

Лекции по математическому анализу (1 курс, 25-26)

github.com/int28t/hse-se-lecture-notes

Эрлих Иван Генрихович

Содержание

1 Информация о курсе	3
1.1 Оценка	3
2 Основы логики и комбинаторика	3
2.1 Логические операции и методы доказательств	3
2.1.1 Кванторы	3
2.1.2 Метод математической индукции	3
2.1.3 Доказательство от противного	4
2.1.4 Достаточность и необходимость	4
2.2 Комбинаторика и Бином Ньютона	5
2.2.1 Бином Ньютона	5
2.2.2 Комбинаторика	5
3 Последовательности	6
3.1 Основные понятия и предел последовательности	6
3.1.1 Способы задания последовательности	6
3.1.2 Предел последовательности	7
3.1.3 Теорема об ограниченности сходящейся последовательности	9
3.1.4 Арифметика предела	10
3.1.5 Бесконечно большая и бесконечно малая последовательности	11
3.1.6 Предельный переход в неравенствах	14
3.1.7 Теорема о зажатой последовательности	14
3.1.8 Bonus: Список хороших пределов	15
3.2 Действительные числа	16
3.2.1 Аксиома непрерывности	16
3.2.2 Теорема Вейерштрасса	17
3.3 Число e и постоянная Эйлера	19
3.3.1 Число e	19
3.3.2 Постоянная Эйлера	21
3.4 Предел рекуррентно заданных последовательностей	24
3.5 Доказательства стандартных сходимостей	24
3.6 Подпоследовательности	28
3.6.1 Частичные пределы	28
3.6.2 Предельные точки	28
3.6.3 Свойства частичных пределов	29
3.6.4 Теорема Больцано-Вейерштрасса	29
3.6.5 Критерий Коши	31

4 Функции	33
4.1 Понятия функции и ее предела	33
4.1.1 Функция. График функции	33
4.1.2 Инъекция, сюръекция, биекция	33
4.1.3 Обратимость функции	33
4.1.4 Предел функции по Коши	34
4.1.5 Предел функции по Гейне	35
4.1.6 Арифметика предела функции	36
4.1.7 Теорема о зажатой функции	37
4.1.8 Предел сложной функции	37
4.2 Типы разрывов (x_0)	39
4.3 Асимптоты	41
4.3.1 Вертикальная	41
4.3.2 Горизонтальная	41
4.3.3 Наклонная	42
4.4 О — символика	43
4.4.1 О малое	43
4.4.2 О большое	43
4.5 Замечательные пределы	43
4.6 Непрерывность функции на отрезке	46
4.7 Обратные функции	47

1 Информация о курсе

1.1 Оценка

Тут когда-нибудь появится оценка

2 Основы логики и комбинаторика

2.1 Логические операции и методы доказательств

Определение

Высказывание - словесное утверждение, про которое можно сказать, истинное оно или ложное.

Обозначение: заглавные латинские буквы: $A, B, C \dots$

Определение

Предикат - высказывание, зависящее от переменной (при этом не являющееся высказыванием)

Пример

$$B(x) : x + 5 = 10$$

2.1.1 Кванторы

- \forall - всеобщности
- \exists - существования

2.1.2 Метод математической индукции

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} P(n)} \text{ — истинно, если:}$$

- 1) $P(1)$ - истинно (база)
- 2) $\forall n \in \mathbb{N} (P(n) \rightarrow P(n + 1))$ - истинно (шаг)

Пример

Требуется доказать

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \forall x \geq -1 : (1 + x)^n \geq 1 + xn} \text{ — неравенство Бернулли}$$

Докажем с помощью ММИ

$$\underbrace{\forall n \in \mathbb{N} \forall x \geq -1}_{P(n)} \underbrace{(1 + x)^n \geq 1 + xn}_{Q(n)}$$

- 1) $\forall x \geq -1 (1 + x) \geq 1 + x$ - истина

2) Предположим $(1+x)^{n_0} \geq 1+xn_0$ - истина. Докажем, что $(1+x)^{n_0+1} \geq 1+x(n_0+1)$:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n_0+1} &\geq 1+x(n_0+1) \\(1+x)^{n_0+1} &= (1+x)^{n_0} \underbrace{(1+x)}_{\geq 0} \geq (1+x)(1+xn_0) = \\&= 1+x+xn_0+\underbrace{x^2n_0}_{\geq 0} \geq 1+x+xn_0 = 1+x(n_0+1)\end{aligned}$$

2.1.3 Доказательство от противного

Обозначения: \bar{A} - отрицание к A

Пример

Доказать, что количество простых чисел бесконечно

Пп (предположим противное). Тогда количество простых чисел конечное число:

$$n_1, \dots, n_k$$

Рассмотрим следующее число:

$$m = n_1 \cdot \dots \cdot n_k + 1, m \in \mathbb{N}, m > n_i \quad \forall i = \overline{1, k} \text{ то есть } m \neq n_i \quad \forall i = \overline{1, k}$$

Следовательно, m - составное. Тогда:

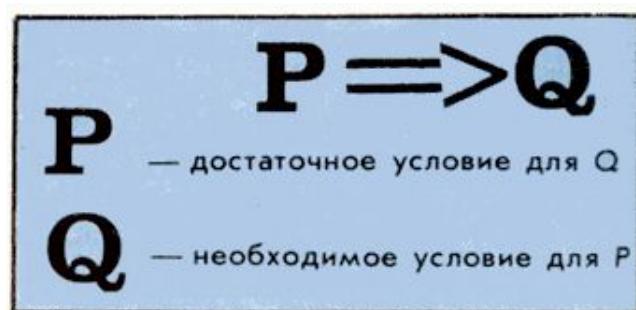
$$m = n_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot n_k^{\alpha_k}$$

$$\exists n_j : m : n_j$$

Но $m = n_1 \cdot \dots \cdot n_k + 1$ и при делении на $n_i \quad \forall i = \overline{1, k}$ дает остаток 1 (\perp)

Утверждение доказано

2.1.4 Достаточность и необходимость



2.2 Комбинаторика и Бином Ньютона

2.2.1 Бином Ньютона

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$$

$$C_n^0 a^0 b^{n-0} + C_n^1 a^1 b^{n-1} + \dots + C_n^n a^n b^{n-n}$$

где C_n^0, C_n^1, \dots - биномиальные коэффициенты

2.2.2 Комбинаторика

Определение

Перестановка - упорядоченное множество размера n
 $\#$ перестановок $= n!$

Определение

Размещения - упорядоченное подмножество размера k множества размера n
 $\#$ размещений $= \frac{n!}{(n - k)!} = A_n^k$

Определение

Сочетания - неупорядоченное подмножество размера k множества размера n
Одному сочетанию соответствуют $k!$ размещений

$$\frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n - k)!} = C_n^k$$

3 Последовательности

3.1 Основные понятия и предел последовательности

Определение

Последовательность - индексированный набор чисел

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

3.1.1 Способы задания последовательности

- 1) Формульный $a_n = n^2 + n - 7$
- 2) Рекуррентный $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Определение

Последовательность называется **ограниченной**, если

$$\exists c \forall n |a_n| \leq c = P(\{a_n\})$$

И **неограниченной**, если

$$\forall c \exists n(c) |a_{n(c)}| > c$$

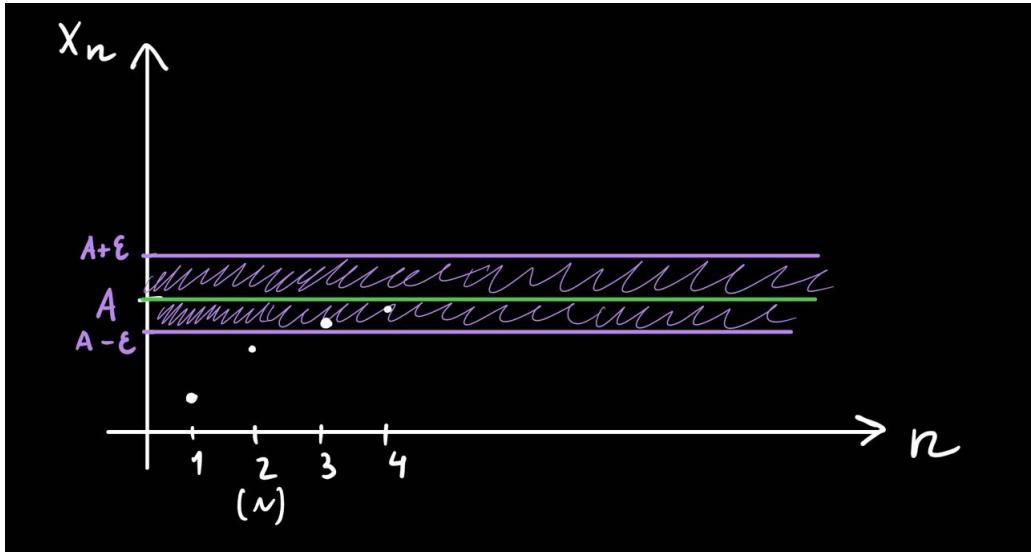
Пример

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3n^2 + 5n - 2}{2n^2 + n + 1} \\ \left| \frac{3n^2 + 5n - 2}{2n^2 + n + 1} \right| &\leq \left| \frac{3n^2 + 5n^2}{2n^2} \right| \leq \left| \frac{8n^2}{2n^2} \right| \leq c \\ 4 &\leq c \\ \exists c = \pi^2 \forall n \left| \frac{3n^2 + 5n - 2}{2n^2 + n + 1} \right| &\leq c \end{aligned}$$

3.1.2 Предел последовательности

Определение

Окрестность точки A : $U_\varepsilon(A) = (A - \varepsilon; A + \varepsilon)$



Определение

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, если

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N |a_n - A| < \varepsilon}$$

