

# Лекции по алгебре (1 курс, 25-26)

[github.com/int28t/hse-se-lecture-notes](https://github.com/int28t/hse-se-lecture-notes)

Михайлец Екатерина Викторовна  
emihaylets@hse.ru  
ТГК: [t.me/alg\\_pi\\_25\\_26](https://t.me/alg_pi_25_26)

## Содержание

<b>1 Матрицы</b>	<b>2</b>
1.1 Свойства сложения матриц . . . . .	2
1.2 Свойства умножения на число . . . . .	3
1.3 Умножение матриц . . . . .	3
1.4 Свойства умножения матриц . . . . .	3
<b>2 Транспонирование</b>	<b>4</b>
2.1 Свойства транспонирования . . . . .	4
2.2 Элементарное преобразование строк(столбцов) . . . . .	4
<b>3 Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)</b>	<b>6</b>
<b>4 Перестановки (Подстановки)</b>	<b>6</b>
<b>5 Определитель</b>	<b>8</b>
5.1 Свойства определителей . . . . .	9
<b>6 test</b>	<b>9</b>
6.1 Тригонометрическая форма . . . . .	12
6.2 Умножение и деление в тригонометрической форме . . . . .	12
6.3 Извлечение комплексного корня: . . . . .	13
6.4 Геометрическая интерпретация . . . . .	13
6.5 Формула эйлера . . . . .	14
6.6 Комплексные многочлены . . . . .	14
<b>7 Аналитическая геометрия</b>	<b>15</b>
<b>8 Смешанное произведение</b>	<b>18</b>
<b>9 Прямоугольная декартова система координат</b>	<b>18</b>
<b>10 Теория Групп. Начало общей алгебры</b>	<b>18</b>
10.1 Алгебраические структуры . . . . .	18
10.2 Гомоморфизмы . . . . .	20
10.3 Таблица Кэли . . . . .	22

# 1 Матрицы

Матрицей размера/типа/порядка  $n \times m$  называется упорядоченная таблица с  $m$  строками и  $n$  столбцами.

**Обозначение:**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

$i$  - строка,  $j$  - столбец

$M_{mn}(\mathbb{R})$  - множество всех матриц размера  $m \times n$  с вещественными элементами

1) При  $m = n$  матрица называется квадратной порядка  $n$

2) При  $m = 1$  матрица  $1 \times n$  -  $n$ -мерная строка

При  $n = 1$  матрица  $m \times 1$  -  $m$ -мерный столбец

Матрица  $1 \times 1$  - число

3) Матрица состоящая из нулей (т.е.  $a_{ij} = 0 \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ ) называется нулевой матрицей. **Обозначение:**  $\mathbb{O}$

4) Будем называть единичной квадратной матрициу порядка  $n$ , если:

$$a_{ij} = \underbrace{\delta_j^i}_{\text{Символ Кронекера}} = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases}$$

**Обозначение:**

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Определение:** Две матрицы  $A$  и  $B$  называются равными если они одного размера и соответствующие элементы равны (т.е.  $a_{ij} = b_{ij} \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ )

**Определение:** Матрица  $C$  называется суммой матриц  $A$  и  $B$  если все матрицы  $A$ ,  $B$  и  $C$  одинакового размера и  $c_{ij} = b_{ij} + a_{ij}, \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$

**Обозначение:**  $C = A + B$

**Пример:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 1.1 Свойства сложения матриц

1. Коммутативность ( $A + B = B + A$ )

□ Поэлементно:  $[A + B]_{ij} = \underbrace{[A]_{ij} + [B]_{ij}}_{\text{по определению сложения}} = [B]_{ij} + \underbrace{[A]_{ij}}_{\text{вещественные числа коммутативны}}$

$$[A]_{ij} = \underbrace{=}_{\text{по определению сложения}} [B + A]_{ij} \blacksquare$$

2. Ассоциативность ( $(A + B) + C = A + (B + C)$ )

3.  $\exists$  нейтральный элемент по сложению т.е.  $\exists$  матрица  $\mathbb{O} \in M_{mn}(\mathbb{R}) \forall A \in M_{mn}(\mathbb{R})$  выполняется  $\mathbb{O} + A = A + \mathbb{O} = A$

□  $[\mathbb{O}]_{ij} = 0$  – нулевая матрица  $\blacksquare$

4.  $\forall$  матрицы  $A \in M_{mn}(\mathbb{R}) \exists B \in M_{mn}(\mathbb{R}) : A + B = B + A = \mathbb{O}$  – нулевая матрица

□  $B_{ij} = -A_{ij} \blacksquare$

**Обозначение:**  $B = -A$  – Обратная по сложению к  $A$  или противоположная

**Определение:** Матрица  $C$  называется произведением числа  $\lambda \in \mathbb{R}$  и матрицы  $A$ , если матрицы  $C$  и  $A$  одинакового размера и  $[C]_{ij} = \lambda * [A]_{ij} \forall i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$

**Обозначение:**  $C = \lambda * A$

**Пример:**

$$2 * \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

**Определение:** Разностью матриц  $A$  и  $B$  называется сумма  $A$  и  $-B$

## 1.2 Свойства умножения на число

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : (\lambda * \mu) * A = \lambda * (\mu * A)$  – ассоциативность относительно умножения на число

$(\lambda + \mu) * A = \lambda * A + \mu * A$  – дистрибутивность относительно умножения чисел

$\lambda * (A + B) = \lambda * A + \lambda * B$  – дистрибутивность относительно сложения матриц

**Это место стоит перепроверить (!!!)**

$1 * A = A$  – унарность

## 1.3 Умножение матриц

Рассмотрим  $A_{m \times n} \in M_{mn}(\mathbb{R}), B_{n \times k} \in M_{nk}(\mathbb{R})$ :

**Определение:** Произведением матрицы  $A_{m \times n}$  и  $B_{n \times k}$  (число столбцов в  $A$  равно числу строк в  $B$ ) называется  $C_{mk}$  где:

$$C_{ij} = \sum_{q=1}^n a_{iq} * b_{qj}$$

$$(C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} \forall i = \overline{1,m}, j = \overline{1,k})$$

**Пример:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{3 \times 2} * \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}_{2 \times 1} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}_{3 \times 1}$$

## 1.4 Свойства умножения матриц

1. Ассоциативность Пусть  $A_{m \times n}, B_{n \times k}, C_{k \times l}$ . Тогда  $(A * B) * C = A * (B * C)$

$$\square [(A * B) * C]_{ij} = \sum_{r=1}^k [A * B]_{ir} * [C]_{rj} = \sum_{r=1}^k \left( \sum_{s=1}^n [A]_{is} * [B]_{sr} \right) * [C]_{rj} = \sum_{r=1}^k \sum_{s=1}^n [A]_{is} *$$

$$[B]_{sr} * [C]_{rj} \quad \underbrace{\quad}_{\text{перегруппируем слагаемые}} \quad \sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^k [A]_{is} * [B]_{sr} * [C]_{rj} = \sum_{s=1}^n [A]_{is} * \left( \sum_{r=1}^k [B]_{sr} * [C]_{rj} \right) =$$

$$\sum_{s=1}^n [A]_{is} * [B * C]_{sj} \quad \underbrace{\quad}_{\text{по определению умножения}} = A * (B * C) \blacksquare$$

