

# Лекции по математическому анализу (1 курс, 25-26)

[github.com/int28t/hse-se-lecture-notes](https://github.com/int28t/hse-se-lecture-notes)

Эрлих Иван Генрихович

## Содержание

<b>1 Информация о курсе</b>	<b>3</b>
1.1 Оценка . . . . .	3
<b>2 Основы логики и комбинаторика</b>	<b>3</b>
2.1 Логические операции и методы доказательств . . . . .	3
2.1.1 Кванторы . . . . .	3
2.1.2 Метод математической индукции . . . . .	3
2.1.3 Доказательство от противного . . . . .	4
2.1.4 Достаточность и необходимость . . . . .	4
2.2 Комбинаторика и Бином Ньютона . . . . .	5
2.2.1 Бином Ньютона . . . . .	5
2.2.2 Комбинаторика . . . . .	5
<b>3 Последовательности</b>	<b>6</b>
3.1 Основные понятия и предел последовательности . . . . .	6
3.1.1 Способы задания последовательности . . . . .	6
3.1.2 Предел последовательности . . . . .	7
3.1.3 Теорема об ограниченности сходящейся последовательности . . . . .	9
3.1.4 Арифметика предела . . . . .	10
3.1.5 Бесконечно большая и бесконечно малая последовательности . . . . .	11
3.1.6 Предельный переход в неравенствах . . . . .	14
3.1.7 Теорема о зажатой последовательности . . . . .	14
3.1.8 Bonus: Список хороших пределов . . . . .	15
3.2 Действительные числа . . . . .	16
3.2.1 Аксиома непрерывности . . . . .	16
3.2.2 Теорема Вейерштрасса . . . . .	17
3.3 Число $e$ и постоянная Эйлера . . . . .	19
3.3.1 Число $e$ . . . . .	19
3.3.2 Постоянная Эйлера . . . . .	21
3.4 Предел рекуррентно заданных последовательностей . . . . .	24
3.5 Доказательства стандартных сходимостей . . . . .	24
3.6 Подпоследовательности . . . . .	27
3.6.1 Частичные пределы . . . . .	27
3.6.2 Предельные точки . . . . .	27
3.6.3 Свойства частичных пределов . . . . .	28
3.6.4 Теорема Больцано-Вейерштрасса . . . . .	28
3.6.5 Критерий Коши . . . . .	30

<b>4 Функции</b>	<b>32</b>
4.1 Понятия функции и ее предела . . . . .	32
4.1.1 Функция. График функции . . . . .	32
4.1.2 Инъекция, сюръекция, биекция . . . . .	32
4.1.3 Обратимость функции . . . . .	32
4.1.4 Предел функции по Коши . . . . .	33
4.1.5 Предел функции по Гейне . . . . .	34
4.2 Классификация разрывов . . . . .	35
4.3 Асимптоты . . . . .	35
4.3.1 Вертикальная . . . . .	35
4.3.2 Горизонтальная . . . . .	36
4.3.3 Наклонная . . . . .	36
4.4 О — символика . . . . .	38
4.4.1 О малое . . . . .	38
4.4.2 О большое . . . . .	38
4.5 Замечательные пределы . . . . .	38
4.6 Непрерывность функции на отрезке . . . . .	41

# 1 Информация о курсе

## 1.1 Оценка

Тут когда-нибудь появится оценка

# 2 Основы логики и комбинаторика

## 2.1 Логические операции и методы доказательств

### Определение

**Высказывание** - словесное утверждение, про которое можно сказать, истинное оно или ложное.

Обозначение: заглавные латинские буквы:  $A, B, C \dots$

### Определение

**Предикат** - высказывание, зависящее от переменной (при этом не являющееся высказыванием)

### Пример

$$B(x) : x + 5 = 10$$

#### 2.1.1 Кванторы

- $\forall$  - всеобщности
- $\exists$  - существования

#### 2.1.2 Метод математической индукции

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} P(n)} \text{ — истинно, если:}$$

- 1)  $P(1)$  - истинно (база)
- 2)  $\forall n \in \mathbb{N} (P(n) \rightarrow P(n + 1))$  - истинно (шаг)

### Пример

Требуется доказать

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \forall x \geq -1 : (1 + x)^n \geq 1 + xn} \text{ — неравенство Бернулли}$$

Докажем с помощью ММИ

$$\underbrace{\forall n \in \mathbb{N} \forall x \geq -1}_{P(n)} \underbrace{(1 + x)^n \geq 1 + xn}_{Q(n)}$$

- 1)  $\forall x \geq -1 (1 + x) \geq 1 + x$  - истина

2) Предположим  $(1+x)^{n_0} \geq 1+xn_0$  - истина. Докажем, что  $(1+x)^{n_0+1} \geq 1+x(n_0+1)$ :

$$\begin{aligned}(1+x)^{n_0+1} &\geq 1+x(n_0+1) \\(1+x)^{n_0+1} &= (1+x)^{n_0} \underbrace{(1+x)}_{\geq 0} \geq (1+x)(1+xn_0) = \\&= 1+x+xn_0+\underbrace{x^2n_0}_{\geq 0} \geq 1+x+xn_0 = 1+x(n_0+1)\end{aligned}$$

### 2.1.3 Доказательство от противного

Обозначения:  $\bar{A}$  - отрицание к  $A$

#### Пример

Доказать, что количество простых чисел бесконечно

Пп (предположим противное). Тогда количество простых чисел конечное число:

$$n_1, \dots, n_k$$

Рассмотрим следующее число:

$$m = n_1 \cdot \dots \cdot n_k + 1, m \in \mathbb{N}, m > n_i \quad \forall i = \overline{1, k} \text{ то есть } m \neq n_i \quad \forall i = \overline{1, k}$$

Следовательно,  $m$  - составное. Тогда:

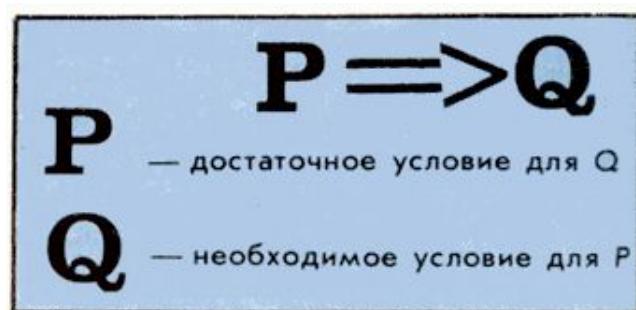
$$m = n_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot n_k^{\alpha_k}$$

$$\exists n_j : m : n_j$$

Но  $m = n_1 \cdot \dots \cdot n_k + 1$  и при делении на  $n_i \quad \forall i = \overline{1, k}$  дает остаток 1 ( $\perp$ )

Утверждение доказано

### 2.1.4 Достаточность и необходимость



## 2.2 Комбинаторика и Бином Ньютона

### 2.2.1 Бином Ньютона

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$$

$$C_n^0 a^0 b^{n-0} + C_n^1 a^1 b^{n-1} + \dots + C_n^n a^n b^{n-n}$$

где  $C_n^0, C_n^1, \dots$  - биномиальные коэффициенты

### 2.2.2 Комбинаторика

#### Определение

**Перестановка** - упорядоченное множество размера  $n$   
 $\#$  перестановок  $= n!$

#### Определение

**Размещения** - упорядоченное подмножество размера  $k$  множества размера  $n$   
 $\#$  размещений  $= \frac{n!}{(n-k)!} = A_n^k$

#### Определение

**Сочетания** - неупорядоченное подмножество размера  $k$  множества размера  $n$   
Одному сочетанию соответствуют  $k!$  размещений

$$\frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k$$

### 3 Последовательности

#### 3.1 Основные понятия и предел последовательности

##### Определение

**Последовательность** - индексированный набор чисел

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

##### 3.1.1 Способы задания последовательности

- 1) Формульный  $a_n = n^2 + n - 7$
- 2) Рекуррентный  $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

