

# Лекции по алгебре (1 курс, 25-26)

[github.com/int28t/hse-se-lecture-notes](https://github.com/int28t/hse-se-lecture-notes)

Михайлец Екатерина Викторовна  
emihaylets@hse.ru  
ТГК: [t.me/alg\\_pi\\_25\\_26](https://t.me/alg_pi_25_26)

## Содержание

<b>1</b>	<b>Матрицы</b>	<b>2</b>
1.1	Свойства сложения матриц . . . . .	2
1.2	Свойства умножения на число . . . . .	3
1.3	Умножение матриц . . . . .	3
1.4	Свойства умножения матриц . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Транспонирование</b>	<b>4</b>
2.1	Свойства транспонирования . . . . .	4
2.2	Элементарное преобразование строк(столбцов) . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Перестановки (Подстановки)</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Определитель</b>	<b>8</b>
5.1	Свойства определителей . . . . .	9
<b>6</b>	<b>test</b>	<b>9</b>

# 1 Матрицы

Матрицей размера/типа/порядка  $n \times m$  называется упорядоченная таблица с  $m$  строками и  $n$  столбцами.

**Обозначение:**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

$i$  - строка,  $j$  - столбец

$M_{mn}(\mathbb{R})$  - множество всех матриц размера  $m \times n$  с вещественными элементами

1) При  $m = n$  матрица называется квадратной порядка  $n$

2) При  $m = 1$  матрица  $1 \times n$  -  $n$ -мерная строка

При  $n = 1$  матрица  $m \times 1$  -  $m$ -мерный столбец

Матрица  $1 \times 1$  - число

3) Матрица состоящая из нулей (т.е.  $a_{ij} = 0 \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ ) называется нулевой матрицей. **Обозначение:**  $\mathbb{O}$

4) Будем называть единичной квадратной матрициу порядка  $n$ , если:

$$a_{ij} = \underbrace{\delta_j^i}_{\text{Символ Кронекера}} = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases}$$

**Обозначение:**

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Определение:** Две матрицы  $A$  и  $B$  называются равными если они одного размера и соответствующие элементы равны (т.е.  $a_{ij} = b_{ij} \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ )

**Определение:** Матрица  $C$  называется суммой матриц  $A$  и  $B$  если все матрицы  $A$ ,  $B$  и  $C$  одинакового размера и  $c_{ij} = b_{ij} + a_{ij}, \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$

**Обозначение:**  $C = A + B$

**Пример:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 1.1 Свойства сложения матриц

1. Коммутативность ( $A + B = B + A$ )

□ Поэлементно:  $[A + B]_{ij} = \underbrace{[A]_{ij} + [B]_{ij}}_{\text{по определению сложения}} = [B]_{ij} + \underbrace{[A]_{ij}}_{\text{вещественные числа коммутативны}}$

$$[A]_{ij} = \underbrace{[B + A]_{ij}}_{\text{по определению сложения}} \blacksquare$$

2. Ассоциативность ( $(A + B) + C = A + (B + C)$ )

3.  $\exists$  нейтральный элемент по сложению т.е.  $\exists$  матрица  $\mathbb{O} \in M_{mn}(\mathbb{R}) \forall A \in M_{mn}(\mathbb{R})$  выполняется  $\mathbb{O} + A = A + \mathbb{O} = A$

□  $[\mathbb{O}]_{ij} = 0$  – нулевая матрица  $\blacksquare$

4.  $\forall$  матрицы  $A \in M_{mn}(\mathbb{R}) \exists B \in M_{mn}(\mathbb{R}) : A + B = B + A = \mathbb{O}$  – нулевая матрица

□  $B_{ij} = -A_{ij} \blacksquare$

**Обозначение:**  $B = -A$  – Обратная по сложению к  $A$  или противоположная

**Определение:** Матрица  $C$  называется произведением числа  $\lambda \in \mathbb{R}$  и матрицы  $A$ , если матрицы  $C$  и  $A$  одинакового размера и  $[C]_{ij} = \lambda * [A]_{ij} \forall i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$