\Updownarrow

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N -\varepsilon < a_n - A < \varepsilon$$

\Updownarrow

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

\Updownarrow

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N a_n \in U_\varepsilon(A)$$

Пример

Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right]$$

Определение

Последовательность называется **сходящейся**, если у нее есть предел

⇓

$$\exists a : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

3.1.3 Теорема об ограниченности сходящейся последовательности

Теорема

Если последовательность сходящаяся, то она ограничена

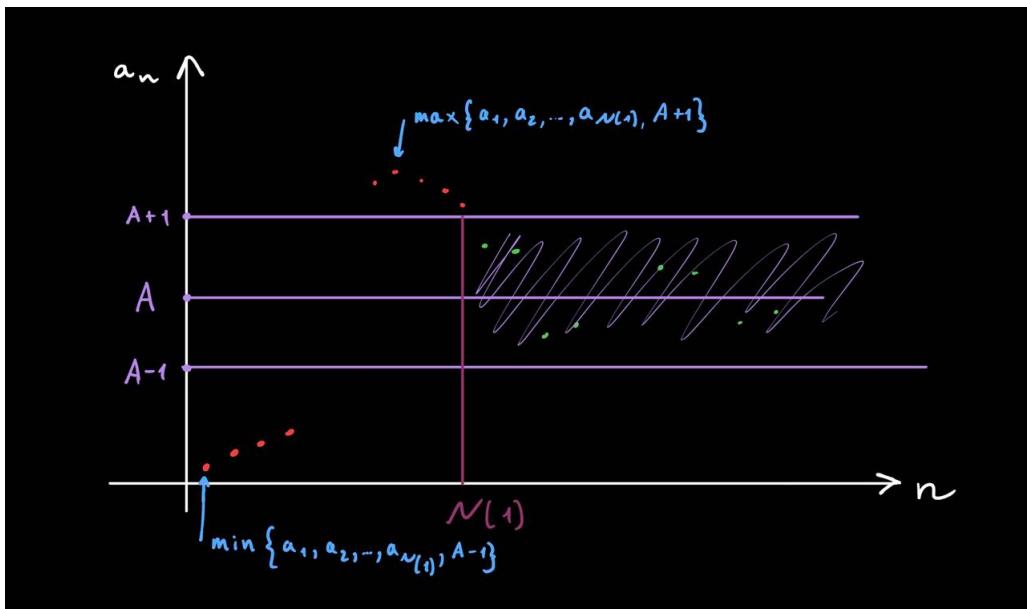
Доказательство

Рассмотрим $\{a_n\}$

$$\exists A \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N |a_n - A| < \varepsilon$$

$$\exists A \exists N(1) \in \mathbb{N} \forall n > N(1) |a_n - A| < 1 \Leftrightarrow a_n \in U_1(A)$$

Очевидно, что элементов a_k , где $k \leq N(1)$ конечное число. А для всех элементов a_n , $n > N(1)$ выполняется $|a_n - A| < 1$. Тогда можем взять нижнюю границу $\min\{a_1, \dots, a_{N(1)}, A - 1\}$ и верхнюю $\max\{a_1, \dots, a_{N(1)}, A + 1\}$.



Теорема

У последовательности может быть только 1 предел

Доказательство

Пп \exists хотя бы 2 $\lim : A$ и B , $A \neq B$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_1(\varepsilon) a_n \in U_\varepsilon(A)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_2(\varepsilon) a_n \in U_\varepsilon(B)$$

Возьмем $\varepsilon_0 = \frac{|A - B|}{3}$ и $n_0 = N_1(\varepsilon_0) + N_2(\varepsilon_0)$

Получаем

$$a_{n_0} \in U_{\varepsilon_0}(A), a_{n_0} \in U_{\varepsilon_0}(B)$$

Но

$$U_{\varepsilon_0}(A) \cap U_{\varepsilon_0}(B) = \emptyset$$

Противоречие

3.1.4 Арифметика предела

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$, то

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B} (b_n \neq 0; B \neq 0)$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{A} (a_n \geq 0; A \geq 0)$$

Доказательство свойства 1

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_1(\varepsilon) |a_n - A| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_2(\varepsilon) |b_n - B| < \varepsilon$$

Хотим

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_3(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_3(\varepsilon) |(a_n + b_n) - (A + B)| < \varepsilon$$

⇓

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_3(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_3(\varepsilon) |(a_n - A) + (b_n - B)| < \varepsilon$$

↑

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_3(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_3(\varepsilon) \underbrace{|a_n - A|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|b_n - B|}_{< \frac{2\varepsilon}{3}} < \varepsilon$$

$$\forall n > N_1\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) \forall n > N_2\left(\frac{2\varepsilon}{3}\right)$$

$$N_3(\varepsilon) = \max \left\{ N_1\left(\frac{\varepsilon}{3}\right), N_2\left(\frac{2\varepsilon}{3}\right) \right\}$$

Примечание: Доказательства свойств 2 и 3, рассмотренные далее, были выведены после доказательства теоремы о произведении б.м. и о гр. последовательностей

Доказательство свойства 2

Хотим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$$

По теореме о связи предела с бесконечно малой последовательностью

$$\alpha_n = (a_n - A) - \text{б.м.}, \beta_n = (b_n - B) - \text{б.м.}$$

Хотим

$$(a_n b_n - AB) - \text{б.м.}$$

$$\begin{aligned} (a_n b_n - AB) &= (\alpha_n + A)(\beta_n + B) - AB = \alpha_n \beta_n + \alpha_n B + A \beta_n + AB - AB = \\ &= \underbrace{\alpha_n \beta_n}_{\text{б.м.}} + \underbrace{\alpha_n B}_{\text{б.м.}} + \underbrace{A \beta_n}_{\substack{\text{огр} \\ \underbrace{\beta_n}_{\text{б.м.}}}} + \underbrace{AB}_{\text{б.м.}} - AB = \end{aligned}$$

Доказательство свойства 3

Хотим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B} \quad (b_n \neq 0; B \neq 0)$$

По теореме о связи предела с бесконечно малой последовательностью

$$\alpha_n = (a_n - A) - \text{б.м.}, \beta_n = (b_n - B) - \text{б.м.}$$

Хотим

$$\begin{aligned} & \frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} - \text{б.м.} \\ & \frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} = \frac{\alpha_n + A}{\beta_n + B} - \frac{A}{B} = \frac{(\alpha_n + A)B - A(\beta_n + B)}{(\beta_n + B)B} = \\ & = \frac{(\alpha_n + A)B - A(\beta_n + B)}{(\beta_n + B)B} = \frac{\alpha_n B + AB - A\beta_n - AB}{b_n B} = \frac{\alpha_n B - A\beta_n}{b_n B} = \\ & = \underbrace{\frac{1}{b_n} \cdot \frac{1}{B}}_{\text{огр.} \cdot \text{огр.}} \cdot \underbrace{(\alpha_n B - A\beta_n)}_{\text{б.м.}} = \text{б.м.} \end{aligned}$$

3.1.5 Бесконечно большая и бесконечно малая последовательности

Определение

Бесконечно малой (б.м.) последовательностью называют последовательность $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ такую что, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Определение

Бесконечно большой (б.б.) последовательностью называют последовательность $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ такую что, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$

$$\forall M > 0 \exists N(M) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N(M) \quad |b_n| > M$$

$$b_n > M \quad (+\infty)$$

$$b_n < M \quad (-\infty)$$

Теорема

$$\frac{1}{\text{б.б.}} = \text{б.м.}$$

Доказательство

Пусть b_n - б.б. Тогда

$$\forall M > 0 \exists N_1(M) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_1(M) \quad |b_n| > M$$

Хотим $a_n = \frac{1}{b_n}$ - б.м.:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \quad \forall n > N_2(\varepsilon) \quad |a_n| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{1}{b_n} \right| < \varepsilon$$

$$|b_n| > \frac{1}{\varepsilon}$$

Возьмем $N_2(\varepsilon) = N_1 \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) + 1$

Теорема

б.м. ·ogr. = б.м.

Доказательство

Хотим $a_n \cdot b_n = c_n$, где a_n, c_n - б.м., b_n -ogr.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_1(\varepsilon) |a_n| < \varepsilon$$

$$\exists c \forall n \in \mathbb{N} |b_n| \leq c$$

Хотим:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_2(\varepsilon) |a_n \cdot b_n| < \varepsilon$$

↑

$$|a_n| \cdot |b_n| < \varepsilon$$

$$|a_n| \cdot c < \varepsilon$$

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{c}$$

Возьмем $N_2(\varepsilon) = N_1 \left(\frac{\varepsilon}{c} \right)$

Пример

б.б. + б.б.

Мы точно не можем сказать, чем будет являться эта сумма. Например $n + (-n) = 0$ и $n + n = 2n$

Пример

б.б. +ogr. = б.б.