##### Определение

Последовательность называется **ограниченной**, если

$$\exists c \forall n |a_n| \leq c = P(\{a_n\})$$

И **неограниченной**, если

$$\forall c \exists n(c) |a_{n(c)}| > c$$

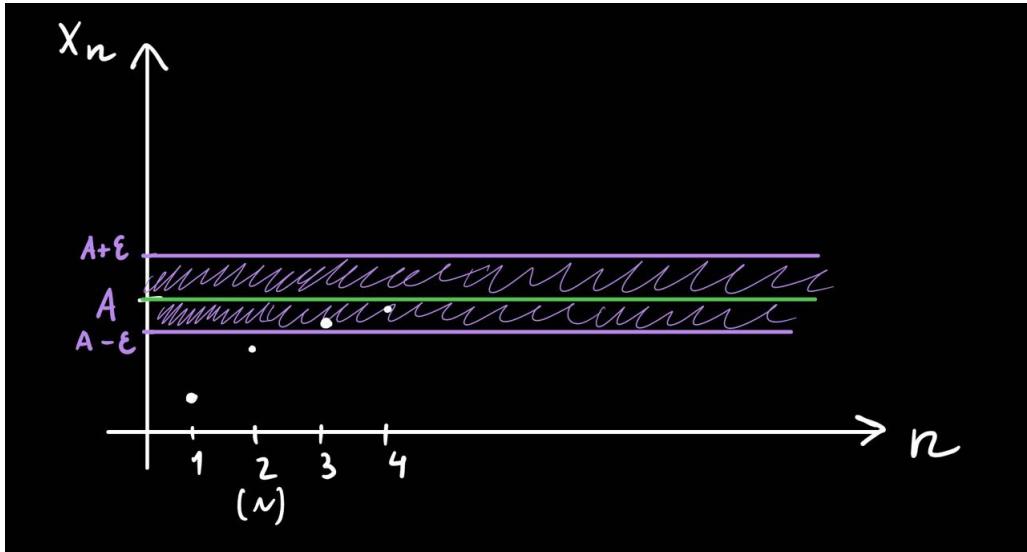
##### Пример

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3n^2 + 5n - 2}{2n^2 + n + 1} \\ \left| \frac{3n^2 + 5n - 2}{2n^2 + n + 1} \right| &\leq \left| \frac{3n^2 + 5n^2}{2n^2} \right| \leq \left| \frac{8n^2}{2n^2} \right| \leq c \\ 4 &\leq c \\ \exists c = \pi^2 \forall n \left| \frac{3n^2 + 5n - 2}{2n^2 + n + 1} \right| &\leq c \end{aligned}$$

### 3.1.2 Предел последовательности

#### Определение

Окрестность точки  $A$ :  $U_\varepsilon(A) = (A - \varepsilon; A + \varepsilon)$



#### Определение

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ , если

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N |a_n - A| < \varepsilon}$$

⇓

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N -\varepsilon < a_n - A < \varepsilon$$

⇓

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

⇓

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N a_n \in U_\varepsilon(A)$$

#### Пример

Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$N(\varepsilon) = \left[ \frac{1}{\varepsilon} + 1 \right]$$

## Определение

Последовательность называется **сходящейся**, если у нее есть предел

⇓

$$\exists a : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

### 3.1.3 Теорема об ограниченности сходящейся последовательности

#### Теорема

Если последовательность сходящаяся, то она ограничена

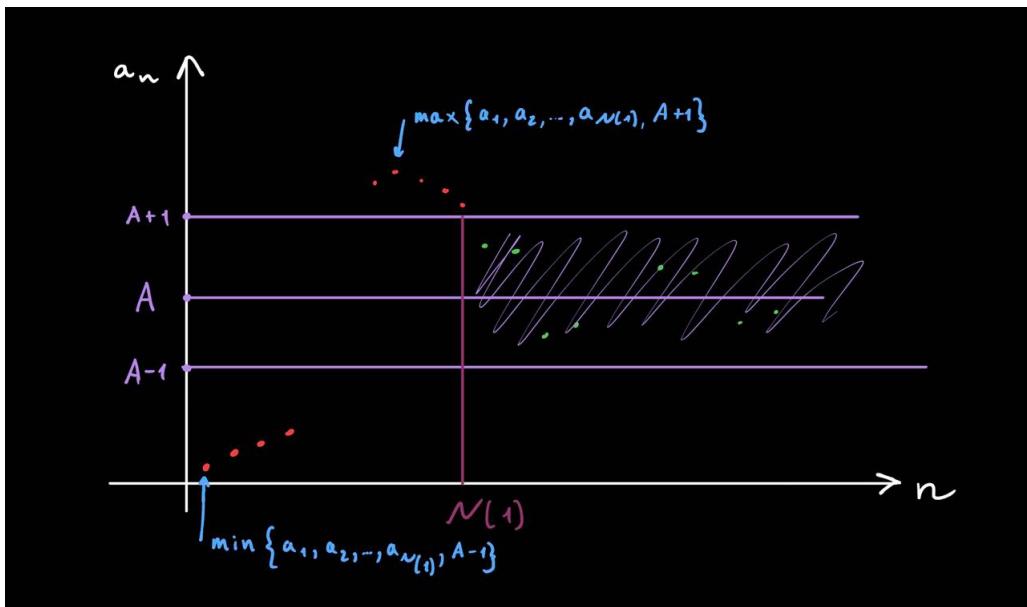
#### Доказательство

Рассмотрим  $\{a_n\}$

$$\exists A \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N |a_n - A| < \varepsilon$$

$$\exists A \exists N(1) \in \mathbb{N} \forall n > N(1) |a_n - A| < 1 \Leftrightarrow a_n \in U_1(A)$$

Очевидно, что элементов  $a_k$ , где  $k \leq N(1)$  конечное число. А для всех элементов  $a_n$ ,  $n > N(1)$  выполняется  $|a_n - A| < 1$ . Тогда можем взять нижнюю границу  $\min\{a_1, \dots, a_{N(1)}, A - 1\}$  и верхнюю  $\max\{a_1, \dots, a_{N(1)}, A + 1\}$ .



#### Теорема

У последовательности может быть только 1 предел

#### Доказательство

Пп  $\exists$  хотя бы 2  $\lim : A$  и  $B$ ,  $A \neq B$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_1(\varepsilon) a_n \in U_\varepsilon(A)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_2(\varepsilon) a_n \in U_\varepsilon(B)$$

Возьмем  $\varepsilon_0 = \frac{|A - B|}{3}$  и  $n_0 = N_1(\varepsilon_0) + N_2(\varepsilon_0)$

Получаем

$$a_{n_0} \in U_{\varepsilon_0}(A), a_{n_0} \in U_{\varepsilon_0}(B)$$

Но

$$U_{\varepsilon_0}(A) \cap U_{\varepsilon_0}(B) = \emptyset$$

Противоречие

### 3.1.4 Арифметика предела

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ , то

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B} (b_n \neq 0; B \neq 0)$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{A} (a_n \geq 0; A \geq 0)$$

#### Доказательство свойства 1

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_1(\varepsilon) |a_n - A| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_2(\varepsilon) |b_n - B| < \varepsilon$$

Хотим

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_3(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_3(\varepsilon) |(a_n + b_n) - (A + B)| < \varepsilon$$

⇓

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_3(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_3(\varepsilon) |(a_n - A) + (b_n - B)| < \varepsilon$$

↑

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_3(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_3(\varepsilon) \underbrace{|a_n - A|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|b_n - B|}_{< \frac{2\varepsilon}{3}} < \varepsilon$$

$$\forall n > N_1\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) \forall n > N_2\left(\frac{2\varepsilon}{3}\right)$$

$$N_3(\varepsilon) = \max \left\{ N_1\left(\frac{\varepsilon}{3}\right), N_2\left(\frac{2\varepsilon}{3}\right) \right\}$$

Примечание: Доказательства свойств 2 и 3, рассмотренные далее, были выведены после доказательства теоремы о произведении б.м. и о гр. последовательностей

#### Доказательство свойства 2

Хотим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$$

По теореме о связи предела с бесконечно малой последовательностью

$$\alpha_n = (a_n - A) - \text{б.м.}, \beta_n = (b_n - B) - \text{б.м.}$$

Хотим

$$(a_n b_n - AB) - \text{б.м.}$$

$$\begin{aligned} (a_n b_n - AB) &= (\alpha_n + A)(\beta_n + B) - AB = \alpha_n \beta_n + \alpha_n B + A \beta_n + AB - AB = \\ &= \underbrace{\alpha_n \beta_n}_{\text{б.м.}} + \underbrace{\alpha_n B}_{\text{б.м.}} + \underbrace{A \beta_n}_{\substack{\text{огр} \\ \underbrace{\beta_n}_{\text{б.м.}}}} + \underbrace{AB}_{\text{б.м.}} - AB = \end{aligned}$$

### Доказательство свойства 3

Хотим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B} \quad (b_n \neq 0; B \neq 0)$$

По теореме о связи предела с бесконечно малой последовательностью

$$\alpha_n = (a_n - A) - \text{б.м.}, \beta_n = (b_n - B) - \text{б.м.}$$

Хотим

$$\begin{aligned} & \frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} - \text{б.м.} \\ & \frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} = \frac{\alpha_n + A}{\beta_n + B} - \frac{A}{B} = \frac{(\alpha_n + A)B - A(\beta_n + B)}{(\beta_n + B)B} = \\ & = \frac{(\alpha_n + A)B - A(\beta_n + B)}{(\beta_n + B)B} = \frac{\alpha_n B + AB - A\beta_n - AB}{b_n B} = \frac{\alpha_n B - A\beta_n}{b_n B} = \\ & = \underbrace{\frac{1}{b_n} \cdot \frac{1}{B}}_{\text{огр.} \cdot \text{огр.}} \cdot \underbrace{(\alpha_n B - A\beta_n)}_{\text{б.м.}} = \text{б.м.} \end{aligned}$$

### 3.1.5 Бесконечно большая и бесконечно малая последовательности

#### Определение

**Бесконечно малой** (б.м.) последовательностью называют последовательность  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  такую что,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

#### Определение

**Бесконечно большой** (б.б.) последовательностью называют последовательность  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  такую что,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$

$$\forall M > 0 \exists N(M) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N(M) \quad |b_n| > M$$

$$b_n > M \quad (+\infty)$$

$$b_n < M \quad (-\infty)$$

#### Теорема

$$\frac{1}{\text{б.б.}} = \text{б.м.}$$

#### Доказательство

Пусть  $b_n$  - б.б. Тогда

$$\forall M > 0 \exists N_1(M) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_1(M) \quad |b_n| > M$$

Хотим  $a_n = \frac{1}{b_n}$  - б.м.:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \quad \forall n > N_2(\varepsilon) \quad |a_n| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{1}{b_n} \right| < \varepsilon$$

$$|b_n| > \frac{1}{\varepsilon}$$

Возьмем  $N_2(\varepsilon) = N_1 \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) + 1$

## Теорема

б.м. ·ogr. = б.м.

