Семинар ∞

Все матрицы в этом листке квадратные.

1. Говорят, что матрицы $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ *сопряжены*, если существует такая невырожденная матрица $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, что $A = C^{-1}BC$. Пусть матрицы A и B сопряжены. Докажите, что

   а) $A = B$ тогда и только тогда, когда матрицы B и C коммутируют;

   б) $\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}B$;

   в) $\det A = \det B$

2. Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ — некая фиксированная матрица. Решите матричное уравнение

$$AX - XA = XX^T.$$

3. Пусть A и B — коммутирующие матрицы порядка n (то есть $AB = BA$). Докажите, что

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A^2 - B^2),$$

   где в левой части равенства стоит блочный определитель порядка $2n$.

4. Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $A^{1337} = 0$ (такие матрицы называются *нильпотентными*). Докажите, что $(A - E)$ — обратимая матрица.

5. Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Rg}A = k \in [0, n]$. Чему равен $\mathrm{Rg}\tilde{A}$, где $\tilde{A}$ — союзная матрица?

6. Проверьте для какой-нибудь нетривиальной матрицы порядка 3, что она удовлетворяет следующему уравнению

$$A^3 - (\mathrm{tr}A)A^2 + (M_{11} + M_{22} + M_{33})A - (\det A)E = 0.$$

   Докажите, что данному уравнению удовлетворяет любая матрица порядка 3.

   Комментарий. Это равенство, естественно, можно доказать непосредственной подстановкой матрицы, записанной в общем виде. Вопрос в том, удастся ли придумать более элегантное элементарное решение.

7. Пусть $\mathrm{M}_n(\{-1, 1\})$ — множество матриц порядка n, элементами которых являются 1 и -1.

   а) Найдите максимальный возможный определитель матрицы из $\mathrm{M}_3(\{-1, 1\})$;

   б)* Найдите максимальный возможный определитель матрицы из $\mathrm{M}_n(\{-1, 1\})$.

8. Назовём множество матриц $\mathcal{S}_n = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ порядка n — *системой порождающих*, если любая матрица порядка n может быть выражена в виде полинома от $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

   а) При каких n $\mathcal{S}_n$ может состоять из одной матрицы?

   б) При каких n $\mathcal{S}_n$ может состоять из двух матриц?

   Комментарий. Например, $\{A_1 = E_{12}, A_2 = E_{21}\}$ будет системой порождающих при $n = 2$. Действительно, $A_1A_2 = E_{11}, A_2A_1 = E_{22}$ и для произвольной матрицы можем получить её выражение в виде $A = a_{11}A_1A_2 + a_{12}A_1 + a_{21}A_2 + a_{22}A_2A_1$.