Покажем, что это так

Хотим: $b_n + c_n = u_n$ соответственно. Тогда:

$$\forall M > 0 \exists N(M) \in \mathbb{N} \forall n > N(M) |b_n| > M$$

$$\exists C > 0 \forall n \in \mathbb{N} |c_n| \leq C$$

Хотим:

$$\forall K > 0 \exists N_2(K) \in \mathbb{N} \forall n > N_2(K) |b_n + c_n| > K$$

Так, как $|x + y| \geq |x| - |y|$:

$$|b_n| - |c_n| > K$$

$$|b_n| - C > K$$

$$|b_n| > K + C$$

Возьмем $N_2(K) = N(K + C)$

Теорема

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \Leftrightarrow (a_n - A) = \alpha_n \text{ - бесконечно малая}$$

Доказательство

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_1(\varepsilon) |a_n - A| < \varepsilon$$

Хотим

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_2(\varepsilon) |(a_n - A) - 0| < \varepsilon$$

$$N_2(\varepsilon) = N_1(\varepsilon)$$

Примечание

Теперь можно спокойно доказать свойство 2) из арифметики пределов

Примечание

Произведение бесконечно малых - бесконечно малая последовательность. Так как можно представить одну из них как ограниченную и использовать теорему выше

Определение

Назовем последовательность d_n **отделимой от нуля**, если:

$$\exists \delta > 0 \forall n \in \mathbb{N} |d_n| \geq \delta$$

Пример

$$(-1)^n$$

Теорема

$$\frac{1}{\text{огр}} = \text{отделима от нуля}, \frac{1}{\text{отделима от нуля}} = \text{огр}$$

Доказательство

$$\exists \delta > 0 \forall n \in \mathbb{N} |d_n| \geq \delta$$

$$u_n = \frac{1}{d_n}, \exists c > 0 \forall n \in \mathbb{N} |u_n| \leq c$$

↑

$$\left| \frac{1}{d_n} \right| \leq c$$

↑

$$|d_n| \geq \frac{1}{c}$$

Возьмем $c = \frac{1}{\delta}$. Тогда $|d_n| \geq \delta$ верно $\forall n \in \mathbb{N}$

Теорема

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = U$; $u_n, U \neq 0$, то u_n отделима от нуля

Доказательство

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad |u_n - U| < \varepsilon$$

Хотим

$$\exists \delta > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \geq \delta$$

$$\text{Возьмем } \varepsilon_0 = \frac{|U|}{2}$$

$$\exists N_0 = N\left(\frac{|U|}{2}\right) = N(\varepsilon_0)$$

$$\forall n > N_0 \quad u_n \in U_{\frac{|U|}{2}}(U)$$

Очевидно, что существует конечное число u_k , $k \leq N(\varepsilon_0)$, причем $u_k \neq 0$

$$\text{Возьмем } \delta = \min\{|u_1|, |u_2|, \dots, \frac{|U|}{2}\}$$

3.1.6 Предельный переход в неравенствах

Теорема

Если $\exists N_0 \forall n > N_0 a_n > b_n$ и $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$ и $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B$, то $A \geq B$

Доказательство

$$\text{Пп } A < B. \text{ Возьмем } \varepsilon_0 = \frac{B - A}{2}$$

$$\exists N_1(\varepsilon_0) \quad \forall n > N_1(\varepsilon_0) \quad a_n \in U_{\varepsilon_0}(A)$$

$$\exists N_2(\varepsilon_0) \quad \forall n > N_2(\varepsilon_0) \quad b_n \in U_{\varepsilon_0}(B)$$

Возьмем $n_0 = N_1(\varepsilon_0) + N_2(\varepsilon_0) + N_0$. Тогда по условию $a_{n_0} > b_{n_0}$, но также $a_{n_0} < b_{n_0}$ (так как окрестность a по предположению левее окрестности b). Получили противоречие

3.1.7 Теорема о зажатой последовательности

Теорема о зажатой последовательности

Если $\exists N_0 \forall n > N_0 a_n \leq c_n \leq d_n$, а также $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$ и $d_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$, то $c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$

Доказательство

$$a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} A; \forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \forall n > N_1(\varepsilon) A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

$$d_n \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} A; \forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \forall n > N_2(\varepsilon) A - \varepsilon < d_n < A + \varepsilon$$

Хотим

$$c_n \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} A; \forall \varepsilon > 0 \exists N_3(\varepsilon) \forall n > N_3(\varepsilon) A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon$$

Получаем

$$\underbrace{A - \varepsilon}_{\forall n > N_1(\varepsilon)} \leq a_n \leq \underbrace{c_n}_{\forall n > N_0} \leq \underbrace{d_n}_{\forall n > N_2(\varepsilon)} \leq \underbrace{A + \varepsilon}_{\forall n > N_3(\varepsilon)}$$

Возьмем $N_3(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon), N_0\}$

3.1.8 Bonus: Список хороших пределов

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, |q| < 1$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty, |q| > 1$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, a > 0$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^a}{b^n} = 0$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^n}{n!} = 0$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^a} = 0, a > 0$$

3.2 Действительные числа

Определение

Множество **действительных чисел** - это четверка $(\mathbb{R}; +; \times; \leq)$ (множество, 2 операции, 1 отношение)

Примечание

Отличие операции от отношения. Для того чтобы задать операцию, нужно поставить в соответствие для каждой пары чисел число $(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$. В отношении для каждой пары чисел нужно поставить в соответствие 0 или 1 $(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\})$.

3.2.1 Аксиома непрерывности

$$A, B \subset \mathbb{R}$$

- 1) $A, B \neq \emptyset$
- 2) $\forall x \in A \ \forall y \in B \ x \leq y$

Тогда $\exists \xi \in \mathbb{R} : \forall x \in A \ \forall y \in B \ x \leq \xi \leq y$

Определение

Верхней гранью множества $A \subset \mathbb{R}$ называется число $C \in \mathbb{R}$, такое что $\forall x \in A \ x \leq C$

Определение

Точной верхней гранью ($\sup A$) ограниченного сверху множества A называют наименьшую верхнюю грань множества A

Определение

Нижней гранью множества $A \subset \mathbb{R}$ называется число $D \in \mathbb{R}$, такое что $\forall x \in A \ x \geq D$

Определение

Точной нижней гранью ($\inf A$) ограниченного снизу множества A называют наибольшую нижнюю грань множества A

Пример

$A = (-1; 0)$. Множество верхних граней: $[0; +\infty)$, $\sup A = 0$

Теорема

У ограниченного сверху множества есть точная верхняя грань

Доказательство

$$\left. \begin{array}{l} A - \text{огр. сверху}, A \neq \emptyset \\ B = \{\text{верхние грани } A\}, B \neq \emptyset \\ \forall x \in A \ \forall y \in B \ x \leq y \end{array} \right] \exists \xi \in \mathbb{R} : \forall x \in A \ \forall y \in B \ x \leq \xi \leq y$$

1) Из $x \leq \xi$ получаем, что ξ - верхняя грань $A \Rightarrow \xi \in B$

2) Так, как $\xi \leq y$, то ξ - минимальный элемент из B . $\boxed{\xi = \sup A}$

Определение

Точной верхней гранью неограниченного сверху множества назовем $+\infty$

3.2.2 Теорема Вейерштрасса

Определение

$\{a_n\}$ - неубывает, если $a_{n+1} \geq a_n$

Определение

$\{a_n\}$ - возрастает, если $a_{n+1} > a_n$

Пример (3-й способ доказательства монотонности)

Доказать, что последовательность $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ строго возрастает

Необходимо доказать: $\forall n a_{n+1} > a_n$

$$\begin{aligned} 1 < \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \\ &= \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \end{aligned}$$

По неравенству Бернулли $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \forall x \geq -1 (1+x)^n \geq 1+xn}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) &= \left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \\ &= \left(1 + \underbrace{\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right)}_{\geq -1}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \geq \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \\ &= \frac{(n^2 + n + 1)(n+2)}{(n+1)^3} = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} > 1 \end{aligned}$$

Теорема Вейерштрасса

Если $\{a_n\}$ неубывает и ограничена сверху, то она сходится

Доказательство

$\{a_n\} \neq \emptyset$, огр. сверху

$\exists \sup \{a_n\} = A \in \mathbb{R}$

Хотим доказать: $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \ \forall n > N(\varepsilon) \underbrace{|a_n - A|}_{\leq 0} < \varepsilon$$

$$A - a_n < \varepsilon$$

$$a_n > A - \varepsilon \Leftrightarrow a_{N(\varepsilon)+1} > A - \varepsilon$$

Тогда докажем:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ a_{N(\varepsilon)+1} > A - \varepsilon$$

Пп

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ a_{N+1} \leq A - \varepsilon_0$$

\Updownarrow

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ a_n \leq A - \varepsilon_0$$

Получаем, что самая маленькая верхняя граница $= A - \varepsilon_0$, но $\sup a_n = A$. \perp

Контрпример (Если $\{a_n\}$ сходится, то необязательно она неубывает)

$$a_n = \frac{\sin n}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

3.3 Число e и постоянная Эйлера

3.3.1 Число e

Определение

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Доказательство

Ранее мы доказали, что данная последовательность неубывает.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \left(\frac{1}{n} + 1\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n-k} = \\ &= 1 + \frac{n!}{(n-1)! 1!} \cdot \frac{1}{n} + \dots + \frac{n!}{(n-k)! k!} \cdot \frac{1}{n^k} + \dots = \\ &= 1 + 1 + \dots + \underbrace{\frac{n}{n}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\leq 1} \cdot \dots \cdot \underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{\leq 1} \cdot \frac{1}{k!} + \dots < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

Напоминание о телескопических суммах:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Хотим получить нечто похожее, тогда выкинем из каждого знаменателя все множители, кроме последних двух:

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \underbrace{<}_{n \geq 4} 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) < 3$$

Следствие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{kn}\right)^n = e^{\frac{1}{k}}$$

Доказательство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{kn}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{kn}\right)^{nk} \right)^{\frac{1}{k}}$$

$\left(1 + \frac{1}{kn}\right)^{nk}$ — подпоследовательность $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Значит, она тоже сходится к e
Получаем:

$$\left(\left(1 + \frac{1}{kn}\right)^{nk} \right)^{\frac{1}{k}} = e^{\frac{1}{k}}$$

Следствие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

Доказательство

$$c_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$$

Мы не умеем доказывать для $\forall a \in \mathbb{R}$:

Докажем для $\forall a \in \mathbb{Q}$

1. $a = -1$

Хотим:

$$d_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} = e^{-1}$$

$$\frac{1}{d_n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e \cdot 1 = e$$

Получили исходную последовательность со сдвинутой нумерацией

2. $a = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$

Хотим:

$$d_n = \left(1 + \frac{1}{kn}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{k}}$$