## Доказательство

Хотим  $a_n \cdot b_n = c_n$ , где  $a_n, c_n$  - б.м.,  $b_n$  -ogr.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_1(\varepsilon) |a_n| < \varepsilon$$

$$\exists c \forall n \in \mathbb{N} |b_n| \leq c$$

Хотим:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_2(\varepsilon) |a_n \cdot b_n| < \varepsilon$$

↑

$$|a_n| \cdot |b_n| < \varepsilon$$

$$|a_n| \cdot c < \varepsilon$$

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{c}$$

Возьмем  $N_2(\varepsilon) = N_1 \left( \frac{\varepsilon}{c} \right)$

## Пример

б.б. + б.б.

Мы точно не можем сказать, чем будет являться эта сумма. Например  $n + (-n) = 0$  и  $n + n = 2n$

## Пример

б.б. +ogr. = б.б.

Покажем, что это так

Хотим:  $b_n + c_n = u_n$  соответственно. Тогда:

$$\forall M > 0 \exists N(M) \in \mathbb{N} \forall n > N(M) |b_n| > M$$

$$\exists C > 0 \forall n \in \mathbb{N} |c_n| \leq C$$

Хотим:

$$\forall K > 0 \exists N_2(K) \in \mathbb{N} \forall n > N_2(K) |b_n + c_n| > K$$

Так, как  $|x + y| \geq |x| - |y|$ :

$$|b_n| - |c_n| > K$$

$$|b_n| - C > K$$

$$|b_n| > K + C$$

Возьмем  $N_2(K) = N(K + C)$

### Теорема

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \Leftrightarrow (a_n - A) = \alpha_n \text{ - бесконечно малая}$$

### Доказательство

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_1(\varepsilon) |a_n - A| < \varepsilon$$

Хотим

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_2(\varepsilon) |(a_n - A) - 0| < \varepsilon$$

$$N_2(\varepsilon) = N_1(\varepsilon)$$

### Примечание

Теперь можно спокойно доказать свойство 2) из арифметики пределов

### Примечание

Произведение бесконечно малых - бесконечно малая последовательность. Так как можно представить одну из них как ограниченную и использовать теорему выше

### Определение

Назовем последовательность  $d_n$  **отделимой от нуля**, если:

$$\exists \delta > 0 \forall n \in \mathbb{N} |d_n| \geq \delta$$

### Пример

$$(-1)^n$$

### Теорема

$$\frac{1}{\text{огр}} = \text{отделима от нуля}, \frac{1}{\text{отделима от нуля}} = \text{огр}$$

### Доказательство

$$\exists \delta > 0 \forall n \in \mathbb{N} |d_n| \geq \delta$$

$$u_n = \frac{1}{d_n}, \exists c > 0 \forall n \in \mathbb{N} |u_n| \leq c$$

↑

$$\left| \frac{1}{d_n} \right| \leq c$$

↑

$$|d_n| \geq \frac{1}{c}$$

Возьмем  $c = \frac{1}{\delta}$ . Тогда  $|d_n| \geq \delta$  верно  $\forall n \in \mathbb{N}$

### Теорема

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = U$ ;  $u_n, U \neq 0$ , то  $u_n$  отделима от нуля

### Доказательство

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad |u_n - U| < \varepsilon$$

Хотим

$$\exists \delta > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \geq \delta$$

$$\text{Возьмем } \varepsilon_0 = \frac{|U|}{2}$$

$$\exists N_0 = N\left(\frac{|U|}{2}\right) = N(\varepsilon_0)$$

$$\forall n > N_0 \quad u_n \in U_{\frac{|U|}{2}}(U)$$

Очевидно, что существует конечное число  $u_k$ ,  $k \leq N(\varepsilon_0)$ , причем  $u_k \neq 0$

$$\text{Возьмем } \delta = \min\{|u_1|, |u_2|, \dots, \frac{|U|}{2}\}$$

### 3.1.6 Предельный переход в неравенствах

### Теорема

Если  $\exists N_0 \forall n > N_0 a_n > b_n$  и  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$  и  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B$ , то  $A \geq B$

### Доказательство

$$\text{Пп } A < B. \text{ Возьмем } \varepsilon_0 = \frac{B - A}{2}$$

$$\exists N_1(\varepsilon_0) \quad \forall n > N_1(\varepsilon_0) \quad a_n \in U_{\varepsilon_0}(A)$$

$$\exists N_2(\varepsilon_0) \quad \forall n > N_2(\varepsilon_0) \quad b_n \in U_{\varepsilon_0}(B)$$

Возьмем  $n_0 = N_1(\varepsilon_0) + N_2(\varepsilon_0) + N_0$ . Тогда по условию  $a_{n_0} > b_{n_0}$ , но также  $a_{n_0} < b_{n_0}$  (так как окрестность  $a$  по предположению левее окрестности  $b$ ). Получили противоречие

### 3.1.7 Теорема о зажатой последовательности

### Теорема о зажатой последовательности

Если  $\exists N_0 \forall n > N_0 a_n \leq c_n \leq d_n$ , а также  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$  и  $d_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$ , то  $c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$

## Доказательство

$$a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} A; \forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \forall n > N_1(\varepsilon) A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

$$d_n \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} A; \forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \forall n > N_2(\varepsilon) A - \varepsilon < d_n < A + \varepsilon$$

Хотим

$$c_n \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} A; \forall \varepsilon > 0 \exists N_3(\varepsilon) \forall n > N_3(\varepsilon) A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon$$

Получаем

$$\underbrace{A - \varepsilon}_{\forall n > N_1(\varepsilon)} \leq a_n \leq \underbrace{c_n}_{\forall n > N_0} \leq \underbrace{d_n}_{\forall n > N_2(\varepsilon)} \leq \underbrace{A + \varepsilon}_{\forall n > N_3(\varepsilon)}$$

Возьмем  $N_3(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon), N_0\}$

### 3.1.8 Bonus: Список хороших пределов

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, |q| < 1$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty, |q| > 1$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, a > 0$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^a}{b^n} = 0$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^n}{n!} = 0$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^a} = 0, a > 0$$

## 3.2 Действительные числа

### Определение

Множество **действительных чисел** - это четверка  $(\mathbb{R}; +; \times; \leq)$  (множество, 2 операции, 1 отношение)

### Примечание

Отличие операции от отношения. Для того чтобы задать операцию, нужно поставить в соответствие для каждой пары чисел число  $(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ . В отношении для каждой пары чисел нужно поставить в соответствие 0 или 1  $(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\})$ .

### 3.2.1 Аксиома непрерывности

$$A, B \subset \mathbb{R}$$

- 1)  $A, B \neq \emptyset$
- 2)  $\forall x \in A \ \forall y \in B \ x \leq y$

Тогда  $\exists \xi \in \mathbb{R} : \forall x \in A \ \forall y \in B \ x \leq \xi \leq y$

### Определение

**Верхней гранью** множества  $A \subset \mathbb{R}$  называется число  $C \in \mathbb{R}$ , такое что  $\forall x \in A \ x \leq C$

### Определение

**Точной верхней гранью** ( $\sup A$ ) ограниченного сверху множества  $A$  называют наименьшую верхнюю грань множества  $A$

### Определение

**Нижней гранью** множества  $A \subset \mathbb{R}$  называется число  $D \in \mathbb{R}$ , такое что  $\forall x \in A \ x \geq D$

### Определение

**Точной нижней гранью** ( $\inf A$ ) ограниченного снизу множества  $A$  называют наибольшую нижнюю грань множества  $A$

### Пример

$A = (-1; 0)$ . Множество верхних граней:  $[0; +\infty)$ ,  $\sup A = 0$

### Теорема

У ограниченного сверху множества есть точная верхняя грань

### Доказательство

$$\left. \begin{array}{l} A - \text{огр. сверху}, A \neq \emptyset \\ B = \{\text{верхние грани } A\}, B \neq \emptyset \\ \forall x \in A \ \forall y \in B \ x \leq y \end{array} \right] \exists \xi \in \mathbb{R} : \forall x \in A \ \forall y \in B \ x \leq \xi \leq y$$

