

# Лекции по математическому анализу (1 курс, 25-26)

[github.com/int28t/hse-se-lecture-notes](https://github.com/int28t/hse-se-lecture-notes)

Эрлих Иван Генрихович

## Содержание

<b>1 Информация о курсе</b>	<b>3</b>
1.1 Оценка . . . . .	3
<b>2 Основы логики и комбинаторика</b>	<b>3</b>
2.1 Логические операции и методы доказательств . . . . .	3
2.1.1 Кванторы . . . . .	3
2.1.2 Метод математической индукции . . . . .	3
2.1.3 Доказательство от противного . . . . .	4
2.1.4 Достаточность и необходимость . . . . .	4
2.2 Комбинаторика и Бином Ньютона . . . . .	5
2.2.1 Бином Ньютона . . . . .	5
2.2.2 Комбинаторика . . . . .	5
<b>3 Последовательности</b>	<b>6</b>
3.1 Основные понятия и предел последовательности . . . . .	6
3.1.1 Способы задания последовательности . . . . .	6
3.1.2 Предел последовательности . . . . .	7
3.1.3 Теорема об ограниченности сходящейся последовательности . . . . .	9
3.1.4 Арифметика предела . . . . .	10
3.1.5 Бесконечно большая и бесконечно малая последовательности . . . . .	11
3.1.6 Предельный переход в неравенствах . . . . .	14
3.1.7 Теорема о зажатой последовательности . . . . .	14
3.1.8 Bonus: Список хороших пределов . . . . .	15
3.2 Действительные числа . . . . .	16
3.2.1 Аксиома непрерывности . . . . .	16
3.2.2 Теорема Вейерштрасса . . . . .	17
3.3 Число $e$ и постоянная Эйлера . . . . .	19
3.3.1 Число $e$ . . . . .	19
3.3.2 Постоянная Эйлера . . . . .	21
3.4 Предел рекуррентно заданных последовательностей . . . . .	24
3.5 Доказательства стандартных сходимостей . . . . .	24
3.6 Подпоследовательности . . . . .	28
3.6.1 Частичные пределы . . . . .	28
3.6.2 Предельные точки . . . . .	28
3.6.3 Свойства частичных пределов . . . . .	29
3.6.4 Теорема Больцано-Вейерштрасса . . . . .	29
3.6.5 Критерий Коши . . . . .	31

<b>4 Функции</b>	<b>33</b>
4.1 Понятия функции и ее предела . . . . .	33
4.1.1 Функция. График функции . . . . .	33
4.1.2 Инъекция, сюръекция, биекция . . . . .	33
4.1.3 Обратимость функции . . . . .	33
4.1.4 Предел функции по Коши . . . . .	34
4.1.5 Предел функции по Гейне . . . . .	35
4.1.6 Арифметика предела функции . . . . .	36
4.1.7 Теорема о зажатой функции . . . . .	37
4.1.8 Предел сложной функции . . . . .	37
4.2 Классификация разрывов . . . . .	40
4.3 Асимптоты . . . . .	41
4.3.1 Вертикальная . . . . .	41
4.3.2 Горизонтальная . . . . .	42
4.3.3 Наклонная . . . . .	42
4.4 О — символика . . . . .	43
4.4.1 О малое . . . . .	43
4.4.2 О большое . . . . .	44
4.5 Замечательные пределы . . . . .	44
4.6 Непрерывность функции на отрезке . . . . .	46
4.7 Обратные функции . . . . .	48
<b>5 Производная</b>	<b>51</b>
5.1 Дифференцируемость функции . . . . .	51
5.2 Правила подсчета производной . . . . .	52
<b>6 Bonus: Консультации по доп листкам</b>	<b>53</b>
6.1 Консультация по 2 листку . . . . .	53

# 1 Информация о курсе

## 1.1 Оценка

Тут когда-нибудь появится оценка

# 2 Основы логики и комбинаторика

## 2.1 Логические операции и методы доказательств

### Определение

**Высказывание** - словесное утверждение, про которое можно сказать, истинное оно или ложное.

Обозначение: заглавные латинские буквы:  $A, B, C \dots$

### Определение

**Предикат** - высказывание, зависящее от переменной (при этом не являющееся высказыванием)

### Пример

$$B(x) : x + 5 = 10$$

#### 2.1.1 Кванторы

- $\forall$  - всеобщности
- $\exists$  - существования

#### 2.1.2 Метод математической индукции

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} P(n)} \text{ — истинно, если:}$$

- 1)  $P(1)$  - истинно (база)
- 2)  $\forall n \in \mathbb{N} (P(n) \rightarrow P(n + 1))$  - истинно (шаг)

### Пример

Требуется доказать

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \forall x \geq -1 : (1 + x)^n \geq 1 + xn} \text{ — неравенство Бернулли}$$

Докажем с помощью ММИ

$$\underbrace{\forall n \in \mathbb{N} \forall x \geq -1}_{P(n)} \underbrace{(1 + x)^n \geq 1 + xn}_{Q(n)}$$

- 1)  $\forall x \geq -1 (1 + x) \geq 1 + x$  - истина

2) Предположим  $(1+x)^{n_0} \geq 1+xn_0$  - истина. Докажем, что  $(1+x)^{n_0+1} \geq 1+x(n_0+1)$ :

$$\begin{aligned}(1+x)^{n_0+1} &\geq 1+x(n_0+1) \\(1+x)^{n_0+1} &= (1+x)^{n_0} \underbrace{(1+x)}_{\geq 0} \geq (1+x)(1+xn_0) = \\&= 1+x+xn_0+\underbrace{x^2n_0}_{\geq 0} \geq 1+x+xn_0 = 1+x(n_0+1)\end{aligned}$$

### 2.1.3 Доказательство от противного

Обозначения:  $\bar{A}$  - отрицание к  $A$

#### Пример

Доказать, что количество простых чисел бесконечно

Пп (предположим противное). Тогда количество простых чисел конечное число:

$$n_1, \dots, n_k$$

Рассмотрим следующее число:

$$m = n_1 \cdot \dots \cdot n_k + 1, m \in \mathbb{N}, m > n_i \quad \forall i = \overline{1, k} \text{ то есть } m \neq n_i \quad \forall i = \overline{1, k}$$

Следовательно,  $m$  - составное. Тогда:

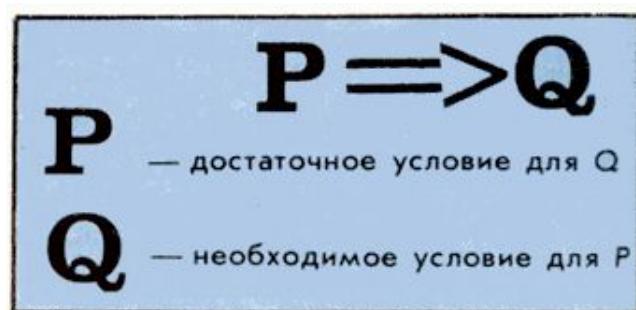
$$m = n_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot n_k^{\alpha_k}$$

$$\exists n_j : m : n_j$$

Но  $m = n_1 \cdot \dots \cdot n_k + 1$  и при делении на  $n_i \quad \forall i = \overline{1, k}$  дает остаток 1 ( $\perp$ )

Утверждение доказано

### 2.1.4 Достаточность и необходимость



## 2.2 Комбинаторика и Бином Ньютона

### 2.2.1 Бином Ньютона

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$$

$$C_n^0 a^0 b^{n-0} + C_n^1 a^1 b^{n-1} + \dots + C_n^n a^n b^{n-n}$$

где  $C_n^0, C_n^1, \dots$  - биномиальные коэффициенты

### 2.2.2 Комбинаторика

#### Определение

**Перестановка** - упорядоченное множество размера  $n$   
 $\#$  перестановок  $= n!$

#### Определение

**Размещения** - упорядоченное подмножество размера  $k$  множества размера  $n$   
 $\#$  размещений  $= \frac{n!}{(n - k)!} = A_n^k$

#### Определение

**Сочетания** - неупорядоченное подмножество размера  $k$  множества размера  $n$   
Одному сочетанию соответствуют  $k!$  размещений

$$\frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n - k)!} = C_n^k$$

### 3 Последовательности

#### 3.1 Основные понятия и предел последовательности

##### Определение

**Последовательность** - индексированный набор чисел

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

##### 3.1.1 Способы задания последовательности

- 1) Формульный  $a_n = n^2 + n - 7$
- 2) Рекуррентный  $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

##### Определение

Последовательность называется **ограниченной**, если

$$\exists c \forall n |a_n| \leq c = P(\{a_n\})$$

И **неограниченной**, если

$$\forall c \exists n(c) |a_{n(c)}| > c$$

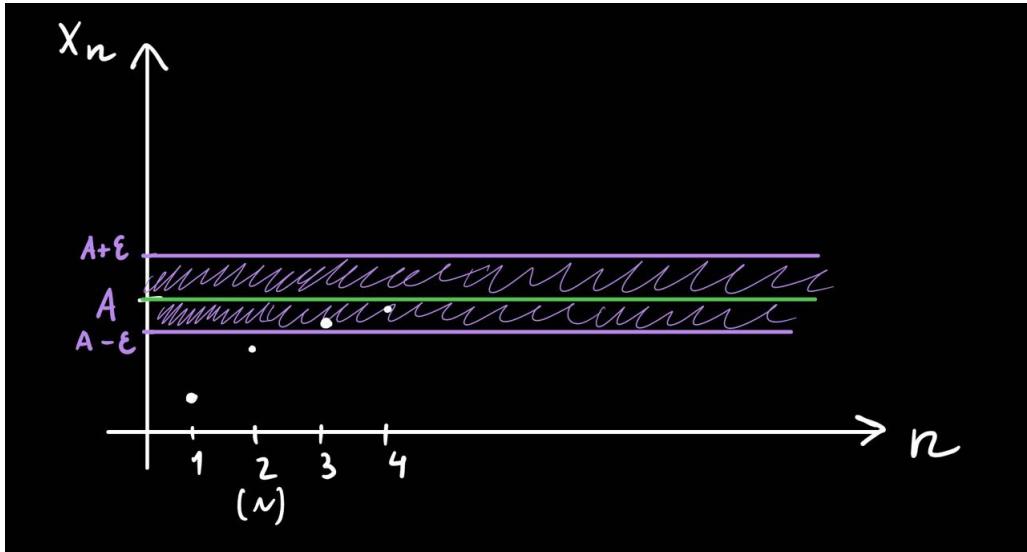
##### Пример

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3n^2 + 5n - 2}{2n^2 + n + 1} \\ \left| \frac{3n^2 + 5n - 2}{2n^2 + n + 1} \right| &\leq \left| \frac{3n^2 + 5n^2}{2n^2} \right| \leq \left| \frac{8n^2}{2n^2} \right| \leq c \\ 4 &\leq c \\ \exists c = \pi^2 \forall n \left| \frac{3n^2 + 5n - 2}{2n^2 + n + 1} \right| &\leq c \end{aligned}$$

### 3.1.2 Предел последовательности

#### Определение

Окрестность точки  $A$ :  $U_\varepsilon(A) = (A - \varepsilon; A + \varepsilon)$



#### Определение

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ , если

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N |a_n - A| < \varepsilon}$$

⇓

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N -\varepsilon < a_n - A < \varepsilon$$

⇓

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

⇓

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N a_n \in U_\varepsilon(A)$$

#### Пример

Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$N(\varepsilon) = \left[ \frac{1}{\varepsilon} + 1 \right]$$