Данный случай также разбирался выше (на семинаре)

$$d_n = \left(1 + \frac{1}{kn}\right)^n = \sqrt[k]{\underbrace{\left(1 + \frac{1}{kn}\right)}_{e_n}^{kn}}$$

e_n — подпоследовательность $c_n : e_n = c_{k \cdot n} \Rightarrow e_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e$

$$\sqrt[k]{\left(1 + \frac{1}{kn}\right)^{kn}} \rightarrow \sqrt[k]{e} = e^{\frac{1}{k}}$$

3. $a = k, k \in \mathbb{N}$

$$d_n = \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = \left(\underbrace{\left(1 + \frac{k}{n}\right)}_{f_n}^{\frac{n}{k}}\right)^k$$

c_n — подпоследовательность $f_n : c_n = f_{k \cdot n} \Rightarrow$ если f_n сходится, то она сходится к e

Докажем, что f_n сходится:

1. Монотонность f_n (Она должна возрастать, так как c_n ее подпоследовательность и она возрастает)

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\left(1 + \frac{k}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{k}}}{\left(1 + \frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{k}}} = \left(\left(\frac{(n+1+k)n}{(n+1)(n+k)}\right)^n \frac{n+1+k}{n+1}\right)^{\frac{1}{k}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\left(\frac{n^2 + n + nk}{n^2 + nk + n + k} \right)^n \frac{n+1+k}{n+1} \right)^{\frac{1}{k}} = \left(\left(1 - \frac{k}{n^2 + nk + n + k} \right)^n \frac{n+1+k}{n+1} \right)^{\frac{1}{k}} \\
&\left(\left(1 - \frac{k}{n^2 + nk + n + k} \right)^n \frac{n+1+k}{n+1} \right)^{\frac{1}{k}} \geq \left(\left(1 - \frac{nk}{n^2 + nk + n + k} \right) \frac{n+1+k}{n+1} \right)^{\frac{1}{k}} = \\
&= \left(\frac{(n^2 + n + k)(n+1+k)}{(n^2 + nk + n + k)(n+1)} \right)^{\frac{1}{k}} = \left(\frac{n^3 + n^2 + n^2k + n^2 + n + nk + nk + k + k^2}{n^3 + n^2 + n^2k + nk + n^2 + n + nk + k} \right)^{\frac{1}{k}} = \\
&= \left(\frac{n^3 + 2n^2 + n^2k + 2nk + n + k + k^2}{n^3 + 2n^2 + n^2k + 2nk + n + k} \right)^{\frac{1}{k}} ; \frac{n^3 + 2n^2 + n^2k + 2nk + n + k + k^2}{n^3 + 2n^2 + n^2k + 2nk + n + k} > 1
\end{aligned}$$

Получили $f_{n+1} > f_n$. f_n строго возрастает. Тогда f_n либо сходится, либо стремится к $+\infty$. У f_n есть сходящаяся подпоследовательность \Rightarrow она не может стремиться к $+\infty$. Значит, она сходится

2. Ограниченностъ

Так как f_n сходится, то она сходится к e . Доказано. Возвращаемся к d_n :

$$d_n = \underbrace{\left(1 + \frac{k}{n} \right)^{\frac{n}{k}}}_{f_n}^k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^k = e^a$$

4. $a = -k, k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
d_n &= \left(1 - \frac{k}{n} \right)^n \\
\frac{1}{d_n} &= \left(\frac{n}{n-k} \right)^n = \left(1 + \frac{k}{n-k} \right)^{n-k} \left(1 + \frac{k}{n-k} \right)^k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^k \cdot 1 = e^k \Rightarrow d_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-k} = e^a
\end{aligned}$$

5. $a \in \mathbb{Q}$

Тогда

$$\exists m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} : a = \frac{m}{k}$$

$$d_n = \left(1 + \frac{a}{n} \right)^n = \left(1 + \frac{m}{kn} \right)^n = \sqrt[k]{\left(1 + \frac{m}{kn} \right)^{kn}}$$

Под корнем подпоследовательность из пункта 3 или 4, она сходится к e^m при $n \rightarrow \infty$. Тогда:

$$\sqrt[k]{\left(1 + \frac{m}{kn} \right)^{kn}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{\frac{m}{k}} = e^a$$

3.3.2 Постоянная Эйлера

(Не путать с e , константой Эйлера)

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty \\
\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \gamma — \text{постоянная Эйлера}
\end{aligned}$$

Определение

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = \gamma$$

Примечание

В доказательстве будем пользоваться строгим возрастанием $y = \ln x$ и свойствами \ln

Доказательство

1. γ_n убывает:

Будем рассматривать разность соседних, так как мы не знаем знаки членов последовательности, а также будет удобно сокращать слагаемые

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} - \gamma_n &= \frac{1}{n+1} + \ln n - \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n) = \frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \\ &= \frac{1}{n+1} \left(1 - (n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) = \frac{1}{n+1} \left(1 - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \right) \end{aligned}$$

Вспомогательное доказательство

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e \cdot 1 = e$$

Мы знаем, что $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ возрастает и сходится к e . Докажем, что b_n убывает. Мы знаем, что все члены b_n положительные, рассмотрим частное:

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+2}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{n+2}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{n+1} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)} = \left(\frac{n+1}{\frac{n+2}{n+1}} \right)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n+2} \right) = \\ &= \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n+2} \right) = \left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} \right)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n+2} \right) = \end{aligned}$$

По неравенству Бернулли:

$$\begin{aligned} &= \left(1 + \frac{1}{n(n+2)} \right)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n+2} \right) \geqslant \left(1 + \frac{n+1}{n(n+2)} \right) \left(\frac{n+1}{n+2} \right) = \\ &= \frac{(n^2 + 3n + 1)(n+1)}{n(n+2)^2} = \frac{n^3 + 4n^2 + 4n + 1}{n^3 + 4n^2 + 4n} > 1 \end{aligned}$$

Выход: b_n убывает к $e \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} b_n > e$

Из вспомогательного доказательства получаем (по монотонности \ln):

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} > e \Rightarrow \ln \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \right) > \ln e = 1$$

Тогда:

$$\left(1 - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right) < 0$$

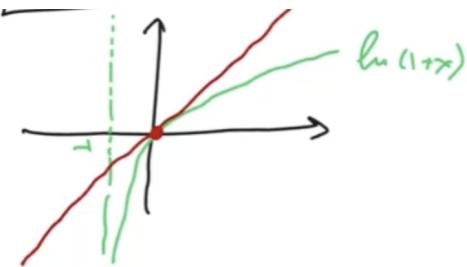
$$\frac{1}{n+1} \left(1 - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right) < 0$$

Получаем: γ_n убывает

2. γ_n ограничена снизу:

Вспомогательное доказательство

Известный факт: $\ln(1+x) \leq x \forall x > -1$ Докажем его



$$\ln(1+x) \leq x \quad \forall x > -1$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1$$

Возьмем $c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $c_n < e$. Тогда, по монотонности \ln :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \gamma_n &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \geq \ln(1+1) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln n = \\ &= \ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln n = \\ &= \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \dots + \ln n - \ln(n-1) + \ln(n+1) - \ln n - \ln n = \\ &= -\ln 1 + \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) > \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

Получили γ_n ограничена снизу 0. По т.Вейерштрасса:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = \gamma$$

3.4 Предел рекуррентно заданных последовательностей

Для того чтобы найти пример рекуррентно заданных последовательностей

Шаг 1: Проверить, что последовательность сходится (можно пытаться делать через теорему Вейерштрасса или критерий Коши)

Шаг 2: Найти предел используя арифметику пределов

3.5 Доказательства стандартных сходимостей

$$a_n = q^n, q \in \mathbb{R}$$

Доказательство

Не будем рассматривать тривиальные случаи $q = 0; 1; -1$

(1) $q > 1, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

$$\forall M > 0 \exists N(M) \forall n > N(M) a_n > M$$

$$q^n > M$$

Используем неравенство Бернулли ($q - 1 > 0$)

$$(1 + (q - 1))^n > M$$

$$1 + n(q - 1) > M$$

$$n > \frac{M - 1}{q - 1}$$

Предъявим номер

$$N(M) = \left\lceil \left[\frac{M - 1}{q - 1} \right] \right\rceil + 1$$

(2) $0 < q < 1, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$q^n = \left(\frac{1}{1/q} \right)^n = \frac{1}{(1/q)^n}, \frac{1}{q} > 1$$

$(1/q)^n = 6.6$, тогда $\frac{1}{(1/q)^n} = 6.m$

(3) $-1 < q < 0, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$q^n = (-1)^n (|q|)^n, |q| \in (0; 1)$$

Последовательность $(-1)^n$ ограничена, а $|q|^n$ — бесконечно малая. Следовательно, $q^n \rightarrow 0$

(4) $q < -1 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

$$q^n = (-1)^n (|q|)^n$$

Последовательность $(-1)^n$ отделена от нуля, а $|q|^n$ — бесконечно большая. Следовательно, $q^n \rightarrow \infty$.

$$a_n = \sqrt[n]{a}, a > 0$$

Доказательство

Случай $a = 1$ очевиден

$$(1) \quad a > 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon) |\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$$

$$\sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon$$

$$\sqrt[n]{a} < \varepsilon + 1$$

$$a < (\varepsilon + 1)^n$$

По неравенству Бернулли:

$$1 + n\varepsilon \leq (1 + \varepsilon)^n$$

$$a < 1 + n\varepsilon$$

$$n > \frac{a - 1}{\varepsilon}$$

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{a - 1}{\varepsilon} \right] + 1$$

$$(2) \quad 0 < a < 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{1/a}}, \quad \frac{1}{a} > 1$$

$$\sqrt[n]{1/a} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{1/a}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$a_n = \sqrt[n]{n}$$

Доказательство

$$\text{Хотим } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon) |\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$$

$$|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$$

$$\sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon$$

$$\sqrt[n]{n} < \varepsilon + 1$$

$$n < (1 + \varepsilon)^n$$

По биному Ньютона:

$$(1 + \varepsilon)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varepsilon^k > \binom{n}{2} \varepsilon^2$$

$$n < \binom{n}{2} \varepsilon^2$$

$$n < \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon^2$$

$$1 < \frac{n-1}{2} \varepsilon^2$$

$$\frac{2}{\varepsilon^2} < n - 1$$

$$n > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1$$

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{2}{\varepsilon^2} + 1 \right]$$

$$a_n = \frac{n^2}{2^n}, \quad + \text{ обобщить результат}$$

Доказательство

По теореме о зажатой последовательности:

$$0 < \frac{n^2}{(1+1)^n} < \frac{n^2}{\binom{n}{3}} = \frac{n^2}{\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Получаем

$$\frac{n^2}{2^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Обобщение:

$$\frac{n^k}{a^n}, a > 1 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Потому что всегда можно сделать оценку с помощью бинома в знаменателе.

