Семинар 4. Определитель

1 Определение определителя

Все матрицы данного листка предполагаются квадратными, если не оговорено обратное.

Определение. *Определителем* квадратной матрицы A порядка n (обозначение $\det A$, либо $|A|$) называется число, равное

$$\sum_{\sigma} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)},$$

где сумма ведётся по всем подстановкам n элементов, a_{ij} – элемент матрицы A, стоящий в i-ой строке в j-ом столбце, $\sigma(k)$ – число, в которое переходит число k при подстановке σ.

Пример: Найдем определитель матрицы $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$. Для $n = 2$ есть только 2 подстановки: $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ и $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, первая из которых имеет положительный знак, вторая – отрицательный. Таким образом $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Задачи:

1. Найдите определитель $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. С помощью полученной формулы найдите:

   а) $\det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\det \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -b & x & 1 \\ c & 0 & x \end{pmatrix}$; в) $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$.

2. Определите, какие из следующих произведений входят в определитель соответствующего порядка и с каким знаком:

   а) $a_{23}a_{32}a_{14}a_{41}$; б) $a_{25}a_{12}a_{44}a_{31}a_{53}$; в) $a_{34}a_{51}a_{23}a_{14}a_{45}$.

3. Докажите, что определитель матрицы со столбцом нулей равен нулю.

4. а) Чему равен определитель матрицы порядка n с нулями под главной диагональю?

   б) Чему равен определитель матрицы порядка n с нулями над главной диагональю?

2 Свойства определителя

Свойства:

1) При прибавлении к одной строке матрицы другой строки, умноженной на любое число, определитель не меняется;

2) При смене двух строк матрицы местами определитель меняет знак;

3) При умножении строки матрицы на число определитель умножается на то же число;

4) При транспонировании матрицы определитель не меняется.

Задачи:

5. а) Чему равен определитель матрицы порядка n с нулями над побочной диагональю?

   б) Как изменится определитель матрицы порядка n, если матрицу повернуть на $180°$?

   в) Как изменится определитель матрицы порядка n, если матрицу умножить на число x?

6. При каком наименьшем количестве нечётных элементов в целочисленной матрице порядка n, её определитель может быть нечётным?

7. В строчку выписали первые n натуральных чисел, под ней выписали следующие n натуральных чисел и так далее. Найдите определитель матрицы порядка n, заполненной числами таким образом.

8. Докажите, что $\det \begin{pmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{pmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

9. Докажите, что если сумма элементов в каждой строке матрицы равна нулю, то определитель этой матрицы равен нулю.

10. На доске написали n n-значных чисел друг под другом. Студент подумал, что на доске – матрица порядка n и нашел её определитель. Докажите, что полученный определитель делится на НОД чисел, записанных на доске.

3 Определитель и метод Гаусса

11. С помощью элементарных преобразований посчитайте определители следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -8 & -13 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

12. С помощью приведения к треугольному виду посчитайте определители следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \dots & -n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -n & \dots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \dots & b & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & \dots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{pmatrix}$.

13. Пусть A – матрица порядка n, B – матрица порядка m, C – матрица порядка $n+m$, такая что $C = \left(\begin{smallmatrix} A & D \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$. Докажите, что $\det C = \det A \cdot \det B$.

4 ДЗ

1. Проскуряков: 6, 9, 43, 59, 72*, 116, 188, 189, 197, 199, 208*, 216, 229, 230, 231, 259, 279, 283, 284.