## Определение

Последовательность называется **сходящейся**, если у нее есть предел

⇓

$$\exists a : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

### 3.1.3 Теорема об ограниченности сходящейся последовательности

#### Теорема

Если последовательность сходящаяся, то она ограничена

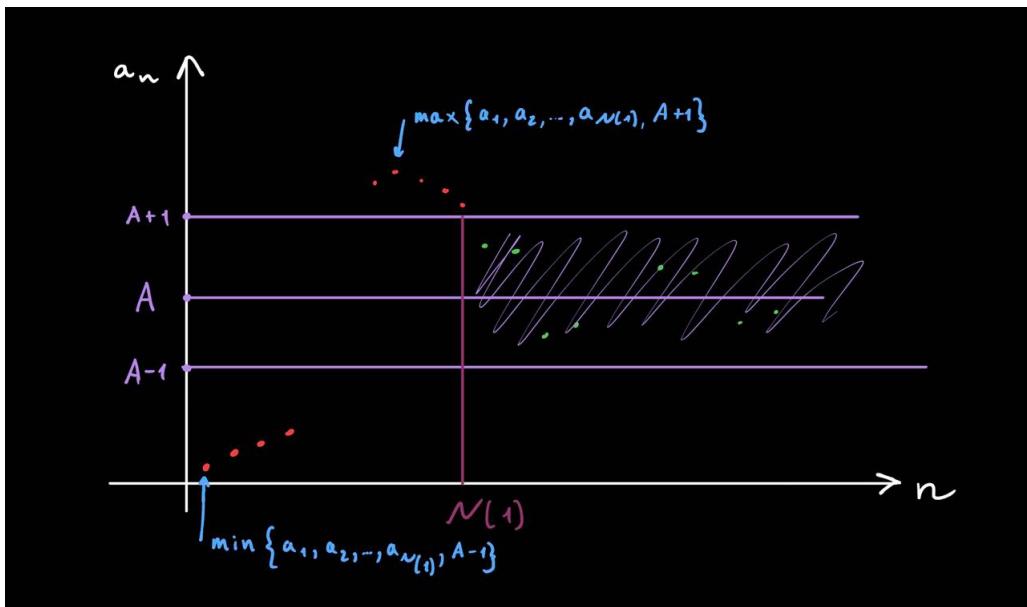
#### Доказательство

Рассмотрим  $\{a_n\}$

$$\exists A \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N |a_n - A| < \varepsilon$$

$$\exists A \exists N(1) \in \mathbb{N} \forall n > N(1) |a_n - A| < 1 \Leftrightarrow a_n \in U_1(A)$$

Очевидно, что элементов  $a_k$ , где  $k \leq N(1)$  конечное число. А для всех элементов  $a_n$ ,  $n > N(1)$  выполняется  $|a_n - A| < 1$ . Тогда можем взять нижнюю границу  $\min\{a_1, \dots, a_{N(1)}, A - 1\}$  и верхнюю  $\max\{a_1, \dots, a_{N(1)}, A + 1\}$ .



#### Теорема

У последовательности может быть только 1 предел

#### Доказательство

Пп  $\exists$  хотя бы 2  $\lim : A$  и  $B$ ,  $A \neq B$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_1(\varepsilon) a_n \in U_\varepsilon(A)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_2(\varepsilon) a_n \in U_\varepsilon(B)$$

Возьмем  $\varepsilon_0 = \frac{|A - B|}{3}$  и  $n_0 = N_1(\varepsilon_0) + N_2(\varepsilon_0)$

Получаем

$$a_{n_0} \in U_{\varepsilon_0}(A), a_{n_0} \in U_{\varepsilon_0}(B)$$

Но

$$U_{\varepsilon_0}(A) \cap U_{\varepsilon_0}(B) = \emptyset$$

Противоречие

### 3.1.4 Арифметика предела

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ , то

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B} (b_n \neq 0; B \neq 0)$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{A} (a_n \geq 0; A \geq 0)$$

#### Доказательство свойства 1

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_1(\varepsilon) |a_n - A| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_2(\varepsilon) |b_n - B| < \varepsilon$$

Хотим

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_3(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_3(\varepsilon) |(a_n + b_n) - (A + B)| < \varepsilon$$

⇓

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_3(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_3(\varepsilon) |(a_n - A) + (b_n - B)| < \varepsilon$$

↑

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_3(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_3(\varepsilon) \underbrace{|a_n - A|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|b_n - B|}_{< \frac{2\varepsilon}{3}} < \varepsilon$$

$$\forall n > N_1\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) \forall n > N_2\left(\frac{2\varepsilon}{3}\right)$$

$$N_3(\varepsilon) = \max \left\{ N_1\left(\frac{\varepsilon}{3}\right), N_2\left(\frac{2\varepsilon}{3}\right) \right\}$$

Примечание: Доказательства свойств 2 и 3, рассмотренные далее, были выведены после доказательства теоремы о произведении б.м. и о гр. последовательностей

#### Доказательство свойства 2

Хотим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$$

По теореме о связи предела с бесконечно малой последовательностью

$$\alpha_n = (a_n - A) - \text{б.м.}, \beta_n = (b_n - B) - \text{б.м.}$$

Хотим

$$(a_n b_n - AB) - \text{б.м.}$$

$$\begin{aligned} (a_n b_n - AB) &= (\alpha_n + A)(\beta_n + B) - AB = \alpha_n \beta_n + \alpha_n B + A \beta_n + AB - AB = \\ &= \underbrace{\alpha_n \beta_n}_{\text{б.м.}} + \underbrace{\alpha_n B}_{\text{б.м.}} + \underbrace{A \beta_n}_{\substack{\text{огр} \\ \underbrace{\beta_n}_{\text{б.м.}}}} + \underbrace{AB}_{\text{б.м.}} - AB = \end{aligned}$$

### Доказательство свойства 3

Хотим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B} \quad (b_n \neq 0; B \neq 0)$$

По теореме о связи предела с бесконечно малой последовательностью

$$\alpha_n = (a_n - A) - \text{б.м.}, \beta_n = (b_n - B) - \text{б.м.}$$

Хотим

$$\begin{aligned} & \frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} - \text{б.м.} \\ & \frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} = \frac{\alpha_n + A}{\beta_n + B} - \frac{A}{B} = \frac{(\alpha_n + A)B - A(\beta_n + B)}{(\beta_n + B)B} = \\ & = \frac{(\alpha_n + A)B - A(\beta_n + B)}{(\beta_n + B)B} = \frac{\alpha_n B + AB - A\beta_n - AB}{b_n B} = \frac{\alpha_n B - A\beta_n}{b_n B} = \\ & = \underbrace{\frac{1}{b_n} \cdot \frac{1}{B}}_{\text{огр.} \cdot \text{огр.}} \cdot \underbrace{(\alpha_n B - A\beta_n)}_{\text{б.м.}} = \text{б.м.} \end{aligned}$$

### 3.1.5 Бесконечно большая и бесконечно малая последовательности

#### Определение

**Бесконечно малой** (б.м.) последовательностью называют последовательность  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  такую что,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

#### Определение

**Бесконечно большой** (б.б.) последовательностью называют последовательность  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  такую что,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$

$$\forall M > 0 \exists N(M) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N(M) \quad |b_n| > M$$

$$b_n > M \quad (+\infty)$$

$$b_n < M \quad (-\infty)$$

#### Теорема

$$\frac{1}{\text{б.б.}} = \text{б.м.}$$

#### Доказательство

Пусть  $b_n$  - б.б. Тогда

$$\forall M > 0 \exists N_1(M) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_1(M) \quad |b_n| > M$$

Хотим  $a_n = \frac{1}{b_n}$  - б.м.:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \quad \forall n > N_2(\varepsilon) \quad |a_n| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{1}{b_n} \right| < \varepsilon$$

$$|b_n| > \frac{1}{\varepsilon}$$

Возьмем  $N_2(\varepsilon) = N_1 \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) + 1$

## Теорема

б.м. ·ogr. = б.м.

## Доказательство

Хотим  $a_n \cdot b_n = c_n$ , где  $a_n, c_n$  - б.м.,  $b_n$  -ogr.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_1(\varepsilon) |a_n| < \varepsilon$$

$$\exists c \forall n \in \mathbb{N} |b_n| \leq c$$

Хотим:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_2(\varepsilon) |a_n \cdot b_n| < \varepsilon$$

↑

$$|a_n| \cdot |b_n| < \varepsilon$$

$$|a_n| \cdot c < \varepsilon$$

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{c}$$

Возьмем  $N_2(\varepsilon) = N_1 \left( \frac{\varepsilon}{c} \right)$

## Пример

б.б. + б.б.

Мы точно не можем сказать, чем будет являться эта сумма. Например  $n + (-n) = 0$  и  $n + n = 2n$

## Пример

б.б. +ogr. = б.б.

Покажем, что это так

Хотим:  $b_n + c_n = u_n$  соответственно. Тогда:

$$\forall M > 0 \exists N(M) \in \mathbb{N} \forall n > N(M) |b_n| > M$$

$$\exists C > 0 \forall n \in \mathbb{N} |c_n| \leq C$$

Хотим:

$$\forall K > 0 \exists N_2(K) \in \mathbb{N} \forall n > N_2(K) |b_n + c_n| > K$$

Так, как  $|x + y| \geq |x| - |y|$ :

$$|b_n| - |c_n| > K$$

$$|b_n| - C > K$$

$$|b_n| > K + C$$

Возьмем  $N_2(K) = N(K + C)$

### Теорема

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \Leftrightarrow (a_n - A) = \alpha_n \text{ - бесконечно малая}$$

### Доказательство

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_1(\varepsilon) |a_n - A| < \varepsilon$$

Хотим

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_2(\varepsilon) |(a_n - A) - 0| < \varepsilon$$

$$N_2(\varepsilon) = N_1(\varepsilon)$$

### Примечание

Теперь можно спокойно доказать свойство 2) из арифметики пределов

### Примечание

Произведение бесконечно малых - бесконечно малая последовательность. Так как можно представить одну из них как ограниченную и использовать теорему выше

### Определение

Назовем последовательность  $d_n$  **отделимой от нуля**, если:

$$\exists \delta > 0 \forall n \in \mathbb{N} |d_n| \geq \delta$$

### Пример

$$(-1)^n$$

### Теорема

$$\frac{1}{\text{огр}} = \text{отделима от нуля}, \frac{1}{\text{отделима от нуля}} = \text{огр}$$

### Доказательство

$$\exists \delta > 0 \forall n \in \mathbb{N} |d_n| \geq \delta$$

$$u_n = \frac{1}{d_n}, \exists c > 0 \forall n \in \mathbb{N} |u_n| \leq c$$

↑

$$\left| \frac{1}{d_n} \right| \leq c$$

↑

$$|d_n| \geq \frac{1}{c}$$

Возьмем  $c = \frac{1}{\delta}$ . Тогда  $|d_n| \geq \delta$  верно  $\forall n \in \mathbb{N}$

### Теорема

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = U; u_n, U \neq 0$ , то  $u_n$  отделима от нуля

### Доказательство

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad |u_n - U| < \varepsilon$$

Хотим

$$\exists \delta > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \geq \delta$$

$$\text{Возьмем } \varepsilon_0 = \frac{|U|}{2}$$

$$\exists N_0 = N\left(\frac{|U|}{2}\right) = N(\varepsilon_0)$$

$$\forall n > N_0 \quad u_n \in U_{\frac{|U|}{2}}(U)$$

Очевидно, что существует конечное число  $u_k, k \leq N(\varepsilon_0)$ , причем  $u_k \neq 0$

$$\text{Возьмем } \delta = \min\{|u_1|, |u_2|, \dots, \frac{|U|}{2}\}$$

### 3.1.6 Предельный переход в неравенствах

### Теорема

Если  $\exists N_0 \forall n > N_0 a_n > b_n$  и  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$  и  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B$ , то  $A \geq B$

### Доказательство

$$\text{Пп } A < B. \text{ Возьмем } \varepsilon_0 = \frac{B - A}{2}$$

$$\exists N_1(\varepsilon_0) \quad \forall n > N_1(\varepsilon_0) \quad a_n \in U_{\varepsilon_0}(A)$$

$$\exists N_2(\varepsilon_0) \quad \forall n > N_2(\varepsilon_0) \quad b_n \in U_{\varepsilon_0}(B)$$

