Студент: Елисей Евсеев
Группа: М 4141
Домашняя работа: №3
Дата: 24 марта 2022 г.

Задача 1. Найти оценки максимального правдоподобия параметра $\theta > 0$, если распределение выборки имеет плотность:
1) $\theta y^{\theta-1}$, $y \in [0,1]$.
2) $2y/\theta^2$, $y \in [0,\theta]$
3) $\theta(lny)^{\theta-1}/y$, $y \in [1,e]$
Решение:
1) Функция правдоподобия (likelihood) от выборки $X_1...X_n$ и параметра θ выглядит следующим образом:

$$L(\theta, X_1...X_n) = \prod_{i=1}^{n} p(X_i) = \theta^n \prod_{i=1}^{n} X_i^{\theta-1} \tag{1}$$

Тогда логарифмический likelihood:

$$LogL(\theta, X_1...X_n) = n\log\theta + (\theta-1)\sum_{i=1}^{n} logX_i \tag{2}$$

Далее берем частные производные по параметрам (он один):

$$\frac{\partial LogL}{\partial\theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n}\log X_i \tag{3}$$

Приравниваем к нулю:

$$\frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n}\log X_i = 0 \tag{4}$$

Получаем оценку максимального правдоподобия для параметра θ и выборки:

$$\tilde{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\log X_i} = -\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log X_i} = -\frac{1}{\overline{\log X_i}} \tag{5}$$

Где $\overline{\log X_i}$ - выборочное среднее выборки $\log X_{1...n}$.
Получили известную оценку, убеждаться в том, что вторая производная логарифмической функции правдоподобия меньше нуля (она меньше нуля действительно) не нужно.
2) Вновь запишем функцию правдоподобия:

$$L(\theta, X_1...X_n) = \prod_{i=1}^{n} p(X_i) = (\frac{2}{\theta^2})^n \prod_{i=1}^{n} X_i \tag{6}$$

Видим ситуацию похожую на ту, что была на практике:

$$LogL(\theta, X_1...X_n) = n\log 2 - 2n\log\theta + \sum_{i=1}^{n}\log X_i \tag{7}$$

$$\frac{\partial LogL}{\partial\theta} = -\frac{2n}{\theta} = 0 \tag{8}$$

То есть видим, что решения нет. Смотрим на функцию правдоподобия, θ в знаменателе. Нам нужно, чтобы вся выборка попала в отрезок $[0, \theta]$, иначе один из $X_i = 0$. То есть $\tilde{\theta} = \max X_i = X_{max}$

3) Действуем по привычному алгоритму, через функцию правдоподобия:

$$L(\theta, X_1 ... X_n) = \theta^n \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{(\log X_i)^{\theta-1}}{X_i} \tag{9}$$

$$LogL(\theta, X_1 ... X_n) = n \log \theta + (\theta - 1) \sum_{i=1}^{n} \log \log X_i - \sum_{i=1}^{n} \log X_i \tag{10}$$

$$\frac{\partial LogL}{\partial} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \log \log X_i \tag{11}$$

$$\tilde{\theta} = -\frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log \log X_i} \tag{12}$$

По тому же принципу получим оценку выборочного среднего: $\overline{\log \log X_i}$ для выборки $\log \log X_1 ... \log \log X_n$.

$$\tilde{\theta} = -\frac{1}{\overline{\log \log X_i}} \tag{13}$$