1) Из  $x \leq \xi$  получаем, что  $\xi$  - верхняя грань  $A \Rightarrow \xi \in B$

2) Так, как  $\xi \leq y$ , то  $\xi$  - минимальный элемент из  $B$ .  $[\xi = \sup A]$

### Определение

**Точной верхней гранью неограниченного сверху множества** назовем  $+\infty$

### 3.2.2 Теорема Вейерштрасса

#### Определение

$\{a_n\}$  - неубывает, если  $a_{n+1} \geq a_n$

#### Определение

$\{a_n\}$  - возрастает, если  $a_{n+1} > a_n$

#### Пример (3-й способ доказательства монотонности)

Доказать, что последовательность  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  строго возрастает

Необходимо доказать:  $\forall n a_{n+1} > a_n$

$$\begin{aligned} 1 < \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \\ &= \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \end{aligned}$$

По неравенству Бернулли  $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \forall x \geq -1 (1+x)^n \geq 1+xn}$

$$\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) =$$

$$\begin{aligned} &= \left(1 + \underbrace{\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right)}_{\geq -1}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \geq \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \\ &= \frac{(n^2+n+1)(n+2)}{(n+1)^3} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1 \end{aligned}$$

#### Теорема Вейерштрасса

Если  $\{a_n\}$  неубывает и ограничена сверху, то она сходится

## Доказательство

$\{a_n\} \neq \emptyset$ , огр. сверху

$\exists \sup \{a_n\} = A \in \mathbb{R}$

Хотим доказать:  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \ \forall n > N(\varepsilon) \underbrace{|a_n - A|}_{\leq 0} < \varepsilon$$

$$A - a_n < \varepsilon$$

$$a_n > A - \varepsilon \Leftrightarrow a_{N(\varepsilon)+1} > A - \varepsilon$$

Тогда докажем:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ a_{N(\varepsilon)+1} > A - \varepsilon$$

Пп

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ a_{N+1} \leq A - \varepsilon_0$$

$\Updownarrow$

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ a_n \leq A - \varepsilon_0$$

Получаем, что самая маленькая верхняя граница  $= A - \varepsilon_0$ , но  $\sup a_n = A$ .  $\perp$

**Контрпример** (Если  $\{a_n\}$  сходится, то необязательно она неубывает)

$$a_n = \frac{\sin n}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

### 3.3 Число $e$ и постоянная Эйлера

#### 3.3.1 Число $e$

##### Определение

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

##### Доказательство

Ранее мы доказали, что данная последовательность неубывает.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \left(\frac{1}{n} + 1\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n-k} = \\ &= 1 + \frac{n!}{(n-1)! 1!} \cdot \frac{1}{n} + \dots + \frac{n!}{(n-k)! k!} \cdot \frac{1}{n^k} + \dots = \\ &= 1 + 1 + \dots + \underbrace{\frac{n}{n}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\leq 1} \cdot \dots \cdot \underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{\leq 1} \cdot \frac{1}{k!} + \dots < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

Напоминание о телескопических суммах:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Хотим получить нечто похожее, тогда выкинем из каждого знаменателя все множители, кроме последних двух:

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \underbrace{<}_{n \geq 4} 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) < 3$$

##### Следствие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{kn}\right)^n = e^{\frac{1}{k}}$$

##### Доказательство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{kn}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left(1 + \frac{1}{kn}\right)^{nk} \right)^{\frac{1}{k}}$$

$\left(1 + \frac{1}{kn}\right)^{nk}$  — подпоследовательность  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Значит, она тоже сходится к  $e$   
Получаем:

$$\left( \left(1 + \frac{1}{kn}\right)^{nk} \right)^{\frac{1}{k}} = e^{\frac{1}{k}}$$

## Следствие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

## Доказательство

$$c_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$$

Мы не умеем доказывать для  $\forall a \in \mathbb{R}$  :

Докажем для  $\forall a \in \mathbb{Q}$

**1.**  $a = -1$

Хотим:

$$d_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} = e^{-1}$$

$$\frac{1}{d_n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e \cdot 1 = e$$

Получили исходную последовательность со сдвинутой нумерацией

**2.**  $a = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$

Хотим:

$$d_n = \left(1 + \frac{1}{kn}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{k}}$$

Данный случай также разбирался выше (на семинаре)

$$d_n = \left(1 + \frac{1}{kn}\right)^n = \sqrt[k]{\underbrace{\left(1 + \frac{1}{kn}\right)}_{e_n}^{kn}}$$

$e_n$  — подпоследовательность  $c_n : e_n = c_{k \cdot n} \Rightarrow e_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e$

$$\sqrt[k]{\left(1 + \frac{1}{kn}\right)^{kn}} \rightarrow \sqrt[k]{e} = e^{\frac{1}{k}}$$

**3.**  $a = k, k \in \mathbb{N}$

$$d_n = \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = \left(\underbrace{\left(1 + \frac{k}{n}\right)}_{f_n}^{\frac{n}{k}}\right)^k$$

$c_n$  — подпоследовательность  $f_n : c_n = f_{k \cdot n} \Rightarrow$  если  $f_n$  сходится, то она сходится к  $e$

Докажем, что  $f_n$  сходится:

1. Монотонность  $f_n$  (Она должна возрастать, так как  $c_n$  ее подпоследовательность и она возрастает)

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\left(1 + \frac{k}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{k}}}{\left(1 + \frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{k}}} = \left(\left(\frac{(n+1+k)n}{(n+1)(n+k)}\right)^n \frac{n+1+k}{n+1}\right)^{\frac{1}{k}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \left( \frac{n^2 + n + nk}{n^2 + nk + n + k} \right)^n \frac{n+1+k}{n+1} \right)^{\frac{1}{k}} = \left( \left( 1 - \frac{k}{n^2 + nk + n + k} \right)^n \frac{n+1+k}{n+1} \right)^{\frac{1}{k}} \\
&\left( \left( 1 - \frac{k}{n^2 + nk + n + k} \right)^n \frac{n+1+k}{n+1} \right)^{\frac{1}{k}} \geq \left( \left( 1 - \frac{nk}{n^2 + nk + n + k} \right) \frac{n+1+k}{n+1} \right)^{\frac{1}{k}} = \\
&= \left( \frac{(n^2 + n + k)(n+1+k)}{(n^2 + nk + n + k)(n+1)} \right)^{\frac{1}{k}} = \left( \frac{n^3 + n^2 + n^2k + n^2 + n + nk + nk + k + k^2}{n^3 + n^2 + n^2k + nk + n^2 + n + nk + k} \right)^{\frac{1}{k}} = \\
&= \left( \frac{n^3 + 2n^2 + n^2k + 2nk + n + k + k^2}{n^3 + 2n^2 + n^2k + 2nk + n + k} \right)^{\frac{1}{k}} ; \frac{n^3 + 2n^2 + n^2k + 2nk + n + k + k^2}{n^3 + 2n^2 + n^2k + 2nk + n + k} > 1
\end{aligned}$$

Получили  $f_{n+1} > f_n$ .  $f_n$  строго возрастает. Тогда  $f_n$  либо сходится, либо стремится к  $+\infty$ . У  $f_n$  есть сходящаяся подпоследовательность  $\Rightarrow$  она не может стремиться к  $+\infty$ . Значит, она сходится

## 2. Ограниченностъ

Так как  $f_n$  сходится, то она сходится к  $e$ . Доказано. Возвращаемся к  $d_n$ :

$$d_n = \underbrace{\left( 1 + \frac{k}{n} \right)^{\frac{n}{k}}}_{f_n}^k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^k = e^a$$

### 4. $a = -k, k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
d_n &= \left( 1 - \frac{k}{n} \right)^n \\
\frac{1}{d_n} &= \left( \frac{n}{n-k} \right)^n = \left( 1 + \frac{k}{n-k} \right)^{n-k} \left( 1 + \frac{k}{n-k} \right)^k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^k \cdot 1 = e^k \Rightarrow d_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-k} = e^a
\end{aligned}$$

### 5. $a \in \mathbb{Q}$

Тогда

$$\exists m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} : a = \frac{m}{k}$$

$$d_n = \left( 1 + \frac{a}{n} \right)^n = \left( 1 + \frac{m}{kn} \right)^n = \sqrt[k]{\left( 1 + \frac{m}{kn} \right)^{kn}}$$

Под корнем подпоследовательность из пункта 3 или 4, она сходится к  $e^m$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда:

$$\sqrt[k]{\left( 1 + \frac{m}{kn} \right)^{kn}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{\frac{m}{k}} = e^a$$

### 3.3.2 Постоянная Эйлера

(Не путать с  $e$ , константой Эйлера)

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty \\
\left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \gamma — \text{постоянная Эйлера}
\end{aligned}$$

## Определение

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = \gamma$$

## Примечание

В доказательстве будем пользоваться строгим возрастанием  $y = \ln x$  и свойствами  $\ln$

## Доказательство

1.  $\gamma_n$  убывает:

Будем рассматривать разность соседних, так как мы не знаем знаки членов последовательности, а также будет удобно сокращать слагаемые