Возьмем  $n_0 = N_1(\varepsilon_0) + N_2(\varepsilon_0) + N_0$ . Тогда по условию  $a_{n_0} > b_{n_0}$ , но также  $a_{n_0} < b_{n_0}$  (так как окрестность  $a$  по предположению левее окрестности  $b$ ). Получили противоречие

### 3.1.7 Теорема о зажатой последовательности

### Теорема о зажатой последовательности

Если  $\exists N_0 \forall n > N_0 a_n \leq c_n \leq d_n$ , а также  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$  и  $d_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$ , то  $c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$

## Доказательство

$$a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} A; \forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \forall n > N_1(\varepsilon) A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

$$d_n \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} A; \forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \forall n > N_2(\varepsilon) A - \varepsilon < d_n < A + \varepsilon$$

Хотим

$$c_n \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} A; \forall \varepsilon > 0 \exists N_3(\varepsilon) \forall n > N_3(\varepsilon) A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon$$

Получаем

$$\underbrace{A - \varepsilon}_{\forall n > N_1(\varepsilon)} \leq a_n \leq \underbrace{c_n}_{\forall n > N_0} \leq \underbrace{d_n}_{\forall n > N_2(\varepsilon)} \leq \underbrace{A + \varepsilon}_{\forall n > N_3(\varepsilon)}$$

Возьмем  $N_3(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon), N_0\}$

### 3.1.8 Bonus: Список хороших пределов

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, |q| < 1$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty, |q| > 1$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, a > 0$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^a}{b^n} = 0$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^n}{n!} = 0$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^a} = 0, a > 0$$

## 3.2 Действительные числа

### Определение

Множество **действительных чисел** - это четверка  $(\mathbb{R}; +; \times; \leq)$  (множество, 2 операции, 1 отношение)

### Примечание

Отличие операции от отношения. Для того чтобы задать операцию, нужно поставить в соответствие для каждой пары чисел число  $(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ . В отношении для каждой пары чисел нужно поставить в соответствие 0 или 1  $(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\})$ .

### 3.2.1 Аксиома непрерывности

$$A, B \subset \mathbb{R}$$

- 1)  $A, B \neq \emptyset$
- 2)  $\forall x \in A \ \forall y \in B \ x \leq y$

Тогда  $\exists \xi \in \mathbb{R} : \forall x \in A \ \forall y \in B \ x \leq \xi \leq y$

### Определение

**Верхней гранью** множества  $A \subset \mathbb{R}$  называется число  $C \in \mathbb{R}$ , такое что  $\forall x \in A \ x \leq C$

### Определение

**Точной верхней гранью** ( $\sup A$ ) ограниченного сверху множества  $A$  называют наименьшую верхнюю грань множества  $A$

### Определение

**Нижней гранью** множества  $A \subset \mathbb{R}$  называется число  $D \in \mathbb{R}$ , такое что  $\forall x \in A \ x \geq D$

### Определение

**Точной нижней гранью** ( $\inf A$ ) ограниченного снизу множества  $A$  называют наибольшую нижнюю грань множества  $A$

### Пример

$A = (-1; 0)$ . Множество верхних граней:  $[0; +\infty)$ ,  $\sup A = 0$

### Теорема

У ограниченного сверху множества есть точная верхняя грань

### Доказательство

$$\left. \begin{array}{l} A - \text{огр. сверху}, A \neq \emptyset \\ B = \{\text{верхние грани } A\}, B \neq \emptyset \\ \forall x \in A \ \forall y \in B \ x \leq y \end{array} \right] \exists \xi \in \mathbb{R} : \forall x \in A \ \forall y \in B \ x \leq \xi \leq y$$

1) Из  $x \leq \xi$  получаем, что  $\xi$  - верхняя грань  $A \Rightarrow \xi \in B$

2) Так, как  $\xi \leq y$ , то  $\xi$  - минимальный элемент из  $B$ .  $[\xi = \sup A]$

### Определение

**Точной верхней гранью неограниченного сверху множества** назовем  $+\infty$

### 3.2.2 Теорема Вейерштрасса

#### Определение

$\{a_n\}$  - неубывает, если  $a_{n+1} \geq a_n$

#### Определение

$\{a_n\}$  - возрастает, если  $a_{n+1} > a_n$

#### Пример (3-й способ доказательства монотонности)

Доказать, что последовательность  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  строго возрастает

Необходимо доказать:  $\forall n a_{n+1} > a_n$

$$\begin{aligned} 1 < \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \\ &= \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \end{aligned}$$

По неравенству Бернулли  $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \forall x \geq -1 (1+x)^n \geq 1+xn}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) &= \left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \\ &= \left(1 + \underbrace{\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right)}_{\geq -1}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \geq \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \\ &= \frac{(n^2 + n + 1)(n+2)}{(n+1)^3} = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} > 1 \end{aligned}$$

#### Теорема Вейерштрасса

Если  $\{a_n\}$  неубывает и ограничена сверху, то она сходится

## Доказательство

$\{a_n\} \neq \emptyset$ , огр. сверху

$\exists \sup \{a_n\} = A \in \mathbb{R}$

Хотим доказать:  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon) \underbrace{|a_n - A|}_{\leq 0} < \varepsilon$$

$$A - a_n < \varepsilon$$

$$a_n > A - \varepsilon \Leftrightarrow a_{N(\varepsilon)+1} > A - \varepsilon$$

Тогда докажем:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} a_{N(\varepsilon)+1} > A - \varepsilon$$

Пп

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall N \in \mathbb{N} a_{N+1} \leq A - \varepsilon_0$$

$\Updownarrow$

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall n \in \mathbb{N} a_n \leq A - \varepsilon_0$$

Получаем, что самая маленькая верхняя граница  $= A - \varepsilon_0$ , но  $\sup a_n = A$ .  $\perp$

**Контрпример** (Если  $\{a_n\}$  сходится, то необязательно она неубывает)

$$a_n = \frac{\sin n}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

### 3.3 Число $e$ и постоянная Эйлера

#### 3.3.1 Число $e$

##### Определение

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

##### Доказательство

Ранее мы доказали, что данная последовательность неубывает.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \left(\frac{1}{n} + 1\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n-k} = \\ &= 1 + \frac{n!}{(n-1)! 1!} \cdot \frac{1}{n} + \dots + \frac{n!}{(n-k)! k!} \cdot \frac{1}{n^k} + \dots = \\ &= 1 + 1 + \dots + \underbrace{\frac{n}{n}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\leq 1} \cdot \dots \cdot \underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{\leq 1} \cdot \frac{1}{k!} + \dots < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

Напоминание о телескопических суммах:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Хотим получить нечто похожее, тогда выкинем из каждого знаменателя все множители, кроме последних двух:

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \underbrace{<}_{n \geq 4} 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) < 3$$

##### Следствие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{kn}\right)^n = e^{\frac{1}{k}}$$

##### Доказательство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{kn}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left(1 + \frac{1}{kn}\right)^{nk} \right)^{\frac{1}{k}}$$

$\left(1 + \frac{1}{kn}\right)^{nk}$  — подпоследовательность  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Значит, она тоже сходится к  $e$   
Получаем:

$$\left( \left(1 + \frac{1}{kn}\right)^{nk} \right)^{\frac{1}{k}} = e^{\frac{1}{k}}$$

## Следствие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

## Доказательство

$$c_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$$

Мы не умеем доказывать для  $\forall a \in \mathbb{R}$  :

Докажем для  $\forall a \in \mathbb{Q}$

**1.**  $a = -1$

Хотим:

$$d_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} = e^{-1}$$

$$\frac{1}{d_n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e \cdot 1 = e$$

Получили исходную последовательность со сдвинутой нумерацией

**2.**  $a = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$

Хотим:

$$d_n = \left(1 + \frac{1}{kn}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{k}}$$

Данный случай также разбирался выше (на семинаре)

$$d_n = \left(1 + \frac{1}{kn}\right)^n = \sqrt[k]{\underbrace{\left(1 + \frac{1}{kn}\right)}_{e_n}^{kn}}$$

$e_n$  — подпоследовательность  $c_n : e_n = c_{k \cdot n} \Rightarrow e_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e$

$$\sqrt[k]{\left(1 + \frac{1}{kn}\right)^{kn}} \rightarrow \sqrt[k]{e} = e^{\frac{1}{k}}$$

**3.**  $a = k, k \in \mathbb{N}$

$$d_n = \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = \left(\underbrace{\left(1 + \frac{k}{n}\right)}_{f_n}^{\frac{n}{k}}\right)^k$$

$c_n$  — подпоследовательность  $f_n : c_n = f_{k \cdot n} \Rightarrow$  если  $f_n$  сходится, то она сходится к  $e$

Докажем, что  $f_n$  сходится:

1. Монотонность  $f_n$  (Она должна возрастать, так как  $c_n$  ее подпоследовательность и она возрастает)

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\left(1 + \frac{k}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{k}}}{\left(1 + \frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{k}}} = \left(\left(\frac{(n+1+k)n}{(n+1)(n+k)}\right)^n \frac{n+1+k}{n+1}\right)^{\frac{1}{k}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \left( \frac{n^2 + n + nk}{n^2 + nk + n + k} \right)^n \frac{n+1+k}{n+1} \right)^{\frac{1}{k}} = \left( \left( 1 - \frac{k}{n^2 + nk + n + k} \right)^n \frac{n+1+k}{n+1} \right)^{\frac{1}{k}} \\
&\left( \left( 1 - \frac{k}{n^2 + nk + n + k} \right)^n \frac{n+1+k}{n+1} \right)^{\frac{1}{k}} \geq \left( \left( 1 - \frac{nk}{n^2 + nk + n + k} \right) \frac{n+1+k}{n+1} \right)^{\frac{1}{k}} = \\
&= \left( \frac{(n^2 + n + k)(n+1+k)}{(n^2 + nk + n + k)(n+1)} \right)^{\frac{1}{k}} = \left( \frac{n^3 + n^2 + n^2k + n^2 + n + nk + nk + k + k^2}{n^3 + n^2 + n^2k + nk + n^2 + n + nk + k} \right)^{\frac{1}{k}} = \\
&= \left( \frac{n^3 + 2n^2 + n^2k + 2nk + n + k + k^2}{n^3 + 2n^2 + n^2k + 2nk + n + k} \right)^{\frac{1}{k}} ; \frac{n^3 + 2n^2 + n^2k + 2nk + n + k + k^2}{n^3 + 2n^2 + n^2k + 2nk + n + k} > 1
\end{aligned}$$

Получили  $f_{n+1} > f_n$ .  $f_n$  строго возрастает. Тогда  $f_n$  либо сходится, либо стремится к  $+\infty$ . У  $f_n$  есть сходящаяся подпоследовательность  $\Rightarrow$  она не может стремиться к  $+\infty$ . Значит, она сходится

## 2. Ограниченностъ

Так как  $f_n$  сходится, то она сходится к  $e$ . Доказано. Возвращаемся к  $d_n$ :

$$d_n = \underbrace{\left( 1 + \frac{k}{n} \right)^{\frac{n}{k}}}_{f_n}^k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^k = e^a$$

### 4. $a = -k, k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
d_n &= \left( 1 - \frac{k}{n} \right)^n \\
\frac{1}{d_n} &= \left( \frac{n}{n-k} \right)^n = \left( 1 + \frac{k}{n-k} \right)^{n-k} \left( 1 + \frac{k}{n-k} \right)^k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^k \cdot 1 = e^k \Rightarrow d_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-k} = e^a
\end{aligned}$$

### 5. $a \in \mathbb{Q}$

Тогда

$$\exists m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} : a = \frac{m}{k}$$

$$d_n = \left( 1 + \frac{a}{n} \right)^n = \left( 1 + \frac{m}{kn} \right)^n = \sqrt[k]{\left( 1 + \frac{m}{kn} \right)^{kn}}$$

Под корнем подпоследовательность из пункта 3 или 4, она сходится к  $e^m$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда:

$$\sqrt[k]{\left( 1 + \frac{m}{kn} \right)^{kn}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{\frac{m}{k}} = e^a$$