**Обозначение:**  $C = \lambda * A$

**Пример:**

$$2 * \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

**Определение:** Разностью матриц  $A$  и  $B$  называется сумма  $A$  и  $-B$

## 1.2 Свойства умножения на число

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : (\lambda * \mu) * A = \lambda * (\mu * A)$  – ассоциативность относительно умножения на число

$(\lambda + \mu) * A = \lambda * A + \mu * A$  – дистрибутивность относительно умножения чисел

$\lambda * (A + B) = \lambda * A + \lambda * B$  – дистрибутивность относительно сложения матриц

**Это место стоит перепроверить (!!!)**

$1 * A = A$  – унарность

## 1.3 Умножение матриц

Рассмотрим  $A_{m \times n} \in M_{mn}(\mathbb{R}), B_{n \times k} \in M_{nk}(\mathbb{R})$ :

**Определение:** Произведением матрицы  $A_{m \times n}$  и  $B_{n \times k}$  (число столбцов в  $A$  равно числу строк в  $B$ ) называется  $C_{mk}$  где:

$$C_{ij} = \sum_{q=1}^n a_{iq} * b_{qj}$$

$$(C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} \forall i = \overline{1,m}, j = \overline{1,k})$$

**Пример:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{3 \times 2} * \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}_{2 \times 1} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}_{3 \times 1}$$

## 1.4 Свойства умножения матриц

1. Ассоциативность Пусть  $A_{m \times n}, B_{n \times k}, C_{k \times l}$ . Тогда  $(A * B) * C = A * (B * C)$

$$\square [(A * B) * C]_{ij} = \sum_{r=1}^k [A * B]_{ir} * [C]_{rj} = \sum_{r=1}^k \left( \sum_{s=1}^n [A]_{is} * [B]_{sr} \right) * [C]_{rj} = \sum_{r=1}^k \sum_{s=1}^n [A]_{is} *$$

$$[B]_{sr} * [C]_{rj} \quad \underbrace{\quad}_{\text{перегруппируем слагаемые}} \quad \sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^k [A]_{is} * [B]_{sr} * [C]_{rj} = \sum_{s=1}^n [A]_{is} * \left( \sum_{r=1}^k [B]_{sr} * [C]_{rj} \right) =$$

$$\sum_{s=1}^n [A]_{is} * [B * C]_{sj} \quad \underbrace{\quad}_{\text{по определению умножения}} = A * (B * C) \blacksquare$$

2.  $\exists$  Нейтрального элемента по умножению (для квадратных матриц)  $\exists$  матрица  $E \in M_n(\mathbb{R}) : \forall A \in M_n(\mathbb{R}) E * A = A * E = A$

$\square$  Предъявим единичную матрицу

$$[E]_{ij} = \delta_j^i$$

$$[A * E]_{ij} = \sum_{r=1}^n [A]_{ir} * [E]_{rj} = \sum_{r=1}^n [A]_{ir} * \delta_j^r = 0 + \dots + [A]_{ij} + \dots + 0 = [A]_{ij} \forall i, j = \overline{1,n}$$

$E * A$  аналогично  $\blacksquare$

3.  $A * \mathbb{O} = \mathbb{O} * A = \mathbb{O}$  Для квадратных  $A$  и  $\mathbb{O}$  порядка  $n$

Рассмотрим:  $(A + B) * C = A * C + B * C$  – дистрибутивность умножения матриц

**Замечание:** Вообще говоря умножение матриц некоммутативно (даже для квадратных)

**Пример:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

## 2 Транспонирование

**Определение:** Транспонирование — операция, переводящая все строки в столбцы с сохранением порядка, то есть:

$$[A^T]_{ij} = [A]_{ji} \quad \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$$