Вывод: показательная функция растет быстрее степенной

$$a_n = \frac{2^n}{n!}, \quad + \text{ обобщить результат}$$

Доказательство

$$\frac{2^n}{n!} = \prod_{k=1}^n \frac{2}{k} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \dots \cdot \frac{2}{n}$$

По теореме о зажатой последовательности

$$0 < \frac{2^n}{n!} \leqslant \frac{2}{n} \cdot 2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Вывод: факториал растет быстрее любой показательной

3.6 Подпоследовательности

Определение

Подпоследовательностью последовательности $\{a_n\}$ называется последовательность $\{b_k\}$, такая что $b_k = a_{n_k}$, где n_k - строго возрастающая последовательность номеров (\mathbb{N})

Замечание

$$n_k \geq k$$

Пример

$$\begin{aligned}a_n &= \sin \frac{\pi n}{2} \\b_k &= a_{4k} = \sin 2\pi k \equiv 0 \\c_k &= a_{4k-1} = \sin \frac{\pi(4k-1)}{2} \equiv -1 \\d_k &= a_{2k+1} = \sin \frac{\pi(2k+1)}{2} = (-1)^k\end{aligned}$$

3.6.1 Частичные пределы

Определение

Частичный предел - конечный или бесконечный предел подпоследовательности

Примечание

У какой (ограниченной) последовательности бесконечное число частичных пределов?

Определение

Верхний предел последовательности — это точная верхняя грань множества частичных пределов последовательности.

Обозначение: $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$

Определение

Нижний предел последовательности — это точная нижняя грань множества частичных пределов последовательности.

Обозначение: $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$

3.6.2 Предельные точки

Определение

Предельная точка последовательности $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — число $A \in \mathbb{R}$, такое что:

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ в } U_\varepsilon(A) \text{ находится } \infty \text{ числа членов } \{a_n\}$$

3.6.3 Свойства частичных пределов

Теорема

Конечный частичный предел \Leftrightarrow предельная точка

Доказательство

(\Rightarrow):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K(\varepsilon) \forall k > K(\varepsilon) a_{n_k} \in U_\varepsilon(A)$$

(\Leftarrow):

a — предельная точка

Возьмем $\varepsilon = 1$

$U_1(A)$ Возьмем 1 член, его номер объявим n_1

Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$U_{\frac{1}{2}}(A)$ Возьмем член с номером $> n_1$. Его номер объявим n_2

\dots

Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{k}$

$U_{\frac{1}{k}}(A)$ Возьмем член с номером $> n_{k-1}$. Его номер объявим n_k

$$\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$$

Рассмотрим $\{a_{n_k}\}$:

$$\underbrace{A - \frac{1}{k}}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} A} < \{a_{n_k}\} < \underbrace{A + \frac{1}{k}}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} A}$$

3.6.4 Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема

Если $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$, то $\forall n_k b_k = a_{n_k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$

Доказательство

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon) |a_n - A| < \varepsilon$$

Хотим

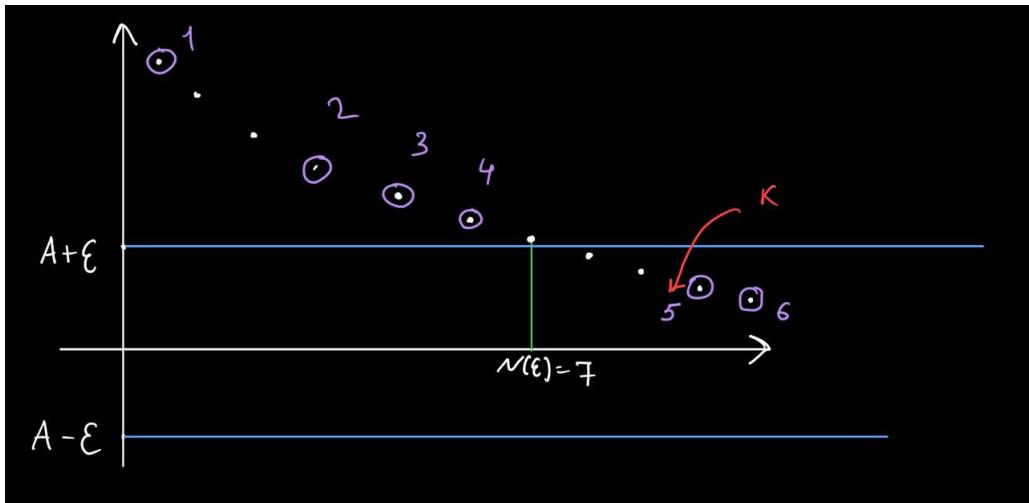
$$\forall \varepsilon > 0 \exists K(\varepsilon) \forall k > K(\varepsilon) |a_{n_k} - A| < \varepsilon$$

Возьмем $K(\varepsilon) = N(\varepsilon)$

$$\left. \begin{array}{l} \forall k > N(\varepsilon) \\ \text{т.к } n_k \geq k \end{array} \right] \Rightarrow n_k > N(\varepsilon). \text{ Тогда } |a_{n_k} - A| < \varepsilon \text{ истина}$$

Теорема Больцано-Вейерштрасса

Если последовательность ограничена, то у нее есть сходящаяся подпоследовательность



Доказательство

c_n – огран. Докажем что у нее есть сходящаяся подпоследовательность

$$A = \inf\{c_n\}$$

$$B = \sup\{c_n\}$$

$$A, B \in \mathbb{R}$$

Рассмотрим отрезок $[a_1, b_1] = [A, B]$

Шаг 1: разделим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам. В какой-то половине (одной или обеих) лежит бесконечное число членов c_n . Выберем в качестве $[a_2, b_2]$ эту половинку (если в обеих бесконечное число, то любую)

Шаг 2: ...

Получаем некоторую последовательность подотрезков $\{[a_k, b_k]\}_{k \in \mathbb{N}}$

На первом шаге выберем какой-то член $c_n \in [a_1, b_1]$. Его номер возьмем в качестве n_1 . \exists член последовательности $\in [a_2, b_2]$ такой, что его номер $> n_1$ (Это следует из того, что на каждом шаге мы выбираем отрезок, содержащий бесконечное число членов). Его возьмем в качестве n_2

...

Таким образом, параллельно строя последовательность отрезков, мы построили подпоследовательность $\{C_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$

Рассмотрим $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Она неубывает, ограничена сверху B .

По т. Вейерштрасса: $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = A'$

$\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Она невозрастает, ограничена снизу A .

По т. Вейерштрасса: $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = B'$

На каждом шаге мы вдвое уменьшаем длину отрезка. Выпишем общую формулу:

$$b_k - a_k = \frac{B - A}{2^{k-1}}, \text{ для строгости необходимо доказать по индукции}$$

Также по арифметике пределов сходящихся последовательностей b_k, a_k ($b_k \rightarrow B', a_k \rightarrow A'$), их разность стремится к $B' - A'$ при $k \rightarrow \infty$

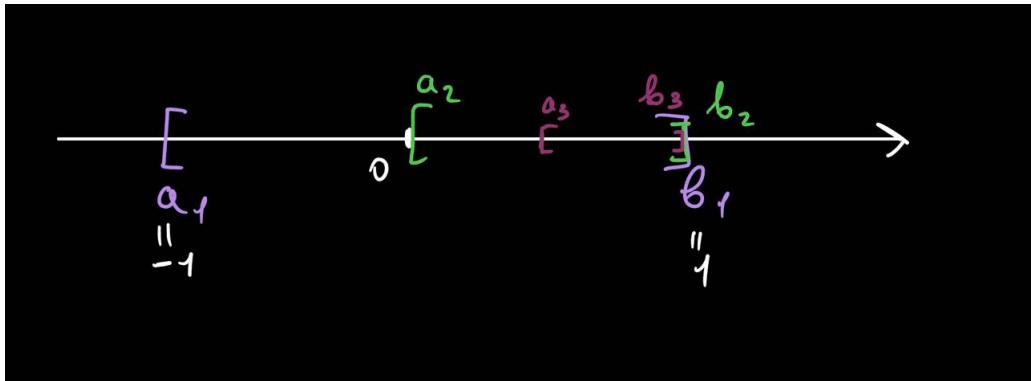
$$\frac{B - A}{2^{k-1}} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty \Rightarrow B' - A' = 0 \Rightarrow B' = A'$$

Получаем, что у a_k и b_k один и тот же предел

Заметим, что $a_k \leq c_{n_k} \leq b_k \forall k \in \mathbb{N}$. По теореме о сходящейся последовательности: $a_k \rightarrow A', b_k \rightarrow B', A' = B'$ при $k \rightarrow \infty$. Следовательно: $\lim_{k \rightarrow \infty} c_{n_k} = A' = B'$

