

Лекции по алгебре (1 курс, 25-26)

github.com/int28t/hse-se-lecture-notes

Михайлец Екатерина Викторовна
emihaylets@hse.ru
ТГК: t.me/alg_pi_25_26

Содержание

1	Матрицы	2
1.1	Свойства сложения матриц	2
1.2	Свойства умножения на число	3
1.3	Умножение матриц	3
1.4	Свойства умножения матриц	3
2	Перестановки (Подстановки)	4
3	Определитель	6
3.1	Свойства определителей	6

1 Матрицы

Матрицей размера/типа/порядка $n \times m$ называется упорядоченная таблица с m строками и n столбцами.

Обозначение:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

i - строка, j - столбец

$M_{mn}(\mathbb{R})$ - множество всех матриц размера $m \times n$ с вещественными элементами

1) При $m = n$ матрица называется квадратной порядка n

2) При $m = 1$ матрица $1 \times n$ - n -мерная строка

При $n = 1$ матрица $m \times 1$ - m -мерный столбец

Матрица 1×1 - число

3) Матрица состоящая из нулей (т.е. $a_{ij} = 0 \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) называется нулевой матрицей. **Обозначение:** \mathbb{O}

4) Будем называть единичной квадратную матрицу порядка n , если:

$$a_{ij} = \underbrace{\delta_{ij}}_{\text{Символ Кронекера}} = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases}$$

Обозначение:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Определение: Две матрицы a и b называются равными если они одного размера и соответствующие элементы равны (т.е. $a_{ij} = b_{ij} \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$)

Определение: Матрица C называется суммой матриц A и B если все матрицы A , B и C одинакового размера и $c_{ij} = b_{ij} + a_{ij}, \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$

Обозначение: $C = A + B$

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1 Свойства сложения матриц

1. Коммутативность ($A + B = B + A$)

□ Поэлементно: $[A+B]_{ij} \underbrace{=}_{\text{по определению сложения}} [A]_{ij} + [B]_{ij} \underbrace{=}_{\text{Вещественные числа коммутативны}} [B]_{ij} +$

$[A]_{ij} \underbrace{=}_{\text{по определению сложения}} [B+A]_{ij} \blacksquare$

2. Ассоциативность ($(A + B) + C = A + (B + C)$)

3. \exists нейтральный элемент по сложению т.е. \exists матрица $\mathbb{O} \in M_{mn}(\mathbb{R}) \forall A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ выполняется $\mathbb{O} + A = A + \mathbb{O} = A$

□ $[\mathbb{O}]_{ij} = 0$ - нулевая матрица \blacksquare

4. \forall матрицы $A \in M_{mn}(\mathbb{R}) \exists B \in M_{mn}(\mathbb{R}) : A + B = B + A = \mathbb{O}$ - нулевая матрица

□ $B_{ij} = -A_{ij} \blacksquare$

Обозначение: $B = -A$ – Обратная по сложению к A или противоположная

Определение: Матрица C называется произведением числа $\lambda \in \mathbb{R}$ и матрицы A , если матрицы C и A одинакового размера и $[C]_{ij} = \lambda * [A]_{ij} \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$

Обозначение: $C = \lambda * A$

Пример:

$$2 * \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Определение: Разностью матриц A и B называется сумма A и $-B$

1.2 Свойства умножения на число

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : (\lambda * \mu) * A = \lambda * (\mu * A)$ – ассоциативность относительно умножения на число

$(\lambda + \mu) * A = \lambda * A + \mu * A$ – дистрибутивность относительно умножения чисел

$\lambda * (A + B) = \lambda * A + \lambda * B$ – дистрибутивность относительно сложения матриц

Это место стоит перепроверить (!!!)

$1 * A = A$ – унарность

1.3 Умножение матриц

Рассмотрим $A_{m \times n} \in M_{mn}(\mathbb{R}), B_{n \times k} \in M_{nk}(\mathbb{R})$:

Определение: Произведением матрицы $A_{m \times n}$ и $B_{n \times k}$ (число столбцов в A равно числу строк в B) называется C_{mk} где:

$$C_{ij} = \sum_{q=1}^n a_{iq} * b_{qj}$$

$$(C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} \quad \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, k})$$

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{3 \times 2} * \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}_{2 \times 1} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}_{3 \times 1}$$

