

Лекции по математическому анализу (1 курс, 25-26)

github.com/int28t/hse-se-lecture-notes

Эрлих Иван Генрихович

Содержание

1 Информация	3
1.1 Оценка	3
2 Формальная логика	3
2.1 Кванторы	3
2.2 Метод математической индукции	3
2.3 Доказательство от противного	4
2.4 Достаточность и необходимость	4
3 Комбинаторика и Бином Ньютона	5
3.1 Бином Ньютона	5
3.2 Комбинаторика	5
4 Последовательности	5
4.1 Способы задания последовательности	5
4.2 Предел последовательности	6
4.3 Теорема об ограниченности сходящейся последовательности	8
4.4 Арифметика предела	9
4.5 Бесконечно большая и бесконечно малая последовательности	10
4.6 Предельный переход в неравенствах	13
4.7 Теорема о зажатой последовательности	14
4.8 Список хороших пределов	14
5 Действительные числа	15
5.1 Аксиома непрерывности	15
5.2 Теорема Вейерштрасса	16
5.3 Второй замечательный предел	17
5.4 Предел рекуррентно заданных последовательностей	18
5.5 Постоянная Эйлера	18
6 Подпоследовательности	18
6.1 Частичные пределы	19
6.2 Предельные точки	19
6.3 Свойства частичных пределов	19
6.4 Теорема Больцано-Вейерштрасса	20
6.5 Критерий Коши	22

7	Функции	23
7.1	Функция. График функции	23
7.2	Инъекция, сюръекция, биекция	23
7.3	Обратимость функции	23
7.4	Предел функции по Коши	23
7.5	Предел функции по Гейне	23

1 Информация

1.1 Оценка

Тут когда-нибудь появится оценка

2 Формальная логика

Определение

Высказывание – словестное утверждение, про которое можно сказать, истинное оно или ложное.

Обозначение: заглавные латинские буквы: $A, B, C \dots$

Определение

Предикат – высказывание, зависящее от переменной (при этом не являющееся высказыванием)

Пример

$$B(x) : x + 5 = 10$$

2.1 Кванторы

- \forall - всеобщности
- \exists - существования

2.2 Метод математической индукции

$\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ – истинно, если:

- 1) $P(1)$ – истинно (база)
- 2) $\forall n \in \mathbb{N} (P(n) \rightarrow P(n + 1))$ – истинно (шаг)

Пример

Требуется доказать

$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \geq -1 : (1 + x)^n \geq 1 + xn$ – неравенство Бернулли

Докажем с помощью ММИ

$$\underbrace{\forall n \in \mathbb{N} \forall x \geq -1 \underbrace{(1 + x)^n \geq 1 + xn}_{Q(n)}}_{P(n)}$$

- 1) $\forall x \geq -1 (1 + x) \geq 1 + x$ – истина

2) Предположим $(1+x)^{n_0} \geq 1+xn_0$ - истина. Докажем, что $(1+x)^{n_0+1} \geq 1+x(n_0+1)$:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n_0+1} &\geq 1+x(n_0+1) \\(1+x)^{n_0+1} &= (1+x)^{n_0} \underbrace{(1+x)}_{\geq 0} \geq (1+x)(1+xn_0) = \\&= 1+x+xn_0+\underbrace{x^2n_0}_{\geq 0} \geq 1+x+xn_0 = 1+x(n_0+1)\end{aligned}$$

2.3 Доказательство от противного

Обозначения: \bar{A} - отрицание к A

Пример

Доказать, что количество простых чисел бесконечно

Пп (предположим противное). Тогда количество простых чисел конечное число:

$$n_1, \dots, n_k$$

Рассмотрим следующее число:

$$m = n_1 \cdot \dots \cdot n_k + 1, m \in \mathbb{N}, m > n_i \forall i = \overline{1, k} \text{ то есть } m \neq n_i \forall i = \overline{1, k}$$

Следовательно, m - составное. Тогда:

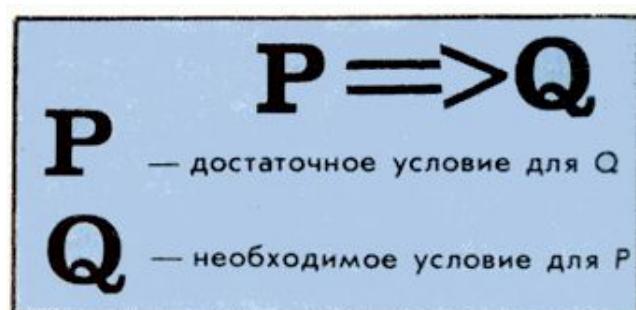
$$m = n_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot n_k^{\alpha_k}$$

$$\exists n_j : m \vdots n_j$$

Но $m = n_1 \cdot \dots \cdot n_k + 1$ и при делении на $n_i \forall i = \overline{1, k}$ дает остаток 1 (\perp)