2.  $\exists$  Нейтрального элемента по умножению (для квадратных матриц)  $\exists$  матрица  $E \in M_n(\mathbb{R}) : \forall A \in M_n(\mathbb{R}) E * A = A * E = A$

$\square$  Предъявим единичную матрицу

$$[E]_{ij} = \delta_j^i$$

$$[A * E]_{ij} = \sum_{r=1}^n [A]_{ir} * [E]_{rj} = \sum_{r=1}^n [A]_{ir} * \delta_j^r = 0 + \dots + [A]_{ij} + \dots + 0 = [A]_{ij} \forall i, j = \overline{1,n}$$

$E * A$  аналогично  $\blacksquare$

3.  $A * \mathbb{O} = \mathbb{O} * A = \mathbb{O}$  Для квадратных  $A$  и  $\mathbb{O}$  порядка  $n$

Рассмотрим:  $(A + B) * C = A * C + B * C$  – дистрибутивность умножения матриц

**Замечание:** Вообще говоря умножение матриц некоммутативно (даже для квадратных)

**Пример:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

## 2 Транспонирование

**Определение:** Транспонирование — операция, переводящая все строки в столбцы с сохранением порядка, то есть:

$$[A^T]_{ij} = [A]_{ji} \quad \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$$

**Обозначение:**  $A^T$

$$A_{m \times n} \xrightarrow{T} (A^T)_{n \times m}$$

### 2.1 Свойства транспонирования

1.  $(A^T)^T = A$
2.  $(A + B)^T = A^T + B^T$
3.  $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$
4.  $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

□ Пусть матрицы  $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ ,  $B \in M_{nk}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} [(A \cdot B)^T]_{ij} &\stackrel{\text{по определению } T}{=} [A \cdot B]_{ji} && \stackrel{\text{по определению произведения матриц}}{=} \sum_{r=1}^n A_{jr} \cdot B_{ri} = \\ &\stackrel{\text{по коммутативности произведения}}{=} \sum_{r=1}^n B_{ri} \cdot A_{jr} = \sum_{r=1}^n B_{ir}^T \cdot A_{rj}^T = [B^T \cdot A^T]_{ij} \quad \forall i = \overline{1, k}, j = \overline{1, m} \blacksquare \end{aligned}$$

### 2.2 Элементарное преобразование строк(столбцов)

**Определение:** — это 3 следующие операции:

1. Перестановка двух строк в матрице  
 $(i) \Leftrightarrow (k)$  ( $i$ -ая строка меняется местами с  $k$ -ой)
2. Умножение строки на ненулевое число  
 $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0, (i) \Rightarrow \lambda \cdot (i), \lambda \neq 0$
3. Прибавление к  $i$ -ой строке другой  $k$ -ой строки с коэффициентом  $\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$   
 $(i) \Rightarrow (i) + \lambda(k), i \neq k$

**Замечание 1:** Все элементарные преобразования обратимы

**Замечание 2:** Каждое элементарное преобразование строк матрицы можно трактовать как умножение на матрицу слева специального вида (квадратную). Эта матрица получается применением к единичной матрице того же самого элементарного преобразования

**Пример:** (1) элементарное преобразование к  $E$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)-2(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ — матрица элементарного преобразования}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

**Замечание 3:** Преобразования можно применять и к столбцам. Это будет соответствовать умножению справа на матрицу специального вида

**Определение:** Матрица имеет:

- 1) ступенчатый вид, если номера первых ненулевых элементов всех строк последовательно возрастают, такие элементы называются ведущими (нижние ведущие элементы находятся правее, чем верхние), а все нулевые строки стоят внизу
- 2) канонический вид (улучшенные ступенчатый), если матрица имеет ступенчатый вид, в которой все ведущие элементы равны 1, и в любом столбце с ведущими элементами все остальные равны 0

**Теорема о методе Гаусса:** Любую конечную матрицу можно привести к ступенчатому и каноническому виду элементарными преобразованиями строк.

□ Предъявим алгоритм. Берем матрицу  $m \times n$  и двигаемся из левого верхнего угла.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & & \dots & & \\ \dots & & & \dots & \\ a_{m1} & & & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

**п. 1** Если текущий элемент равен 0, тогда переходим к **п. 2**, иначе объявляем текущий элемент ведущим. Прибавляем текущую строку к остальным так, чтобы элементы ниже ведущего (и выше в случае канонического вида) обратились в 0. Пусть  $a_{ij}$  — текущий элемент. Тогда для  $k \neq i$  строки берем  $\lambda = -\frac{a_{kj}}{a_{ij}}$ , где  $a_{ij} \neq 0$  и  $(k) \rightarrow (k) + \lambda(i)$  (для канонического вида  $(i) \rightarrow \frac{1}{a_{ij}}(i)$ , чтобы получить 1 на месте ведущего элемента).

Выбираем новый текущий элемент, смещаюсь в матрице на один столбец вправо и на одну строку вниз  $\Rightarrow$  следующий шаг, повторяем **п. 1**, если это невозможно stop

**п. 2** Если текущий элемент равен нулю, то просматриваем все элементы под ним. Если среди них нет не равных 0, то переходим к **п. 3**. Иначе если в  $k$ -ой строке ненулевой элемент нашелся (под текущим), то  $(i) \leftrightarrow (k)$

**п. 3** Если текущий элемент и все под ним равны 0, то меняем текущий столбец смещаюсь на один столбец вправо. Если возможно, то **п. 1**, иначе stop

Так как матрица имеет конечные размеры, а за 1 итерацию смещается вправо на 1 столбец — процесс преобразования к ступенчатому (каноническому) виду закончится не более чем за  $n$  шагов

### 3 Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Покоординатная запись СЛАУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Rightarrow Ax = b, \text{ где } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$  — столбец неизвестных,  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$  — столбец свободных членов

$$(A|B)_{m \times (n+1)} = \left( \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \text{ — элементарными преобр. к каноническому виду}$$

**Замечание:** Элементарные преобразования матрицы не меняют множество решений СЛАУ

### 4 Перестановки (Подстановки)

**Определение:** Перестановкой чисел  $1, \dots, n$  называется расположение их в определённом порядке.

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

**Пример:**

$$\alpha = (5, 3, 4, 1, 2)$$

**Определение:**  $\alpha_i$  и  $\alpha_j$  образуют инверсию в перестановке если  $\alpha_i > \alpha_j$ , но  $i < j$

**Определение:** Знак перестановки это  $(-1)^n$ , где  $n$  - число инверсий в перестановке

**Обозначение:**  $sgn(\alpha)$

**Пример:**

$$\alpha = \underbrace{(4 \ 5 \ 1 \ 3 \ 6 \ 2)}_{3+3+0+1+1+0}$$

$$sgn(\alpha) = 1$$

**Определение:** Если  $sgn(\alpha) = 1$  то  $\alpha$  - чётная перестановка, если  $sgn(\alpha) = -1$  то  $\alpha$  - нечётная перестановка

