Семинар 2. Метод Гаусса

1 Ступенчатый и канонический виды матриц

Пусть исходная система выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Матрица A называется *основной матрицей системы*, матрица $\overline{A}$ называется *расширенной матрицей системы*, b — столбцом свободных коэффициентов, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right), \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

В линейной алгебре матрица считается матрицей *ступенчатого вида по строкам* если

· все ненулевые строки (имеющие по крайней мере один ненулевой элемент) располагаются над всеми чисто нулевыми строками

· ведущий элемент (первый ненулевой элемент строки при отсчёте слева направо) каждой ненулевой строки располагается строго правее ведущего элемента в строке, расположенной выше данной. Вот пример матрицы ступенчатого вида по строкам:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 4 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & 1 & a_6 \end{array}\right).$$

Матрица называется матрицей *приведённого ступенчатого вида по строкам (или канонического вида по строкам)* если она удовлетворяет дополнительному условию:

· каждый ведущий элемент ненулевой строки - это единица, и он является единственным ненулевым элементом в своём столбце. Вот примеры матриц приведённого ступенчатого вида по строкам:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \end{array}\right); \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_3 \end{array}\right).$$

Задачи:

1. Приведите следующие матрицы к ступенчатому виду, укажите главные и свободные переменные, приведите матрицы к каноническому виду:

$$\text{а)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right); \text{б)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right); \text{в)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

2 Определенные СЛАУ

Определение. *Определенной системой линейных алгебраических уравнений* называется система, имеющая единственное решение.

Замечание. С точки зрения метода Гаусса определенность системы равносильна тому, что в ступенчатом виде все переменные главные и нет строк, в которых ведущим элементом является свободный коэффициент.

Задачи:

2. Решите систему, расширенная матрица которой задана в пункте а) задачи 1.

3. Решите следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

3 Неопределенные СЛАУ

Определение. *Неопределенной системой линейных алгебраических уравнений* будем называть систему, которая имеет более одного решения.

Замечание. С точки зрения метода Гаусса неопределенность системы равносильна тому, что в ступенчатом виде есть свободные переменные и нет строк, в которых ведущим элементом является свободный коэффициент.

Определение. *Общим решением неопределенной системы линейных уравнений* будем называть выражение главных переменных через свободные.

Определение. *Частным решением неопределенной системы линейных уравнений* будем называть любое решение СЛАУ.

Задачи:

4. Найдите общее и три частных решения системы, расширенная матрица которой задана в пункте б) задачи 1.

5. Найдите общее и три частных решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

4 Несовместные СЛАУ

Определение. *Несовместной системой линейных алгебраических уравнений* будем называть систему, которая не имеет решений. Остальные СЛАУ называются совместными.

Замечание. С точки зрения метода Гаусса несовместность системы равносильна тому, что в ступенчатом виде соответствующая расширенная матрица системы имеет строку, в которой ведущим элементом является свободный коэффициент.

6. Покажите, что система, расширенная матрица которой задана в пункте в) задачи 1, не имеет решений.

7. Покажите, что следующая система не имеет решений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

5 Матричная единица*

Определение. *Матричной единицей* (обозначение E_{ij}) называется матрица, у которой в i-й строке, j—м столбце стоит единица, а на остальных местах нули.

Задачи:

8. Пусть $A = E_{ij}$, $B = E_{pq}$. Вычислите AB.

9. Пусть A — произвольная матрица. Вычислите $E_{ij}A$.

10. Пусть A — произвольная матрица. Вычислите $(E + \lambda E_{ij})A$, где λ — некое число.

11. Вычислите $(E + 3E_{2,3})(E - E_{3,2})(E + 2E_{1,2})A$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6 ДЗ

1. Проскуряков: 567, 571, 578, 579, 580, 581, 585, 586, 712, 713, 717*.

2. * *Элементарной матрицей* назовём результат применения к единичной матрице одного элементарного преобразования (любого из трёх). Как изменится произвольная матрица, если умножить её на элементарную матрицу слева? А справа?

3. * На какие матрицы и с какой стороны надо умножить матрицы из задачи 1, чтобы результатом умножения матриц был их ступенчатый вид?