Утверждение доказано

2.4 Достаточность и необходимость



3 Комбинаторика и Бином Ньютона

3.1 Бином Ньютона

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$$

$$C_n^0 a^0 b^{n-0} + C_n^1 a^1 b^{n-1} + \dots + C_n^n a^n b^{n-n}$$

где C_n^0, C_n^1, \dots - биномиальные коэффициенты

3.2 Комбинаторика

Определение

Перестановка - упорядоченное множество размера n
 $\#$ перестановок $= n!$

Определение

Размещения - упорядоченное подмножество размера k множества размера n
 $\#$ размещений $= \frac{n!}{(n - k)!} = A_n^k$

Определение

Сочетания - неупорядоченное подмножество размера k множества размера n
Одному сочетанию соответствуют $k!$ размещений
$$\frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n - k)!} = C_n^k$$

4 Последовательности

Определение

Последовательность - индексированный набор чисел
 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

4.1 Способы задания последовательности

- 1) Формульный $a_n = n^2 + n - 7$
- 2) Рекуррентный $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Определение

Последовательность называется **ограниченной**, если

$$\exists c \forall n |a_n| \leq c = P(\{a_n\})$$

И **неограниченной**, если

$$\forall c \exists n(c) |a_{n(c)}| > c$$

Пример

$$a_n = \frac{3n^2 + 5n - 2}{2n^2 + n + 1}$$

$$\left| \frac{3n^2 + 5n - 2}{2n^2 + n + 1} \right| \leq \left| \frac{3n^2 + 5n^2}{2n^2} \right| \leq \left| \frac{8n^2}{2n^2} \right| \leq c$$

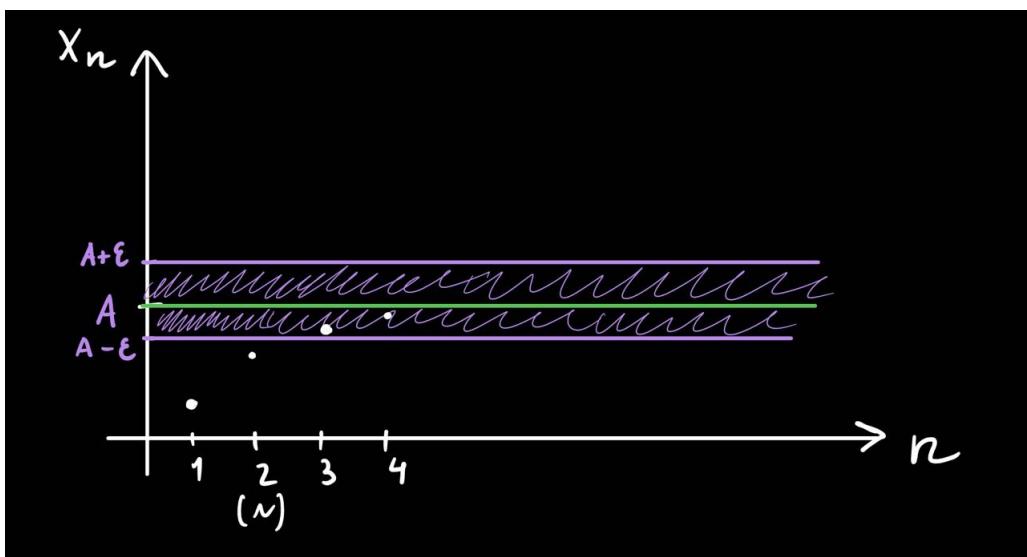
$$4 \leq c$$

$$\exists c = \pi^2 \forall n \left| \frac{3n^2 + 5n - 2}{2n^2 + n + 1} \right| \leq c$$

4.2 Предел последовательности

Определение

Окрестность точки A : $U_\varepsilon(A) = (A - \varepsilon; A + \varepsilon)$



Определение

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N |a_n - A| < \varepsilon$$

⇓

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N -\varepsilon < a_n - A < \varepsilon$$

⇓

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

⇓

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N a_n \in U_\varepsilon(A)$$

Пример

Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} + 1 \right\rceil$$

Определение

Последовательность называется **сходящейся**, если у нее есть предел

\Updownarrow

$$\exists a : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

4.3 Теорема об ограниченности сходящейся последовательности

Теорема

Если последовательность сходящаяся, то она ограничена

Доказательство

Рассмотрим $\{a_n\}$

$$\exists A \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N |a_n - A| < \varepsilon$$

$$\exists A \exists N(1) \in \mathbb{N} \forall n > N(1) |a_n - A| < 1 \Leftrightarrow a_n \in U_1(A)$$

