = 1 = 1.$$

$$|R_3(x)| \le \frac{M_4}{24} h^4 = \frac{1}{1944} = 0.000514403$$

$$|R_3(x)| \le \frac{M_4}{24} h^4$$

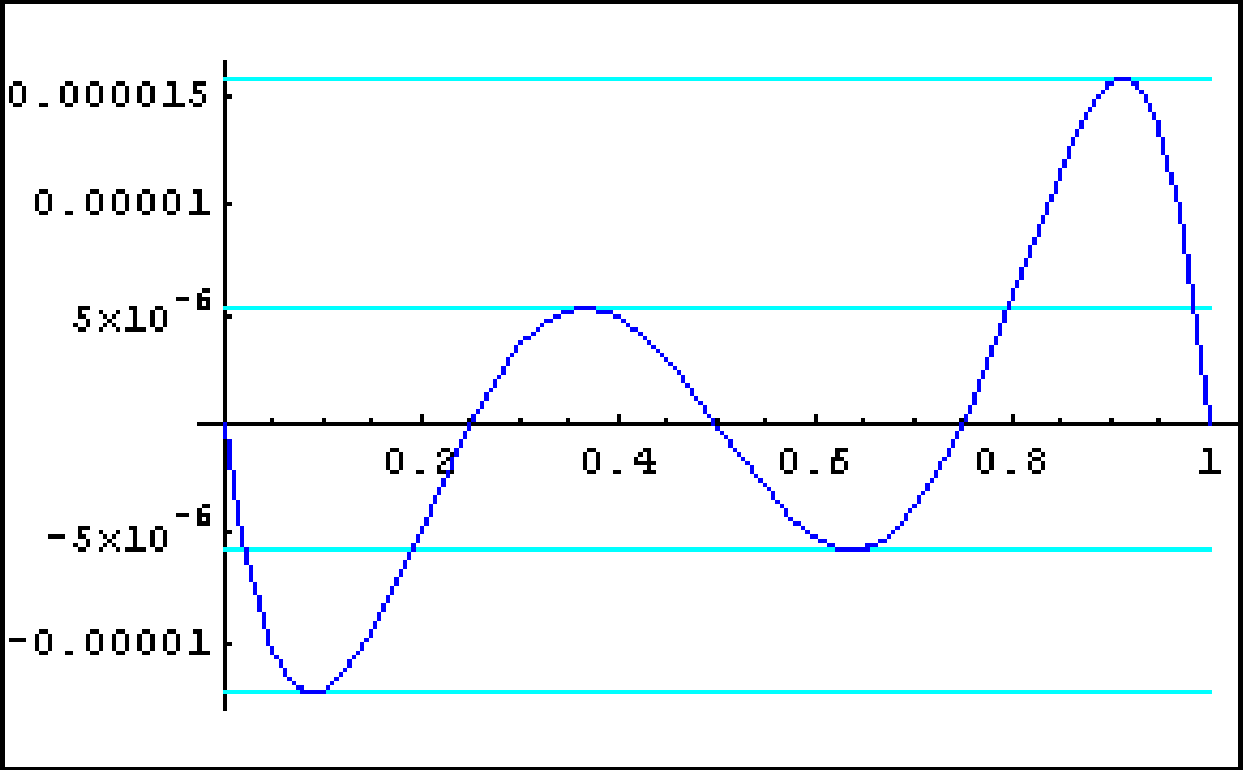
Jadi batas atas kesalahan

$|R_3(x)| \le 0.000514403$ untuk $x \in [0, 1]$

yang ternyata sedikit lebih besar dari kesalahan terbesar, yakni 0.000463413

Jawab: untuk n=4

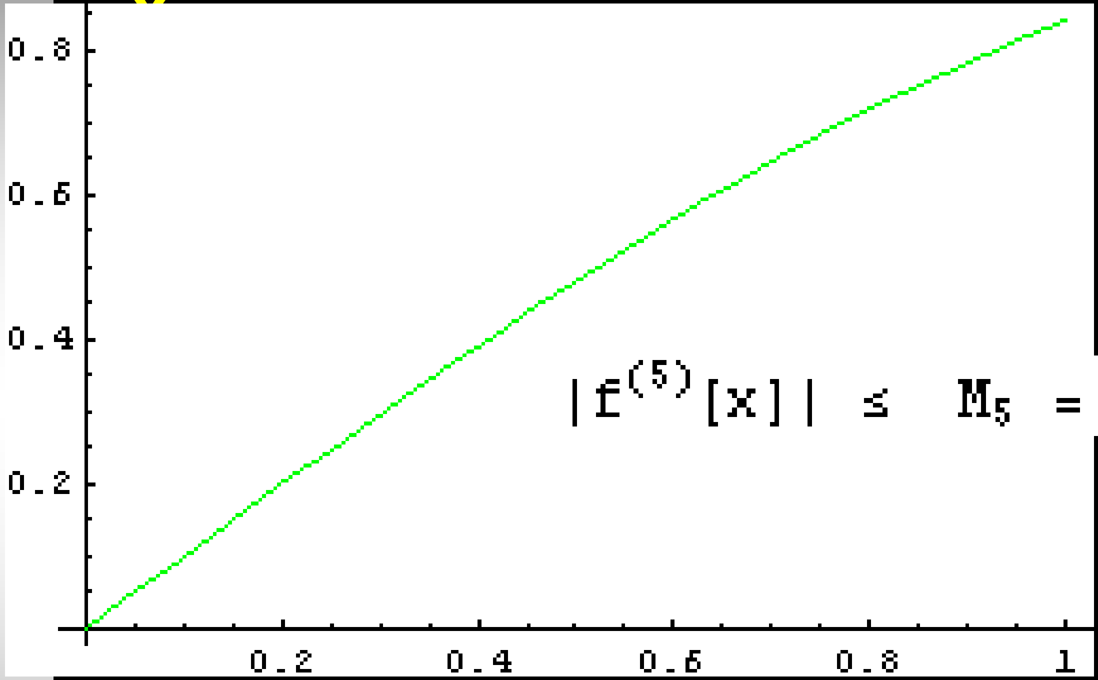
Kesalahan yang terjadi : $e_4(x) = f(x) - P_4(x)$,



Dari grafik tersebut dapat dibuat perkiraan

$$|e_4[x]| \leq 0.000157713$$

$f(x) = \cos x$; $f^{(5)}(x) = -\sin x$



$$|f^{(5)}[x]| \leq M_5 = \mathrm{Sin}[1] = 0.841471$$

$$|R_4(x)| \leq \frac{\sqrt{4750 + 290\sqrt{145}}}{3000} M_5 h^5 = \frac{\sqrt{4750 + 290\sqrt{145}}\ \mathrm{Sin}[1]}{3072000} = 0.0000248677$$

