Семинар 7+. Матричные разложения

1 Скелетное разложение

Пусть есть матрица A размера $m \times n$ ранга r. Тогда оказывается, что её можно представить в виде произведения $A = BC$ матриц размера $m \times r$ и $r \times n$. Это может оказаться полезным, если r мало. Самый банальный пример — хранение матрицы A занимает mn ячеек, а хранение матриц B и C — $r(m+n)$ ячеек. Впрочем, к этому плюсу прилагается жирный минус — чтобы извлечь какую-либо клеточку исходной матрицы A нужно произвести умножение строки матрицы B на столбец матрицы C, действие вовсе не мгновенное.

И всё же, как же такое разложение найти?

Проделаем действия над строками, приведя матрицу A к улучшенному ступенчатому виду A'. Тогда в качестве матрицы B можно взять матрицу, составленную из столбцов исходной матрицы A, соответствующих лидерам строк матрицы A'; а в качестве матрицы C можно взять ненулевые строки матрицы A'.

1. Найдите скелетное разложение для следующей матрицы
$$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}.$$

2 LU-разложение

Пусть есть произвольная матрица A. Мы хотим разложить её в произведение $A = LU$, где L нижнетреугольная (**l**ower triangular), а U верхнетреугольная (**u**pper triangular).

Будем делать метод Гаусса над матрицей A, применяя только операции 1 типа, причём только сверху вниз (то есть прибавлять строку, умноженную на некоторый коэффициент, к одной из последующих). Тогда если это выйдет, то рано или поздно мы получим ступенчатый (не улучшенный!) вид. Заметим, что он автоматически треугольный (а возможно в нём есть дополнительные нули — это неважно). Обозначим его U.

Если на s-том шаге i-тая строка прибавляется к j-той с коэффициентом λ (ещё раз напомню, что $i < j$), то соответствующая элементарная матрица T_s содержит на диагонали единицы, а в клетке (j, i) число λ. Она нижнетреугольна. Тогда всю процедуру можно записать в виде $T_k T_{k-1} \dots T_2 T_1 A = U$ (здесь $T_1 A$ соответствует результату первого преобразования, $T_2 T_1 A$ результату второго и так далее). Тогда $A = (T_k T_{k-1} \dots T_2 T_1)^{-1} U$ — искомое разложение. Матрицу $L = (T_k T_{k-1} \dots T_2 T_1)^{-1}$ удобнее искать как $T_1^{-1} T_2^{-1} \dots T_k^{-1}$. Сами матрицы T_s^{-1} устроены очень просто — надо в той же клеточке вместо λ поставить $-\lambda$. Осталось все эти матрицы перемножить — тут, увы, никто не поможет. Ну разве что тот мааааленький факт, что для перемножения этих матриц (если все действия сделаны в стандартном порядке, иначе не работает) нужно просто все эти числа $-\lambda$ записать в тех же клеточках в одну общую матрицу (а на диагонали оставить единицы).

Утверждение. Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Для существования LU-разложения матрицы A достаточно, чтобы первые $n-1$ главных угловых миноров ($M_1 = M_1^1, M_2 = M_{1,2}^{1,2}, \dots, M_{n-1} = M_{1,2,\dots,n-1}^{1,2,\dots,n-1}$) были ненулевыми.

2. Покажите, что достаточное условие существования LU-разложения не является необходимым.

3. Докажите, что для матрицы $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ не существует LU-разложения.

4. Проверить, существует ли для следующей матрицы LU-разложение, и если да, построить его.
$$\begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

3 ДЗ

1. Построить скелетное разложение для матрицы из задачи 609.

2. Проверить, существует ли для следующей матрицы LU-разложение, и если да, построить его.
$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$