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} - \gamma_n &= \frac{1}{n+1} + \ln n - \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n) = \frac{1}{n+1} - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = \\ &= \frac{1}{n+1} \left( 1 - (n+1) \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right) = \frac{1}{n+1} \left( 1 - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \right) \end{aligned}$$

## Вспомогательное доказательство

$$b_n = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \cdot \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e \cdot 1 = e$$

Мы знаем, что  $\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$  возрастает и сходится к  $e$ . Докажем, что  $b_n$  убывает. Мы знаем, что все члены  $b_n$  положительные, рассмотрим частное:

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}}{\left( 1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+2}} = \frac{\left( \frac{n+1}{n} \right)^{n+1}}{\left( \frac{n+2}{n+1} \right)^{n+2}} = \frac{\left( \frac{n+1}{n} \right)^{n+1}}{\left( \frac{n+2}{n+1} \right)^{n+1} \left( \frac{n+2}{n+1} \right)} = \left( \frac{n+1}{\frac{n+2}{n+1}} \right)^{n+1} \left( \frac{n+1}{n+2} \right) = \\ &= \left( \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right)^{n+1} \left( \frac{n+1}{n+2} \right) = \left( \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} \right)^{n+1} \left( \frac{n+1}{n+2} \right) = \end{aligned}$$

По неравенству Бернулли:

$$\begin{aligned} &= \left( 1 + \frac{1}{n(n+2)} \right)^{n+1} \left( \frac{n+1}{n+2} \right) \geqslant \left( 1 + \frac{n+1}{n(n+2)} \right) \left( \frac{n+1}{n+2} \right) = \\ &= \frac{(n^2 + 3n + 1)(n+1)}{n(n+2)^2} = \frac{n^3 + 4n^2 + 4n + 1}{n^3 + 4n^2 + 4n} > 1 \end{aligned}$$

Выход:  $b_n$  убывает к  $e \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} b_n > e$

Из вспомогательного доказательства получаем (по монотонности  $\ln$ ):

$$\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} > e \Rightarrow \ln \left( \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \right) > \ln e = 1$$

Тогда:

$$\left(1 - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right) < 0$$

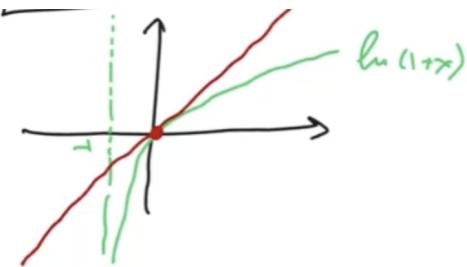
$$\frac{1}{n+1} \left(1 - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right) < 0$$

Получаем:  $\gamma_n$  убывает

**2.**  $\gamma_n$  ограничена снизу:

### Вспомогательное доказательство

Известный факт:  $\ln(1+x) \leq x \forall x > -1$  Докажем его



$$\ln(1+x) \leq x \quad \forall x > -1$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1$$

Возьмем  $c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ,  $c_n < e$ . Тогда, по монотонности  $\ln$ :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \gamma_n &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \geq \ln(1+1) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln n = \\ &= \ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln n = \\ &= \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \dots + \ln n - \ln(n-1) + \ln(n+1) - \ln n - \ln n = \\ &= -\ln 1 + \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) > \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

Получили  $\gamma_n$  ограничена снизу 0. По т.Вейерштрасса:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = \gamma$$

### 3.4 Предел рекуррентно заданных последовательностей

Для того чтобы найти пример рекуррентно заданных последовательностей

**Шаг 1:** Проверить, что последовательность сходится (можно пытаться делать через теорему Вейерштрасса или критерий Коши)

**Шаг 2:** Найти предел используя арифметику пределов

### 3.5 Доказательства стандартных сходимостей

$$a_n = q^n, q \in \mathbb{R}$$

#### Доказательство

(1)  $q > 1$

Используем неравенство  $(1+x)^n \geq 1 + nx$  при  $x > -1$ . Положим  $x = q - 1 > 0$ . Тогда

$$q^n = (1 + (q - 1))^n \geq 1 + n(q - 1).$$

Для любого  $M > 0$  из  $q^n > M$  достаточно

$$1 + n(q - 1) > M \Rightarrow n > \frac{M - 1}{q - 1}.$$

Предъявим номер

$$N(M) = \left\lceil \frac{M - 1}{q - 1} \right\rceil + 1.$$

Следовательно,  $q^n \rightarrow +\infty$ .

(2)  $0 < q < 1$

Имеем

$$q^n = \left( \frac{1}{1/q} \right)^n, \quad \frac{1}{q} > 1.$$

Поэтому  $q^n \rightarrow 0$ .

(3)  $-1 < q < 0$

Пишем

$$q^n = (-1)^n |q|^n.$$

Последовательность  $(-1)^n$  ограничена, а  $|q|^n$  — бесконечно малая. Следовательно,  $q^n \rightarrow 0$ .

(4)  $q < -1$

Пишем

$$q^n = (-1)^n |q|^n.$$

Последовательность  $(-1)^n$  отделена от нуля, а  $|q|^n$  — бесконечно большая. Следовательно,  $q^n \rightarrow \infty$ .

$$a_n = \sqrt[n]{a}, a > 0$$

### Доказательство

Случай  $a = 1$  очевиден.

Пусть  $a > 1$ . Требуем

$$|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon,$$

что равносильно

$$a < (1 + \varepsilon)^n.$$

По неравенству Бернулли:

$$1 + n\varepsilon \leq (1 + \varepsilon)^n.$$

Достаточно потребовать

$$a < 1 + n\varepsilon \Rightarrow n > \frac{a - 1}{\varepsilon}.$$

Берём

$$N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{a - 1}{\varepsilon} \right\rceil + 1.$$

Если  $0 < a < 1$ , то

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{1/a}}, \quad \frac{1}{a} > 1.$$

Во всех случаях

$$\sqrt[n]{a} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

$$a_n = \sqrt[n]{n}$$

### Доказательство

Требуем

$$n < (1 + \varepsilon)^n.$$

По биному Ньютона:

$$(1 + \varepsilon)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varepsilon^k > 1 + \binom{n}{2} \varepsilon^2.$$

Достаточно

$$\binom{n}{2} \varepsilon^2 > 1 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon^2 > n.$$

Отсюда

$$n > 1 + \frac{2}{\varepsilon^2}.$$

Следовательно,

$$\sqrt[n]{n} \rightarrow 1,$$

и можно взять

$$N(\varepsilon) = \left\lceil 1 + \frac{2}{\varepsilon^2} \right\rceil + 1.$$

$$a_n = \frac{n^2}{2^n}, \quad + \text{ обобщить результат}$$

### Доказательство

Так как

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \geq \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!},$$

то по теореме о зажатой последовательности:

$$0 \leq \frac{n^2}{2^n} \leq \frac{n^2}{\binom{n}{3}} = \frac{3!n^2}{n(n-1)(n-2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

$$a_n = \frac{2^n}{n!}, \quad + \text{ обобщить результат}$$

### Доказательство

Пишем

$$\frac{2^n}{n!} = \prod_{k=1}^n \frac{2}{k} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \dots \cdot \frac{2}{n}.$$

Составим оценку:

$$0 \leq \frac{2^n}{n!} \leq \frac{2}{n} \cdot 2 = \frac{4}{n}.$$

По теореме о зажатой последовательности:

$$\frac{2^n}{n!} \rightarrow 0.$$

## 3.6 Подпоследовательности

### Определение

**Подпоследовательностью** последовательности  $\{a_n\}$  называется последовательность  $\{b_k\}$ , такая что  $b_k = a_{n_k}$ , где  $n_k$  - строго возрастающая последовательность номеров ( $\mathbb{N}$ )

### Замечание

$$n_k \geq k$$

### Пример

$$\begin{aligned}a_n &= \sin \frac{\pi n}{2} \\b_k &= a_{4k} = \sin 2\pi k \equiv 0 \\c_k &= a_{4k-1} = \sin \frac{\pi(4k-1)}{2} \equiv -1 \\d_k &= a_{2k+1} = \sin \frac{\pi(2k+1)}{2} = (-1)^k\end{aligned}$$

### 3.6.1 Частичные пределы

### Определение

**Частичный предел** - конечный или бесконечный предел подпоследовательности

### Примечание

У какой (ограниченной) последовательности бесконечное число частичных пределов?

### Определение

**Верхний предел** последовательности — это точная верхняя грань множества частичных пределов последовательности.

Обозначение:  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$

### Определение

**Нижний предел** последовательности — это точная нижняя грань множества частичных пределов последовательности.

Обозначение:  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$

### 3.6.2 Предельные точки

### Определение

Предельная точка последовательности  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  — число  $A \in \mathbb{R}$ , такое что:

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ в } U_\varepsilon(A) \text{ находится } \infty \text{ числа членов } \{a_n\}$$

### 3.6.3 Свойства частичных пределов

#### Теорема

Конечный частичный предел  $\Leftrightarrow$  предельная точка

#### Доказательство

( $\Rightarrow$ ):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K(\varepsilon) \forall k > K(\varepsilon) a_{n_k} \in U_\varepsilon(A)$$

( $\Leftarrow$ ):

$a$  — предельная точка

Возьмем  $\varepsilon = 1$

$U_1(A)$  Возьмем 1 член, его номер объявим  $n_1$

Возьмем  $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$U_{\frac{1}{2}}(A)$  Возьмем член с номером  $> n_1$ . Его номер объявим  $n_2$

...