Очевидно, что элементов a_k , где $k \leq N(1)$ конечное число. А для всех элементов a_n , $n > N(1)$ выполняется $|a_n - A| < 1$. Тогда можем взять нижнюю границу $\min\{a_1, \dots, a_{N(1)}, A - 1\}$ и верхнюю $\max\{a_1, \dots, a_{N(1)}, A + 1\}$. \square

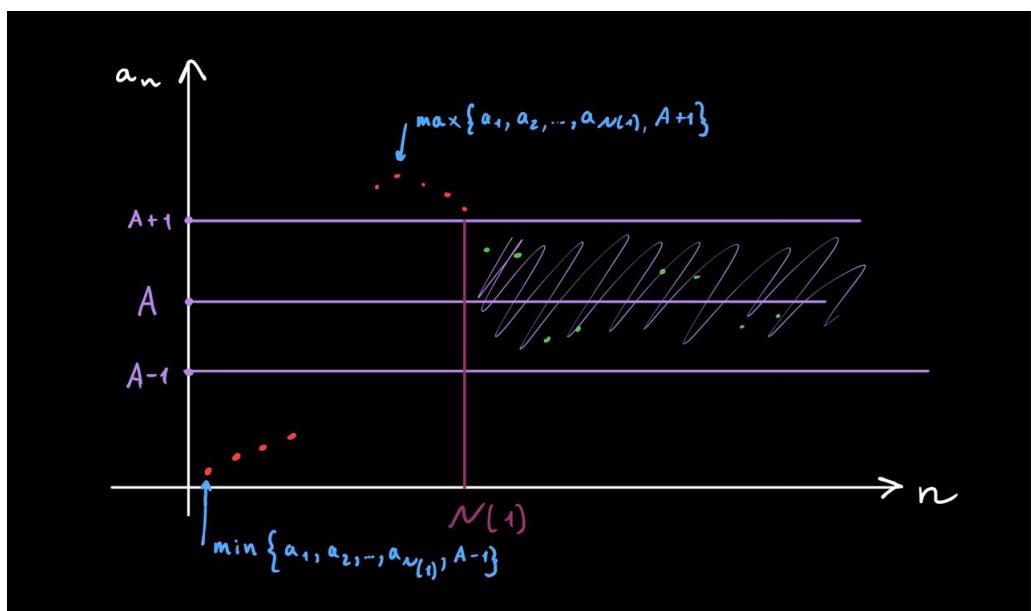


Рис. 1: К доказательству

Теорема

У последовательности может быть только 1 предел

Доказательство

Пп \exists хотя бы 2 $\lim : A$ и B , $A \neq B$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_1(\varepsilon) a_n \in U_\varepsilon(A)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_2(\varepsilon) a_n \in U_\varepsilon(B)$$

Возьмем $\varepsilon_0 = \frac{|A - B|}{3}$ и $n_0 = N_1(\varepsilon_0) + N_2(\varepsilon_0)$

Получаем

$$a_{n_0} \in U_{\varepsilon_0}(A), a_{n_0} \in U_{\varepsilon_0}(B)$$

Но

$$U_{\varepsilon_0}(A) \cap U_{\varepsilon_0}(B) = \emptyset$$

4.4 Арифметика предела

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$, то

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B} \quad (b_n \neq 0; B \neq 0)$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{A} \quad (a_n \geq 0; A \geq 0)$$

Доказательство свойства 1

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_1(\varepsilon) \quad |a_n - A| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_2(\varepsilon) \quad |b_n - B| < \varepsilon$$

Хотим

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_3(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_3(\varepsilon) \quad |(a_n + b_n) - (A + B)| < \varepsilon$$

⇓

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_3(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_3(\varepsilon) \quad |(a_n - A) + (b_n - B)| < \varepsilon$$

↑

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_3(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_3(\varepsilon) \quad \underbrace{|a_n - A|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|b_n - B|}_{< \frac{2\varepsilon}{3}} < \varepsilon$$

$$\forall n > N_1\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) \quad \forall n > N_2\left(\frac{2\varepsilon}{3}\right)$$

$$N_3(\varepsilon) = \max \left\{ N_1\left(\frac{\varepsilon}{3}\right), N_2\left(\frac{2\varepsilon}{3}\right) \right\}$$

Примечание: Доказательства свойств 2 и 3, рассмотренные далее, были выведены после доказательства теоремы о произведении б.м. иogr. последовательностей

Доказательство свойства 2

Хотим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$$

По теореме о связи предела с бесконечно малой последовательностью

$$\alpha_n = (a_n - A) — б.м., \beta_n = (b_n - B) — б.м.$$

Хотим

$$(a_n b_n - AB) — б.м.$$

$$(a_n b_n - AB) = (\alpha_n + A)(\beta_n + B) - AB = \alpha_n \beta_n + \alpha_n B + A \beta_n + AB - AB =$$

$$= \underbrace{\alpha_n \beta_n}_{\text{б.м.}} + \underbrace{\alpha_n B}_{\text{б.м.}} + \underbrace{A}_{\substack{\text{огр} \\ \text{б.м.}}} \underbrace{\beta_n}_{\text{б.м.}} = \text{б.м.} + \text{б.м.} + \text{б.м.} = \text{б.м.}$$