### 3.3.2 Постоянная Эйлера

(Не путать с  $e$ , константой Эйлера)

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty \\
\left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \gamma — \text{постоянная Эйлера}
\end{aligned}$$

## Определение

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = \gamma$$

## Примечание

В доказательстве будем пользоваться строгим возрастанием  $y = \ln x$  и свойствами  $\ln$

## Доказательство

1.  $\gamma_n$  убывает:

Будем рассматривать разность соседних, так как мы не знаем знаки членов последовательности, а также будет удобно сокращать слагаемые

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} - \gamma_n &= \frac{1}{n+1} + \ln n - \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n) = \frac{1}{n+1} - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = \\ &= \frac{1}{n+1} \left( 1 - (n+1) \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right) = \frac{1}{n+1} \left( 1 - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \right) \end{aligned}$$

## Вспомогательное доказательство

$$b_n = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \cdot \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e \cdot 1 = e$$

Мы знаем, что  $\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$  возрастает и сходится к  $e$ . Докажем, что  $b_n$  убывает. Мы знаем, что все члены  $b_n$  положительные, рассмотрим частное:

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}}{\left( 1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+2}} = \frac{\left( \frac{n+1}{n} \right)^{n+1}}{\left( \frac{n+2}{n+1} \right)^{n+2}} = \frac{\left( \frac{n+1}{n} \right)^{n+1}}{\left( \frac{n+2}{n+1} \right)^{n+1} \left( \frac{n+2}{n+1} \right)} = \left( \frac{n+1}{\frac{n+2}{n+1}} \right)^{n+1} \left( \frac{n+1}{n+2} \right) = \\ &= \left( \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right)^{n+1} \left( \frac{n+1}{n+2} \right) = \left( \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} \right)^{n+1} \left( \frac{n+1}{n+2} \right) = \end{aligned}$$

По неравенству Бернулли:

$$\begin{aligned} &= \left( 1 + \frac{1}{n(n+2)} \right)^{n+1} \left( \frac{n+1}{n+2} \right) \geq \left( 1 + \frac{n+1}{n(n+2)} \right) \left( \frac{n+1}{n+2} \right) = \\ &= \frac{(n^2 + 3n + 1)(n+1)}{n(n+2)^2} = \frac{n^3 + 4n^2 + 4n + 1}{n^3 + 4n^2 + 4n} > 1 \end{aligned}$$

Выход:  $b_n$  убывает к  $e \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} b_n > e$

Из вспомогательного доказательства получаем (по монотонности  $\ln$ ):

$$\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} > e \Rightarrow \ln \left( \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \right) > \ln e = 1$$

Тогда:

$$\left(1 - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right) < 0$$

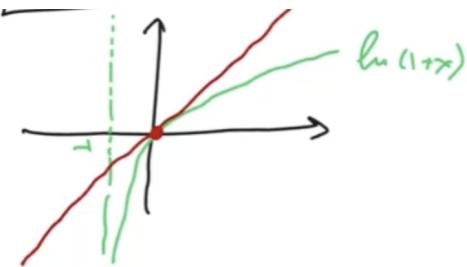
$$\frac{1}{n+1} \left(1 - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right) < 0$$

Получаем:  $\gamma_n$  убывает

**2.**  $\gamma_n$  ограничена снизу:

### Вспомогательное доказательство

Известный факт:  $\ln(1+x) \leq x \forall x > -1$  Докажем его



$$\ln(1+x) \leq x \quad \forall x > -1$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1$$

Возьмем  $c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ,  $c_n < e$ . Тогда, по монотонности  $\ln$ :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \gamma_n &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \geq \ln(1+1) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln n = \\ &= \ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln n = \\ &= \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \dots + \ln n - \ln(n-1) + \ln(n+1) - \ln n - \ln n = \\ &= -\ln 1 + \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) > \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

Получили  $\gamma_n$  ограничена снизу 0. По т.Вейерштрасса:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = \gamma$$

### 3.4 Предел рекуррентно заданных последовательностей

Для того чтобы найти пример рекуррентно заданных последовательностей

**Шаг 1:** Проверить, что последовательность сходится (можно пытаться делать через теорему Вейерштрасса или критерий Коши)

**Шаг 2:** Найти предел используя арифметику пределов

### 3.5 Доказательства стандартных сходимостей

$$a_n = q^n, q \in \mathbb{R}$$

#### Доказательство

Не будем рассматривать тривиальные случаи  $q = 0; 1; -1$

(1)  $q > 1, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

$$\forall M > 0 \exists N(M) \forall n > N(M) a_n > M$$

$$q^n > M$$

Используем неравенство Бернулли ( $q - 1 > 0$ )

$$(1 + (q - 1))^n > M$$

$$1 + n(q - 1) > M$$

$$n > \frac{M - 1}{q - 1}$$

Предъявим номер

$$N(M) = \left\lceil \left[ \frac{M - 1}{q - 1} \right] \right\rceil + 1$$

(2)  $0 < q < 1, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$q^n = \left( \frac{1}{1/q} \right)^n = \frac{1}{(1/q)^n}, \frac{1}{q} > 1$$

$(1/q)^n = 6.6$ , тогда  $\frac{1}{(1/q)^n} = 6.m$

(3)  $-1 < q < 0, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$q^n = (-1)^n (|q|)^n, |q| \in (0; 1)$$

Последовательность  $(-1)^n$  ограничена, а  $|q|^n$  — бесконечно малая. Следовательно,  $q^n \rightarrow 0$

(4)  $q < -1 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

$$q^n = (-1)^n (|q|)^n$$

Последовательность  $(-1)^n$  отделена от нуля, а  $|q|^n$  — бесконечно большая. Следовательно,  $q^n \rightarrow \infty$ .

$$a_n = \sqrt[n]{a}, a > 0$$

### Доказательство

Случай  $a = 1$  очевиден

$$(1) \quad a > 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon) |\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$$

$$\sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon$$

$$\sqrt[n]{a} < \varepsilon + 1$$

$$a < (\varepsilon + 1)^n$$

По неравенству Бернулли:

$$1 + n\varepsilon \leq (1 + \varepsilon)^n$$

$$a < 1 + n\varepsilon$$

$$n > \frac{a - 1}{\varepsilon}$$

$$N(\varepsilon) = \left[ \frac{a - 1}{\varepsilon} \right] + 1$$

$$(2) \quad 0 < a < 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{1/a}}, \quad \frac{1}{a} > 1$$

$$\sqrt[n]{1/a} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{1/a}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$a_n = \sqrt[n]{n}$$

### Доказательство

$$\text{Хотим } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon) |\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$$

$$|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$$

$$\sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon$$

$$\sqrt[n]{n} < \varepsilon + 1$$

$$n < (1 + \varepsilon)^n$$

По биному Ньютона:

$$(1 + \varepsilon)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varepsilon^k > \binom{n}{2} \varepsilon^2$$

$$n < \binom{n}{2} \varepsilon^2$$

$$n < \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon^2$$

$$1 < \frac{n-1}{2} \varepsilon^2$$

$$\frac{2}{\varepsilon^2} < n - 1$$

$$n > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1$$

$$N(\varepsilon) = \left[ \frac{2}{\varepsilon^2} + 1 \right]$$

$$a_n = \frac{n^2}{2^n}, \quad + \text{ обобщить результат}$$

### Доказательство

По теореме о зажатой последовательности:

$$0 < \frac{n^2}{(1+1)^n} < \frac{n^2}{\binom{n}{3}} = \frac{n^2}{\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Получаем

$$\frac{n^2}{2^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Обобщение:

$$\frac{n^k}{a^n}, a > 1 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Потому что всегда можно сделать оценку с помощью бинома в знаменателе.

Вывод: показательная функция растет быстрее степенной

$$a_n = \frac{2^n}{n!}, \quad + \text{ обобщить результат}$$

### Доказательство

$$\frac{2^n}{n!} = \prod_{k=1}^n \frac{2}{k} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \dots \cdot \frac{2}{n}$$

По теореме о зажатой последовательности

$$0 < \frac{2^n}{n!} \leqslant \frac{2}{n} \cdot 2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Вывод: факториал растет быстрее любой показательной

## 3.6 Подпоследовательности

### Определение

**Подпоследовательностью** последовательности  $\{a_n\}$  называется последовательность  $\{b_k\}$ , такая что  $b_k = a_{n_k}$ , где  $n_k$  - строго возрастающая последовательность номеров ( $\mathbb{N}$ )

### Замечание

$$n_k \geq k$$

### Пример

$$\begin{aligned}a_n &= \sin \frac{\pi n}{2} \\b_k &= a_{4k} = \sin 2\pi k \equiv 0 \\c_k &= a_{4k-1} = \sin \frac{\pi(4k-1)}{2} \equiv -1 \\d_k &= a_{2k+1} = \sin \frac{\pi(2k+1)}{2} = (-1)^k\end{aligned}$$

### 3.6.1 Частичные пределы

### Определение

**Частичный предел** - конечный или бесконечный предел подпоследовательности

### Примечание

У какой (ограниченной) последовательности бесконечное число частичных пределов?

### Определение

**Верхний предел** последовательности — это точная верхняя грань множества частичных пределов последовательности.

Обозначение:  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$

### Определение

**Нижний предел** последовательности — это точная нижняя грань множества частичных пределов последовательности.

Обозначение:  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$

### 3.6.2 Предельные точки

### Определение

Предельная точка последовательности  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  — число  $A \in \mathbb{R}$ , такое что:

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ в } U_\varepsilon(A) \text{ находится } \infty \text{ числа членов } \{a_n\}$$

### 3.6.3 Свойства частичных пределов

#### Теорема

Конечный частичный предел  $\Leftrightarrow$  предельная точка

#### Доказательство

( $\Rightarrow$ ):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K(\varepsilon) \forall k > K(\varepsilon) a_{n_k} \in U_\varepsilon(A)$$

( $\Leftarrow$ ):

$a$  — предельная точка

Возьмем  $\varepsilon = 1$

$U_1(A)$  Возьмем 1 член, его номер объявим  $n_1$

Возьмем  $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$U_{\frac{1}{2}}(A)$  Возьмем член с номером  $> n_1$ . Его номер объявим  $n_2$

$\dots$

Возьмем  $\varepsilon = \frac{1}{k}$

$U_{\frac{1}{k}}(A)$  Возьмем член с номером  $> n_{k-1}$ . Его номер объявим  $n_k$

$$\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$$

Рассмотрим  $\{a_{n_k}\}$ :

$$\underbrace{A - \frac{1}{k}}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} A} < \{a_{n_k}\} < \underbrace{A + \frac{1}{k}}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} A}$$

### 3.6.4 Теорема Больцано-Вейерштрасса

#### Теорема

Если  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$ , то  $\forall n_k b_k = a_{n_k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$

#### Доказательство

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon) |a_n - A| < \varepsilon$$

Хотим

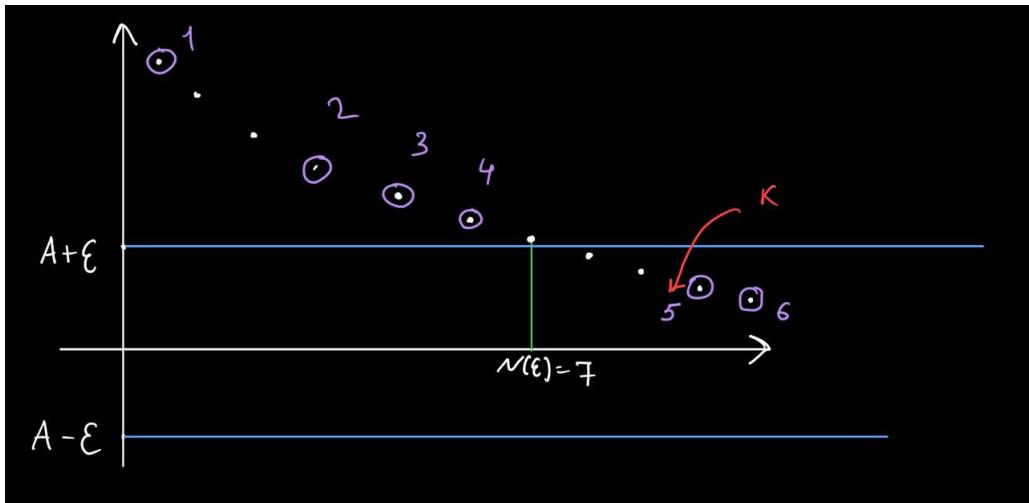
$$\forall \varepsilon > 0 \exists K(\varepsilon) \forall k > K(\varepsilon) |a_{n_k} - A| < \varepsilon$$