**Обозначение:**  $A^T$

$$A_{m \times n} \xrightarrow{T} (A^T)_{n \times m}$$

### 2.1 Свойства транспонирования

1.  $(A^T)^T = A$
2.  $(A + B)^T = A^T + B^T$
3.  $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$
4.  $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

□ Пусть матрицы  $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ ,  $B \in M_{nk}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} [(A \cdot B)^T]_{ij} &\stackrel{\text{по определению } T}{=} [A \cdot B]_{ji} && \stackrel{\text{по определению произведения матриц}}{=} \sum_{r=1}^n A_{jr} \cdot B_{ri} = \\ &\stackrel{\text{по коммутативности произведения}}{=} \sum_{r=1}^n B_{ri} \cdot A_{jr} = \sum_{r=1}^n B_{ir}^T \cdot A_{rj}^T = [B^T \cdot A^T]_{ij} \quad \forall i = \overline{1, k}, j = \overline{1, m} \blacksquare \end{aligned}$$

### 2.2 Элементарное преобразование строк(столбцов)

**Определение:** — это 3 следующие операции:

1. Перестановка двух строк в матрице  
 $(i) \Leftrightarrow (k)$  ( $i$ -ая строка меняется местами с  $k$ -ой)
2. Умножение строки на ненулевое число  
 $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0, (i) \Rightarrow \lambda \cdot (i), \lambda \neq 0$
3. Прибавление к  $i$ -ой строке другой  $k$ -ой строки с коэффициентом  $\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$   
 $(i) \Rightarrow (i) + \lambda(k), i \neq k$

**Замечание 1:** Все элементарные преобразования обратимы

**Замечание 2:** Каждое элементарное преобразование строк матрицы можно трактовать как умножение на матрицу слева специального вида (квадратную). Эта матрица получается применением к единичной матрице того же самого элементарного преобразования

**Пример:** (1) элементарное преобразование к  $E$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)-2(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ — матрица элементарного преобразования}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

**Замечание 3:** Преобразования можно применять и к столбцам. Это будет соответствовать умножению справа на матрицу специального вида

**Определение:** Матрица имеет:

- 1) ступенчатый вид, если номера первых ненулевых элементов всех строк последовательно возрастают, такие элементы называются ведущими (нижние ведущие элементы находятся правее, чем верхние), а все нулевые строки стоят внизу
- 2) канонический вид (улучшенные ступенчатый), если матрица имеет ступенчатый вид, в которой все ведущие элементы равны 1, и в любом столбце с ведущими элементами все остальные равны 0

**Теорема о методе Гаусса:** Любую конечную матрицу можно привести к ступенчатому и каноническому виду элементарными преобразованиями строк.

□ Предъявим алгоритм. Берем матрицу  $m \times n$  и двигаемся из левого верхнего угла.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & & \dots & & \\ \dots & & & \dots & \\ a_{m1} & & & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

**п. 1** Если текущий элемент равен 0, тогда переходим к **п. 2**, иначе объявляем текущий элемент ведущим. Прибавляем текущую строку к остальным так, чтобы элементы ниже ведущего (и выше в случае канонического вида) обратились в 0. Пусть  $a_{ij}$  — текущий элемент. Тогда для  $k \neq i$  строки берем  $\lambda = -\frac{a_{kj}}{a_{ij}}$ , где  $a_{ij} \neq 0$  и  $(k) \rightarrow (k) + \lambda(i)$  (для канонического вида  $(i) \rightarrow \frac{1}{a_{ij}}(i)$ , чтобы получить 1 на месте ведущего элемента).