□

Доказательство свойства 3

Хотим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B} \quad (b_n \neq 0; B \neq 0)$$

По теореме о связи предела с бесконечно малой последовательностью

$$\alpha_n = (a_n - A) - \text{б.м.}, \beta_n = (b_n - B) - \text{б.м.}$$

Хотим

$$\begin{aligned} & \frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} - \text{б.м.} \\ & \frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} = \frac{\alpha_n + A}{\beta_n + B} - \frac{A}{B} = \frac{(\alpha_n + A)B - A(\beta_n + B)}{(\beta_n + B)B} = \\ & = \frac{(\alpha_n + A)B - A(\beta_n + B)}{(\beta_n + B)B} = \frac{\alpha_n B + AB - A\beta_n - AB}{b_n B} = \frac{\alpha_n B - A\beta_n}{b_n B} = \\ & = \underbrace{\frac{1}{b_n} \cdot \frac{1}{B} \cdot (\alpha_n B - A\beta_n)}_{\substack{\text{огр} \cdot \text{огр}}} = \text{б.м.} \end{aligned}$$

□

4.5 Бесконечно большая и бесконечно малая последовательности

Определение

Бесконечно малой (б.м.) последовательностью называют последовательность $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ такую что, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Определение

Бесконечно большой (б.б.) последовательностью называют последовательность $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ такую что, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$

$$\forall M > 0 \exists N(M) \in \mathbb{N} \forall n > N(M) |b_n| > M$$

$$b_n > M \quad (+\infty)$$

$$b_n < M \quad (-\infty)$$

Теорема

$$\frac{1}{b.b.} = \text{б.м.}$$

Доказательство

Пусть b_n - б.б. Тогда

$$\forall M > 0 \exists N_1(M) \in \mathbb{N} \forall n > N_1(M) |b_n| > M$$

Хотим $a_n = \frac{1}{b_n}$ - б.м.:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \forall n > N_2(\varepsilon) |a_n| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{1}{b_n} \right| < \varepsilon$$

$$|b_n| > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\text{Возьмем } N_2(\varepsilon) = N_1 \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) + 1$$

□

Теорема

$$\text{б.м.} \cdot \text{огр.} = \text{б.м.}$$

Доказательство

Хотим $a_n \cdot b_n = c_n$, где a_n, c_n - б.м., b_n - огр.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_1(\varepsilon) |a_n| < \varepsilon$$

$$\exists c \forall n \in \mathbb{N} |b_n| \leq c$$

Хотим:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_2(\varepsilon) |a_n \cdot b_n| < \varepsilon$$

↑

$$|a_n| \cdot |b_n| < \varepsilon$$

$$|a_n| \cdot c < \varepsilon$$

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{c}$$

$$\text{Возьмем } N_2(\varepsilon) = N_1 \left(\frac{\varepsilon}{c} \right)$$

□

Пример

б.б. + б.б.

Мы точно не можем сказать, чем будет являться эта сумма. Например $n + (-n) = 0$ и $n + n = 2n$

Пример

б.б. + огр. = б.б.

Покажем, что это так

Хотим: $b_n + c_n = u_n$ соответственно. Тогда:

$$\forall M > 0 \exists N(M) \in \mathbb{N} \forall n > N(M) |b_n| > M$$

$$\exists C > 0 \forall n \in \mathbb{N} |c_n| \leq C$$

Хотим:

$$\forall K > 0 \exists N_2(K) \in \mathbb{N} \forall n > N_2(K) |b_n + c_n| > K$$

Так, как $|x + y| \geq |x| - |y|$:

$$|b_n| - |c_n| > K$$

$$|b_n| - C > K$$

$$|b_n| > K + C$$

Возьмем $N_2(K) = N(K + C)$

Теорема

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \Leftrightarrow (a_n - A) = \alpha_n \text{ - бесконечно малая}$$

Доказательство

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_1(\varepsilon) |a_n - A| < \varepsilon$$

Хотим

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_2(\varepsilon) |(a_n - A) - 0| < \varepsilon$$

$$N_2(\varepsilon) = N_1(\varepsilon)$$

□

Примечание

Теперь можно спокойно доказать свойство 2) из арифметики пределов

Примечание

Произведение бесконечно малых - бесконечно малая последовательность. Так как можно представить одну из них как ограниченную и использовать теорему выше

Определение

Назовем последовательность d_n **отделимой от нуля**, если:

$$\exists \delta > 0 \forall n \in \mathbb{N} |d_n| \geq \delta$$

Пример

$$(-1)^n$$

Теорема

$\frac{1}{\text{огр}} = \text{отделима от нуля}, \frac{1}{\text{отделима от нуля}} = \text{огр}$