Возьмем  $K(\varepsilon) = N(\varepsilon)$

$$\left. \begin{array}{l} \forall k > N(\varepsilon) \\ \text{т.к } n_k \geq k \end{array} \right] \Rightarrow n_k > N(\varepsilon). \text{ Тогда } |a_{n_k} - A| < \varepsilon \text{ истина}$$

#### Теорема Больцано-Вейерштрасса

Если последовательность ограничена, то у нее есть сходящаяся подпоследовательность



## Доказательство

$c_n$  – огран. Докажем что у нее есть сходящаяся подпоследовательность

$$A = \inf\{c_n\}$$

$$B = \sup\{c_n\}$$

$$A, B \in \mathbb{R}$$

Рассмотрим отрезок  $[a_1, b_1] = [A, B]$

**Шаг 1:** разделим отрезок  $[a_1, b_1]$  пополам. В какой-то половине (одной или обеих) лежит бесконечное число членов  $c_n$ . Выберем в качестве  $[a_2, b_2]$  эту половинку (если в обеих бесконечное число, то любую)

**Шаг 2:** ...

Получаем некоторую последовательность подотрезков  $\{[a_k, b_k]\}_{k \in \mathbb{N}}$

На первом шаге выберем какой-то член  $c_n \in [a_1, b_1]$ . Его номер возьмем в качестве  $n_1$ .  $\exists$  член последовательности  $\in [a_2, b_2]$  такой, что его номер  $> n_1$  (Это следует из того, что на каждом шаге мы выбираем отрезок, содержащий бесконечное число членов). Его возьмем в качестве  $n_2$

...

Таким образом, параллельно строя последовательность отрезков, мы построили подпоследовательность  $\{C_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$

Рассмотрим  $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Она неубывает, ограничена сверху  $B$ .

По т. Вейерштрасса:  $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = A'$

$\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Она невозрастает, ограничена снизу  $A$ .

По т. Вейерштрасса:  $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = B'$

На каждом шаге мы вдвое уменьшаем длину отрезка. Выпишем общую формулу:

$$b_k - a_k = \frac{B - A}{2^{k-1}}, \text{ для строгости необходимо доказать по индукции}$$

Также по арифметике пределов сходящихся последовательностей  $b_k, a_k$  ( $b_k \rightarrow B', a_k \rightarrow A'$ ), их разность стремится к  $B' - A'$  при  $k \rightarrow \infty$

$$\frac{B - A}{2^{k-1}} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty \Rightarrow B' - A' = 0 \Rightarrow B' = A'$$

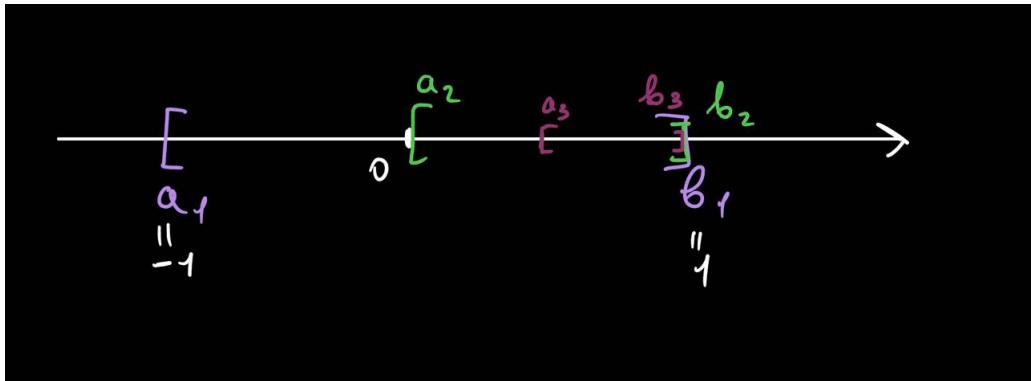
Получаем, что у  $a_k$  и  $b_k$  один и тот же предел

Заметим, что  $a_k \leq c_{n_k} \leq b_k \forall k \in \mathbb{N}$ . По теореме о сходящейся последовательности:

$$a_k \rightarrow A', b_k \rightarrow B', A' = B' \text{ при } k \rightarrow \infty. \text{ Следовательно: } \lim_{k \rightarrow \infty} c_{n_k} = A' = B'$$

## Пример

$$c_n = (-1)^n$$



### 3.6.5 Критерий Коши

#### Определение

Последовательность  $a_n$  называется фундаментальной, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n, m > N(\varepsilon) |a_n - a_m| < \varepsilon$$

$\Updownarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N(\varepsilon) \forall k \in \mathbb{N} |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$$

#### Теорема о критерии Коши

Последовательность  $a_n$  сходится  $\Leftrightarrow$  последовательность  $a_n$  фундаментальна

#### Доказательство

( $\Rightarrow$ ):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_1(\varepsilon) |a_n - A| < \varepsilon$$

Хотим:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n, m > N_2(\varepsilon) |a_n - a_m| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n, m > N_2(\varepsilon) |(a_n - A) + (A - a_m)| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n, m > N_2(\varepsilon) \underbrace{|a_n - A|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_m - A|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

Это выполняется  $\forall n > N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$  и  $\forall m > N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$

$$\text{Возьмем } N_2(\varepsilon) = N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

( $\Leftarrow$ ):

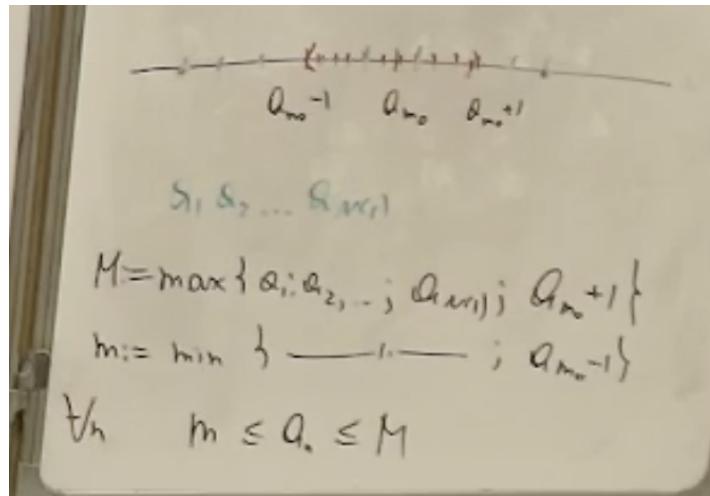
1) Фундаментальные последовательности ограниченны

$$\text{Возьмем } \varepsilon_0 = 1, N(1)$$

$$\forall n, m > N(1) |a_n - a_m| < 1$$

Возьмем  $m_0 = N(1) + 1$

$$\forall n > N(1), a_n \in U_1(a_{m_0})$$



2) По теореме Больцано-Вейерштрасса:

$$\exists a_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} A$$

Доказать:

$$a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} A$$

Имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \forall n, m > N_1(\varepsilon) |a_n - a_m| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K(\varepsilon) \forall k > K(\varepsilon) |a_{n_k} - A| < \varepsilon$$

Хотим:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \forall n > N_2(\varepsilon) |a_n - A| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \forall n > N_2(\varepsilon) \underbrace{|a_n - a_{n_k}|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_{n_k} - A|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

Это выполнено  $\forall k > K\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$  и  $n, n_k > N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$

Так как  $n_k \geq k$ , потребуем  $n, k > N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$

Изначально мы прибавили и вычли  $a_{n_k}$ ,  $k > \max\{N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), K\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\}$

$k$  — вспомогательный аргумент, которого изначально не было (требовалось только показать существование). Поэтому при предъявлении  $N_2(\varepsilon)$  мы не будем использовать вспомогательное  $K(\varepsilon)$

Возьмем  $N_2(\varepsilon) = N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$

## 4 Функции

### 4.1 Понятия функции и ее предела

#### 4.1.1 Функция. График функции

$$f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

##### Определение

**Функцией**  $f$  отображающей множество  $X$  во множество  $Y$  ( $f : X \rightarrow Y$ ) множество упорядоченных пар  $\{(x, y)\}_{x \in X, y \in Y}$ , причем каждый элемент  $X$  встречается в какой-то паре на первой позиции и только один раз.

В частности,  $X$  называется областью определения функции и обозначается  $D_f$

Множество вторых элементов пар обозначается  $E_f$ , множество значений функции.  $E_f \subset Y$

##### Определение

**График функции** — множество точек на декартовой (координатной) плоскости, координаты которых — пары функции

#### 4.1.2 Инъекция, сюръекция, биекция

##### Определение

Функция называется **инъекцией**, если вторые элементы пар не повторяются

##### Определение

Функция называется **сюръекцией**, если  $E_f = Y$

$$\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$$

##### Определение

Функция называется **биекцией**, если она инъекция и сюръекция

#### 4.1.3 Обратимость функции

##### Определение

Функция  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  называется **обратной** к  $f : X \rightarrow Y$ , если пары  $f^{-1}$  — пары  $f$ , где элементы поменяны местами

##### Примечание

Чтобы  $f : X \rightarrow Y$  была обратима нужно, чтобы она была биекцией

##### Пример

$$f(x) = \sin(x), \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} — \text{не обратима}$$

$$f(x) = \sin(x), \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1; 1]$$

Тогда обратима

$$f^{-1}(x) = \arcsin(y) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

Далее работаем с числовыми функциями ( $X, Y \subset \mathbb{R}$ )

#### 4.1.4 Предел функции по Коши

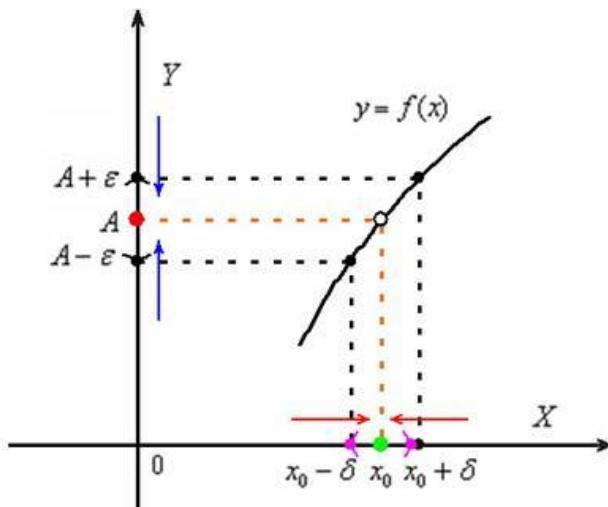
##### Определение по Коши

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \text{ если}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) |f(x) - A| < \varepsilon$$

$\Updownarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta |f(x) - A| < \varepsilon$$



##### Пример

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 7) = -1$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall x : 0 < |x - 3| < \delta |(2x - 7) - (-1)| < \varepsilon$$

$$|2x - 6| < \varepsilon$$

$$2 \cdot |x - 3| < \varepsilon$$

$$|x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Возьмем } \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{3}$$

### 4.1.5 Предел функции по Гейне

#### Определение по Гейне

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , если истинна импликация

$$\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0, x_n \neq x_0} A$$

#### Пример

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 7) = -1$$

Возьмем  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} : x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 3, x_n \neq 3$

$$\text{Посмотрим } f(x_n) = 2 \underbrace{x_n}_{\substack{3 \\ 6 \\ -1}} - 7 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -1$$

#### Теорема

Определения предела функции по Коши и Гейне равносильны

#### Доказательство

( $\Rightarrow$ ) :

Имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta |f(x) - A| < \varepsilon$$

Предположим, что посылка истинна. Тогда также имеем:

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0, x_n \neq x_0, \text{ то есть } \forall \omega > 0 \exists N_1(\omega) \forall n > N_1(\omega) 0 < |x_n - x_0| < \omega$$

Хотим:

$$f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} A, \forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \forall n > N_2(\varepsilon) |f(x_n) - A| < \varepsilon$$

Чтобы  $|f(x_n) - A| < \varepsilon$  нужно  $0 < |x_n - x_0| < \delta(\varepsilon)$  (Подставили в определение Коши  $f(x_n)$  вместо  $f(x)$ ). Поэтому возьмем  $\omega = \delta(\varepsilon)$ .