Пример

$$c_n = (-1)^n$$



3.6.5 Критерий Коши

Определение

Последовательность a_n называется фундаментальной, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n, m > N(\varepsilon) |a_n - a_m| < \varepsilon$$

\Updownarrow

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N(\varepsilon) \forall k \in \mathbb{N} |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$$

Теорема о критерии Коши

Последовательность a_n сходится \Leftrightarrow последовательность a_n фундаментальна

Доказательство

(\Rightarrow):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_1(\varepsilon) |a_n - A| < \varepsilon$$

Хотим:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n, m > N_2(\varepsilon) |a_n - a_m| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n, m > N_2(\varepsilon) |(a_n - A) + (A - a_m)| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n, m > N_2(\varepsilon) \underbrace{|a_n - A|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_m - A|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

Это выполняется $\forall n > N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ и $\forall m > N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$

$$\text{Возьмем } N_2(\varepsilon) = N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

(\Leftarrow):

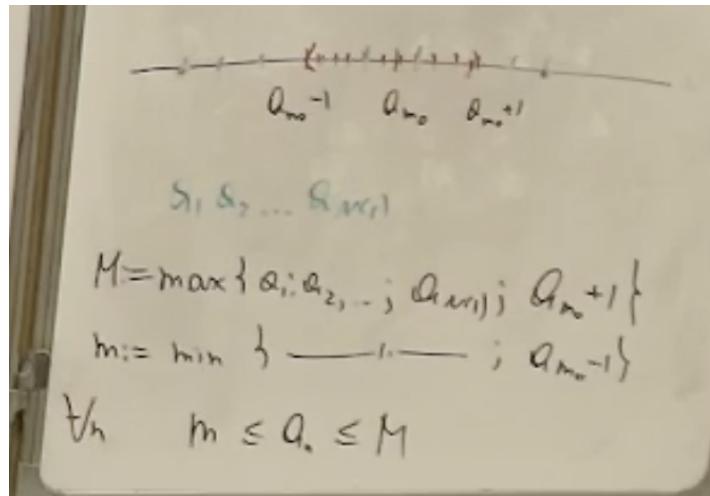
1) Фундаментальные последовательности ограниченны

$$\text{Возьмем } \varepsilon_0 = 1, N(1)$$

$$\forall n, m > N(1) |a_n - a_m| < 1$$

Возьмем $m_0 = N(1) + 1$

$$\forall n > N(1), a_n \in U_1(a_{m_0})$$



2) По теореме Больцано-Вейерштрасса:

$$\exists a_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} A$$

Доказать:

$$a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} A$$

Имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \forall n, m > N_1(\varepsilon) |a_n - a_m| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K(\varepsilon) \forall k > K(\varepsilon) |a_{n_k} - A| < \varepsilon$$

Хотим:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \forall n > N_2(\varepsilon) |a_n - A| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \forall n > N_2(\varepsilon) \underbrace{|a_n - a_{n_k}|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_{n_k} - A|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

Это выполнено $\forall k > K\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ и $n, n_k > N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$

Так как $n_k \geq k$, потребуем $n, k > N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$

Изначально мы прибавили и вычли a_{n_k} , $k > \max\{N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), K\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\}$

k — вспомогательный аргумент, которого изначально не было (требовалось только показать существование). Поэтому при предъявлении $N_2(\varepsilon)$ мы не будем использовать вспомогательное $K(\varepsilon)$

Возьмем $N_2(\varepsilon) = N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$

4 Функции

4.1 Понятия функции и ее предела

4.1.1 Функция. График функции

$$f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Определение

Функцией f отображающей множество X во множество Y ($f : X \rightarrow Y$) множество упорядоченных пар $\{(x, y)\}_{x \in X, y \in Y}$, причем каждый элемент X встречается в какой-то паре на первой позиции и только один раз.

В частности, X называется областью определения функции и обозначается D_f

Множество вторых элементов пар обозначается E_f , множество значений функции. $E_f \subset Y$

Определение

График функции — множество точек на декартовой (координатной) плоскости, координаты которых — пары функции

4.1.2 Инъекция, сюръекция, биекция

Определение

Функция называется **инъекцией**, если вторые элементы пар не повторяются

Определение

Функция называется **сюръекцией**, если $E_f = Y$

$$\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$$

Определение

Функция называется **биекцией**, если она инъекция и сюръекция

4.1.3 Обратимость функции

Определение

Функция $f^{-1} : Y \rightarrow X$ называется **обратной** к $f : X \rightarrow Y$, если пары f^{-1} — пары f , где элементы поменяны местами

Примечание

Чтобы $f : X \rightarrow Y$ была обратима нужно, чтобы она была биекцией

Пример

$$f(x) = \sin(x), \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} — \text{не обратима}$$

$$f(x) = \sin(x), \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1; 1]$$

Тогда обратима

$$f^{-1}(x) = \arcsin(y) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

Далее работаем с числовыми функциями ($X, Y \subset \mathbb{R}$)

4.1.4 Предел функции по Коши

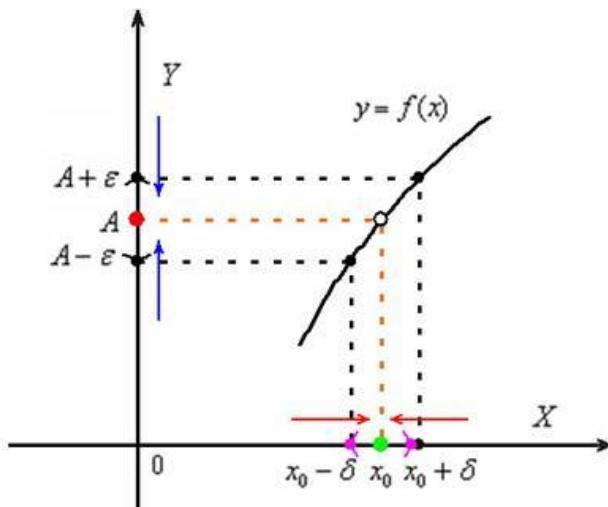
Определение по Коши

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \text{ если}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) |f(x) - A| < \varepsilon$$

\Updownarrow

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta |f(x) - A| < \varepsilon$$



Пример

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 7) = -1$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall x : 0 < |x - 3| < \delta |(2x - 7) - (-1)| < \varepsilon$$

$$|2x - 6| < \varepsilon$$

$$2 \cdot |x - 3| < \varepsilon$$

$$|x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Возьмем } \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{3}$$

4.1.5 Предел функции по Гейне

Определение по Гейне

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, если истинна импликация

$$\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0, x_n \neq x_0} A$$

Пример

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 7) = -1$$

Возьмем $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} : x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 3, x_n \neq 3$

$$\text{Посмотрим } f(x_n) = 2 \underbrace{x_n}_{\substack{3 \\ 6 \\ -1}} - 7 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -1$$

Теорема

Определения предела функции по Коши и Гейне равносильны

Доказательство

(\Rightarrow) :

Имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta |f(x) - A| < \varepsilon$$

Предположим, что посылка истинна. Тогда также имеем:

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0, x_n \neq x_0, \text{ то есть } \forall \omega > 0 \exists N_1(\omega) \forall n > N_1(\omega) 0 < |x_n - x_0| < \omega$$

Хотим:

$$f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} A, \forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \forall n > N_2(\varepsilon) |f(x_n) - A| < \varepsilon$$

Чтобы $|f(x_n) - A| < \varepsilon$ нужно $0 < |x_n - x_0| < \delta(\varepsilon)$ (Подставили в определение Коши $f(x_n)$ вместо $f(x)$). Поэтому возьмем $\omega = \delta(\varepsilon)$.

Получаем $N_1(\delta(\varepsilon))$ и $\forall n > N_1(\delta(\varepsilon)) 0 < |x_n - x_0| < \delta(\varepsilon)$ и тогда $|f(x_n) - A| < \varepsilon$

Возьмем $N_2(\varepsilon) = N_1(\delta(\varepsilon))$

(\Leftarrow) :

Имеем:

$$\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} A$$

Пп т.е верно:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta = \delta(\varepsilon) \exists x(\delta) \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) |f(x) - A| \geq \varepsilon$$

Для каждого $\delta = \frac{1}{n}$ найдем $x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$

Получим

$$\underbrace{x_0 - \frac{1}{n}}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0} < x_n < \underbrace{x_0 + \frac{1}{n}}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0}$$

$$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} : x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0, x_n \neq x_0$$

Значит $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} A$

Но $|f(x) - A| \geq \varepsilon$. Получили противоречие (расписать определение и в качестве ε взять ε_0)

Пример

Рассмотрим функцию Дирихле:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Утверждается, что у данной функции нет предела ни в какой точке. Рассмотрим $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} D(x) \negexists$$

$$x_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, x_n \neq 0; f(x_n) \equiv 1 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$$

$$x'_n = \frac{\sqrt{2}}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, x'_n \neq 0; f(x'_n) \equiv 0 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

4.1.6 Арифметика предела функции

Если $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} A$, $g(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} B$, тогда:

$$1. f(x) \pm g(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} A \pm B$$

$$2. f(x) \cdot g(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} A \cdot B$$

$$3. \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} \frac{A}{B}, B \neq 0$$

$$4. \sqrt[k]{f(x)} \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} \sqrt[k]{A}$$

Доказательство 1

Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} : x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0, x_n \neq x_0$. Тогда по

Гейне:

$$f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} A, g(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} B$$

По арифметике предела последовательности:

$$f(x_n) - g(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} A - B$$

Тогда по Гейне:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = A - B$$

Примечание

Остальные свойства доказываются аналогично

4.1.7 Теорема о зажатой функции

Теорема

$$\exists \delta_0 \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) : f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A, \text{ тогда } \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$$