Возьмем  $\varepsilon = \frac{1}{k}$

$U_{\frac{1}{k}}(A)$  Возьмем член с номером  $> n_{k-1}$ . Его номер объявим  $n_k$

$$\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$$

Рассмотрим  $\{a_{n_k}\}$ :

$$\underbrace{A - \frac{1}{k}}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} A} < \{a_{n_k}\} < \underbrace{A + \frac{1}{k}}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} A}$$

### 3.6.4 Теорема Больцано-Вейерштрасса

#### Теорема

Если  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$ , то  $\forall n_k b_k = a_{n_k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$

#### Доказательство

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon) |a_n - A| < \varepsilon$$

Хотим

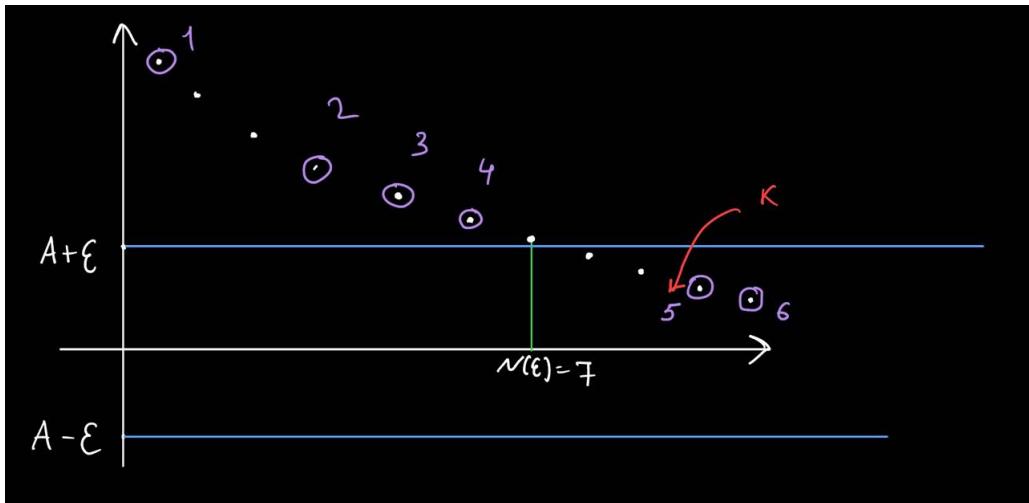
$$\forall \varepsilon > 0 \exists K(\varepsilon) \forall k > K(\varepsilon) |a_{n_k} - A| < \varepsilon$$

Возьмем  $K(\varepsilon) = N(\varepsilon)$

$$\left. \begin{array}{l} \forall k > N(\varepsilon) \\ \text{т.к } n_k \geq k \end{array} \right] \Rightarrow n_k > N(\varepsilon). \text{ Тогда } |a_{n_k} - A| < \varepsilon \text{ истина}$$

#### Теорема Больцано-Вейерштрасса

Если последовательность ограничена, то у нее есть сходящаяся подпоследовательность



## Доказательство

$c_n$  – огран. Докажем что у нее есть сходящаяся подпоследовательность

$$A = \inf\{c_n\}$$

$$B = \sup\{c_n\}$$

$$A, B \in \mathbb{R}$$

Рассмотрим отрезок  $[a_1, b_1] = [A, B]$

**Шаг 1:** разделим отрезок  $[a_1, b_1]$  пополам. В какой-то половине (одной или обеих) лежит бесконечное число членов  $c_n$ . Выберем в качестве  $[a_2, b_2]$  эту половинку (если в обеих бесконечное число, то любую)

**Шаг 2:** ...

Получаем некоторую последовательность подотрезков  $\{[a_k, b_k]\}_{k \in \mathbb{N}}$

На первом шаге выберем какой-то член  $c_n \in [a_1, b_1]$ . Его номер возьмем в качестве  $n_1$ .  $\exists$  член последовательности  $\in [a_2, b_2]$  такой, что его номер  $> n_1$  (Это следует из того, что на каждом шаге мы выбираем отрезок, содержащий бесконечное число членов). Его возьмем в качестве  $n_2$

...

Таким образом, параллельно строя последовательность отрезков, мы построили подпоследовательность  $\{C_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$

Рассмотрим  $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Она неубывает, ограничена сверху  $B$ .

По т. Вейерштрасса:  $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = A'$

$\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Она невозрастает, ограничена снизу  $A$ .

По т. Вейерштрасса:  $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = B'$

На каждом шаге мы вдвое уменьшаем длину отрезка. Выпишем общую формулу:

$$b_k - a_k = \frac{B - A}{2^{k-1}}, \text{ для строгости необходимо доказать по индукции}$$

Также по арифметике пределов сходящихся последовательностей  $b_k, a_k$  ( $b_k \rightarrow B', a_k \rightarrow A'$ ), их разность стремится к  $B' - A'$  при  $k \rightarrow \infty$

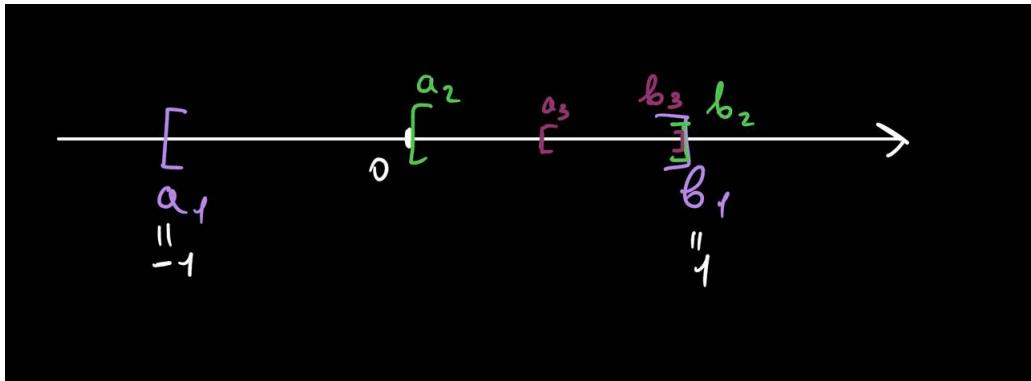
$$\frac{B - A}{2^{k-1}} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty \Rightarrow B' - A' = 0 \Rightarrow B' = A'$$

Получаем, что у  $a_k$  и  $b_k$  один и тот же предел

Заметим, что  $a_k \leq c_{n_k} \leq b_k \forall k \in \mathbb{N}$ . По теореме о сходящейся последовательности:  $a_k \rightarrow A', b_k \rightarrow B', A' = B'$  при  $k \rightarrow \infty$ . Следовательно:  $\lim_{k \rightarrow \infty} c_{n_k} = A' = B'$

## Пример

$$c_n = (-1)^n$$



### 3.6.5 Критерий Коши

#### Определение

Последовательность  $a_n$  называется фундаментальной, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n, m > N(\varepsilon) |a_n - a_m| < \varepsilon$$

$\Updownarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N(\varepsilon) \forall k \in \mathbb{N} |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$$

#### Теорема о критерии Коши

Последовательность  $a_n$  сходится  $\Leftrightarrow$  последовательность  $a_n$  фундаментальна

#### Доказательство

( $\Rightarrow$ ):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N_1(\varepsilon) |a_n - A| < \varepsilon$$

Хотим:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n, m > N_2(\varepsilon) |a_n - a_m| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n, m > N_2(\varepsilon) |(a_n - A) + (A - a_m)| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n, m > N_2(\varepsilon) \underbrace{|a_n - A|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_m - A|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

Это выполняется  $\forall n > N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$  и  $\forall m > N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$

$$\text{Возьмем } N_2(\varepsilon) = N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

( $\Leftarrow$ ):

