Семинар 5. Методы вычисления определителя

1 Разложение по строке (столбцу)

Определение. Пусть A — квадратная матрица. *Дополнительным минором* элемента a_{ij} называется определитель матрицы, полученной из A вычёркиванием i-й строки и j-го столбца и обозначается M_{ij}.

Определение. Пусть A — квадратная матрица. *Алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Разложение определителя по строке. Пусть A — квадратная матрица. Тогда разложением определителя A по i-й строке будем называть равенство $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$.

Пример. Пусть дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда мы можем вычислить $\det A$ с помощью разложения определителя по первой строке

$$\det A = 3A_{11} + 2A_{12} + 0A_{13} = 3(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 2(-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 12 + 16 = 28.$$

Но гораздо веселее разложить $\det A$ по третьему столбцу

$$\det A = 0A_{13} + 2A_{23} + 0A_{33} = 2(-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 28.$$

2 Рекуррентные соотношения

Пусть каким-либо образом задан общий вид матрицы произвольного порядка n (например, мы можем сказать, что у матрицы на главной диагонали стоят двойки, непосредственно над и под главной диагональю стоят единицы, а в остальных местах нули — такое описание определяет не одну матрицу, а множество матриц, в котором есть по одной матрице каждого размера). Обозначим D_n определитель матрицы порядка n указанного вида. Если удастся получить рекуррентное соотношение $D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}$ с постоянными (т. е. не зависящими от n) коэффициентами, связывающее определители различных порядков, то мы можем найти значение определителя D_n, как функцию от n с помощью следующего метода:

1) Решаем характеристическое уравнение $\lambda^2 - p\lambda - q = 0$.
2а) Если корни характеристического уравнения λ_1, λ_2 различны, то D_n выражается следующей формулой

$$D_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n.$$

2б) Если характеристическое уравнение имеет единственный корень λ_0, то D_n выражается следующей формулой

$$D_n = C_1 \lambda_0^n + C_2 n \lambda_0^n.$$

3) Константы C_1 и C_2 находятся с помощью непосредственного вычисления определителей D_1 и D_2 и подстановки найденных значений в общую формулу из пункта 2.

Задачи:
Проскуряков: 299, 300, 302, 297.

3 Метод выделения линейных множителей

Пусть матрица A содержит среди своих элементов переменную x. Тогда её определителем будет некоторый многочлен $f(x)$. Если нам удастся по виду определителя понять степень $f(x)$ (обозначим её k), коэффициент при старшем мономе $f(x)$ (обозначим его a_k), то мы можем найти определитель из следующих соображений

1) Найдём (подбором) k различных значений x, при которых определитель обращается в ноль (обозначим их $x_1, \ldots, x_k$).
2) Эти значения обязаны являться корнями многочлена $f(x)$.
3) Разложение многочлена на множители многочлена степени k, который имеет корни $x_1, \ldots, x_k$, имеет вид $f(x) = a_k(x - x_1) \cdots (x - x_k)$.
4) Таким образом, $\det A = f(x) = a_k(x - x_1) \cdots (x - x_k)$.

Пример. Найдём определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & x & 3 & 1 \\ 2 & 1 & x+2 & 2 \\ -6 & -3 & -9 & x-7 \end{pmatrix}.$$

Каждое слагаемое в определителе — произведение элементов взятых по одному из каждой строки и столбца (по определению). Значит $\det A$ это многочлен от x степени 3 со старшим коэффициентом 4. С другой стороны, наш глаз очень зорок и заметил, что при $x = 0$ первый и второй столбцы пропорциональны, при $x = 1$ пропорциональны второй и третий столбцы, при $x = 4$ пропорциональны третий и четвёртый столбцы, то есть все эти значения обнуляют определитель, а вместе с ним и многочлен. Таким образом,

$$\det A = 4x(x-1)(x-4) = 4x^3 - 20x^2 + 16x.$$

Задачи:
Проскуряков: 289.

4 Определитель Вандермонда

$$\begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \ldots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \hdotsfor{5} \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (a_i - a_j).$$

5 ДЗ

1. Посчитайте определитель с помощью определителя Вандермонда.
$$\begin{vmatrix} 1 & 3x-2 & 2x^2-5x & x^3 \\ 1 & 6y-2 & 8y^2-10y & 8y^3 \\ 1 & -3z-2 & 2z^2+5z & -z^3 \\ 1 & 9t-2 & 18t^2-15t & 27t^3 \end{vmatrix}$$
2. Проскуряков: 286, 290, 292 (хинт: можно прибавить к первому столбцу все остальные и заметить первый линейный множитель, можно прибавить к первому второй и вычесть третий и четвёртый и заметить второй линейный множитель и т.д.), 293, 301, 304, 325, 328, 330.