Доказательство

Возьмем произвольную $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} : x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0, x_n \neq x_0$

$$\exists N_0 \forall n > N_0 x_0 \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)$$

$$\forall n > N_0 f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n)$$

$$\underbrace{f(x_n)}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{A}} \leq h(x_n) \leq \underbrace{g(x_n)}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{A}} \Rightarrow \boxed{h(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} A} \Rightarrow h(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A$$

4.1.8 Предел сложной функции

Вернемся к арифметике предела функции. Хотим:

5. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{y \rightarrow A} h(y) = A$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} h(f(x)) = A$. Это неправда

Контрпример:

$$f(x) \equiv 0, x_n \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow 0$$

$$h(y) = |sign y|, sign(y) = \begin{cases} 1, & y > 0 \\ 0, & y = 0 \\ -1, & y < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} h(y) = 1$$

Хотим:

$$h(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

Но:

$$h(f(x)) \implies h(0) \implies 0. \text{ Противоречие}$$

Мы всегда смотрели на аргумент из проколотой окрестности, а $f(x)$ попал в центр окрестности

Теорема о пределе сложной функции

Если $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A$, $h(y) \xrightarrow{y \rightarrow A} h(A)$, тогда:

$$h(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} h(A)$$

Доказательство

$$\forall \omega > 0 \exists \delta = \delta(\omega) \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) |f(x) - A| < \omega$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta = \eta(\varepsilon) \forall y \in \overset{\circ}{U}_\eta(A) |h(y) - h(A)| < \varepsilon$$

Добавляем в окрестность η_0 , так как неравенство выполнено ($0 < \varepsilon$)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta = \eta(\varepsilon) \forall y \in U_\eta(A) |h(y) - h(A)| < \varepsilon$$

Нужно доказать:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_1}(x_0) |h(f(x)) - h(A)| < \varepsilon$$

Верно, если $f(x) \in U_{\eta(\varepsilon)}(A)$

$$\exists \delta = \delta(\eta(\varepsilon)) \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) |f(x) - A| < \eta(\varepsilon)$$

Возьмем $\delta_1(\varepsilon) = \delta(\eta(\varepsilon))$

Пример

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot 5 = 1 \cdot 5 = 5$$

Рассмотрим обоснование:

$$h(y) = \frac{\sin y}{y}, f(x) = 5x$$

Кажется нужно искать $h(f(x))$ и тогда:

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(f(x)) \sim h(0) \sim 1$$

В чем кроется замена переменной: если найдем предел $h(y)$, то $h(f(x))$ будет такой же. Но эта теорема неверна (см контрпример выше). Тогда требуются доп ограничения (спойлер: теорема ниже)

Вторая теорема о пределе сложной функции

$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)$, $f(x)$ — строго монотонна в какой-то окрестности x_0 , $h(y) \xrightarrow{y \rightarrow f(x_0)} A$

Тогда:

$$h(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A$$

Доказательство

$$\forall \omega > 0 \exists \delta = \delta(\omega) \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) |f(x) - f(x_0)| < \omega$$

$$\forall \omega > 0 \exists \delta = \delta(\omega) \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) 0 < |f(x) - f(x_0)| < \omega$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta = \eta(\varepsilon) \forall y \in \overset{\circ}{U}_\eta(f(x_0)) |h(y) - A| < \varepsilon$$

Нужно:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) \forall y \in \overset{\circ}{U}_{\delta_1}(x_0) |h(f(x)) - A| < \varepsilon$$

Верно при $f(x) \in \overset{\circ}{U}_{\eta(\varepsilon)}(f(x_0)) \Rightarrow 0 < |f(x) - f(x_0)| < \eta(\varepsilon)$. Это верно при $x \in \overset{\circ}{U}_{\delta(\eta(\varepsilon))}(x_0)$

Возьмем $\delta_1(\varepsilon) = \delta(\eta(\varepsilon))$

Определение

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке x_0** , если:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Определение

Односторонним пределом $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ называется такое число, что:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall x : 0 < x - x_0 < \delta(\varepsilon) |f(x) - A| < \varepsilon$ — **правосторонний предел**

$$\bullet \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall x : x_0 - x < \delta(\varepsilon) |f(x) - A| < \varepsilon$ — **левосторонний предел**

Замечание

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

Доказательство тривиальное (в обратную сторону нужно взять минимум из двух δ)

4.2 Типы разрывов (x_0)

1 рода: $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x)$

1.1 — Устранимый (устранимый, значит вы можете переопределить/доопределить

функцию в точке, и она станет непрерывной в этой точке)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$$

Пример

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Функция неопределена в 0, можем доопределить единицей и тогда она станет непрерывной в 0

Пример

$$f(x) = |\operatorname{sign}(x)|$$

Функция в 0 разрывна, так как предел есть и равен 1. Можем переопределить функцию в 0 и она станет непрерывной

1.2 — Скачок

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

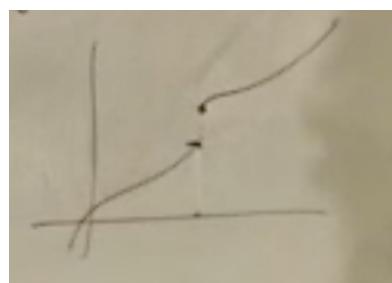


Рис. 1: Скачок на примере функции распределения

Примечание

Доказать, что если функция монотонная, то у нее есть разрывы только типа скачок

2 рода: $\neg \exists \lim_{x \rightarrow x_0 \pm} f(x)$

Примечание

У таких функций нет предела или они бесконечно большие

2.1 — Полюс

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty, [x_0 - \text{полюс}]$$

2.2 — Никак()

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$

$$\forall M > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in (2; 2 + \delta) \ f(x) < -M$$

4.3 Асимптоты

4.3.1 Вертикальная

Определение

Прямая $x = a$ называется **вертикальной асимптотой**, если $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ или $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$

Пример

$$f(x) = \frac{x+3}{x-2}$$

$x = 2$ — вертикальная асимптота $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+3}{x-2} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+3}{x-2} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

Определение

$f(x)$ ограничена при $x \rightarrow x_0$: $\exists \delta_0 \exists c_0 \forall x \in U_\delta(x_0) |f(x)| \leq c_0$

Определение

$f(x)$ отделима от нуля при $x \rightarrow x_0$: $\exists \delta_0 \exists c_0 \forall x \in U_\delta(x_0) |f(x)| \geq c_0$

Пример

$$f(x) = \frac{1}{1 - \{x\}}$$

ДОБАВИТЬ РИСУНОК

$\{x\} = x - [x]$ — дробная часть

$[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ — целая часть

4.3.2 Горизонтальная

Определение

$y = b$ — горизонтальная асимптота при $x \rightarrow \pm\infty$, если

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$$

4.3.3 Наклонная

Определение

$y = kx + b$ — наклонная асимптота при $x \rightarrow \pm\infty$, если

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - f(kx + b)) = 0$$

Примечание

Горизонтальная — частный случай наклонной

Теорема

$y = kx + b$ — наклонная асимптота при $x \rightarrow \pm\infty$

$$\exists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \exists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = b$$

Доказательство

\Rightarrow

$$f(x) - (kx + b) = \alpha(x), \quad \alpha(x) \rightarrow 0$$

$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha}{x} \rightarrow k$$

$$f(x) - kx = b + \alpha(x) \rightarrow b$$

\Leftarrow

$$f(x) - kx = b + \alpha(x)$$

$$f(x) - kx - b = \alpha(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$$

Пример

$$y = \sqrt{x^2 + 7x + 14}$$

Вертикальных нет, так как $\forall x_0 \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ Наклонная:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 7x + 14}}{x}$$

1)

$$x \rightarrow +\infty \sqrt{1 + \frac{7}{x} + \frac{14}{x^2}} \rightarrow -1$$

2)

$$x \rightarrow +\infty - \sqrt{1 + \frac{7}{x} + \frac{14}{x^2}} \rightarrow \frac{7}{2}$$

1)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 7x + 14} - x = \frac{7}{2}$$

2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 7x + 14} + x = \frac{7}{2}$$

4.4 О — символика

4.4.1 О малое

Определение

$f(x) = \bar{o}(g(x))$ при $x \rightarrow x_0$ ($x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$), если

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \text{бесконечно малая при } x \rightarrow x_0$$

4.4.2 О большое

Определение

$f(x) = \underline{O}(g(x))$ при $x \rightarrow x_0$ ($x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$), если

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \text{ограниченная при } x \rightarrow x_0$$

Пример

$$x^2 = \bar{o}(x^3) \text{ при } x \rightarrow 0 : ($$

$$\frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x} \rightarrow \infty$$

$$x^2 = \bar{()}$$

Примечание

1. Впредь бесконечно малые будем обозначать $\bar{o}(1)$

$$f(x) - kx - b = \bar{o}(1)$$

$$\bar{o}(1) + \bar{o}(1) = \bar{o}(1)$$

2. Впредь ограниченные будем обозначать $\underline{O}(1)$

$$\bar{o}(1) + \underline{O}(1) = \underline{O}(1)$$

4.5 Замечательные пределы

Теорема

$\cos x$ непрерывен на \mathbb{R}

Доказательство

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$$

⇓

$$\cos x - \cos x_0 = \overline{o}(1) \text{ при } x \rightarrow x_0$$

$$\left| -2 \cdot \sin \frac{x+x_0}{2} \cdot \sin \frac{x-x_0}{2} \right| \leqslant 2 \cdot 1 \cdot \left| \frac{x-x_0}{2} \right| \rightarrow 0$$