Доказательство

$$\exists \delta > 0 \forall n \in \mathbb{N} |d_n| \geq \delta$$

$$u_n = \frac{1}{d_n}, \exists c > 0 \forall n \in \mathbb{N} |u_n| \leq c$$

$$\begin{aligned} &\Updownarrow \\ &\left| \frac{1}{d_n} \right| \leq c \\ &\Updownarrow \\ &|d_n| \geq \frac{1}{c} \end{aligned}$$

Возьмем $c = \frac{1}{\delta}$. Тогда $|d_n| \geq \delta$ верно $\forall n \in \mathbb{N}$

□

Теорема

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = U; u_n, U \neq 0$, то u_n отделима от нуля

Доказательство

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N(\varepsilon) |u_n - U| < \varepsilon$$

Хотим

$$\exists \delta > 0 \forall n \in \mathbb{N} |u_n| \geq \delta$$

$$\text{Возьмем } \varepsilon_0 = \frac{|U|}{2}$$

$$\exists N_0 = N \left(\frac{|U|}{2} \right) = N(\varepsilon_0)$$

$$\forall n > N_0 u_n \in U_{\frac{|U|}{2}}(U)$$

Очевидно, что существует конечное число $u_k, k \leq N(\varepsilon_0)$, причем $u_k \neq 0$

$$\text{Возьмем } \delta = \min\{|u_1|, |u_2|, \dots, \frac{|U|}{2}\}$$

□

4.6 Предельный переход в неравенствах

Теорема

Если $\exists N_0 \forall n > N_0 a_n > b_n$ и $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} A$ и $b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} B$, то $A \geq B$

Доказательство

Пп $A < B$. Возьмем $\varepsilon_0 = \frac{B - A}{2}$

$$\exists N_1(\varepsilon_0) \forall n > N_1(\varepsilon_0) a_n \in U_{\varepsilon_0}(A)$$

$$\exists N_2(\varepsilon_0) \forall n > N_2(\varepsilon_0) b_n \in U_{\varepsilon_0}(B)$$

Возьмем $n_0 = N_1(\varepsilon_0) + N_2(\varepsilon_0) + N_0$. Тогда по условию $a_{n_0} > b_{n_0}$, но также $a_{n_0} < b_{n_0}$ (так как окрестность a по предположению левее окрестности b). Получили противоречие \square

4.7 Теорема о зажатой последовательности

Теорема о зажатой последовательности

Если $\exists N_0 \forall n > N_0 a_n \leq c_n \leq d_n$, а также $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$ и $d_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$, то $c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$

Доказательство

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A; \forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \forall n > N_1(\varepsilon) A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

$$d_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A; \forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \forall n > N_2(\varepsilon) A - \varepsilon < d_n < A + \varepsilon$$

Хотим

$$c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A; \forall \varepsilon > 0 \exists N_3(\varepsilon) \forall n > N_3(\varepsilon) A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon$$

Получаем

$$\underbrace{A - \varepsilon < a_n}_{\forall n > N_1(\varepsilon)} \leq \underbrace{c_n}_{\forall n > N_0} \leq \underbrace{d_n}_{\forall n > N_2(\varepsilon)} < \underbrace{A + \varepsilon}_{\forall n > N_2(\varepsilon)}$$

Возьмем $N_3(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon), N_0\}$ \square

4.8 Список хороших пределов

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, |q| < 1$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty, |q| > 1$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, a > 0$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^a}{b^n} = 0$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^n}{n!} = 0$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^a} = 0, a > 0$$

5 Действительные числа

Определение

Множество **действительных чисел** - это четверка $(\mathbb{R}; +; \times; \leq)$ (множество, 2 операции, 1 отношение)

Примечание

Отличие операции от отношения. Для того чтобы задать операцию, нужно поставить в соответствие для каждой пары чисел число $(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$. В отношении для каждой пары чисел нужно поставить в соответствие 0 или 1 $(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\})$.

5.1 Аксиома непрерывности

$$A, B \subset \mathbb{R}$$

- 1) $A, B \neq \emptyset$
- 2) $\forall x \in A \ \forall y \in B \ x \leq y$

Тогда $\exists \xi \in \mathbb{R} : \forall x \in A \ \forall y \in B \ x \leq \xi \leq y$

Определение

Верхней гранью множества $A \subset \mathbb{R}$ называется число $C \in \mathbb{R}$, такое что $\forall x \in A \ x \leq C$

Определение

Точной верхней гранью ($\sup A$) ограниченного сверху множества A называют наименьшую верхнюю грань множества A

Определение

Нижней гранью множества $A \subset \mathbb{R}$ называется число $D \in \mathbb{R}$, такое что $\forall x \in A \ x \geq D$