Выбираем новый текущий элемент, смещаюсь в матрице на один столбец вправо и на одну строку вниз  $\Rightarrow$  следующий шаг, повторяем **п. 1**, если это невозможно stop

**п. 2** Если текущий элемент равен нулю, то просматриваем все элементы под ним. Если среди них нет не равных 0, то переходим к **п. 3**. Иначе если в  $k$ -ой строке ненулевой элемент нашелся (под текущим), то  $(i) \leftrightarrow (k)$

**п. 3** Если текущий элемент и все под ним равны 0, то меняем текущий столбец смещаюсь на один столбец вправо. Если возможно, то **п. 1**, иначе stop

Так как матрица имеет конечные размеры, а за 1 итерацию смещается вправо на 1 столбец — процесс преобразования к ступенчатому (каноническому) виду закончится не более чем за  $n$  шагов

### 3 Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Покоординатная запись СЛАУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Rightarrow Ax = b, \text{ где } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$  — столбец неизвестных,  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$  — столбец свободных членов

$$(A|B)_{m \times (n+1)} = \left( \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \text{ — элементарными преобр. к каноническому виду}$$

**Замечание:** Элементарные преобразования матрицы не меняют множество решений СЛАУ

### 4 Перестановки (Подстановки)

**Определение:** Перестановкой чисел  $1, \dots, n$  называется расположение их в определённом порядке.

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

**Пример:**

$$\alpha = (5, 3, 4, 1, 2)$$

**Определение:**  $\alpha_i$  и  $\alpha_j$  образуют инверсию в перестановке если  $\alpha_i > \alpha_j$ , но  $i < j$

**Определение:** Знак перестановки это  $(-1)^n$ , где  $n$  - число инверсий в перестановке

**Обозначение:**  $sgn(\alpha)$

**Пример:**

$$\alpha = \underbrace{(4 \ 5 \ 1 \ 3 \ 6 \ 2)}_{3+3+0+1+1+0}$$

$$sgn(\alpha) = 1$$

**Определение:** Если  $sgn(\alpha) = 1$  то  $\alpha$  - чётная перестановка, если  $sgn(\alpha) = -1$  то  $\alpha$  - нечётная перестановка

**Определение:** Транспозицией называется преобразование при котором в  $\alpha$  меняются местами только  $\alpha_i$  и  $\alpha_j$ , а остальные элементы не меняются

**Утверждение:** Каждая транспозиция меняет чётность перестановки

□ а) Транспозиция соседних элементов:

$$\alpha_1, \dots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n$$

↓

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{i+1}, \alpha_i, \dots, \alpha_n$$

⇒ Число инверсий изменилось на 1 ⇒ знак перестановки поменялся

б)

$$\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_{i+k}, \dots, \alpha_n$$

Меняем  $\alpha_i \leftrightarrow \alpha_{i+k}$  с  $k - 1$  соседних транспозиций

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{i+k}, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n$$

$\Rightarrow k + k - 1 = 2k - 1$  шагов (соседних транспозиций)

$\Rightarrow$  Знак перестановки поменяется ■

**Определение:** Подстановка

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \delta(1) & \delta(2) & \dots & \delta(n) \end{pmatrix}$$

– отображение чисел в себя являющееся взаимо-однозначным

Нижняя строка – перестановка

**Пример:**

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$sgn(\delta) = 1 \quad \delta(2) = 2 \text{ - стационарный элемент}$$

**Определение:** Знаком подстановки называется знак перестановки в её нижней строке

**Обозначение:**  $S_n$  - множество подстановок длины  $n$

$$|S_n| = n!$$
 число элементов и мощность множества

**Замечание:** Транспозиция - нечётная подстановка (в которой  $\alpha_i$  и  $\alpha_j$  переходят друг в друга, а остальные элементы неподвижны)

**Замечание:** Часто используют запись подстановок «в циклах», и каждый элементы выписывается справа

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1 \ 4 \ 3) * \underbrace{(2)}_{\text{можно не писать}} = (1 \ 4 \ 3)$$

Циклическая запись транспозиции:  $(\alpha_i, \alpha_j)$

**Определение:**

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} = (1)(2)(3)\dots(n) = Id$$