Получаем  $N_1(\delta(\varepsilon))$  и  $\forall n > N_1(\delta(\varepsilon)) 0 < |x_n - x_0| < \delta(\varepsilon)$  и тогда  $|f(x_n) - A| < \varepsilon$

Возьмем  $N_2(\varepsilon) = N_1(\delta(\varepsilon))$

( $\Leftarrow$ ) :

Имеем:

$$\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0, x_n \neq x_0} A$$

Пп т.е верно:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta = \delta(\varepsilon) \exists x(\delta) \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) |f(x) - A| \geq \varepsilon$$

Для каждого  $\delta = \frac{1}{n}$  найдем  $x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$

Получим

$$\underbrace{x_0 - \frac{1}{n}}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0} < x_n < \underbrace{x_0 + \frac{1}{n}}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0}$$

$$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} : x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0, x_n \neq x_0$$

Значит  $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} A$

Но  $|f(x) - A| \geq \varepsilon$ . Получили противоречие (расписать определение и в качестве  $\varepsilon$  взять  $\varepsilon_0$ )

### Пример

Рассмотрим функцию Дирихле:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Утверждается, что у данной функции нет предела ни в какой точке. Рассмотрим  $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} D(x) \negexists$$

$$x_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, x_n \neq 0; f(x_n) \equiv 1 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$$

$$x'_n = \frac{\sqrt{2}}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, x'_n \neq 0; f(x'_n) \equiv 0 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

#### 4.1.6 Арифметика предела функции

Если  $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} A$ ,  $g(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} B$ , тогда:

$$1. f(x) \pm g(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} A \pm B$$

$$2. f(x) \cdot g(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} A \cdot B$$

$$3. \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} \frac{A}{B}, B \neq 0$$

$$4. \sqrt[k]{f(x)} \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} \sqrt[k]{A}$$

### Доказательство 1

Возьмем произвольную последовательность  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} : x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0, x_n \neq x_0$ . Тогда по

Гейне:

$$f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} A, g(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} B$$

По арифметике предела последовательности:

$$f(x_n) - g(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} A - B$$

Тогда по Гейне:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = A - B$$

## Примечание

Остальные свойства доказываются аналогично

### 4.1.7 Теорема о зажатой функции

#### Теорема

$$\exists \delta_0 \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) : f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A, \text{ тогда } \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$$

#### Доказательство

Возьмем произвольную  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} : x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0, x_n \neq x_0$

$$\exists N_0 \forall n > N_0 x_0 \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)$$

$$\forall n > N_0 f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n)$$

$$\underbrace{f(x_n)}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{A}} \leq h(x_n) \leq \underbrace{g(x_n)}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{A}} \Rightarrow \boxed{h(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} A} \Rightarrow h(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A$$

### 4.1.8 Предел сложной функции

Вернемся к арифметике предела функции. Хотим:

5. Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{y \rightarrow A} h(y) = A$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(f(x)) = A$ . Это неправда

Контрпример:

$$f(x) \equiv 0, x_n \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow 0$$

$$h(y) = |sign y|, sign(y) = \begin{cases} 1, & y > 0 \\ 0, & y = 0 \\ -1, & y < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} h(y) = 1$$

Хотим:

$$h(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

Но:

$$h(f(x)) \implies h(0) \implies 0. \text{ Противоречие}$$

Мы всегда смотрели на аргумент из проколотой окрестности, а  $f(x)$  попал в центр окрестности

## Теорема о пределе сложной функции

Если  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A$ ,  $h(y) \xrightarrow{y \rightarrow A} h(A)$ , тогда:

$$h(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} h(A)$$

## Доказательство

$$\forall \omega > 0 \exists \delta = \delta(\omega) \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) |f(x) - A| < \omega$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta = \eta(\varepsilon) \forall y \in \overset{\circ}{U}_\eta(A) |h(y) - h(A)| < \varepsilon$$

Добавляем в окрестность  $\eta_0$ , так как неравенство выполнено ( $0 < \varepsilon$ )

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta = \eta(\varepsilon) \forall y \in U_\eta(A) |h(y) - h(A)| < \varepsilon$$

Нужно доказать:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_1}(x_0) |h(f(x)) - h(A)| < \varepsilon$$

Верно, если  $f(x) \in U_{\eta(\varepsilon)}(A)$

$$\exists \delta = \delta(\eta(\varepsilon)) \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) |f(x) - A| < \eta(\varepsilon)$$

Возьмем  $\delta_1(\varepsilon) = \delta(\eta(\varepsilon))$

## Пример

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot 5 = 1 \cdot 5 = 5$$

Рассмотрим обоснование:

$$h(y) = \frac{\sin y}{y}, f(x) = 5x$$

Кажется нужно искать  $h(f(x))$  и тогда:

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(f(x)) \sim h(0) \sim 1$$

В чем кроется замена переменной: если найдем предел  $h(y)$ , то  $h(f(x))$  будет такой же. Но эта теорема неверна (см контрпример выше). Тогда требуются доп ограничения (спойлер: теорема ниже)

## Вторая теорема о пределе сложной функции

$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)$ ,  $f(x)$  — строго монотонна в какой-то окрестности  $x_0$ ,  $h(y) \xrightarrow{y \rightarrow f(x_0)} A$

Тогда:

$$h(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A$$

### Доказательство

$$\forall \omega > 0 \exists \delta = \delta(\omega) \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) |f(x) - f(x_0)| < \omega$$

$$\forall \omega > 0 \exists \delta = \delta(\omega) \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) 0 < |f(x) - f(x_0)| < \omega$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta = \eta(\varepsilon) \forall y \in \overset{\circ}{U}_\eta(f(x_0)) |h(y) - A| < \varepsilon$$

Нужно:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) \forall y \in \overset{\circ}{U}_{\delta_1}(x_0) |h(f(x)) - A| < \varepsilon$$

Верно при  $f(x) \in \overset{\circ}{U}_{\eta(\varepsilon)}(f(x_0)) \Rightarrow 0 < |f(x) - f(x_0)| < \eta(\varepsilon)$ . Это верно при  $x \in \overset{\circ}{U}_{\delta(\eta(\varepsilon))}(x_0)$

Возьмем  $\delta_1(\varepsilon) = \delta(\eta(\varepsilon))$

### Определение

Функция  $f(x)$  называется **непрерывной в точке  $x_0$** , если:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in U_\delta(x_0) |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$x \in I \Rightarrow \sin x < x$$

### Доказательство

...

### Пример

$\sin x$  непрерывен на  $\mathbb{R}$ , т.е  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$

Хотим:  $(\sin x - \sin x_0) - \text{б.м.}$  Будем рассматривать по модулю, так как неважно, само выражение б.м. или модуль от него. Используя  $[x \in I \Rightarrow \sin x < x]$ :

$$|\sin x - \sin x_0| = \left| 2 \cdot \sin \frac{x - x_0}{2} \cdot \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq 2 \cdot \sin \frac{|x - x_0|}{2} < 2 \cdot \frac{|x - x_0|}{2} = |x - x_0|$$

$$|x - x_0| \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

### Пример

$\cos x$  непрерывен на  $\mathbb{R}$ , т.е  $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right)}_{\frac{\pi}{2} - x_0} = \sin \left( \frac{\pi}{2} - x_0 \right) = \cos x_0$

## Пример

$\tg x$  непрерывен на  $D_f$ , т.е.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x_0 \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}}} \tg x = \frac{\overset{\rightarrow \sin x_0}{\sin x}}{\overset{\rightarrow \cos x_0 \neq 0}{\cos x}} \rightarrow \frac{\sin x_0}{\cos x_0} = \tg x_0$$

## Определение

**Односторонним пределом**  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$  называется такое число, что:

- $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall x : 0 < x - x_0 < \delta(\varepsilon) |f(x) - A| < \varepsilon$  — **правосторонний предел**

- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall x : 0 < x_0 - x < \delta(\varepsilon) |f(x) - A| < \varepsilon$  — **левосторонний предел**

## Замечание

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

Доказательство тривиальное (в обратную сторону нужно взять минимум из двух  $\delta$ )

## 4.2 Классификация разрывов

**1 рода:**  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x)$

**1.1 — Устранимый** (устранимый, значит вы можете переопределить/доопределить функцию в точке, и она станет непрерывной в этой точке)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$$

## Пример

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Функция неопределена в 0, можем доопределить единицей и тогда она станет непрерывной в 0

## Пример

$$f(x) = |\operatorname{sign}(x)|$$

Функция в 0 разрывна, так как предел есть и равен 1. Можем переопределить функцию в 0 и она станет непрерывной

## 1.2 — Скачок

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

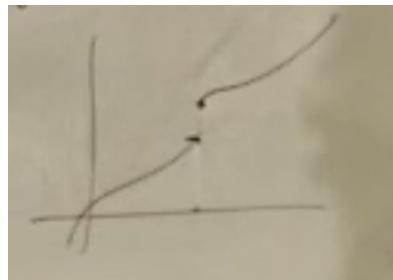


Рис. 1: Скачок на примере функции распределения

### Примечание

Доказать, что если функция монотонная, то у нее есть разрывы только типа скачок

**2 рода:**  $\neg \exists \lim_{x \rightarrow x_0 \pm} f(x)$

### Примечание

У таких функций нет предела или они бесконечно большие

#### 2.1 — Полюс

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty, \boxed{x_0 - \text{полюс}}$$

#### 2.2 — Никак((

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$

$$\forall M > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in (2; 2 + \delta) \ f(x) < -M$$

### Определение

$f(x)$  ограничена при  $x \rightarrow x_0$ , если

$$\exists C \ \exists \delta_0 \ \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) \ |f(x)| \leq C$$

## 4.3 Асимптоты

### 4.3.1 Вертикальная

#### Определение

Прямая  $x = a$  называется **вертикальной асимптотой**, если  $\lim_{x \rightarrow a^\infty} f(x) = \pm\infty$  или  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$

### Пример

$$f(x) = \frac{x+3}{x-2}$$

$x = 2$  — вертикальная асимптота  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+3}{x-2} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+3}{x-2} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

### Определение

$f(x)$  ограничена при  $x \rightarrow x_0$ :  $\exists \delta_0 \exists c_0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) |f(x)| \leq c_0$

### Определение

$f(x)$  отделима от нуля при  $x \rightarrow x_0$ :  $\exists \delta_0 \exists c_0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) |f(x)| \geq c_0$

### Пример

$$f(x) = \frac{1}{1 - \{x\}}$$

ДОБАВИТЬ РИСУНОК

$\{x\} = x - [x]$  — дробная часть

$[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$  — целая часть

### 4.3.2 Горизонтальная

#### Определение

$y = b$  — горизонтальная асимптота при  $x \rightarrow \pm\infty$ , если

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$$

### 4.3.3 Наклонная

#### Определение

$y = kx + b$  — наклонная асимптота при  $x \rightarrow \pm\infty$ , если

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - f(kx + b)) = 0$$

#### Примечание

Горизонтальная — частный случай наклонной

#### Теорема

$y = kx + b$  — наклонная асимптота при  $x \rightarrow \pm\infty$

$$\exists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \exists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = b$$