Определение

Точной нижней гранью ($\inf A$) ограниченного снизу множества A называют наибольшую нижнюю грань множества A

Пример

$A = (-1; 0)$. Множество верхних граней: $[0; +\infty)$, $\sup A = 0$

Теорема

У ограниченного сверху множества есть точная верхняя грань

Доказательство

$$\left. \begin{array}{l} A - \text{огр. сверху}, A \neq \emptyset \\ B = \{\text{верхние грани } A\}, B \neq \emptyset \\ \forall x \in A \ \forall y \in B \ x \leq y \end{array} \right] \exists \xi \in \mathbb{R} : \forall x \in A \ \forall y \in B \ x \leq \xi \leq y$$

1) Из $x \leq \xi$ получаем, что ξ - верхняя грань $A \Rightarrow \xi \in B$

2) Так, как $\xi \leq y$, то ξ - минимальный элемент из B . $\boxed{\xi = \sup A}$

□

Определение

Точной верхней гранью неограниченного сверху множества назовем $+\infty$

5.2 Теорема Вейерштрасса

Определение

$\{a_n\}$ - неубывает, если $a_{n+1} \geq a_n$

Определение

$\{a_n\}$ - возрастает, если $a_{n+1} > a_n$

Пример (3-й способ доказательства монотонности)

Доказать, что последовательность $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ строго возрастает

Необходимо доказать: $\forall n a_{n+1} > a_n$

$$\begin{aligned} 1 < \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \\ &= \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \end{aligned}$$

По неравенству Бернулли $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \geq -1 \ (1+x)^n \geq 1+xn}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) &= \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \\ &= \left(1 + \underbrace{\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right)}_{\geq -1}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \geq \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \\ &= \frac{(n^2+n+1)(n+2)}{(n+1)^3} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1 \end{aligned}$$

Теорема Вейерштрасса

Если $\{a_n\}$ неубывает и ограничена сверху, то она сходится

Доказательство

$\{a_n\} = A \neq \emptyset$, огр. сверху

$\exists \sup \{a_n\} = A \in \mathbb{R}$

Хотим доказать: $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon) \underbrace{|a_n - A|}_{\leq 0} < \varepsilon$$

$$A - a_n < \varepsilon$$

$$a_n > A - \varepsilon \Leftrightarrow a_{N(\varepsilon)+1} > A - \varepsilon$$

Тогда докажем:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} a_{N(\varepsilon)+1} > A - \varepsilon$$

Пп

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall N \in \mathbb{N} a_{N+1} \leq A - \varepsilon_0$$

\Updownarrow

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall n \in \mathbb{N} a_n \leq A - \varepsilon_0$$

Получаем, что самая маленькая верхняя граница $= A - \varepsilon_0$, но $\sup a_n = A$. $\perp \square$

Контрпример (Если $\{a_n\}$ сходится, то необязательно она неубывает)

$$a_n = \frac{\sin n}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

5.3 Второй замечательный предел

Теорема о втором замечательном пределе

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Доказательство

Ранее мы доказали, что данная последовательность неубывает.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \left(\frac{1}{n} + 1\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n-k} = \\ &= 1 + \frac{n!}{(n-1)! 1!} \cdot \frac{1}{n} + \dots + \frac{n!}{(n-k)! k!} \cdot \frac{1}{n^k} + \dots = \\ &= 1 + 1 + \dots + \underbrace{\frac{n}{n}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\leq 1} \cdot \dots \cdot \underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{\leq 1} \cdot \frac{1}{k!} + \dots < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

Напоминение о телескопических суммах:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Хотим получить нечто похожее, тогда выкинем из каждого знаменателя все множители, кроме последних двух:

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \underset{n \geq 4}{\underbrace{<}} 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) < 3$$

□

Следствие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{kn}\right)^n = e^{\frac{1}{k}}$$

Доказательство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{kn}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{kn}\right)^{nk}\right)^{\frac{1}{k}}$$

$\left(1 + \frac{1}{kn}\right)^{nk}$ — подпоследовательность $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Значит, она тоже сходится к e .
Получаем:

$$\left(\left(1 + \frac{1}{kn}\right)^{nk}\right)^{\frac{1}{k}} = e^{\frac{1}{k}}$$

□

5.4 Предел рекуррентно заданных последовательностей

Для того чтобы найти пример рекуррентно заданных последовательностей

Шаг 1: Проверить, что последовательность сходится (можно пытаться делать через теорему Вейерштрасса или критерий Коши)

Шаг 2: Найти предел используя арифметику пределов

5.5 Постоянная Эйлера

6 Подпоследовательности

Определение

Подпоследовательностью последовательности $\{a_n\}$ называется последовательность $\{b_k\}$, такая что $b_k = a_{n_k}$, где n_k — строго возрастающая последовательность номеров (\mathbb{N})

Замечание

$$n_k \geq k$$

Пример

$$\begin{aligned}a_n &= \sin \frac{\pi n}{2} \\b_k &= a_{4k} = \sin 2\pi k \equiv 0 \\c_k &= a_{4k-1} = \sin \frac{\pi(4k-1)}{2} \equiv -1 \\d_k &= a_{2k+1} = \sin \frac{\pi(2k+1)}{2} = (-1)^k\end{aligned}$$

6.1 Частичные пределы

Определение

Частичный предел последовательности - предел подпоследовательности

Примечание

У какой (ограниченной) последовательности бесконечное число частичных пределов?