называется тождественной подстановкой

**Обозначение:**  $Id$  ( $id$ )

**Определение:** Умножением подстановок называется их последовательное применение (т.е. композиция отображений)

**Пример:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(умножая слева направо)

$$\text{В циклах: } (12) * (132) = (1)(23) = (23)$$

**Замечание:** Умножение подстановок некоммутативно

$$\text{Пример: } (132)(12) = (13) \neq (23)$$

**Замечание:**  $Id$  – нейтральный элемент по умножению

**Замечание:** Подстановку обратную к

$$\delta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \delta(1) & \delta(2) & \delta(3) & \dots & \delta(n) \end{pmatrix}$$

можно получить как

$$\delta^{-1} = \begin{pmatrix} \delta(1) & \delta(2) & \delta(3) & \dots & \delta(n) \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

и отсортировав столбцы

$$\Rightarrow \delta * \delta^{-1} = \delta^{-1} * \delta = Id$$

**Пример:**

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\delta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

**Замечание:**  $\forall$  Подстановку можно представить как произведение транспозиций

$\square$  Запишем подстановку в циклах  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = (\alpha_k, \alpha_{k-1})(\alpha_{k-1}, \alpha_{k-2}) \dots (\alpha_2, \alpha_1)$

- произведение  $k - 1$  транспозиций слева направо ■

**Замечание:**  $sgn(\delta_1 * \delta_2) = sgn(\delta_1) * sgn(\delta_2)$

## 5 Определитель

**Определение** Определителем или детерминантом квадратной матрицы  $A$  порядка  $n$  называется сумма  $n!$  слагаемых следующего вида:

$$\det A = \sum_{\delta \in S_n} sgn(\delta) * a_{1\delta(1)} * a_{2\delta(2)} * a_{3\delta(3)} * \dots * a_{n\delta(n)}, \text{ где}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

и

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \delta(1) & \delta(2) & \delta(3) & \dots & \delta(n) \end{pmatrix}$$

**Обозначение:**  $\det A$  или  $|A|$

**Замечание:** По сути  $\det A$  является суммой произведений элементов матрицы по одному из каждой строки и столбца (стоящие в разных строках и столбцах по всем способам так сделать (с учётом знака))

**Пример:**  $n = 2 \Rightarrow n! = 2! = 2$

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = Id$$

$$\delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} * a_{22} - a_{21} * a_{12}$$

**Пример:**  $n = 3 \Rightarrow n! = 3! = 6$

$$A = \left[ \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13}, & \left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right. \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}, & \left| \begin{array}{cc} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array} \right. \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}, & \left| \begin{array}{cc} a_{31} & a_{32} \\ a_{11} & a_{12} \end{array} \right. \end{array} \right]$$

$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{22}a_{23}a_{11} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$  -  
Правило Саррюса

(Диагонали  $\searrow$  идут с плюсом, диагонали с  $\nearrow$  с минусом)

## 5.1 Свойства определителей

№1  $\det A = \det A^T$  ( $\Rightarrow$  Все свойства  $\det$  верные для строк матрицы справедливы и для столбцов)

$\square B = A^T, b_{ij} = a_{ji}$  Переставим  $b_{i\delta_i}$  по возрастанию номеров столбцов

$$\det B = \sum_{\delta \in S_n} sgn(\delta) * b_{1\delta(1)} * b_{2\delta(2)} * \dots * b_{n\delta(n)} =$$

Используем:

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \delta(1) & \delta(2) & \dots & \delta(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta(1)^{-1} & \delta(2)^{-1} & \dots & \delta(n)^{-1} \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

$sgn(\delta^{-1}) = sgn(\delta)$  так как  $sgn(\delta * \delta^{-1}) = sgn(\delta) * sgn(\delta^{-1}) = 1$

$$= \sum_{\delta \in S_n} sgn(\delta^{-1}) b_{\delta^{-1}(1)1} b_{\delta^{-1}(2)2} * \dots * b_{\delta^{-1}(n)n} = \sum_{\delta \in S_n} sgn(\delta^{-1}) * a_{1\delta^{-1}(1)} * a_{2\delta^{-1}(2)} * \dots * a_{n\delta^{-1}(n)}$$