1.4 Свойства умножения матриц

1. Ассоциативность Пусть $A_{m \times n}, B_{n \times k}, C_{k \times l}$. Тогда $(A * B) * C = A * (B * C)$

$$\begin{aligned} \square [(A * B) * C]_{ij} &= \sum_{r=1}^k [A * B]_{ir} * [C]_{rj} = \sum_{r=1}^k \left(\sum_{s=1}^n [A]_{is} * [B]_{sr} \right) * [C]_{rj} = \sum_{r=1}^k \sum_{s=1}^n [A]_{is} * \\ & [B]_{sr} * [C]_{rj} \quad \underbrace{=}_{\text{перегруппируем слагаемые}} \sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^k [A]_{is} * [B]_{sr} * [C]_{rj} = \sum_{s=1}^n [A]_{is} * \left(\sum_{r=1}^k [B]_{sr} * [C]_{rj} \right) = \\ & \sum_{s=1}^n [A]_{is} * [B * C]_{sj} \quad \underbrace{=}_{\text{по определению умножения}} = A * (B * C) \blacksquare \end{aligned}$$

2. \exists Нейтрального элемента по умножению (для квадратных матриц) \exists матрица $E \in M_n(\mathbb{R}) : \forall A \in M_n(\mathbb{R}) E * A = A * E = A$

\square Предъявим единичную матрицу

$$[E]_{ij} = \delta_j^i$$

$$[A * E]_{ij} = \sum_{r=1}^n [A]_{ir} * [E]_{rj} = \sum_{r=1}^n [A]_{ir} * \delta_j^r = 0 + \dots + [A]_{ij} + \dots + 0 = [A]_{ij} \quad \forall i, j = \overline{1, n}$$

$E * A$ аналогично \blacksquare

3. $A * \mathbb{O} = \mathbb{O} * A = \mathbb{O}$ Для квадратных A и \mathbb{O} порядка n

Рассмотрим: $(A + B) * C = A * C + B * C$ – дистрибутивность умножения матриц

Замечание: Вообще говоря умножение матриц некоммутативно (даже для квадратных)

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2 Перестановки (Подстановки)

Определение: Перестановкой чисел $1, \dots, n$ называется расположение их в определённом порядке.

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

Пример:

$$\alpha = (5, 3, 4, 1, 2)$$

Определение: α_i и α_j образуют инверсию в перестановке если $\alpha_i > \alpha_j$, но $i < j$

Определение: Знак перестановки это $(-1)^n$, где n – число инверсий в перестановке

Обозначение: $sgn(\alpha)$

Пример:

$$\alpha = \underbrace{(4 \ 5 \ 1 \ 3 \ 6 \ 2)}_{3+3+0+1+1+0}$$

$$sgn(\alpha) = 1$$

Определение: Если $sgn(\alpha) = 1$ то α – чётная перестановка, если $sgn(\alpha) = -1$ то α – нечётная перестановка

Определение: Транспозицией называется преобразование при котором в α меняются местами только α_i и α_j , а остальные элементы не меняются

Утверждение: Каждая транспозиция меняет чётность перестановки

□ а) Транспозиция соседних элементов:

$$\alpha_1, \dots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n$$

↓

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{i+1}, \alpha_i, \dots, \alpha_n$$

⇒ Число инверсий изменилось на 1 ⇒ знак перестановки поменялся

б)

$$\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_{i+k}, \dots, \alpha_n$$

Меняем $\alpha_i \leftrightarrow \alpha_{i+k}$ с $k-1$ соседних транспозиций

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{i+k}, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n$$

⇒ $k + k - 1 = 2k - 1$ шагов (соседних транспозиций)

⇒ Знак перестановки поменяется ■

Определение: Подстановка

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \delta(1) & \delta(2) & \dots & \delta(n) \end{pmatrix}$$

– отображение чисел в себя являющееся взаимно-однозначным

Нижняя строка – перестановка

Пример:

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$sgn(\delta) = 1$ $\delta(2) = 2$ - стационарный элемент

Определение: Знаком подстановки называется знак перестановки в её нижней строке

Обозначение: S_n - множество подстановок длины n

$|S_n| = n!$ число элементов и мощность множества

Замечание: Транспозиция - нечётная подстановка (в которой α_i и α_j переходят друг в друга, а остальные элементы неподвижны)

Замечание: Часто используют запись подстановок «в циклах», и каждый элемент выписывается справа

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1 \ 4 \ 3) * \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}}_{\text{можно не писать}} = (1 \ 4 \ 3)$$

Циклическая запись транспозиции: (α_i, α_j)

Определение:

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} = (1)(2)(3)\dots(n) = Id$$

называется тождественной подстановкой

Обозначение: Id (id)