6.2 Пределевые точки

6.3 Свойства частичных пределов

6.4 Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема

Если $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$, то $\forall n_k b_k = a_{n_k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$

Доказательство

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon) |a_n - A| < \varepsilon$$

Хотим

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K(\varepsilon) \forall k > k(\varepsilon) |a_{n_k} - A| < \varepsilon$$

Возьмем $K(\varepsilon) = N(\varepsilon)$

$$\left. \begin{array}{l} \forall k > N(\varepsilon) \\ \text{т.к } n_k \geq k \end{array} \right] \Rightarrow n_k > N(\varepsilon). \text{ Тогда } |a_{n_k} - A| < \varepsilon \text{ истина}$$

□

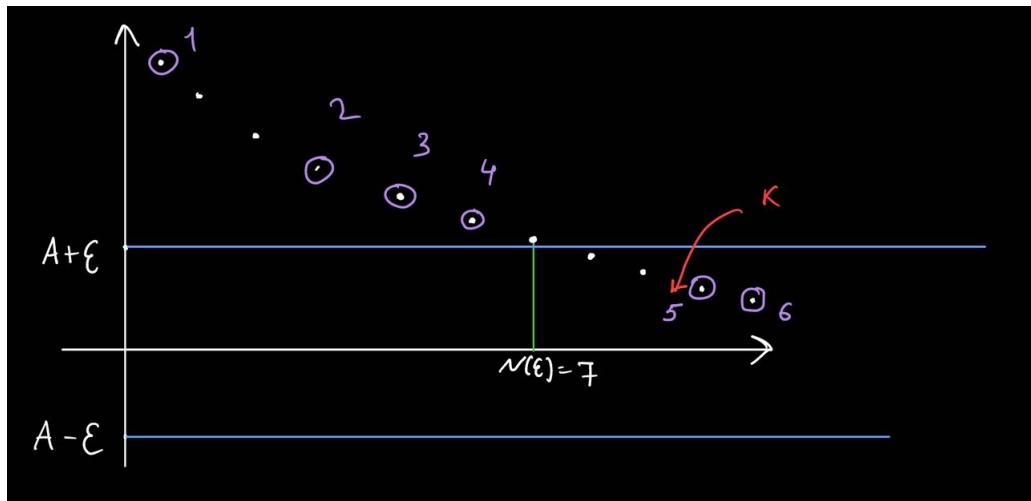


Рис. 2: К теореме

Теорема Больцано-Вейерштрасса

Если последовательность ограничена, то у нее есть сходящаяся подпоследовательность

c_n – огран. Докажем что у нее есть сходящаяся подпоследовательность

$$A = \inf\{c_n\}$$

$$B = \sup\{c_n\}$$

$$A, B \in \mathbb{R}$$

Рассмотрим отрезок $[a_1, b_1] = [A, B]$

Шаг 1: разделим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам. В какой-то половине (одной или обеих) лежит бесконечное число членов c_n . Выберем в качестве $[a_2, b_2]$ эту половинку (если в обеих бесконечное число, то любую)

Шаг 2: ...

Получаем некоторую последовательность подотрезков $\{[a_k, b_k]\}_{k \in \mathbb{N}}$

На первом шаге выберем какой-то член $c_n \in [a_1, b_1]$. Его номер возьмем в качестве n_1
 \exists член последовательности $\in [a_2, b_2]$ такой, что его номер $> n_1$ (Это следует из того, что на каждом шаге мы выбираем отрезок, содержащий бесконечное число членов). Его возьмем в качестве n_2

...

Таким образом, параллельно строя последовательность отрезков, мы построили подпоследовательность $\{C_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$

Рассмотрим $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Она неубывает, ограничена сверху B .

По т. Вейерштрасса: $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = A'$

$\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Она невозрастает, ограничена снизу A .