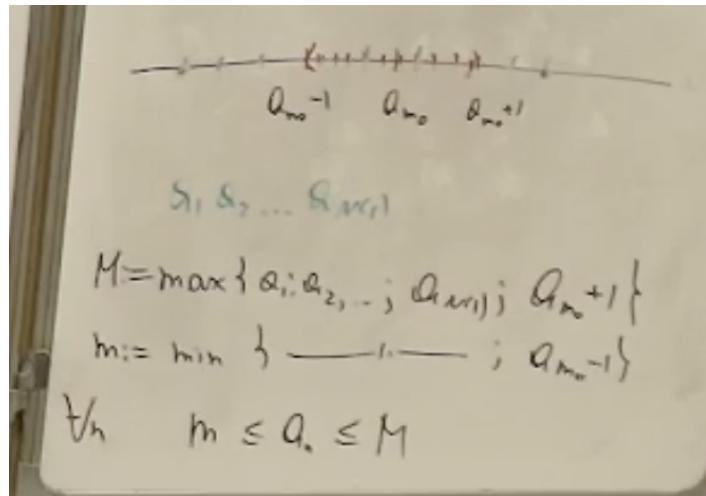
1) Фундаментальные последовательности ограниченны

$$\text{Возьмем } \varepsilon_0 = 1, N(1)$$

$$\forall n, m > N(1) |a_n - a_m| < 1$$

Возьмем  $m_0 = N(1) + 1$

$$\forall n > N(1), a_n \in U_1(a_{m_0})$$



2) По теореме Больцано-Вейерштрасса:

$$\exists a_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} A$$

Доказать:

$$a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} A$$

Имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \forall n, m > N_1(\varepsilon) |a_n - a_m| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K(\varepsilon) \forall k > K(\varepsilon) |a_{n_k} - A| < \varepsilon$$

Хотим:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \forall n > N_2(\varepsilon) |a_n - A| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \forall n > N_2(\varepsilon) \underbrace{|a_n - a_{n_k}|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_{n_k} - A|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

Это выполнено  $\forall k > K\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$  и  $n, n_k > N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$

Так как  $n_k \geq k$ , потребуем  $n, k > N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$

Изначально мы прибавили и вычли  $a_{n_k}$ ,  $k > \max\{N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), K\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\}$

$k$  — вспомогательный аргумент, которого изначально не было (требовалось только показать существование). Поэтому при предъявлении  $N_2(\varepsilon)$  мы не будем использовать вспомогательное  $K(\varepsilon)$

Возьмем  $N_2(\varepsilon) = N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$

## 4 Функции

### 4.1 Понятия функции и ее предела

#### 4.1.1 Функция. График функции

$$f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

##### Определение

**Функцией**  $f$  отображающей множество  $X$  во множество  $Y$  ( $f : X \rightarrow Y$ ) множество упорядоченных пар  $\{(x, y)\}_{x \in X, y \in Y}$ , причем каждый элемент  $X$  встречается в какой-то паре на первой позиции и только один раз.

В частности,  $X$  называется областью определения функции и обозначается  $D_f$

Множество вторых элементов пар обозначается  $E_f$ , множество значений функции.  $E_f \subset Y$

##### Определение

**График функции** — множество точек на декартовой (координатной) плоскости, координаты которых — пары функции

#### 4.1.2 Инъекция, сюръекция, биекция

##### Определение

Функция называется **инъекцией**, если вторые элементы пар не повторяются

##### Определение

Функция называется **сюръекцией**, если  $E_f = Y$

$$\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$$

##### Определение

Функция называется **биекцией**, если она инъекция и сюръекция

#### 4.1.3 Обратимость функции

##### Определение

Функция  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  называется **обратной** к  $f : X \rightarrow Y$ , если пары  $f^{-1}$  — пары  $f$ , где элементы поменяны местами

##### Примечание

Чтобы  $f : X \rightarrow Y$  была обратима нужно, чтобы она была биекцией

##### Пример

$$f(x) = \sin(x), \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} — \text{не обратима}$$

$$f(x) = \sin(x), \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1; 1]$$

Тогда обратима

$$f^{-1}(x) = \arcsin(y) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

Далее работаем с числовыми функциями ( $X, Y \subset \mathbb{R}$ )

#### 4.1.4 Предел функции по Коши

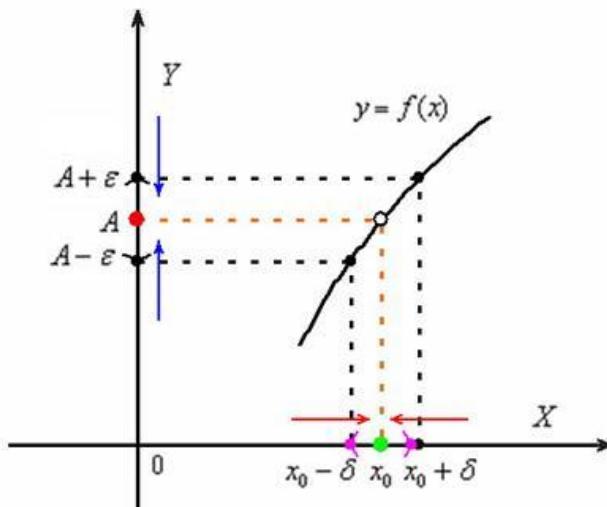
##### Определение по Коши

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \text{ если}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) |f(x) - A| < \varepsilon$$

$\Updownarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta |f(x) - A| < \varepsilon$$



##### Пример

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 7) = -1$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall x : 0 < |x - 3| < \delta |(2x - 7) - (-1)| < \varepsilon$$

$$|2x - 6| < \varepsilon$$

$$2 \cdot |x - 3| < \varepsilon$$

$$|x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Возьмем } \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{3}$$

### 4.1.5 Предел функции по Гейне

#### Определение по Гейне

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , если истинна импликация

$$\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0, x_n \neq x_0} A$$

#### Пример

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 7) = -1$$

Возьмем  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} : x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 3, x_n \neq 3$

$$\text{Посмотрим } f(x_n) = 2 \underbrace{x_n}_{\substack{3 \\ 6 \\ -1}} - 7 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -1$$

#### Теорема

Определения предела функции по Коши и Гейне равносильны

#### Доказательство

( $\Rightarrow$ ) :

Имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta |f(x) - A| < \varepsilon$$

Предположим, что посылка истинна. Тогда также имеем:

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0, x_n \neq x_0, \text{ то есть } \forall \omega > 0 \exists N_1(\omega) \forall n > N_1(\omega) 0 < |x_n - x_0| < \omega$$

Хотим:

$$f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} A, \forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \forall n > N_2(\varepsilon) |f(x_n) - A| < \varepsilon$$

Чтобы  $|f(x_n) - A| < \varepsilon$  нужно  $0 < |x_n - x_0| < \delta(\varepsilon)$  (Подставили в определение Коши  $f(x_n)$  вместо  $f(x)$ ). Поэтому возьмем  $\omega = \delta(\varepsilon)$ .

Получаем  $N_1(\delta(\varepsilon))$  и  $\forall n > N_1(\delta(\varepsilon)) 0 < |x_n - x_0| < \delta(\varepsilon)$  и тогда  $|f(x_n) - A| < \varepsilon$

Возьмем  $N_2(\varepsilon) = N_1(\delta(\varepsilon))$

( $\Leftarrow$ ) :

Имеем:

$$\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0, x_n \neq x_0} A$$

Пп т.е верно:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta = \delta(\varepsilon) \exists x(\delta) \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) |f(x) - A| \geq \varepsilon$$

Для каждого  $\delta = \frac{1}{n}$  найдем  $x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$

Получим

$$\underbrace{x_0 - \frac{1}{n}}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0} < x_n < \underbrace{x_0 + \frac{1}{n}}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0}$$

$$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} : x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0, x_n \neq x_0$$

Значит  $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} A$

Но  $|f(x) - A| \geq \varepsilon$ . Получили противоречие (расписать определение и в качестве  $\varepsilon$  взять  $\varepsilon_0$ )

## Пример

Рассмотрим функцию Дирихле:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Утверждается, что у данной функции нет предела ни в какой точке. Рассмотрим  $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} D(x) \negexists$$

$$x_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, x_n \neq 0; f(x_n) \equiv 1 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$$

$$x'_n = \frac{\sqrt{2}}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, x'_n \neq 0; f(x'_n) \equiv 0 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

## 4.2 Классификация разрывов

**1 рода**  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0 \pm} f(x)$

**1.1** устранимый  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

**1.2** скачок  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

**2 рода**  $\neg \exists \lim_{x \rightarrow x_0 \pm} f(x)$

**2.1**  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$

$x_0$  - полюс

**2.2** Никак :(

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$

$$\forall M > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in (2; 2 + \delta) \ f(x) < -M$$

## 4.3 Асимптоты

### 4.3.1 Вертикальная

#### Определение

Прямая  $x = a$  называется **вертикальной асимптотой**, если  $\lim_{x \rightarrow a^\infty} f(x) = \pm\infty$  или  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$

### Пример

$$f(x) = \frac{x+3}{x-2}$$

$x = 2$  — вертикальная асимптота  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+3}{x-2} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+3}{x-2} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

### Определение

$f(x)$  ограничена при  $x \rightarrow x_0$ :  $\exists \delta_0 \exists c_0 \forall x \in U_\delta(x_0) |f(x)| \leq c_0$

### Определение

$f(x)$  отделима от нуля при  $x \rightarrow x_0$ :  $\exists \delta_0 \exists c_0 \forall x \in U_\delta(x_0) |f(x)| \geq c_0$