Определение: Умножением подстановок называется их последовательное применение (т.е. композиция отображений)

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(умножая слева направо)

В циклах: $(12) * (132) = (1)(23) = (23)$

Замечание: Умножение подстановок некоммукативно

Пример: $(132)(12) = (13) \neq (23)$

Замечание: Id - нейтральный элемент по умножению

Замечание: Подстановку обратную к

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \delta(1) & \delta(2) & \delta(3) & \dots & \delta(n) \end{pmatrix}$$

можно получить как

$$\delta^{-1} = \begin{pmatrix} \delta(1) & \delta(2) & \delta(3) & \dots & \delta(n) \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

и отсортировав столбцы

$$\Rightarrow \delta * \delta^{-1} = \delta^{-1} * \delta = Id$$

Пример:

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\delta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Замечание: \forall Подстановку можно представить как произведение транспозиций

□ Запишем подстановку в циклах $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = (\alpha_k, \alpha_{k-1})(\alpha_{k-1}, \alpha_{k-2}) \dots (\alpha_2, \alpha_1)$

- произведение $k - 1$ транспозиций слева направо ■

Замечание: $sgn(\delta_1 * \delta_2) = sgn(\delta_1) * sgn(\delta_2)$

3 Определитель

Определение Определителем или детерминантом квадратной матрицы A порядка n называется сумма $n!$ слагаемых следующего вида:

$$\det A = \sum_{\delta \in S_n} \operatorname{sgn}(\delta) * a_{1\delta(1)} * a_{2\delta(2)} * a_{3\delta(3)} * \dots * a_{n\delta(n)}, \text{ где}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

и

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \delta(1) & \delta(2) & \delta(3) & \dots & \delta(n) \end{pmatrix}$$

Обозначение: $\det A$ или $|A|$

Замечание: По сути $\det A$ является суммой произведений элементов матрицы по одному из каждой строки и столбца (стоящие в разных строках и столбцах по всем способам так сделать (с учётом знака))

Пример: $n = 2 \Rightarrow n! = 2! = 2$

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = Id$$

$$\delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} * a_{22} - a_{21} * a_{12}$$

Пример: $n = 3 \Rightarrow n! = 3! = 6$

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right]$$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{22}a_{23}a_{11} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} -$$

Правило Саррюса

(Диагонали \searrow идут с плюсом, диагонали с \nearrow с минусом)

3.1 Свойства определителей

№1 $\det A = \det A^T$ (\Rightarrow Все свойства \det верные для строк матрицы справедливы и для столбцов)

$\square B = A^T, b_{ij} = a_{ji}$ Переставим $b_{i\delta_i}$ по возрастанию номеров столбцов

$$\det B = \sum_{\delta \in S_n} \operatorname{sgn}(\delta) * b_{1\delta(1)} * b_{2\delta(2)} * \dots * b_{n\delta(n)} =$$

Используем:

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \delta(1) & \delta(2) & \dots & \delta(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta(1)^{-1} & \delta(2)^{-1} & \dots & \delta(n)^{-1} \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{sgn}(\delta^{-1}) = \operatorname{sgn}(\delta) \text{ так как } \operatorname{sgn}(\delta * \delta^{-1}) = \operatorname{sgn}(\delta) * \operatorname{sgn}(\delta^{-1}) = 1$$

$$= \sum_{\delta \in S_n} \text{sgn}(\delta^{-1}) b_{\delta^{-1}(1)1} b_{\delta^{-1}(2)2} * \dots * b_{\delta^{-1}(n)n} = \sum_{\delta \in S_n} \text{sgn}(\delta^{-1}) * a_{1\delta^{-1}(1)} * a_{2\delta^{-1}(2)} * \dots * a_{n\delta^{-1}(n)}$$

Переименуем $\tau = \delta^{-1}$

$$= \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\tau) * a_{1\tau_1} * \dots * a_{n\tau_n} = \det A \blacksquare$$

№2 Определитель линеен по строкам и столбцам т.е. пусть $A = (A_1, \dots, A_n)$ – матрица как набор строк

Тогда:

$$\text{а) } \det(A_1, \dots, A'_i + A''_i, \dots, A_n) = \det(A_1, \dots, A'_i, \dots, A_n) + \det(A_1, \dots, A''_i, \dots, A_n)$$

$$\text{б) } \det(A_1, \dots, \alpha * A_i, \dots, A_n) = \alpha * \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_n)$$

Пример:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3+x \\ 2 & 7+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & x \end{vmatrix} = (1*7 - 3*2) + x * \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - x$$