Переименуем  $\tau = \delta^{-1}$

$$= \sum_{\tau \in S_n} sgn(\tau) * a_{1\tau_1} * \dots * a_{n\tau_n} = \det A \blacksquare$$

№2 Определитель линеен по строкам и столбцам т.е. пусть  $A = (A_1, \dots, A_n)$  – матрица как набор строк

Тогда:

$$a) \det(A_1, \dots, A'_i + A''_i, \dots, A_n) = \det(A_1, \dots, A'_i, \dots, A_n) + \det(A_1, \dots, A''_i, \dots, A_n)$$

$$b) \det(A_1, \dots, \alpha * A_i, \dots, A_n) = \alpha * \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_n)$$

Пример:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3+x \\ 2 & 7+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & x \end{vmatrix} = (1*7 - 3*2) + x * \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - x$$

## 6 test

**Замечание** Для однородной СЛАУ  $Ax = 0$  теорема Кронекера-К. выполняется всегда:  $RgA = Rg(A|O)$  - всегда есть решения

### Однородные СЛАУ

Рассмотрим ОСЛАУ  $Ax = 0$  (где  $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ )

**Определение:** Любые  $n - r$  линейно независимых столбцов (где  $n - r$  - число неизвестных,  $r = RgA$ ) являются решениями однородных СЛАУ  $Ax = 0$ , называют фундаментальной системой решений (ФСР) однородной СЛАУ  $Ax = 0$

**Теорема:** (о существовании ФСР): Рассмотрим ОСЛАУ  $Ax = 0$  У неё  $\exists k = n - r$  (где  $n$  - число неизвестных),  $r = RgA$ ) линейно независимых решений

$\square$  Предположим, что БМ, расположена в левом верхнем углу матрицы  $A$ . Пусть  $RgA = R$  А = рисунок вставим потом1

По теореме о БМ строки  $A_{r+1}, \dots, A_m$  линейно выражаются через базисные строки  $A_1, \dots, A_r$

Сделаем элементарные преобразования:  $A_{r+1} -> A_{r+1} - \alpha_1 A_1 - \dots - \alpha_r A_r$

$A_m -> A_m - \mu_1 A_1 - \dots - \mu_r A_r$

Получим матрицу  $A'$ , у которой последние  $m - r$  строк равны 0

А = рисунок 2

Элементарные преобразования строк матрицы  $A$  (А следовательно и строк расширенной матрицы  $(A|O)$ ) соответствуют эквивалентным преобразованиям уравнений исходной ОСЛАУ  $Ax = 0 \Rightarrow$  исходная ОСЛАУ  $Ax = 0$  эквивалентна СЛАУ  $A'x = 0$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r + a_{1r+1}x_r + 1 + \dots + a_{11}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r + a_{rr+1}x_r + 1 + \dots + a_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

Будем называть переменные, отвечающие базисны столбцам, главными (или базисными), а все остальные переменные свободными

В(\*)  $x_1, \dots, x_r$  - главные (их  $r = RgA$ ),  $x_{r+1}, \dots, x_n$  - свободные (их  $n - r$  штук)

Перепишем (\*) так чтобы слева остались только главные переменные, а справа свободные

\*\*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_r - \dots - a_{11}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_r - \dots - a_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

Присвоим свободные переменные  $x_{r+1}, \dots, x_n$  след. наборы значений  
рисунок3

Для каждого набора решим СЛАУ (\*\*)

Она всегда имеет решение, т.к. это СЛАУ с квадратной невырожденной матрицей (её  $\det = M \neq 0$ , т.к. это БМ) (решения можно найти например по формулам Крамера)

