

Коллоквиум по матану ПИ 1 курс весна

github.com/int28t/hse-se-lecture-notes

Содержание

1	Предел функции в точке и на бесконечности: определения по Коши и по Гейне. Эквивалентность двух определений. Односторонние пределы.	
	Бесконечный предел.	2
1.1	Предел функции в точке	2
1.2	Предел функции на бесконечности	2
1.3	Эквивалентность определений	3
1.4	Односторонние пределы	3
1.5	Бесконечный предел	5
2	Арифметика предела функции. Предельный переход в неравенствах.	
	Теорема о зажатой функции.	6
2.1	Арифметика предела функции	6
2.2	Предельный переход в неравенствах	6
2.3	Теорема о зажатой функции	6
3	Теорема о пределе сложной функции. Первый замечательный предел.	7
3.1	Теорема о пределе сложной функции	7
3.2	Первый замечательный предел	7
4	Непрерывность функции в точке и на множестве. Область непрерывности функций: степенной (для натурального показателя), тригонометрических.	8
4.1	Непрерывность функции в точке и на множестве	8
4.2	Область непрерывности функций: степенной (для натурального показателя), тригонометрических	8
5	Свойства непрерывных на отрезке функций: достижение точной верхней и нижней грани; принимает все промежуточные значения.	9

1 Предел функции в точке и на бесконечности: определения по Коши и по Гейне. Эквивалентность двух определений. Односторонние пределы. Бесконечный предел.

1.1 Предел функции в точке

Определение по Коши

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, если

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) |f(x) - A| < \varepsilon \\ \Updownarrow \\ \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta |f(x) - A| < \varepsilon \end{aligned}$$

Определение по Гейне

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, если истинна импликация

$$\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0, x_n \neq x_0} A$$

1.2 Предел функции на бесконечности

Определение

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M = M(\varepsilon) \forall x > M : |f(x) - A| < \varepsilon$$

Определение

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M = M(\varepsilon) \forall x < -M : |f(x) - A| < \varepsilon$$

Примечание

$$\overset{\circ}{U}_\delta(+\infty) = (\delta; +\infty), \overset{\circ}{U}_\delta(-\infty) = (-\infty; \delta), \overset{\circ}{U}_\delta(\pm\infty) = (-\infty; \delta) \cup (\delta; +\infty)$$

1.3 Эквивалентность определений

Теорема

Определения предела функции по Коши и Гейне равносильны

Доказательство

(\Rightarrow) :

Имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta |f(x) - A| < \varepsilon$$

Предположим, что посылка истинна. Тогда также имеем:

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0, x_n \neq x_0, \text{ то есть } \forall \omega > 0 \exists N_1(\omega) \forall n > N_1(\omega) 0 < |x_n - x_0| < \omega$$

Хотим:

$$f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} A, \forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \forall n > N_2(\varepsilon) |f(x_n) - A| < \varepsilon$$

Чтобы $|f(x_n) - A| < \varepsilon$ нужно $0 < |x_n - x_0| < \delta(\varepsilon)$ (Подставили в определение Коши $f(x_n)$ вместо $f(x)$). Поэтому возьмем $\omega = \delta(\varepsilon)$.

Получаем $N_1(\delta(\varepsilon))$ и $\forall n > N_1(\delta(\varepsilon)) 0 < |x_n - x_0| < \delta(\varepsilon)$ и тогда $|f(x_n) - A| < \varepsilon$

Возьмем $N_2(\varepsilon) = N_1(\delta(\varepsilon))$

(\Leftarrow) :

Имеем:

$$\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} A$$

$$\underbrace{x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0}_{x_n \neq x_0}$$

Пп т.е верно:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x(\delta) \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) |f(x) - A| \geq \varepsilon$$

Для каждого $\delta = \frac{1}{n}$ найдем $x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$

Получим

$$\underbrace{x_0 - \frac{1}{n}}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0} < x_n < \underbrace{x_0 + \frac{1}{n}}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0}$$

$$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} : x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0, x_n \neq x_0$$

Значит $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} A$

Но $|f(x) - A| \geq \varepsilon$. Получили противоречие (расписать определение и в качестве ε взять ε_0)

1.4 Односторонние пределы

Определение

Односторонним пределом $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ называется такое число, что:

- $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall x : 0 < x - x_0 < \delta(\varepsilon) |f(x) - A| < \varepsilon$ — **правосторонний предел**

- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall x : 0 < x_0 - x < \delta(\varepsilon) |f(x) - A| < \varepsilon$ — левосторонний предел

Теорема

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

Доказательство

(\Rightarrow) :

Пусть

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta |f(x) - A| < \varepsilon$$

Тогда, если $0 < x - x_0 < \delta$, автоматически выполнено $0 < |x - x_0| < \delta$, следовательно

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

Значит

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$$

Аналогично, если $0 < x_0 - x < \delta$, то снова $0 < |x - x_0| < \delta$, и

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

Значит

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$$

(\Leftarrow) :

Пусть

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$$

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) \forall x : 0 < x - x_0 < \delta_1 |f(x) - A| < \varepsilon$$

и

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) \forall x : 0 < x_0 - x < \delta_2 |f(x) - A| < \varepsilon$$

Положим

$$\delta = \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$$

Тогда из условия

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

следует либо

$$0 < x - x_0 < \delta$$

либо

$$0 < x_0 - x < \delta$$

В обоих случаях

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

1.5 Бесконечный предел

Определение

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, если

$$\forall M > 0 \exists \delta(M) > 0 \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : f(x) > M$$

Определение

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, если

$$\forall M > 0 \exists \delta(M) > 0 \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : f(x) < -M$$

Определение

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, если

$$\forall M > 0 \exists \delta(M) > 0 \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : |f(x)| > M$$

2 Арифметика предела функции. Пределочный переход в неравенствах. Теорема о зажатой функции.

- 2.1 Арифметика предела функции**
- 2.2 Пределочный переход в неравенствах**
- 2.3 Теорема о зажатой функции**

3 Теорема о пределе сложной функции. Первый замечательный предел.

3.1 Теорема о пределе сложной функции

3.2 Первый замечательный предел

- 4 Непрерывность функции в точке и на множестве. Область непрерывности функций: степенной (для натурального показателя), тригонометрических.**
 - 4.1 Непрерывность функции в точке и на множестве**
 - 4.2 Область непрерывности функций: степенной (для натурального показателя), тригонометрических**

- 5 Свойства непрерывных на отрезке функций: достижение точной верхней и нижней грани; принимает все промежуточные значения.