**Определение:** Транспозицией называется преобразование при котором в  $\alpha$  меняются местами только  $\alpha_i$  и  $\alpha_j$ , а остальные элементы не меняются

**Утверждение:** Каждая транспозиция меняет чётность перестановки

□ а) Транспозиция соседних элементов:

$$\alpha_1, \dots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n$$

↓

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{i+1}, \alpha_i, \dots, \alpha_n$$

$\Rightarrow$  Число инверсий изменилось на 1  $\Rightarrow$  знак перестановки поменялся

б)

$$\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_{i+k}, \dots, \alpha_n$$

Меняем  $\alpha_i \leftrightarrow \alpha_{i+k}$  с  $k - 1$  соседних транспозиций

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{i+k}, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n$$

$\Rightarrow k + k - 1 = 2k - 1$  шагов (соседних транспозиций)

$\Rightarrow$  Знак перестановки поменяется ■

**Определение:** Подстановка

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \delta(1) & \delta(2) & \dots & \delta(n) \end{pmatrix}$$

– отображение чисел в себя являющееся взаимо-однозначным

Нижняя строка – перестановка

**Пример:**

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$sgn(\delta) = 1 \quad \delta(2) = 2 \text{ - стационарный элемент}$$

**Определение:** Знаком подстановки называется знак перестановки в её нижней строке

**Обозначение:**  $S_n$  - множество подстановок длины  $n$

$$|S_n| = n!$$
 число элементов и мощность множества

**Замечание:** Транспозиция - нечётная подстановка (в которой  $\alpha_i$  и  $\alpha_j$  переходят друг в друга, а остальные элементы неподвижны)

**Замечание:** Часто используют запись подстановок «в циклах», и каждый элементы выписывается справа

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1 \ 4 \ 3) * \underbrace{(2)}_{\text{можно не писать}} = (1 \ 4 \ 3)$$

Циклическая запись транспозиции:  $(\alpha_i, \alpha_j)$

**Определение:**

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} = (1)(2)(3)\dots(n) = Id$$

называется тождественной подстановкой

**Обозначение:**  $Id$  ( $id$ )

**Определение:** Умножением подстановок называется их последовательное применение (т.е. композиция отображений)

**Пример:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(умножая слева направо)

$$\text{В циклах: } (12) * (132) = (1)(23) = (23)$$

**Замечание:** Умножение подстановок некоммутативно

$$\text{Пример: } (132)(12) = (13) \neq (23)$$

**Замечание:**  $Id$  – нейтральный элемент по умножению

**Замечание:** Подстановку обратную к

$$\delta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \delta(1) & \delta(2) & \delta(3) & \dots & \delta(n) \end{pmatrix}$$

можно получить как

$$\delta^{-1} = \begin{pmatrix} \delta(1) & \delta(2) & \delta(3) & \dots & \delta(n) \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

и отсортировав столбцы

$$\Rightarrow \delta * \delta^{-1} = \delta^{-1} * \delta = Id$$

**Пример:**

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\delta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

**Замечание:**  $\forall$  Подстановку можно представить как произведение транспозиций

$\square$  Запишем подстановку в циклах  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = (\alpha_k, \alpha_{k-1})(\alpha_{k-1}, \alpha_{k-2}) \dots (\alpha_2, \alpha_1)$

- произведение  $k - 1$  транспозиций слева направо ■

**Замечание:**  $sgn(\delta_1 * \delta_2) = sgn(\delta_1) * sgn(\delta_2)$

## 5 Определитель

**Определение** Определителем или детерминантом квадратной матрицы  $A$  порядка  $n$  называется сумма  $n!$  слагаемых следующего вида:

$$\det A = \sum_{\delta \in S_n} sgn(\delta) * a_{1\delta(1)} * a_{2\delta(2)} * a_{3\delta(3)} * \dots * a_{n\delta(n)}, \text{ где}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

и

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \delta(1) & \delta(2) & \delta(3) & \dots & \delta(n) \end{pmatrix}$$

**Обозначение:**  $\det A$  или  $|A|$

**Замечание:** По сути  $\det A$  является суммой произведений элементов матрицы по одному из каждой строки и столбца (стоящие в разных строках и столбцах по всем способам так сделать (с учётом знака))

**Пример:**  $n = 2 \Rightarrow n! = 2! = 2$

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = Id$$

$$\delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} * a_{22} - a_{21} * a_{12}$$

**Пример:**  $n = 3 \Rightarrow n! = 3! = 6$

$$A = \left[ \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13}, & \left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right. \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}, & \left| \begin{array}{cc} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array} \right. \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}, & \left| \begin{array}{cc} a_{31} & a_{32} \\ a_{11} & a_{12} \end{array} \right. \end{array} \right]$$

$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{22}a_{23}a_{11} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$  -  
Правило Саррюса

(Диагонали  $\searrow$  идут с плюсом, диагонали с  $\nearrow$  с минусом)

## 5.1 Свойства определителей

№1  $\det A = \det A^T$  ( $\Rightarrow$  Все свойства  $\det$  верные для строк матрицы справедливы и для столбцов)

$\square B = A^T, b_{ij} = a_{ji}$  Переставим  $b_{i\delta_i}$  по возрастанию номеров столбцов

$$\det B = \sum_{\delta \in S_n} sgn(\delta) * b_{1\delta(1)} * b_{2\delta(2)} * \dots * b_{n\delta(n)} =$$

Используем:

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \delta(1) & \delta(2) & \dots & \delta(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta(1)^{-1} & \delta(2)^{-1} & \dots & \delta(n)^{-1} \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

$sgn(\delta^{-1}) = sgn(\delta)$  так как  $sgn(\delta * \delta^{-1}) = sgn(\delta) * sgn(\delta^{-1}) = 1$

$$= \sum_{\delta \in S_n} sgn(\delta^{-1}) b_{\delta^{-1}(1)1} b_{\delta^{-1}(2)2} * \dots * b_{\delta^{-1}(n)n} = \sum_{\delta \in S_n} sgn(\delta^{-1}) * a_{1\delta^{-1}(1)} * a_{2\delta^{-1}(2)} * \dots * a_{n\delta^{-1}(n)}$$

Переименуем  $\tau = \delta^{-1}$

$$= \sum_{\tau \in S_n} sgn(\tau) * a_{1\tau_1} * \dots * a_{n\tau_n} = \det A \blacksquare$$

№2 Определитель линеен по строкам и столбцам т.е. пусть  $A = (A_1, \dots, A_n)$  – матрица как набор строк

Тогда:

$$a) \det(A_1, \dots, A'_i + A''_i, \dots, A_n) = \det(A_1, \dots, A'_i, \dots, A_n) + \det(A_1, \dots, A''_i, \dots, A_n)$$

$$b) \det(A_1, \dots, \alpha * A_i, \dots, A_n) = \alpha * \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_n)$$

Пример:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3+x \\ 2 & 7+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & x \end{vmatrix} = (1*7 - 3*2) + x * \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - x$$

## 6 test

**Замечание** Для однородной СЛАУ  $Ax = 0$  теорема Кронекера-К. выполняется всегда:  $RgA = Rg(A|O)$  - всегда есть решения

### Однородные СЛАУ

Рассмотрим ОСЛАУ  $Ax = 0$  (где  $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ )

**Определение:** Любые  $n - r$  линейно независимых столбцов (где  $n - r$  - число неизвестных,  $r = RgA$ ) являются решениями однородных СЛАУ  $Ax = 0$ , называют фундаментальной системой решений (ФСР) однородной СЛАУ  $Ax = 0$

**Теорема:** (о существовании ФСР): Рассмотрим ОСЛАУ  $Ax = 0$  У неё  $\exists k = n - r$  (где  $n$  - число неизвестных),  $r = RgA$ ) линейно независимых решений

$\square$  Предположим, что БМ, расположена в левом верхнем углу матрицы  $A$ . Пусть  $RgA = R$  А = рисунок вставим потом1

По теореме о БМ строки  $A_{r+1}, \dots, A_m$  линейно выражаются через базисные строки  $A_1, \dots, A_r$

Сделаем элементарные преобразования:  $A_{r+1} -> A_{r+1} - \alpha_1 A_1 - \dots - \alpha_r A_r$

$A_m -> A_m - \mu_1 A_1 - \dots - \mu_r A_r$

Получим матрицу  $A'$ , у которой последние  $m - r$  строк равны 0

А = рисунок 2

Элементарные преобразования строк матрицы  $A$  (А следовательно и строк расширенной матрицы  $(A|O)$ ) соответствуют эквивалентным преобразованиям уравнений исходной ОСЛАУ  $Ax = 0 \Rightarrow$  исходная ОСЛАУ  $Ax = 0$  эквивалентна СЛАУ  $A'x = 0$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r + a_{1r+1}x_r + 1 + \dots + a_{11}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r + a_{rr+1}x_r + 1 + \dots + a_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

Будем называть переменные, отвечающие базисны столбцам, главными (или базисными), а все остальные переменные свободными

В(\*)  $x_1, \dots, x_r$  - главные (их  $r = RgA$ ),  $x_{r+1}, \dots, x_n$  - свободные (их  $n - r$  штук)

Перепишем (\*) так чтобы слева остались только главные переменные, а справа свободные

\*\*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_r - \dots - a_{11}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_r - \dots - a_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

Присвоим свободные переменные  $x_{r+1}, \dots, x_n$  след. наборы значений  
рисунок3

Для каждого набора решим СЛАУ (\*\*)

Она всегда имеет решение, т.к. это СЛАУ с квадратной невырожденной матрицей (её  $\det = M \neq 0$ , т.к. это БМ) (решения можно найти например по формулам Крамера)

Получим следующие решения: рисунок4

$\Rightarrow$  столбцы рисунок5

являющиеся решениями СЛАУ (\*\*\*)  $\Leftrightarrow$  (\*)  $\Leftrightarrow$  исходной СЛАУ  $Ax = 0$  (здесь  $k = n - r = n - RgA$ )

Покажем, что  $\Phi_1, \dots, \Phi_k$  линейно независимы. Составим матрицу  $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_k)$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{r1} & \phi_{r2} & \dots & \phi_{rk} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$M_{r+1, \dots, n}^{1, \dots, k} = |E| = 1 \neq 0 \Rightarrow$  это БМ в матрице  $\Phi$  размера  $n \times k \Rightarrow$  по теореме о БМ столбцы  $\phi_1, \dots, \phi_k$  - линейно независимы  $\Rightarrow$  по определению  $k = n - r$  линейно независимых решений  $\phi_1, \dots, \phi_k$  образуют ФСР ОСЛАУ  $Ax = 0$  ■

**Замечание 1:** Построенная в ходе доказательства ФСР называется нормальной (значения свободных переменных образуют столбцы единичной матрицы  $E$  т.е. в каждом столбце ФСР 1 свободная переменная = 1, остальные свободные переменные = 0)

**Замечание 2:** Различных ФСР бесконечно много (при  $k = n - r >= 1$ ) т.к. значения свободных переменных можно брать любыми с условием, чтобы на них образовался БМ в матрице  $\Phi$  ("таблице ФСР"), и тоже получим ФСР ( $n - r$  линейно независимых решений)

**Следствие (из теоремы о существовании ФСР):** (Критерий существования ненулевого решения однородной квадратной СЛАУ)

пусть  $A$  - квадратная матрица. Тогда ОСЛАУ  $Ax = 0$  имеет ненулевое решение  $\Leftrightarrow \det A = 0$

$\square$  Необходимость ( $\Rightarrow$ ): Дано:  $Ax = 0$  Доказать:  $\det A = 0$

Предположим противное

Предположим, что  $\det A \neq 0 \Rightarrow$  по формулам Крамера СЛАУ имеет единственное решение, но всегда есть решение  $x = 0 \Rightarrow$  других нет - противоречие

Достаточность ( $\Leftarrow$ ): Дано:  $\det A = 0$

Доказать:  $\exists$  ненулевое решение

Если  $\det A = 0 \Rightarrow RgA \leq n$  Пусть  $RgA = r$  По теореме о существовании ФСР найдётся  $n - r > 0$  линейно независимых решений - они и будут ненулевыми решениями (т.к.  $\forall$  система, содержащая нулевой столбец является линейно зависимой) ■

**Теорема:** (о структуре общего решения ОСЛАУ)

Пусть  $\phi_1, \dots, \phi_k$  - ФСР однор. СЛАУ  $Ax = 0$  (где  $k = n - r$ ,  $n$  - число переменных,  $r = RgA$ )

Тогда  $\forall$  решение этой ОСЛАУ можно представить в виде линейной комбинации столбцов ФСР:

$$x = c_1 * \phi_1 + \dots + c_k * \phi_k$$

□ Пусть  $x^o = (x_1^o, \dots, x_n^o)^T$  - произвольное решение ОСЛАУ  $Ax = 0$ . Покажем, что  $x^o$  линейно зависима через столбцы ФСР  $\phi_1, \dots, \phi_k$

Предположим, что БП расположена в левом верхнем углу матрицы  $A$ .

Тогда исходная СЛАУ эквивалентна следующей СЛАУ:

(1)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

Решим (1) относительно главных переменных  $x_1, \dots, x_r$  (как решение матричного уравнения или методом Крамера или методом Гаусса) - всегда существует решение, т.к. это квадратная невырожденная СЛАУ (в левом углу БМ)

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{1r+1}x_1 + \dots + \alpha_{1n}x_n \\ \dots \\ x_r = \alpha_{r+r+1}x_r + \dots + \alpha_{rn}x_n \end{cases}$$

### Свойства сложения и умножения комплексных чисел

$$\forall z_1, z_2, z_3, z \in \mathbb{C}$$

№1  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$  - коммутативность

№2  $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$  - ассоциативность

№3 Существует нейтральный элемент по сложению -  $O = (0, 0) \in \mathbb{C}$ :

$$z + 0 = 0 + z = z \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ (Ноль)}$$

№4  $\forall z \in \mathbb{C} \exists -z \in \mathbb{C} : z + (-z) = -z + z = 0$

Т.е.

$$\forall z \exists$$

противоположный или обратный элемент по сложению.