## Доказательство

$\Rightarrow$

$$f(x) - (kx + b) = \alpha(x), \alpha(x) \rightarrow 0$$

$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha}{x} \rightarrow k$$

$$f(x) - kx = b + \alpha(x) \rightarrow b$$

$\Leftarrow$

$$f(x) - kx = b + \alpha(x)$$

$$f(x) - kx - b = \alpha(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$$

## Пример

$$y = \sqrt{x^2 + 7x + 14}$$

Вертикальных нет, так как  $\forall x_0 \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  Наклонная:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 7x + 14}}{x}$$

1)

$$x \rightarrow +\infty \sqrt{1 + \frac{7}{x} + \frac{14}{x^2}} \rightarrow -1$$

2)

$$x \rightarrow +\infty - \sqrt{1 + \frac{7}{x} + \frac{14}{x^2}} \rightarrow \frac{7}{2}$$

1)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 7x + 14} - x = \frac{7}{2}$$

2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 7x + 14} + x = \frac{7}{2}$$

## 4.4 О — символика

### 4.4.1 О малое

#### Определение

$f(x) = \bar{o}(g(x))$  при  $x \rightarrow x_0$  ( $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ), если

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \text{бесконечно малая при } x \rightarrow x_0$$

#### 4.4.2 О большое

##### Определение

$f(x) = \underline{O}(g(x))$  при  $x \rightarrow x_0$  ( $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ), если

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \text{ограниченная при } x \rightarrow x_0$$

##### Пример

$x^2 = \bar{o}(x^3)$  при  $x \rightarrow 0$  : (

$$\frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x} \rightarrow \infty$$
$$x^2 = \bar{()$$

##### Примечание

1. Впредь бесконечно малые будем обозначать  $\bar{o}(1)$

$$f(x) - kx - b = \bar{o}(1)$$

$$\bar{o}(1) + \bar{o}(1) = \bar{o}(1)$$

2. Впредь ограниченные будем обозначать  $\underline{O}(1)$

$$\bar{o}(1) + \underline{O}(1) = \underline{O}(1)$$

### 4.5 Замечательные пределы

##### Теорема

$\cos x$  непрерывен на  $\mathbb{R}$

##### Доказательство

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$$

$\Updownarrow$

$$\cos x - \cos x_0 = \bar{o}(1) \text{ при } x \rightarrow x_0$$

$$\left| -2 \cdot \sin \frac{x+x_0}{2} \cdot \sin \frac{x-x_0}{2} \right| \leq 2 \cdot 1 \cdot \left| \frac{x-x_0}{2} \right| \rightarrow 0$$

[1]  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

##### Доказательство

$$S_{\triangle OAB} < S_{\triangle OAB} < S_{\triangle OAC}$$

$$\frac{\sin x}{2} < \pi \cdot \frac{x}{2\pi} < \frac{\tan x}{2}$$

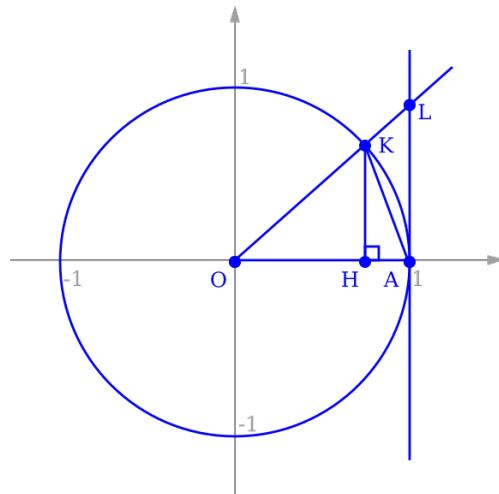


Рис. 2: К доказательству

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = e$$

### Примечание

Неопределенность  $\frac{0}{0}$ :  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ ;  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ , а также  $\frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty$   
 $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

### Доказательство

Хотим:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t &= e, \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e \\ \left(1 + \frac{1}{[t]+1}\right)^{[t]} &\leq \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{[t]} \leq \left(1 + \frac{1}{[t]}\right)^{[t]+1}, \quad [t] \geq 1, t \in \mathbb{R} \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad &\left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - e \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

$h(t)$  принимают те же значения, что и  $a_n$

**Утверждение:**  $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = e$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M(\varepsilon) \quad \forall t > M(\varepsilon) \quad \left| \left(1 + \frac{1}{[t]}\right)^{[t]+1} - e \right| < \varepsilon$$

$$M(\varepsilon) = N(\varepsilon) + 1$$

$$\forall t > M(\varepsilon) \text{ верно } [t] > N(\varepsilon)$$

$$\text{Аналогично рассмотрим } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = e$$

Аналогично доказывается  $\lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$

$$[2] \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^\pm} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

### Доказательство

Замена  $t = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$$

### Следствие 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\frac{1}{x} \cdot \ln(1+x) = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \rightarrow \ln e = 1$$

Непрерывность  $f(x)$  в т  $x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \ln(x) = \ln(x_0)$$

### Следствие 2

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Замена  $t = e^x - 1$ , при  $x \rightarrow 0$ ,  $t = e^x - 1 \rightarrow 0$ ,  $t + 1 = e^x$ ,  $x = \ln(t + 1)$

$$\frac{t}{\ln(t+1)} = \frac{1}{\frac{\ln(t+1)}{t}} \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = (e^x)'|_{x=0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

## 4.6 Непрерывность функции на отрезке

### Определение

Функция непрерывна на  $[a; b]$ , если

- 1)  $[a; b] \subset D_f$
- 2)  $f(x)$  непрерывна в т.  $x_0 \in (a; b)$
- 3)  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$   $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$

TODO: рисунок

## Теорема

Если функция непрерывна на отрезке  $[a; b]$ , то

- 1) она ограничена на  $[a; b]$
- 2) достигает  $\sup f(x) x \in [a; b] = \sup E_f$  и  $\inf f(x) x \in [a; b] = \inf E_f$

$$M = \sup f(x) x \in [a; b] \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$m = \inf f(x) x \in [a; b] \in \overline{\mathbb{R}}$$

1)  $M \in \mathbb{R}$

2)  $\exists x_0 \in [a; b] M = f(x_0)$

Построим  $a_n \uparrow M$

$$\forall n \exists x_n f(x_n) \geq a_n$$

TODO: рисунок

$\Pi \exists n_0 \forall x \in [a; b] f(x) < a_{n_0}$   $a_{n_0}$  — верхняя грань для  $E_+$  противоречие

Построили  $\{x_n\}$ :

$$a_n \leq f(x_n) \leq M$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = M$$

$x_n \in [a; b] \Rightarrow$  ограничена

$$\exists x_{n_k} : x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_0$$

Предельный переход в нер-вах  $a \leq x_{n_k} \leq b \Rightarrow x_0 \in [a; b]$

Определение непрерывности по Гейне  $f(x_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x_0)$

$$f(x_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} M$$

## Теорема

Непрерывная на отрезке функция принимает все промежуточные значения, т.е  $f(x), [a; b]$

$A = f(x_1), B = f(x_2), A < B$   $x_1, x_2 \in [a; b]$

тогда  $\forall C \in (A; B) \exists x_0 \in [a; b] : f(x_0) = C$

Следствие  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b] = D_f$ , то  $E_f = [m; M]$

## Доказательство

Построим последовательность влож отрезков  $\{[a_k; b_k]\}_{k \in \mathbb{N}}$ , будем считать  $x_1 < x_2$

$[a_1; b_1] = [x_1; x_2]$

Возьмем середину  $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$

1.  $f(x_3) = C$  чтд

2.  $f(x_3) < C$   $[a_2; b_2] = [x_3; b_1]$

3.  $f(x_3) > C$   $[a_2; b_2] = [a_1; x_3]$

TODO: рисунок

$\{a_k\}_k$  — неубывающая и огр сверху б

$\{b_k\}_k$  — невозрастает и огр снизу а

При  $k \rightarrow \infty$ :  $a_k \rightarrow \alpha$ ,  $b_k \rightarrow \beta$

$$b_k - a_k = \frac{1}{2^{k-1}}(x_2 - x_1) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Следовательно по теореме Вейерштрасса:  $\alpha = \beta$

$$f(a_k) < C \rightarrow f(\alpha) \leq C$$

Непрерывность  $f$  по Гейне в т.  $x_0 = \alpha$

$$f(b_k) > C \rightarrow f(\beta) \geq C$$

$$f(\alpha) = f(\beta) = C$$

## 4.7 Обратные функции

$f(x) : X \rightarrow Y$   $D_f = X$ ,  $E_f \subset Y$

$f^{-1}(y) : E_f \rightarrow X$

$f^{-1} : \{(y; x)\}_{x \in X, y \in E_f}$

$f(\cdot)$  инъекция

$X, Y \subset \mathbb{R}$

### Теорема о достаточном условии обратимости

Если  $f(x)$  — строго монотонна, то она обратима

#### Доказательство

Пусть  $f(x)$  возрастает

о/п (от противного):

$$\exists x_1 \text{ и } x_2 : x_1 \neq x_2 \Rightarrow (x_1 > x_2) \vee (x_1 < x_2) \Rightarrow (y_1 > y_2) \vee (y_1 < y_2)$$

Но:  $y_1 = y_2$ ,  $\perp$

### Теорема о критерии обратимости непрерывной функции

Если  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ , то:

$$f(x) \text{ обратима} \Leftrightarrow f(x) \text{ строго монотонна}$$

#### Доказательство

$\Leftarrow$  Доказано ранее

$\Rightarrow$

о/п (от противного)

$$1) \exists x_1 < x_2 < x_3 : y_1 > y_2 < y_3$$

ИЛИ

$$2) \exists x_1 < x_2 < x_3 : y_1 < y_2 > y_3$$

3) ИЛИ когда-то равны  $\Rightarrow$  тогда функция не инъективна  $\Rightarrow$  она не обратима  $\perp$

//TODO: рисунок

$$1) \exists c : c \in (y_2; y_1), c \in (y_2; y_3)$$

По теореме о промежуточных значениях:

$$\exists z_1 \in (x_1, x_2) : f(z_1) = c$$

$$\exists z_2 \in (x_2, x_3) : f(z_2) = c$$

$$z_1 \neq z_2$$

$\perp$

## Теорема

$$f(x)$$

- 1)  $D_f = [a; b]$
- 2)  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$
- 3)  $f(x)$  строго монотонна на  $[a; b]$ , то

$$f^{-1}(y)$$

- 1) область определения — отрезок с концами  $f(a)$  и  $f(b)$
- 2) непрерывна на этом отрезке
- 3) также строго монотонна на этом отрезке

## Доказательство

- 1)  $\Rightarrow$  из теоремы о промежуточных значениях
- 3) Пусть  $f(\cdot)$  возрастает. о/п:

$$\exists y_1 < y_2 \in [f(a); f(b)] : f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$$

$$x_1 \geq x_2 \Rightarrow y_1 \geq y_2 \text{ но } y_1 < y_2 \perp$$

## Словарик

Без ограничений общности — кажется что мы накладываем ограничение превращая в частный случай, но на самом деле не влияя на справедливость доказательства в целом, так как остальные случаи рассматриваются похожим образом

## Упражнение

$$\begin{aligned}\forall y_1, y_2 \in E_f = D_{f^{-1}} \quad & (y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)) \\ \dots \overline{y_1 < y_2} \vee f^{-1}(y_1) & < f^{-1}(y_2) \\ \exists y_1, y_2 \in E_f \quad & (y_1 < y_2 \wedge f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2))\end{aligned}$$

2)  $f^{-1}(y)$

//TODO: рисунок

Предположим, что она не непрерывна на отрезке, тогда у нее разрыв типа скачок. Но тогда в множестве значений появилась дыра (или две), чего не может быть (теория из доп листка)

Докажем другим способом:

$$\begin{aligned}y_0 &\in (f(a); f(b)) \\ \lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) &= f^{-1}(y_0) \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) \quad &\forall y \in U_\delta(y_0) \quad |f^{-1}(y) - \underbrace{f^{-1}(y_0)}_{x_0 \in (a; b)}| < \varepsilon\end{aligned}$$

Без ограничений обзности считаем, что:

$$U_\varepsilon(x_0) \subset (a; b)$$

//TODO

$$x_0 + \varepsilon, x_0 - \varepsilon \in (a; b)$$

⇓

$$y_1 = f(x_0 - \varepsilon), y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$$

$y_1 < y_0 < y_2$  тк  $f$  возрастает

Возьмем  $\delta = \min\{y_0 - y_1; y_2 - y_0\}$

$\forall y \in U_\delta(y_0) \Rightarrow y_1 < y < y_2$  тк  $f^{-1}$  возрастает

$$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) \quad |f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon$$

## Следствие

Если  $f(x)$  определена, непрерывна и строго монотонна на промежутке

$$(a; b) a, b \in \mathbb{R} (a; b] a \in \mathbb{R}$$

TODO

Без доказательства

TODO!!!