$$|R_4(x)| \le \frac{\sqrt{4750 + 290\sqrt{145}}}{3000} M_5 h^5$$

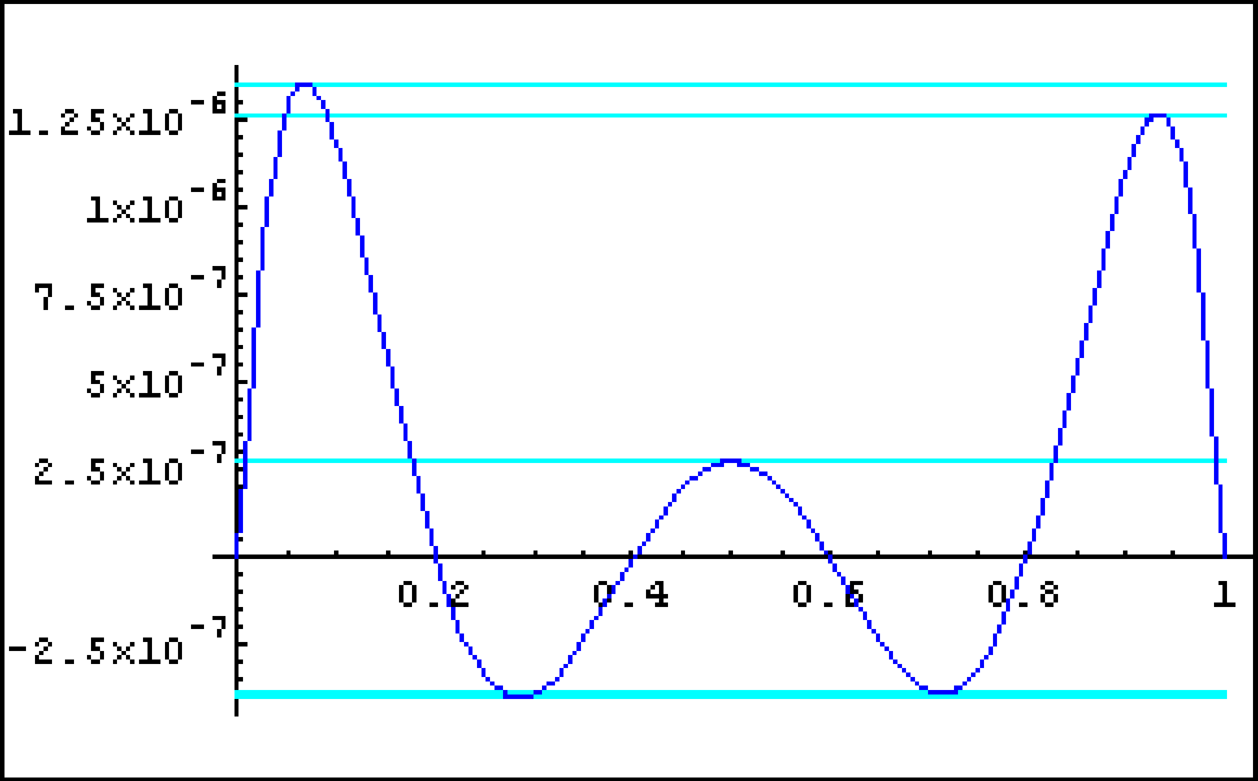
Jadi batas atas kesalahan

$$|R_4(x)| \le 0.0000248677$$ **untuk** $x \in [0, 1]$

yang ternyata sedikit lebih besar dari kesalahan terbesar, yakni 0.0000157713

Jawab: untuk n=5

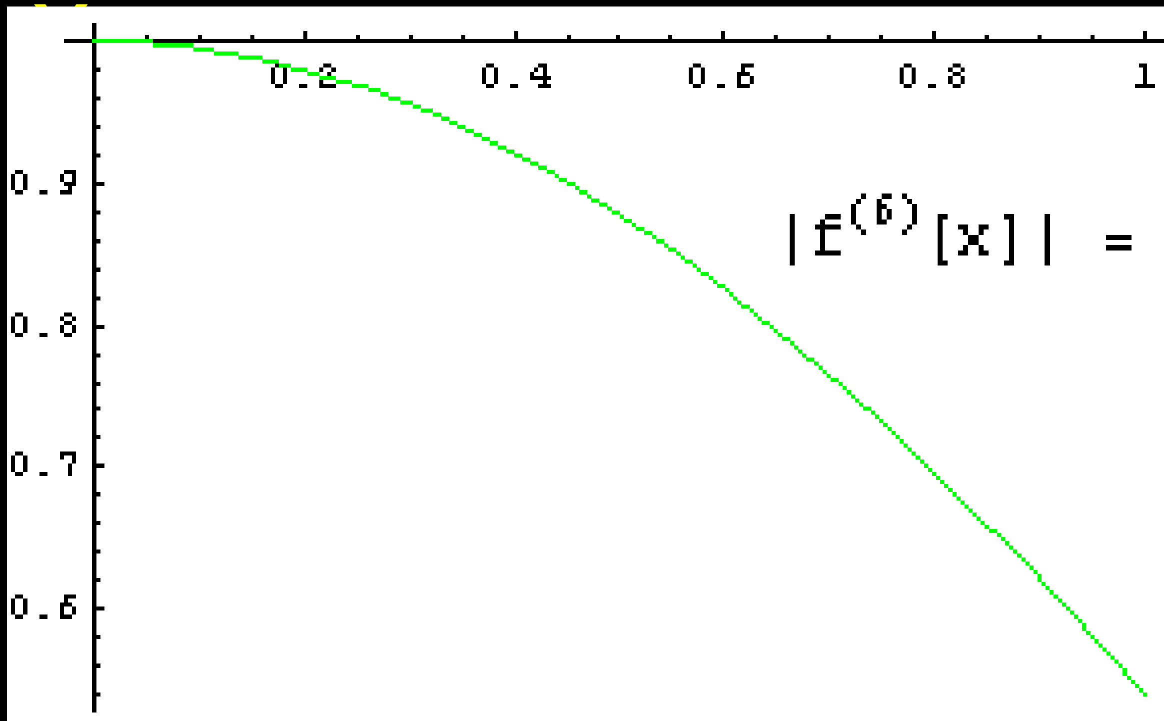
Kesalahan yang terjadi : $e_5(x) = f(x) - P_5(x)$,



Dari grafik tersebut dapat dibuat perkiraan

$$|e_5[x]| \leq 0.00000134999$$

$f(x) = \cos x \; ; \; f^{(6)}(x) = -\cos$



$|f^{(6)}[x]| = \text{Abs}[\text{Cos}[x]]$

$$|R_5(x)| \le \frac{10 + 7\sqrt{7}}{1215} M_6 h^6 = \frac{10 + 7\sqrt{7}}{18984375} = 1.5023 \times 10^{-6}$$

$$|R_5(x)| \le \frac{10 + 7\sqrt{7}}{1215} M_6 h^6$$

Jadi batas atas kesalahan

$|R_5(x)| \le 1.5023 \times 10^{-6}$ **untuk** $x \in [0, 1]$

yang ternyata sedikit lebih besar dari kesalahan terbesar, yakni

$$1.34999 \times 10^{-6}$$

Sekian