№5  $z_1 * z_2 = z_2 * z_1$  - коммутативность

№6  $z_1 * z_2 * z_3 = z_1 * z_2 * z_3$  - ассоциативность

№7  $\exists e \in \mathbb{C} : z * e = e * z = z \quad \forall z$  Существует единица - нейтральный элемент по умножению ( $e = (1, 0)$ )

№8  $\forall z \neq 0 \exists z^{-1} \in \mathbb{C} : z * z^{-1} = z^{-1} * z = e$  Существует обратный элемент по умножению )

№9  $z_1 * (z_2 + z_3) = z_1 * z_2 + z_1 * z_3$  Дистрибутивность умножения относительно сложения

**Замечание:** Эти 9 свойств-аксиом числового поля которые и позволяют называть комплексные числа числами

## 6.1 Тригонометрическая форма

Здесь будет картинка

Перейдём к полярным координатам  $(r, \phi)$

$$\begin{cases} x = r * \cos\phi \\ y = r * \sin\phi \end{cases}$$

Тогда:

$z = x+iy = r*\cos\phi+ir*\sin\phi = r(\cos\phi+i\sin\phi)$  = тригонометрическая форма комплексного числа

**Определение:**

№1  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  – модуль комплексного числа (угол между положительным направлением вещественой оси и вектором)

**Обозначение:**

$\phi = \operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ , где  $\arg z$  - главное значение аргумента, его выбирают произвольно на

## 6.2 Умножение и деление в тригонометрической форме

№1 Умножение.  $z_1 * z_2 = r_1 * r_2 (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2))$

№2 Деление. ( $z_2 \neq 0$ ) :  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\phi_1 - \phi_2) - i\sin(\phi_1 - \phi_2))$

□Умножение:  $z_1 * z_2 = r_1 * r_2 * (\cos\phi_1 + i\sin\phi_1) * (\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) = r_1 * r_2 = (\underbrace{\cos\phi_1 \cos\phi_2 - \sin\phi_1 \sin\phi_2}_{\text{коэффициент}} \cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2))$

**Теорема (Муавра)**

$$\forall z \in \mathbb{C} \forall n \in \mathbb{N} z^n = r^n * \cos(n\phi) + i\sin(n\phi)$$

□По индукции:  $n = 1 \Rightarrow z = r(\cos\phi + i\sin\phi) =$  база индукции, верно

Пусть верно для  $n = k$ , покажем для  $n = k + 1$  (шаг индукции)

$$z^{k+1} = z^k * z = r^k (\cos k\phi + i\sin k\phi) * r * (\cos\phi + i\sin\phi) = r^{k+1} (\cos((k+1)\phi) + i\sin((k+1)\phi)) \blacksquare$$

### 6.3 Извлечение комплексного корня:

**Теорема:**  $\forall$  комплексное число  $w \neq 0 (w \in \mathbb{C})$  имеет ровно  $n$  различных корней  $n$ -ой степени, т.е. так

$\square$  Как их найти?

№1 Представим  $w$  в тригонометрической форме:  $w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi) (\rho, \psi$  даны по условию)

№2 Ищем корни тоже в тригонометрической форме:  $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$

№3 По условию  $w = z^n \Rightarrow$  по формуле Муавра  $z^n = r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$

№4 Приравняем модули и аргументы:

$$z^n = w \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = \rho (\rho, r \in \mathbb{R}_1 > 0) \\ n\phi = \psi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \phi = \frac{\psi + 2\pi k}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

5. Заметим, что достаточно брать  $k = \overline{0, n-1}$  т.к. начиная с  $k = n$  корни станут повторяться  $\Rightarrow$  Су

$$\Rightarrow \sqrt[n]{w} = \left\{ \sqrt[n]{\rho} \left( \cos \left( \frac{\psi + 2\pi k}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\psi + 2\pi k}{n} \right) \right) \mid k = \overline{0, n-1} \right\} \blacksquare$$

### 6.4 Геометрическая интерпретация

При

$$k = 0, \phi_0 = \frac{\psi}{n}$$

соответствует первому корню,  $\frac{2\pi i}{n}$  - угол между соседними корнями - "шаг"

Здесь будет картиночка чуть позже

Корни лежат в вершинах правильного  $n$ -угольника, вписанного в окружность радиуса  $\sqrt[n]{\rho}$ . При этом 1-ый корень  $z_0$  имеет аргумент  $\phi_0 = \frac{\psi}{n}$ , а каждый следующий корень получен поворотом на угол  $\frac{2\pi}{n}$ .

**Пример:**

$\sqrt[6]{1}$  - Найти все комплексные корни

$$1 = 1 * (\cos 0 + i \sin 0) \Rightarrow \rho = 1, \psi = 0 (+2\pi k)$$

$$\sqrt[6]{1} = \left\{ \sqrt[6]{1} \left( \cos \frac{0 + 2\pi k}{6} + i \sin \frac{0 + 2\pi k}{6} \right), k = \overline{0, 5} \right\} = \left\{ \cos \frac{\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi k}{3}, k = \overline{0, 5} \right\}$$

$$k = 0 \Rightarrow \phi_0 = 0, \text{ шаг } = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

Здесь будет ещё один рисунок

## 6.5 Формула Эйлера

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi \quad \forall \phi \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \cos\phi = F e * e^{i\phi} \\ \sin\phi = I m * e^{i\phi} \end{cases}$$

**Замечание:** Тождество Эйлера:  $e^{i\pi} + 1 = 0$

**Следствие:**

$$\begin{cases} e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi \\ e^{-i\phi} = \cos\phi - i\sin\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\cos\phi = e^{i\phi} + e^{-i\phi} \\ 2\sin\phi = e^{i\phi} - e^{-i\phi} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\cos\phi = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} \text{ и } \sin\phi = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2}$$

## 6.6 Комплексные многочлены

**Теорема:** "Основная" теорема алгебры

Для любого многочлена с комплексными коэффициентами:

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + z_0, a_i \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$$

Существует корень уравнения  $f(z) = 0$ , и этот корень всегда принадлежит  $\mathbb{C}$

**Замечание:** Это утверждение означает, что поле комплексных чисел алгебраически замкнуто. (у  $\forall$  многочлена с коэффициентами из  $\mathbb{C}$  есть корень из  $\mathbb{C}$ )

Это не так для  $\mathbb{Q}$  (например  $x^2 - 2$  имеет корень  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ )

и не так для  $\mathbb{R}$ :  $x^2 + 1$  имеет комплексные корни  $\pm i \notin \mathbb{R}$

**Теорема (Безу)** Остаток от деления многочлена  $f(x)$  на  $x - c$  (что?) есть  $f(c)$

□ Разделим  $f(x)$  с остатком на  $x - c$ :  $f(x) = (x - c) * Q(x) + R(x)$ , где  $\deg R(x) < \deg(x - c) = 1 \Rightarrow$  остаток  $R(x) = \text{const} \Rightarrow f(c) = (c - c)Q(c) + \text{const} \Rightarrow R(x) = f(c)$  ■