## 5 Производная

### Определение

Производной функции  $y = f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в т.  $x_0$  называется:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}, \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$$V_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

### Пример

$$y = x^n, n \in \mathbb{N}$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} = \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x_0^{n-1})}{(x - x_0)} =$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, x \in \mathbb{R}$$

$$= n \cdot x^{n-1}$$

### Замечание

Если  $\exists f'(x_0), x_0 \in X$ , то говорят о производной как о функции  $y = f'(x_0)$

## 5.1 Дифференцируемость функции

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow a_n = a + \underset{\text{б.м.}}{\alpha_n}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x_0 \in \mathbb{R}} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + o(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = B \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = B + o(1) \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + B(x - x_0) + \underset{=o(1) \cdot (x-x_0)}{o(x - x_0)}$$

⋮

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n)$$

### Определение

Функция  $f(x)$  называется дифференцируемой в т  $x_0$ , если:

$$f(x) = f(x_0) + B(x - x_0) + o((x - x_0))$$

## Теорема

$f(x)$  дифференцируема в т.  $x_0 \Leftrightarrow \exists f'(x_0)$ , причем  $B = f'(x_0)$

## Определение

Дифференциалом функции  $y = f(x)$  в т.  $x_0$  называется линейная функция  $B \cdot \Delta x$ , такая что  $\Delta f = B \cdot \Delta x + o(\Delta x)$

$$df(x_0)(\Delta x) = B \cdot \Delta x$$

$$dx(\Delta x) = 1 \cdot \Delta x$$

$$df(x_0)(\Delta x) = B \cdot dx(\Delta x)$$

$$df(x_0) = B \cdot dx$$

$$B = f'(x_0)$$

## Теорема

Если  $f(x)$  дифференцируема в т.  $x_0$ , то  $f(x)$  непрерывна в т.  $x_0$

## Доказательство

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{o(x - x_0)}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)$$

## 5.2 Правила подсчета производной

Если  $\exists f'(x_0), g'(x_0)$ , то:

- 1)  $\exists (f(x) + g(x))' \Big|_{x=x_0}$
- 2)  $\exists (f(x) + g(x))' \Big|_{x=x_0}$  TODO
- 3)  $\exists (f(x) + g(x))' \Big|_{x=x_0}$  TODO

## Доказательство 3)

$$\left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) \Big|_{x \rightarrow x_0} := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x_0) - g(x)f(x_0)}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x_0) \frac{(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} - f(x_0)}{g(x)g(x_0)}$$

TODO

- 4) TODO
- 5) Если  $\exists f'(x_0) \neq 0$  и  $f(x)$  строго монотонна в какой-то окрестности  $x_0$ , то:

$$\exists (f^{-1}(y))' \Big|_{y_0=f(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

### Доказательство 5)

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x \\ (f^{-1}(y))' \Big|_{y=y_0=f(x_0)} \cdot f'(x_0) &= 1 \\ = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} \end{aligned}$$

### Пример

$$\begin{aligned} x &= \arcsin y = f^{-1} = h(y) \\ h'(y) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} \end{aligned}$$

## 6 Bonus: Консультации по доп листкам

Консультации старшего ассистента Вадима Колбасина

### 6.1 Консультация по 2 листку

#### Определение

Множество  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$  называется **открытым**, если

$$\forall x (x \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists \delta (\delta > 0 \wedge \mathcal{U}_\delta(x) \subseteq \mathcal{U}))$$

#### Определение

Множество  $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}$  называется **замкнутым**, если  $\mathbb{R} \setminus \mathcal{F}$  открыто

#### Примечание

Если множество не открыто, то не значит что оно замкнуто

$$(0; 1]$$

$$(-\infty; 0] \cup (1; +\infty)$$

Существуют одновременно открытые и замкнутые множества

#### Примечание

$$A \setminus B := \{x \in A | x \notin B\}$$

#### Критерий замкнутости

$$\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R} \text{ замкнуто} \Leftrightarrow \forall \{x_n\} (\{x_n\} \subset \mathcal{F} \wedge x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} A \in \mathbb{R} \Rightarrow A \in \mathcal{F})$$

"любая сходящаяся сходится в само множество"

## Доказательство

$\Rightarrow$

$$x_n \rightarrow A \Rightarrow |x_n - A| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

о/п:

$$A \notin F \Rightarrow A \in \setminus F — \text{открыто}$$

$$\exists \delta > 0 : U_\delta(A) \subseteq \setminus F \Rightarrow \forall x \in F (|x - A| > \delta) \perp$$

$\Leftarrow$

о/п:  $F$  не замкнуто  $\Rightarrow \setminus F$  не открыто

$$\exists x_0 \in \setminus F \quad \forall \delta > 0 \quad U_\delta(x_0) \cap F \neq 0$$

$$\delta_0 = 1, \delta_{n+1} = \frac{|x_n - x_0|}{2}, x_n \notin \setminus F \Leftrightarrow x_n \in F$$

$$x_n \rightarrow x_0, x_n \in F, x_0 \notin F, \perp$$

## Примечание

Почему только  $\mathbb{R}$  и  $\emptyset$  одновременно открыты и пустые множества?

## Замечание

$$(A(\text{open}) \wedge A(\text{closed})) \Rightarrow (A = \mathbb{R} \vee A = \emptyset)$$

## Доказательство

о/п:

$$\exists A (\emptyset \subsetneq A \subsetneq \mathbb{R} \wedge A(\text{closed}) \wedge A(\text{closed}))$$

$$\Rightarrow \exists b \notin A \wedge \exists a \in A$$

Без ограничений общности  $b > a$ :

$$S = \{x \in [a; b] \mid [a; x] \subseteq A\} \ni A$$

$$c = \sup S, \delta = \frac{1}{n}, x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c, x_n \in A, c \in A, U_{\delta > 0}(c) \subseteq A, \perp$$

## Определение

Множество  $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}$  называется компактом, если

$$\forall \{x_n\} (\{x_n\} \subset \mathcal{K} \Rightarrow \exists \{n_m\} (x_{n_m} \rightarrow A \wedge A \in \mathcal{K}))$$

"из любой последовательности можно выделить подпоследовательность"

## Критерий компактности

$\mathcal{K}$  — компактно  $\Leftrightarrow \mathcal{K}$  замкнуто  $\wedge \mathcal{K}$  ограничено

## Доказательство

$\Rightarrow$

$$1) \quad x_n \rightarrow \tilde{A}$$

$$x_{n_m} \rightarrow A \in K$$

$$x_n \rightarrow A \in K$$

2) ограниченность

о/п:  $x_n \rightarrow \infty$

$$\forall \{n_m\} (x_{n_m} \rightarrow \infty), \perp$$

$$\Rightarrow \{x_n\} \subset \mathcal{K} \xrightarrow{\text{по теореме Б-Б}} x_{n_m} \rightarrow A, \mathcal{K} - \text{замкнуто} \rightarrow A \in \mathcal{K}$$

## Упражнение

$$\left\{ \left[ -\frac{1}{2^{2n}}, -\frac{1}{2^{2n+1}} \right] \right\}_{n=1}^{\infty} \bigcup \{0\}$$

## Теорема

$$1) \quad \bigcup_{\alpha} \mathcal{U}_{\alpha} = \mathcal{U}$$

$$2) \quad \bigcup_{k=1}^n \mathcal{U}_k = \mathcal{U}$$

$$3) \quad \bigcap_{\alpha} \mathcal{F}_{\alpha} = \mathcal{F}$$

$$4) \quad \bigcap_{k=1}^n \mathcal{F}_k = \mathcal{F}$$

$$\mathbb{R} \setminus \bigcup_{\alpha} \mathcal{A}_{\alpha} = \bigcap_{\alpha} (\mathbb{R} \setminus \mathcal{A}_{\alpha})$$

$$\mathbb{R} \setminus \bigcap_{\alpha} \mathcal{A}_{\alpha} = \bigcup_{\alpha} (\mathbb{R} \setminus \mathcal{A}_{\alpha})$$

## Доказательство

Доказательство устно

## Определение

$f : X \rightarrow Y, X, Y \subseteq \mathbb{R}$  называется равномерно непрерывной, если:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in X \quad (|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$$

## Теорема о равномерной непрерывности (Кантора)

Если  $f$  непрерывна на компакте, то она равномерно непрерывна на нем

## Доказательство

о/п:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x, y \in \mathcal{X} (|x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon)$$

$$\delta = \frac{1}{n}, \{x_n\}, \{y_n\}, |x_n - y_n| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \mathcal{K} \text{ — компакт} \Rightarrow x_{n_m} \rightarrow A \in \mathcal{K} \text{ И } y_{n_m} \rightarrow A \in \mathcal{K}$$

$\xrightarrow{\text{по Гейне}} f(x_{n_m}) \rightarrow f(A), f(y_{n_m}) \rightarrow f(A), \perp$

## Определение

Функция называется **непрерывной на множестве** если она непрерывна в каждой его предельной точкой

$$\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \cap \mathcal{X}$$

Функция Римана:

$$R(x) = \begin{cases} 0, x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, x = \frac{p}{q}, (pq) = 1 \end{cases}$$

$$R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\{x_n\} \subset \mathbb{Q}, x_n \rightarrow r \in \mathbb{Q}, x_n = \frac{p_n}{q_n} (p_n, q_n) = 1 \Rightarrow q_r \rightarrow \infty$$

## Определение

Отображением  $f : X \rightarrow X, X$  — полное множество, называется **Липшицевым**, если:

$$\forall x, y \in X |f(x) - f(y)| \leq \mathcal{L}|x - y|$$

## Определение

Отображение  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  называется **сжимающимся**, если оно Липшицевое и  $\mathcal{L} \in [0; 1)$

$$f(x) = x (\text{неподвижная точка})$$

Интересные факты:

$$|\sin x| < |x|$$

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$

## Теорема Банаха

$f : X \rightarrow X, X$  — компакт, — сжимающее. Тогда:

- 1) уравнение  $f(x) = x$  имеет единственное решение  $x^*$
- 2) последовательность  $x_{n+1} = f(x_n) \forall x_0$  своим пределом имеет  $x^*$

## Доказательство

План доказательства

- 1)  $f(\text{cont})$
- 2)  $x_{n+1} = f(x_n)$  фундаментальная
- 3)  $f(x^*) = x^*$
- 4)  $x^*$  единственный

$$s_n = |x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq \mathcal{L}|x_n - x_{n-1}| = \mathcal{L}s_{n-1}$$

$$s_1 \leq \mathcal{L}s_0 = |x_1 - x_0|$$

...

$$s_n \leq \mathcal{L}^n s_0 = \mathcal{L}^n |x_1 - x_0|$$

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &\leq |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \dots + |x_m - x_{m-1}| \leq \sum_{k=m}^{m+1} \mathcal{L}^k s_0 \leq \mathcal{L}^{n+1} s_0 \leq \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \end{aligned}$$