По т. Вейерштрасса: $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = B'$

На каждом шаге мы вдвое уменьшаем длину отрезка. Выпишем общую формулу:

$$b_k - a_k = \frac{B - A}{2^{k-1}}, \text{ для строгости необходимо доказать по индукции}$$

Также по арифметике пределов сходящихся последовательностей b_k, a_k ($b_k \rightarrow B', a_k \rightarrow A'$), их разность стремится к $B' - A'$ при $k \rightarrow \infty$

$$\frac{B - A}{2^{k-1}} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty \Rightarrow B' - A' = 0 \Rightarrow B' = A'$$

Получаем, что у a_k и b_k один и тот же предел

Заметим, что $a_k \leq c_{n_k} \leq b_k \forall k \in \mathbb{N}$. По теореме о сходящейся последовательности: $a_k \rightarrow A', b_k \rightarrow B', A' = B'$ при $k \rightarrow \infty$. Следовательно: $\lim_{k \rightarrow \infty} c_{n_k} = A' = B'$ \square

Пример

$$c_n = (-1)^n$$

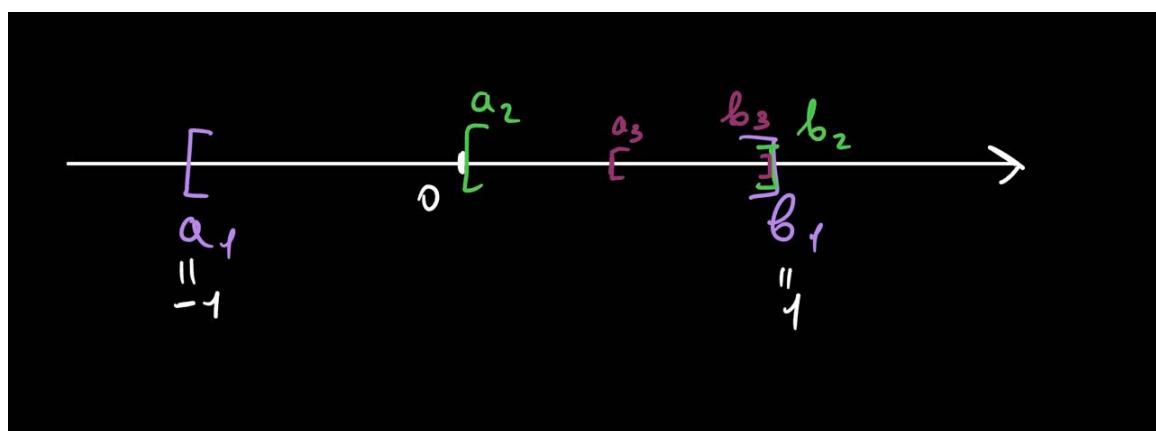


Рис. 3: К примеру

6.5 Критерий Коши

Определение

Последовательность a_n называется фундаментальной, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n, m > N(\varepsilon) |a_n - a_m| < \varepsilon$$

\Updownarrow

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N(\varepsilon) \forall k \in \mathbb{N} |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$$

Теорема о критерии Коши

Последовательность a_n сходится \Leftrightarrow последовательность a_n фундаментальна

Доказательство

(\Rightarrow):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_1(\varepsilon) |a_n - A| < \varepsilon$$

Хотим:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n, m > N_2(\varepsilon) |a_n - a_m| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n, m > N_2(\varepsilon) |(a_n - A) + (A - a_m)| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n, m > N_2(\varepsilon) \underbrace{|a_n - A|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_m - A|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

Это выполняется $\forall n > N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ и $\forall m > N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$

$$\text{Возьмем } N_2(\varepsilon) = N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

(\Leftarrow):

1) Фундаментальные последовательности ограниченны

Возьмем $\varepsilon_0 = 1, N(1)$

$$\forall n, m > N(1) |a_n - a_m| < 1$$

Возьмем $m_0 = N(1) + 1$

$$\forall n > N(1), a_n \in U_1(a_{m_0})$$

□

//TODO рисунок к 1 части

2) По теореме Больцано-Вейерштрасса:

$$\exists a_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} A$$

Доказать:

$$a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} A$$

Имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \forall n, m > N_1(\varepsilon) |a_n - a_m| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K(\varepsilon) \forall k > K(\varepsilon) |a_{n_k} - A| < \varepsilon$$

Хотим:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \forall n > N_2(\varepsilon) |a_n - A| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \forall n > N_2(\varepsilon) \underbrace{|a_n - a_{n_k}|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_{n_k} - A|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

Это выполнено $\forall k > K\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ и $n, n_k > N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$

Так как $n_k \geq k$, потребуем $n, k > N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$

Изначально мы прибавили и вычли $a_{n_k}, k > \max\{N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), K\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\}$

k — вспомогательный аргумент, которого изначально не было (требовалось только показать существование). Поэтому при предъявлении $N_2(\varepsilon)$ мы не будем использовать вспомогательное $K(\varepsilon)$

Возьмем $N_2(\varepsilon) = N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$

□

7 Функции

7.1 Функция. График функции

7.2 Инъекция, сюръекция, биекция

7.3 Обратимость функции

7.4 Предел функции по Коши

7.5 Предел функции по Гейне