**Определение:** Разложение многочлена  $f(x) = g(x) * h(x)$  будем называть нетривиальным если

$$\begin{cases} \deg g < \deg f \\ \deg h < \deg f \end{cases}$$

, где  $\deg f$  - степень многочлена

**Пример:**  $(x^2 + 1)(x - 1)$  - нетривиальный т.к.

$$\begin{cases} 2 < 3 \\ 1 < 3 \end{cases}$$

**Определение:** Многочлен называется приводимым если существует нетривиальное разложение  $f(x) = g(x) \cdot h(x)$  и неприводимым в противном случае

**Утверждение:** Любой многочлен степени  $n \in \mathbb{N}$  раскладывается в произведение неприводимых многочленов

**Частные случаи**

№1 Многочлен над  $\mathbb{C}$  (с коэффициентами из  $\mathbb{C}$ ) степени  $n$  всегда разлагается в произведение степеней линейных множителей

$f(z) = a_n(z - z_1)^{\alpha_1} \dots (z - z_k)^{\alpha_k}$ , где  $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = n, \alpha_i \in \mathbb{N}$  - кратности корней,  $z_i \in \mathbb{C}$  - корни многочлена,  $a_n \in \mathbb{C}$

## №2 Разложение над $\mathbb{R}$

**Утверждение:** Если  $z_0 \in \mathbb{C}$  является корнем многочлена с вещественными корнями, то и  $z_0$  тоже является корнем этого многочлена

□ Пусть  $z_0 \in \mathbb{C}$  - корень  $f(x) \Rightarrow f(z_0) = 0$ , т.е.  $f(z_0) = a_n \cdot z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_1 z_0 + a_0 = 0$   
 $(*)$

Рассмотрим комплексное сопряжение равенства  $(*)$   $\overline{f(z_0)} = \overline{a_n} \cdot \overline{z_0^n} + \overline{a_{n-1}} \overline{z_0^{n-1}} + \dots + \overline{a_1 z_0} + \overline{a_0} = \overline{0} = 0$

Но  $a_i \in \mathbb{R}$  по условию  $\Rightarrow \overline{a_i} = a_i \Rightarrow a_n \cdot \overline{z_0^n} + a_{n-1} \overline{z_0^{n-1}} + \dots + a_1 \overline{z_0} + a_0 \Leftrightarrow f(\overline{z_0}) = 0$ , т.е.  $\overline{z_0}$  - тоже корень  $f(x)$  ■

**Замечание:**  $(z - z_0)(z - \overline{z_0}) = z^2 - z_0 \cdot z - \overline{z_0} \cdot z + z_0 \cdot \overline{z_0} = z^2 - (z_0 + \overline{z_0}) \cdot z + |z_0|^2 =$   
(если  $z_0 = x + iy$ ,  $\overline{z_0} = x - iy \Rightarrow z_0 + \overline{z_0} = 2x = 2\operatorname{Re} z_0 \in \mathbb{R}$ )

$= z^2 - \underbrace{2\operatorname{Re} z_0}_{\in \mathbb{R}} \cdot z + \underbrace{|z_0|^2}_{\in \mathbb{R}}$  многочлен от  $z$  с вещественными коэффициентами

Соответственно, разложение на неприводимые множители над  $\mathbb{R}$  имеет вид:

$f(x) = a_n(x - c_1)^{k_1} \dots (x - c_s)^{k_s} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_tx + q_t)^{l_t}$ , где

$a_n, c_i, p_j, q_j \in \mathbb{R}, k_i, l_j \in \mathbb{N}$

Здесь квадратичные сомножители не имеют вещественных корней, а обладают парой комплексных сопряжённых корней с ненулевой мнимой частью (дискриминант  $D < 0$ )

### Теорема Виета

Пусть  $c_1, \dots, c_n$  - корни многочлена степени  $n$

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$$

$$\begin{cases} a_1 = -(c_1 + \dots + c_n) \\ a_2 = c_1 c_2 + c_1 c_3 + \dots + c_{n-1} c_n \\ \vdots \\ a_n = (-1)^n \cdot c_1 \dots c_n \end{cases}$$

Т.е.  $(-1)^j a_j$  равно сумме всех возможных произведений  $j$  корней

**Пример** ( $n = 3$ ):

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = -a \\ c_1 \cdot c_2 + c_1 \cdot c_3 + c_2 \cdot c_3 = b \\ c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 = -c \end{cases}$$

На этом комплексное заканчивается

## 7 Аналитическая геометрия

**Определение:** Угол между векторами  $a$  и  $b$ .

Отложим  $a$  и  $b$  из одной точки, назовём углом  $\phi$  между векторами  $a$  и  $b$  наименьший из двух плоских углов которые они образуют, т.е.  $\phi \in [0, \pi]$

**Определение:** Если  $\phi = \frac{\pi}{2}$ , то векторы называются ортогональными. Нулевой вектор ортогонален любому вектору

**Определение:** Ортогональная проекция вектора  $\bar{a}$  на направлении вектора  $\bar{b}$  ( $\bar{b} \neq 0$ )

№1 скалярная - число  $\operatorname{Пр}_{\bar{b}} \bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos \phi$ , где  $\phi$  - угол между  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$

№2 векторная - вектор  $\overline{\operatorname{Пр}_{\bar{b}} \bar{a}} = |\bar{a}| \cdot \cos(\phi) \cdot \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$

**Определение:** Векторы  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  называют коллинеарными, если они лежат на одной либо параллельных прямых

**Замечание:** Нулевой вектор коллинеарен любому вектору

**Замечание:** Коллинеарные векторы  $a$  и  $b$  могут быть сонаправленными ( $a \uparrow\uparrow b$ ) или противоположно направленными ( $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$ )

**Определение:** Векторы  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  называются компланарными, если они лежат на прямых, параллельных фиксированной плоскости (т.е. если их отложить из одной точки, они лежат в одной плоскости)

**Определение:** Скалярное произведение векторов - это функция, ставящая в соответствие паре векторов число, удовлетворяющее следующим свойствам: Для любых векторов  $a, b, c$  и для любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1.  $(a, b) = (b, a)$  - симметричность

2.  $(\alpha a + \beta b, c) = \alpha(a, c) + \beta(b, c)$  - линейность

3.  $(a, a) \geq 0$  и  $(a, a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$  - положительная определённость

**Замечание:** В  $V_3$  скалярное произведение задаётся, как  $(a, b) = |a| \cdot |b| \cdot \cos \widehat{a, b}$

**Определение:** Базис - это упорядоченный набор векторов  $a_1, \dots, a_k$  такой что

1.  $a_1, \dots, a_k$  - линейно независимы 2. Любой вектор линейно зависим через  $a_1, \dots, a_k$

**Определение:** Матрицей Грама базиса  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  в  $V_3$  называется матрица, состоящая из попарных скалярных произведений этих векторов

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & (e_1, e_3) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & (e_2, e_3) \\ (e_3, e_1) & (e_3, e_2) & (e_3, e_3) \end{pmatrix}$$

**Утверждение:** Пусть  $\bar{a} = a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 + a_3 \bar{e}_3$

$$\bar{b} = b_1 \bar{e}_1 + b_2 \bar{e}_2 + b_3 \bar{e}_3$$

- разложение векторов  $a$  и  $b$  по базису  $e$

$$\text{Тогда } \boxed{(\bar{a}, \bar{b})} = (a_1 \ a_2 \ a_3) \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & (e_1, e_3) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & (e_2, e_3) \\ (e_3, e_1) & (e_3, e_2) & (e_3, e_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_e^T \Gamma b_e$$