### Пример

$$f(x) = \frac{1}{1 - \{x\}}$$

ДОБАВИТЬ РИСУНОК

$\{x\} = x - [x]$  — дробная часть

$[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$  — целая часть

### 4.3.2 Горизонтальная

#### Определение

$y = b$  — горизонтальная асимптота при  $x \rightarrow \pm\infty$ , если

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$$

### 4.3.3 Наклонная

#### Определение

$y = kx + b$  — наклонная асимптота при  $x \rightarrow \pm\infty$ , если

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - f(kx + b)) = 0$$

#### Примечание

Горизонтальная — частный случай наклонной

## Теорема

$y = kx + b$  — наклонная асимптота при  $x \rightarrow \pm\infty$

$$\exists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \exists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = b$$

## Доказательство

$\Rightarrow$

$$f(x) - (kx + b) = \alpha(x), \quad \alpha(x) \rightarrow 0$$

$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha}{x} \rightarrow k$$

$$f(x) - kx = b + \alpha(x) \rightarrow b$$

$\Leftarrow$

$$f(x) - kx = b + \alpha(x)$$

$$f(x) - kx - b = \alpha(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$$

## Пример

$$y = \sqrt{x^2 + 7x + 14}$$

Вертикальных нет, так как  $\forall x_0 \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  Наклонная:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 7x + 14}}{x}$$

1)

$$x \rightarrow +\infty \sqrt{1 + \frac{7}{x} + \frac{14}{x^2}} \rightarrow -1$$

2)

$$x \rightarrow +\infty - \sqrt{1 + \frac{7}{x} + \frac{14}{x^2}} \rightarrow \frac{7}{2}$$

1)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 7x + 14} - x = \frac{7}{2}$$

2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 7x + 14} + x = \frac{7}{2}$$

## 4.4 О — символика

### 4.4.1 О малое

#### Определение

$f(x) = \bar{o}(g(x))$  при  $x \rightarrow x_0$  ( $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ), если

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \text{бесконечно малая при } x \rightarrow x_0$$

### 4.4.2 О большое

#### Определение

$f(x) = \underline{O}(g(x))$  при  $x \rightarrow x_0$  ( $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ), если

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \text{ограниченная при } x \rightarrow x_0$$

#### Пример

$$x^2 = \bar{o}(x^3) \text{ при } x \rightarrow 0 : ($$

$$\frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x} \rightarrow \infty$$

$$x^2 = \bar{()$$

#### Примечание

1. Впредь бесконечно малые будем обозначать  $\bar{o}(1)$

$$f(x) - kx - b = \bar{o}(1)$$

$$\bar{o}(1) + \bar{o}(1) = \bar{o}(1)$$

2. Впредь ограниченные будем обозначать  $\underline{O}(1)$

$$\bar{o}(1) + \underline{O}(1) = \underline{O}(1)$$

## 4.5 Замечательные пределы

#### Теорема

$\cos x$  непрерывен на  $\mathbb{R}$

#### Доказательство

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$$

⇓

$$\cos x - \cos x_0 = \bar{o}(1) \text{ при } x \rightarrow x_0$$

$$\left| -2 \cdot \sin \frac{x+x_0}{2} \cdot \sin \frac{x-x_0}{2} \right| \leq 2 \cdot 1 \cdot \left| \frac{x-x_0}{2} \right| \rightarrow 0$$

[1]  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

### Доказательство

$$S_{\triangle OAB} < S_{\triangle OAB} < S_{\triangle OAC}$$

$$\frac{\sin x}{2} < \pi \cdot \frac{x}{2\pi} < \frac{\tan x}{2}$$

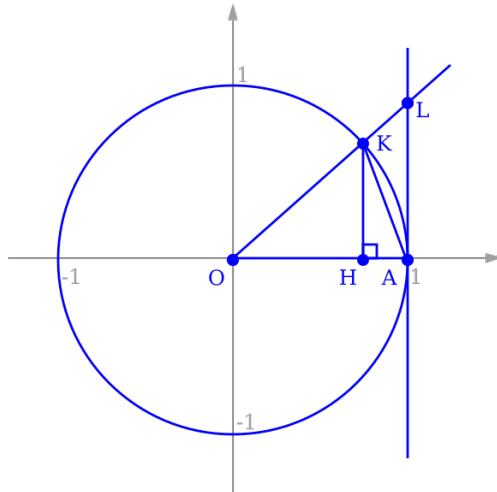


Рис. 1: К доказательству

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = e$$

### Примечание

Неопределенность  $\frac{0}{0}$ :  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ ;  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ , а также  $\frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty$   
 $x_0 \in \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

### Доказательство

Хотим:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e, \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$$

$$\left(1 + \frac{1}{[t]+1}\right)^{[t]} \leq \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{[t]} \leq \left(1 + \frac{1}{[t]}\right)^{[t]+1}, \quad [t] \geq 1, t \in \mathbb{R}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon) \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - e \right| < \varepsilon$$

$h(t)$  принимают те же значения, что и  $a_n$

**Утверждение:**  $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = e$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M(\varepsilon) \forall t > M(\varepsilon) \left| \left(1 + \frac{1}{[t]}\right)^{[t]+1} - e \right| < \varepsilon$$

$$M(\varepsilon) = N(\varepsilon) + 1$$

$\forall t > M(\varepsilon)$  верно  $[t] > N(\varepsilon)$

$$\text{Аналогично рассмотрим } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = e$$

$$\text{Аналогично доказывается } \lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$$

$$[2] \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^\pm} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

### Доказательство

$$\text{Замена } t = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$$

### Следствие 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\frac{1}{x} \cdot \ln(1+x) = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \rightarrow \ln e = 1$$

Непрерывность  $f(x)$  в т  $x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \ln(x) = \ln(x_0)$$

### Следствие 2

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Замена  $t = e^x - 1$ , при  $x \rightarrow 0$ ,  $t = e^x - 1 \rightarrow 0$ ,  $t + 1 = e^x$ ,  $x = \ln(t + 1)$

$$\frac{t}{\ln(t+1)} = \frac{1}{\frac{\ln(t+1)}{t}} \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = (e^x)'|_{x=0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

## 4.6 Непрерывность функции на отрезке

### Определение

Функция непрерывна на  $[a; b]$ , если

- 1)  $[a; b] \subset D_f$
- 2)  $f(x)$  непрерывна в т.  $x_0 \in (a; b)$
- 3)  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$   $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$

TODO: рисунок

### Теорема

Если функция непрерывна на отрезке  $[a; b]$ , то

- 1) она ограничена на  $[a; b]$
- 2) достигает  $\sup f(x) x \in [a; b] = \sup E_f$  и  $\inf f(x) x \in [a; b] = \inf E_f$

$$M = \sup f(x) x \in [a; b] \in \overline{\mathbb{R}}$$
$$m = \inf f(x) x \in [a; b] \in \overline{\mathbb{R}}$$

- 1)  $M \in \mathbb{R}$
- 2)  $\exists x_0 \in [a; b] M = f(x_0)$

Построим  $a_n \uparrow M$

$$\forall n \exists x_n f(x_n) \geq a_n$$

TODO: рисунок

$\Pi \exists n_0 \forall x \in [a; b] f(x) < a_{n_0}$   $a_{n_0}$  — верхняя грань для  $E_+$  противоречие

Построили  $\{x_n\}$ :

$$a_n \leq f(x_n) \leq M$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = M$$

$x_n \in [a; b] \Rightarrow$  ограничена

$$\exists x_{n_k} : x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_0$$

Предельный переход в нер-вах  $a \leq x_{n_k} \leq b \Rightarrow x_0 \in [a; b]$

Определение непрерывности по Гейне  $f(x_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x_0)$

$$f(x_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} M$$

### Теорема

Непрерывная на отрезке функция принимает все промежуточные значения, т.е

$f(x), [a; b]$

$A = f(x_1), B = f(x_2), A < B x_1, x_2 \in [a; b]$

тогда  $\forall C \in (A; B) \exists x_0 \in [a; b] : f(x_0) = C$

**Следствие**  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b] = D_f$ , то  $E_f = [m; M]$

### Доказательство

Построим последовательность влож отрезков  $\{[a_k; b_k]\}_{k \in \mathbb{N}}$ , будем считать  $x_1 < x_2$   
 $[a_1; b_1] = [x_1; x_2]$

Возьмем середину  $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$

1.  $f(x_3) = C$  чтд
2.  $f(x_3) < C$   $[a_2; b_2] = [x_3; b_1]$
3.  $f(x_3) > C$   $[a_2; b_2] = [a_1; x_3]$

TODO: рисунок

$\{a_k\}_k$  — неубывающая и огр сверху б

$\{b_k\}_k$  — невозрастает и огр снизу а

При  $k \rightarrow \infty$ :  $a_k \rightarrow \alpha$ ,  $b_k \rightarrow \beta$

$$b_k - a_k = \frac{1}{2^{k-1}}(x_2 - x_1) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Следовательно по теореме Вейерштрасса:  $\alpha = \beta$

$$f(a_k) < C \rightarrow f(\alpha) \leq C$$

Непрерывность  $f$  по Гейне в т.  $x_0 = \alpha$

$$f(b_k) > C \rightarrow f(\beta) \geq C$$

$$f(\alpha) = f(\beta) = C$$