[1] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Доказательство

$$S_{\triangle OAB} < S_{\triangle OAB} < S_{\triangle OAC}$$

$$\frac{\sin x}{2} < \pi \cdot \frac{x}{2\pi} < \frac{\tan x}{2}$$

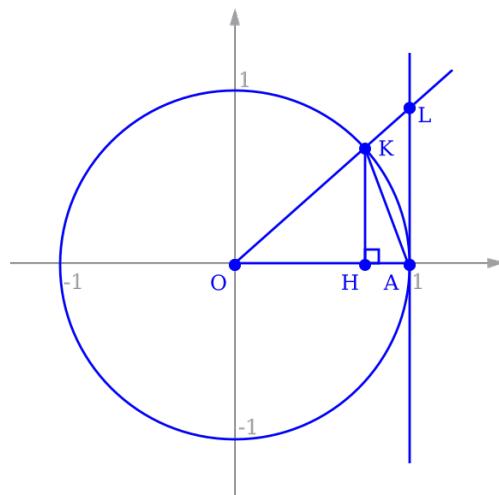


Рис. 2: К доказательству

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = e$$

Примечание

Неопределенность $\frac{0}{0}$: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$; $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, а также $\frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty$
 $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Доказательство

Хотим:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e, \lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$$

$$\left(1 + \frac{1}{[t]+1}\right)^{[t]} \leq \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{[t]} \leq \left(1 + \frac{1}{[t]}\right)^{[t]+1}, \boxed{t \geq 1, t \in \mathbb{R}}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon) \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - e \right| < \varepsilon$$

$h(t)$ принимают те же значения, что и a_n

Утверждение: $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = e$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M(\varepsilon) \forall t > M(\varepsilon) \left| \left(1 + \frac{1}{[t]}\right)^{[t]+1} - e \right| < \varepsilon$$

$$M(\varepsilon) = N(\varepsilon) + 1$$

$$\forall t > M(\varepsilon) \text{ верно } [t] > N(\varepsilon)$$

$$\text{Аналогично рассмотрим } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = e$$

$$\text{Аналогично доказывается } \lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$$

$$\boxed{2} \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^\pm} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Доказательство

Замена $t = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$$

Следствие 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\frac{1}{x} \cdot \ln(1+x) = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \rightarrow \ln e = 1$$

Непрерывность $f(x)$ в т x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \ln(x) = \ln(x_0)$$

Следствие 2

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Замена $t = e^x - 1$, при $x \rightarrow 0$, $t = e^x - 1 \rightarrow 0$, $t + 1 = e^x$, $x = \ln(t + 1)$

$$\frac{t}{\ln(t+1)} = \frac{1}{\frac{\ln(t+1)}{t} \rightarrow 1} \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = (e^x)'|_{x=0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

4.6 Непрерывность функции на отрезке

Определение

Функция непрерывна на $[a; b]$, если

- 1) $[a; b] \subset D_f$
- 2) $f(x)$ непрерывна в т. $x_0 \in (a; b)$
- 3) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$

TODO: рисунок

Теорема

Если функция непрерывна на отрезке $[a; b]$, то

- 1) она ограничена на $[a; b]$
- 2) достигает $\sup f(x) x \in [a; b] = \sup E_f$ и $\inf f(x) x \in [a; b] = \inf E_f$

$$M = \sup f(x) x \in [a; b] \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$m = \inf f(x) x \in [a; b] \in \overline{\mathbb{R}}$$

1) $M \in \mathbb{R}$

2) $\exists x_0 \in [a; b] M = f(x_0)$

Построим $a_n \uparrow M$

$$\forall n \exists x_n f(x_n) \geq a_n$$

TODO: рисунок

$\Pi \exists n_0 \forall x \in [a; b] f(x) < a_{n_0}$ a_{n_0} — верхняя грань для E_+ противоречие

Построили $\{x_n\}$:

$$a_n \leq f(x_n) \leq M$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = M$$

$x_n \in [a; b] \Rightarrow$ ограничена

$$\exists x_{n_k} : x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_0$$

Предельный переход в нер-вах $a \leq x_{n_k} \leq b \Rightarrow x_0 \in [a; b]$

Определение непрерывности по Гейне $f(x_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x_0)$

$$f(x_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} M$$

Теорема

Непрерывная на отрезке функция принимает все промежуточные значения, т.е $f(x), [a; b]$

$A = f(x_1), B = f(x_2), A < B \quad x_1, x_2 \in [a; b]$

тогда $\forall C \in (A; B) \exists x_0 \in [a; b] : f(x_0) = C$

Следствие $f(x)$ непрерывна на $[a; b] = D_f$, то $E_f = [m; M]$

Доказательство

Построим последовательность влож отрезков $\{[a_k; b_k]\}_{k \in \mathbb{N}}$, будем считать $x_1 < x_2$
 $[a_1; b_1] = [x_1; x_2]$

Возьмем середину $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$

1. $f(x_3) = C$ чтд
2. $f(x_3) < C \quad [a_2; b_2] = [x_3; b_1]$
3. $f(x_3) > C \quad [a_2; b_2] = [a_1; x_3]$

TODO: рисунок

$\{a_k\}_k$ — неубывающая и огр сверху b

$\{b_k\}_k$ — невозрастает и огр снизу a

При $k \rightarrow \infty$: $a_k \rightarrow \alpha, b_k \rightarrow \beta$

$$b_k - a_k = \frac{1}{2^{k-1}}(x_2 - x_1) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Следовательно по теореме Вейерштрасса: $\alpha = \beta$

$$f(a_k) < C \rightarrow f(\alpha) \leqslant C$$

Непрерывность f по Гейне в т. $x_0 = \alpha$

$$f(b_k) > C \rightarrow f(\beta) \geqslant C$$

$$f(\alpha) = f(\beta) = C$$

4.7 Обратные функции

$f(x) : X \rightarrow Y \quad D_f = X, E_f \subset Y$

$f^{-1}(y) : E_f \rightarrow X$

$f^{-1} : \{(y; x)\}_{x \in X, y \in E_f}$

$f(.)$ инъекция

$X, Y \subset \mathbb{R}$

Теорема о достаточном условии обратимости

Если $f(x)$ — строго монотонна, то она обратима

Доказательство

Пусть $f(x)$ возрастает
о/п (от противного):

$$\exists x_1 \text{ и } x_2 : x_1 \neq x_2 \Rightarrow (x_1 > x_2) \vee (x_1 < x_2) \Rightarrow (y_1 > y_2) \vee (y_1 < y_2)$$

Но: $y_1 = y_2, \perp$

Теорема о критерии обратимости непрерывной функции

Если $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то:

$$f(x) \text{ обратима} \Leftrightarrow f(x) \text{ строго монотонна}$$

Доказательство

\Leftarrow Доказано ранее

\Rightarrow

о/п (от противного)

$$1) \exists x_1 < x_2 < x_3 : y_1 > y_2 < y_3$$

ИЛИ

$$2) \exists x_1 < x_2 < x_3 : y_1 < y_2 > y_3$$

3) ИЛИ когда-то равны \Rightarrow тогда функция не инъективна \Rightarrow она не обратима \perp

//TODO: рисунок

$$1) \exists c : c \in (y_2; y_1), c \in (y_2; y_3)$$

По теореме о промежуточных значениях:

$$\exists z_1 \in (x_1, x_2) : f(z_1) = c$$

$$\exists z_2 \in (x_2, x_3) : f(z_2) = c$$

$$z_1 \neq z_2$$

\perp

Теорема

$$f(x)$$

$$1) D_f = [a; b]$$

$$2) f(x) \text{ непрерывна на } [a; b]$$

$$3) f(x) \text{ строго монотонна на } [a; b], \text{ то}$$

$$f^{-1}(y)$$

$$1) \text{ область определения — отрезок с концами } f(a) \text{ и } f(b)$$

$$2) \text{ непрерывна на этом отрезке}$$

$$3) \text{ также строго монотонна на этом отрезке}$$

Доказательство

1) \Rightarrow из теоремы о промежуточных значениях

3) Пусть $f(\cdot)$ возрастает. о/п:

$$\exists y_1 < y_2 \in [f(a); f(b)] : f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$$

$$x_1 \geq x_2 \Rightarrow y_1 \geq y_2 \text{ но } y_1 < y_2 \perp$$

Словарик

Без ограничений общности — кажется что мы накладываем ограничение превращая в частный случай, но на самом деле не влияя на справедливость доказательства в целом, так как остальные случаи рассматриваются похожим образом

Упражнение

$$\forall y_1, y_2 \in E_f = D_{f^{-1}} (y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2))$$

$$\dots \overline{y_1 < y_2} \vee f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$

$$\exists y_1, y_2 \in E_f (y_1 < y_2 \wedge f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2))$$

2) $f^{-1}(y)$

//TODO: рисунок

Предположим, что она не непрерывна на отрезке, тогда у нее разрыв типа скачок. Но тогда в множестве значений появилась дыра (или две), чего не может быть (теория из доп листка)

Докажем другим способом:

$$y_0 \in (f(a); f(b))$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall y \in U_\delta(y_0) |f^{-1}(y) - \underbrace{f^{-1}(y_0)}_{x_0 \in (a;b)}| < \varepsilon$$

Без ограничений общности считаем, что:

$$U_\varepsilon(x_0) \subset (a; b)$$

//TODO

$$x_0 + \varepsilon, x_0 - \varepsilon \in (a; b)$$

\Downarrow

$$y_1 = f(x_0 - \varepsilon), y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$$

$y_1 < y_0 < y_2$ тк f возрастает

Возьмем $\delta = \min\{y_0 - y_1; y_2 - y_0\}$

$\forall y \in U_\delta(y_0) \Rightarrow y_1 < y < y_2$ тк f^{-1} возрастает

$$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) \quad |f^{-1}(y) - \underbrace{x_0}_{\text{todo}}| < \varepsilon$$

Следствие

Если $f(x)$ определена, непрерывна и строго монотонна на промежутке

$$(a; b) \quad a, b \in \overline{\mathbb{R}} \quad a < b$$

TODO

Без доказательства

TODO!!!