, где

$$a_e = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, b_e = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

- координаты векторов  $a$  и  $b$  в базисе  $e_1, e_2, e_3$

□ ■

**Определение:** Упорядоченную тройку векторов  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  называют правой тройкой, если со стороны вектора  $\bar{c}$  (с конца) кратчайший поворот от вектора  $\bar{a}$  до вектора  $\bar{b}$  происходит против часовой стрелки

В противном случае тройка векторов называется **левой** (если поворот по часовой стрелке)

**Определение:** Вектор  $\bar{c}$  называется векторным произведением векторов  $a$  и  $b$  если выполняются 3 свойства

1.  $|c| = |a| \cdot |b| \cdot \sin(\phi)$ , где  $\phi$  - угол между  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$

2.  $\bar{c} \perp \bar{a}, \bar{c} \perp \bar{b}$  (ортогонален  $a$  и  $b$ )

3.  $a, b, c$  - правая тройка

Скалярное произв.	Векторное произв.	Смешанное произв.
$(\cdot, \cdot) : V_3 \times V_3 \rightarrow \mathbb{R}$ (число). Обозн.: $\langle x, y \rangle$ , $x \cdot y$ .	$[\cdot, \cdot] : V_3 \times V_3 \rightarrow V$ (вектор). Обозн.: $[x, y]$ , $x \times y$ .	
Опр. $(a, b) =  a  b  \cos(\hat{a}, \hat{b})$ в $V_3$ .	Опр. $c = [a, b]$ , $a, b \in V_3$ . 1) $ c  =  a  b  \sin(\hat{a}, \hat{b})$ .	
Геом. св-ва: $(a, b) = 0 \Leftrightarrow a \perp b$ (а ортогонален b).		
Алгебр. св-ва: 1) Линейность 2) Симметричность 3) Полож.опр-ть $(a, a) \geq 0$ и $(a, a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ .		
Вычисл. в координатах: В ОНБ: $(a, b) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ В произв. б-се: $(a, b) = a^T \Gamma b$ .		
Геом. приложения: $ a  = \sqrt{(a, a)} = \sqrt{a^2}$ $\cos(a^\circ) = \frac{(a, b)}{ a  b }$ Про $a = \frac{(a, b)}{(b, b)} b$ .		

**Утверждение 1** Векторы  $a$  и  $b$  коллинеарны  $(a \parallel b) \Leftrightarrow [a, b] = 0$

$\square \Rightarrow$  Пусть  $a \parallel b \Rightarrow$  либо  $\sin\phi = 0$  ( $\phi = 0$  или  $\phi = \pi$ )

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \text{ хотя бы один} \Rightarrow |[a, b]| = 0 \Rightarrow [a, b] = 0$$

$\Leftarrow$  Пусть  $[a, b] = 0$ . Если один из них = 0  $\Rightarrow$  коллинеарны по определению. Если оба  $\neq 0$ , то из  $|[a, b]| = 0 \Rightarrow \sin\phi = 0 \Rightarrow a \parallel b$  ■

**Определение:** Базис  $e_1, e_2, e_3$  называется правым если тройка векторов  $e_1, e_2, e_3$  правая, и левым если тройка левая.

Далее будем полагать, что рассматривается правый ортонормированный базис  $\{i, j, k\}$

**Утверждение:**

$$[a, b] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \bar{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \bar{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \bar{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$

, где  $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$  и  $\bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}$

$$\square [a, b] = [a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}, b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}] = a_x b_x \underbrace{[i, i]}_{=0} + a_x b_y \underbrace{[i, j]}_{=-k} + a_x b_z \underbrace{[i, k]}_{=-j} + a_y b_x \underbrace{[j, i]}_{=-k} + a_y b_y \underbrace{[j, j]}_{=0} + a_y b_z \underbrace{[k, i]}_{=0} + a_z b_x \underbrace{[k, j]}_{=0} + a_z b_z \underbrace{[k, k]}_{=0}$$

$$= i(a_y b_z - a_z b_y) + j(a_z b_x - a_x b_z) + k(a_x b_y - a_y b_x)$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

■

## 8 Смешанное произведение

**Смешанным произведением** Смешанным произведением векторов  $a, b$  и  $c$  называется число  $([a,b],c)$

**Обозначение:**  $\langle a, b, c \rangle$

**Утверждение:** Пусть  $V$  - объём параллелепипеда построенного на неколлинеарных векторах  $a, b, c$

Тогда:

$$\langle a, b, c \rangle = \begin{cases} V & \text{если } a, b, c \text{ - правая тройка} \\ -V & \text{если } a, b, c \text{ - левая тройка} \end{cases}$$

$\|[a,b]\| = S$  параллограмма на векторах  $a$  и  $b$

Обозначим за  $\bar{l}$  единичный ортогональный  $\bar{l} \uparrow\uparrow [a,b] \Rightarrow [a,b] = S \cdot \bar{l} \Rightarrow \langle a, b, c \rangle = ([a,b],c) = (S \cdot \bar{l}, \bar{c}) = S * \cos \phi$ , где  $\phi$  - угол между  $c$

и  $\phi \in (\frac{\pi}{2}; \pi]$ , если  $a, b, c$  - левая  $\Rightarrow \cos \phi < 0 \Rightarrow |c| * \cos \phi = -h(\phi) \neq \frac{\pi}{2}$  так как  $a, b, c$  не компланарны )

Таким образом

$$\langle a, b, c \rangle = \begin{cases} S \cdot h & \text{если } a, b, c \text{ - правая тройка} \\ -S \cdot h & \text{если } a, b, c \text{ - левая тройка} \end{cases}$$

■  
Следствие 1  $a, b, c$  - компланарны  $\Leftrightarrow \langle a, b, c \rangle = 0$

$\square \Rightarrow$  Пусть  $a, b, c$  - компланарны. Если  $a \parallel b$ , то  $[a,b] = 0 \Rightarrow \langle a, b, c \rangle = 0$

Если  $a \nparallel b$ , то  $[a,b] \perp c$  (так как  $c$  компланарен  $a$  и  $b$ )  $\Rightarrow \langle a, b, c \rangle = 0$

## 9 Прямоугольная декартова система координат

**Определение:** Прямоугольной декартовой системой координат (ПДСК) будем называть пару состоящую из

## 10 Теория Групп. Начало общей алгебры

### 10.1 Алгебраические структуры



#### Эквивалентное определение группы

Множество  $G$  с бинарной операцией  $\times$  называется группой, если:

- 1)  $\forall a, b, c \in G (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$  — ассоциативность
- 2)  $\exists e \in G \forall x \in G e \times x = x \times e = x$  (существует нейтральный элемент)
- 3)  $\forall x \in G \exists x^{-1} \in G : x \times x^{-1} = x^{-1} \times x = e$  (любой элемент обратим)

## Пример

Множество всех невырожденных матриц порядка  $n$  с операциями матричного умножения