Получим следующие решения: рисунок4

$\Rightarrow$  столбцы рисунок5

являющиеся решениями СЛАУ (\*\*\*)  $\Leftrightarrow$  (\*)  $\Leftrightarrow$  исходной СЛАУ  $Ax = 0$  (здесь  $k = n - r = n - RgA$ )

Покажем, что  $\Phi_1, \dots, \Phi_k$  линейно независимы. Составим матрицу  $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_k)$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{r1} & \phi_{r2} & \dots & \phi_{rk} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$M_{r+1, \dots, n}^{1, \dots, k} = |E| = 1 \neq 0 \Rightarrow$  это БМ в матрице  $\Phi$  размера  $n \times k \Rightarrow$  по теореме о БМ столбцы  $\phi_1, \dots, \phi_k$  - линейно независимы  $\Rightarrow$  по определению  $k = n - r$  линейно независимых решений  $\phi_1, \dots, \phi_k$  образуют ФСР ОСЛАУ  $Ax = 0$  ■

**Замечание 1:** Построенная в ходе доказательства ФСР называется нормальной (значения свободных переменных образуют столбцы единичной матрицы  $E$  т.е. в каждом столбце ФСР 1 свободная переменная = 1, остальные свободные переменные = 0)

**Замечание 2:** Различных ФСР бесконечно много (при  $k = n - r >= 1$ ) т.к. значения свободных переменных можно брать любыми с условием, чтобы на них образовался БМ в матрице  $\Phi$  ("таблице ФСР"), и тоже получим ФСР ( $n - r$  линейно независимых решений)

**Следствие (из теоремы о существовании ФСР):** (Критерий существования ненулевого решения однородной квадратной СЛАУ)

пусть  $A$  - квадратная матрица. Тогда ОСЛАУ  $Ax = 0$  имеет ненулевое решение  $\Leftrightarrow \det A = 0$

$\square$  Необходимость ( $\Rightarrow$ ): Дано:  $Ax = 0$  Доказать:  $\det A = 0$

Предположим противное

Предположим, что  $\det A \neq 0 \Rightarrow$  по формулам Крамера СЛАУ имеет единственное решение, но всегда есть решение  $x = 0 \Rightarrow$  других нет - противоречие

Достаточность ( $\Leftarrow$ ): Дано:  $\det A = 0$

Доказать:  $\exists$  ненулевое решение

Если  $\det A = 0 \Rightarrow RgA \leq n$  Пусть  $RgA = r$  По теореме о существовании ФСР найдётся  $n - r > 0$  линейно независимых решений - они и будут ненулевыми решениями (т.к.  $\forall$  система, содержащая нулевой столбец является линейно зависимой) ■

**Теорема:** (о структуре общего решения ОСЛАУ)

Пусть  $\phi_1, \dots, \phi_k$  - ФСР однор. СЛАУ  $Ax = 0$  (где  $k = n - r$ ,  $n$  - число переменных,  $r = RgA$ )

Тогда  $\forall$  решение этой ОСЛАУ можно представить в виде линейной комбинации столбцов ФСР:

$$x = c_1 * \phi_1 + \dots + c_k * \phi_k$$

□ Пусть  $x^o = (x_1^o, \dots, x_n^o)^T$  - произвольное решение ОСЛАУ  $Ax = 0$ . Покажем, что  $x^o$  линейно зависима через столбцы ФСР  $\phi_1, \dots, \phi_k$

Предположим, что БП расположена в левом верхнем углу матрицы  $A$ .

Тогда исходная СЛАУ эквивалентна следующей СЛАУ:

(1)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

Решим (1) относительно главных переменных  $x_1, \dots, x_r$  (как решение матричного уравнения или методом Крамера или методом Гаусса) - всегда существует решение, т.к. это квадратная невырожденная СЛАУ (в левом углу БМ)

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{1r+1}x_{r+1} + \dots + \alpha_{1n}x_n \\ \dots \\ x_r = \alpha_{r+r+1}x_{r+1} + \dots + \alpha_{rn}x_n \end{cases}$$