Семинар 1. Матрицы

1 Операции с матрицами

1) *Сложение матриц.* Здесь и далее будем считать, что запись $A = (a_{ij})$ означает, что матрица A составлена из элементов a_{ij}. Пусть даны две матрицы одинакового размера, их *суммой* будем называть матрицу того же размера, элементы которой являются суммой соответствующих элементов исходных матриц. Иными словами, запись $A + B = C$ означает, что $\forall i, j$: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, где $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$.

2) *Умножение на число.* *Произведением* матрицы и числа r будем называть матрицу того же размера, элементы которой являются произведением соответствующих элементов исходной матрицы и r. Иными словами, запись $C = r \cdot A$ означает, что $\forall i, j$: $c_{ij} = ra_{ij}$.

3) *Умножение матриц.* Пусть даны матрица A размера $m \times n$ и матрица B размера $n \times k$. *Произведением* матрицы A на матрицу B будем называть матрицу C размером $m \times k$, элементы которой удовлетворяют следующему равенству $c_{ij} = \sum\limits_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}$.

Свойства умножения матриц:

1) *Ассоциативность:* $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;

2) *Дистрибутивность:* $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C, \quad A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

Определение. *Единичной матрицей* (обозначение E) называется матрица, у которой главная диагональ состоит из единиц, а все остальные элементы – нулевые.

Пример. Умножим матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ на $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Умножается матрица размера 2×3 на матрицу размера 3×2, результатом будет матрица C размера 2×2, элементы которой соответственно равны: $c_{11} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0$, $c_{12} = 1 \cdot 4 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 5$, $c_{21} = 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + (-3) \cdot 0$, $c_{22} = 3 \cdot 4 + (-1) \cdot (-1) + (-3) \cdot 5$. Итак $AB = C = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$. Отметим, что произведение BA будет матрицей размера 3×3, то есть $AB \neq BA$.

Задачи:

1. Вычислите:

   а) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

2. Покажите:

   а) Что AB может быть не равно BA (даже если матрицы квадратные);
   б) Что произведение квадратных ненулевых матриц может быть нулевой матрицей;
   в) Как изменится матрица если её умножить на cE слева (c — некое число).

3. Вычислите:

   а) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$; в) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^{123}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{2021}$.

4. Вычислите значение многочлена $f(x)$ от матрицы A:

   а) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$; $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; б) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$; $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2 Транспонирование

Определение. *Транспонированной матрицей* для матрицы A (обозначение A^T) называется матрица B такая, что $b_{ij} = a_{ji}$.

Свойства транспонирования:

1) $(A^T)^T = A$; 2) $(A + B)^T = A^T + B^T$; 3) $(cA)^T = cA^T$ 4) $(AB)^T = B^T A^T$.

Определение. *Симметрической матрицей* называется матрица A такая, что $A = A^T$.

Определение. *Кососимметрической матрицей* называется матрица A такая, что $A = -A^T$.

Задачи:

5. Пусть A — произвольная квадратная матрица. Проверьте на симметричность (кососимметричность) следующие матрицы:

   а) $A + A^T$; б) $A - A^T$; в) AA^T.

6. Докажите, что любую квадратную матрицу можно представить в виде суммы симметрической и кососимметрической матриц.

7. Упростите выражение, а затем найдите его значение при $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$:

   $(AB^T)^T + (A^T - B)^2 - (A^2 + B)^T + (A^T + E)B$.

3 След матрицы*

Определение. *Следом* квадратной матрицы A (обозначение trA) называется сумма элементов на её главной диагонали.

Свойства следа:

1) $tr(A + B) = trA + trB$; 2) $tr(cA) = c \cdot trA$; 3) $tr(AB) = tr(BA)$.

Задачи:

8. Вычислите следы матриц из задачи 4.

9. Пусть E_k – единичная матрица порядка k. Докажите, что если $AB = E_m$, а $BA = E_n$, то $m = n$.

10. Докажите, что не существует матриц A и B таких, что $AB - BA = E$.

11. Докажите, что если $tr(AA^T) = 0$, то $A = 0$.

4 ДЗ

1. Проскуряков: 788, 795, 801-804, 808, 810, 815, 827, 829.

2. Кострикин: 17.7, 19.5, 19.7.

3. Упростите выражение, а затем найдите его значение при $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$:

   $(A - B^T)^2 - (A + B^T)^2 + (A^T B + 2BA^T)^T$.