Обозначение:  $GL_n(\mathbb{R})$  — общая линейная группа

## Пример

Множество подстановок длины  $n$  с операцией композиции образует группу  $S_n$

Она называется симметрической группой

## Определение

Порядком группы  $G$  называется число элементов в ней (мощность группы)

Обозначение:  $|G|$

## Пример

$$|GL_n(\mathbb{R})| = \infty, |S_n| = n!$$

## Определение

Группа с коммутативной бинарной операцией называется абелевой

## Пример

$$(\mathbb{Z}, +) — \text{абелева группа}$$

## Определение

Подмножество  $H \subseteq G$  называется подгруппой в группе  $G$ , если:

- 1)  $e \in H$
- 2)  $\forall h_1, h_2 \in H : h_1 \times h_2 \in H$  (замкнутость относительно бинарной операции)
- 3)  $\forall h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H$  (замкнутость относительно взятия обратного элемента)

Другими словами, само  $H$  является группой относительно операций в  $(G, \times)$ , (т.е групповой операции)

## Пример

- 1)  $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$  — специальная линейная подгруппа (т.к  $\det(E) = 1, \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = 1 \cdot 1 = 1, \det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{1} = 1$ )

- 2)  $A_n = \{\delta \in S_n \mid \operatorname{sgn} \delta = 1\}$  — подгруппа, четных подстановок длины  $n$ . Она называется знакопеременной

$\prod_{i < j} (x_i - x_j)$  — знакопеременный многочлен,  $\det$  Вандермонда. Подстановки из  $A_n$  не меняют его знак

## Определение

Подгруппа  $H$  называется собственной подгруппой в  $G$ , если  $H \neq \{e\}, H \neq G, (SL_n(\mathbb{R}))_n A_n$  — собств. подгруппы в  $GL_n(\mathbb{R})$  и  $S_n$  соотв.)

$$|A_n| = \frac{n!}{2}$$

## Критерий подгруппы

Пусть  $H$  — подмножество в группе  $G$ .

$H$  является подгруппой  $\Leftrightarrow \forall h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1 \times h_2^{-1} \in H$

□ Необходимость ( $\Rightarrow$ ). Дано, что  $H$ -подгруппа. Тогда  $\forall h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_2^{-1} \in H$  по определению,  $\Rightarrow$  и произведение двух элементов  $h_1$  и  $h_2^{-1}$  из  $H$  тоже лежит в  $H$

Достаточность ( $\Leftarrow$ )

Дано:  $\forall h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1 \times h_2^{-1} \in H$

Доказать:

- 1)  $e \in H$
- 2)  $h_1 \times h_2 \in H \quad \forall h_1, h_2 \in H$
- 3)  $h^{-1} \in H \quad \forall h \in H$

Поскольку  $h_1$  и  $h_2$  произвольны, возьмем  $h_2 = h_1 \Rightarrow h_1 \times h_1^{-1} \in H$ , то есть  $e \in H \Rightarrow$  выполнено 1)

Возьмем  $h_1 = e \Rightarrow \forall h_2 \in H \Rightarrow h_2^{-1} \in H$ , т.е выполнено 3)

Пусть  $h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_2^{-1} \in H$ . Следовательно,  $h_1 \times (h_2^{-1})^{-1} \in H$ , то есть  $h_1 \times h_2 \in H \Rightarrow$  выполнено 2) ■

## 10.2 Гомоморфизмы

### Определение

Отображение,  $f : G_1 \rightarrow G_2$ . (Здесь  $(G_1, \times)$  и  $(G_2, \circ)$  — группы) называется гомоморфизмом групп, если  $\boxed{\forall a, b \in G \Rightarrow f(a \times b) = f(a) \circ f(b)}$ . Говорят, что  $f$  уважает операцию.

### Пример

- 1)  $\det : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^\times = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$  — группа

Т.е  $A \xrightarrow{\det} \det A \in \mathbb{R}^\times \quad \forall A \in GL_n(\mathbb{R})$

$(\det A \cdot B = \det A \cdot \det B \Rightarrow \det — \text{гомоморфизм групп})$

- 2)  $G_1 = (\mathbb{R}_+, \cdot)$  — группа  $\{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ ,  $G_2 = (\mathbb{R}, +)$

Рассмотрим  $f = \ln x, f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

$\forall a, b \in G_1 (a > 0, b > 0) \Rightarrow \ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b \in G_2$  — уважает операцию  $\Rightarrow$  логарифм — гомоморфизм групп.

## Определение

Инъективный гомоморфизм называется мономорфизмом.

## Определение

Сюръективный гомоморфизм называется эпиморфизмом.

## Определение

Биективный гомоморфизм называется изоморфизмом.

## Пример

- 1)  $\det$  — эпиморфизм
- 2)  $\ln x$  — изоморфизм

## Замечание

Если две группы изоморфны, то они тождественно неразличимы с точки зрения алгебры.

Обозначение  $G_1 \cong G_2$  ( $G_1$  и  $G_2$  изоморфны)

## Пример

- 1)  $(\mathbb{R}_+, \cdot) \cong (\mathbb{R}, +)$
- 2)  $G_1$  — группа движений (т.е отображений, переводящих фигуру в себя) правильного треугольника на плоскости:

- повороты ( $p_0$  — тождественное отображение,  $p_{\frac{2\pi}{3}}, p_{\frac{4\pi}{3}} = p_{-\frac{2\pi}{3}}$ )

- отражения относительно осей симметрии ( $s_1, s_2, s_3$ )

Закодируем движения фигуры подстановками из  $S_3$ )

$$G_2 = S_3 = \{Id, (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

$$p_0 \sim Id$$

$$p_{\frac{2\pi}{3}} \sim (123)$$

$$p_{\frac{4\pi}{3}} \sim (123)^2 = (132)$$

$$s_1 \sim (23)$$

$$s_2 \sim (13)$$

$$s_3 \sim (12)$$

Построили гомоморфизм, даже изоморфизм.

## Определение

Группа диэдра — группа движений (симметрий) правильного  $n$ -угольника на плоскости, включающая вращения и отражения, переводящие фигуру в себя.

Обозначение:  $D_n$ ,  $|D_n| = 2n$ , так как там есть  $n$  вращений вокруг центра и  $n$  отражений (осевых симметрий)

### Замечание

$D_3 \cong S_3$  (пр.2)

## 10.3 Таблица Кэли

### Определение

Таблица Кэли алгебраической структуры (в частности, группы) называется матрица:

*	$g_1$	$g_2$	$\dots$	$g_n$	$\dots$
$g_1$	$g_1 * g_1$	$\cancel{g_1 * g_2}$	$\dots$	$\cancel{g_1 * g_n}$	$\dots$
$g_2$	$\cancel{g_2 * g_1}$	$g_2 * g_2$	$\dots$	$\cancel{g_2 * g_n}$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$g_n$	$g_n * g_1$	$g_n * g_2$	$\dots$	$g_n * g_n$	$\dots$

Рис. 1: таблица умножения

### Примечание

Если таблица Кэли симметрична, то группа абелева

### Примечание

Если  $G$ -группа, то в ее таблице Кэли каждый элемент встречается только 1 раз в каждой строке и каждом столбце

Так как если  $g_1 \times g_2$