Лекции по алгебре (1 курс, 25-26)

github.com/int28t/hse-se-lecture-notes

Михайлец Екатерина Викторовна
emihaylets@hse.ru
ТГК: t.me/alg_pi_25_26

Содержание

1 Матрицы

Матрицей размера/типа/порядка nxm называется упорядоченная таблица с m строками и n столбцами.

Обозначение:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn}$$

i - строка, j - столбец

$M_{mn}(\mathbb{R})$ - множество всех матриц размера mxn с вещественными элементами

1) При $m = n$ матрица называется квадратной порядка n

2) При $m = 1$ матрица 1xn - n-мерная строка

При $n = 1$ матрица mx1 - m-мерный столбец

Матрица 1x1 - число

3) Матрица состоящая из нулей (т.е. $a_{ij} = 0\ \forall i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}$) называется нулевой матрицей. **Обозначение:** $\mathbb{O}$

4) Будем называть единичной квадратную матрицу порядка n, если:

$$a_{ij} = \underbrace{\delta^i_j}_{\text{Символ Кронекера}} = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases}$$

Обозначение:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Определение: Две матрицы a и b называются равными если они одного размера и соответствующие элементы равны (т.е. $a_{ij} = b_{ij} \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$)

Определение: Матрица C называется суммой матриц A и B если все матрицы A, B и C одинакового размера и $c_{ij} = b_{ij} + a_{ij}, \forall i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$

Обозначение: $C = A + B$

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1 Свойства сложения матриц

1. Коммутативность $(A + B = B + A)$

$\square$ Поэлементно: $[A+B]_{ij} \underbrace{=}_{\text{по определению сложения}} [A]_{ij}+[B]_{ij} \underbrace{=}_{\text{Вещественные числа коммутативны}} [B]_{ij}+ [A]_{ij} \underbrace{=}_{\text{по определению сложения}} [B + A]_{ij}$ $\blacksquare$

2. Ассоциативность $(A + B) + C = A + (B + C)$

3. $\exists$ нейтральный элемент по сложению т.е. $\exists$ матрица $\mathbb{O} \in M_{mn}(\mathbb{R})$ $\forall A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ выполняется $\mathbb{O} + A = A + \mathbb{O} = A$

$\square$ $[\mathbb{O}]_{ij} = 0$ – нулевая матрица $\blacksquare$

4. $\forall$ матрицы $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ $\exists$ $B \in M_{mn}(\mathbb{R}) : A + B = B + A = \mathbb{O}$ – нулевая матрица

$\square$ $B_{ij} = -A_{ij}$ $\blacksquare$

Обозначение: $B = -A$ – Обратная по сложению к A или противоположная

Определение: Матрица C называется произведением числа $\lambda \in \mathbb{R}$ и матрицы A, если матрицы C и A одинакового размера и $[C]_{ij} = \lambda * [A]_{ij}$ $\forall i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$

Обозначение: $C = \lambda * A$

Пример:

$$2 * \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Определение: Разностью матриц A и B называется сумма A и $-B$

1.2 Свойства умножения на число

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : (\lambda * \mu) * A = \lambda * (\mu * A)$ – ассоциативность относительно умножения на число

$(\lambda + \mu) * A = \lambda * A + \mu * A$ – дистрибутивность относительно умножения чисел

$\lambda * (A + B) = \lambda * A + \lambda * B$ – дистрибутивность относительно сложения матриц

Это место стоит перепроверить (!!!)

$1 * A = A$ – унарность

1.3 Умножение матриц

Рассмотрим $A_{mxn} \in M_{mn}(\mathbb{R}), B_{nxk} \in M_{nk}(\mathbb{R})$:

Определение: Произведением матрицы A_{mxn} и B_{nxk} (число столбцов в A равно числу строк в B) называется C_{mk} где:

$$C_{ij} = \sum_{q=1}^{n} a_{iq} * b_{qj}$$

$(C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$ $\forall i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,k})$

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{3x2} * \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}_{2x1} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}_{3x1}$$

1.4 Свойства умножения матриц

1. Ассоциативность Пусть A_{mxn}, B_{nxk}, C_{kxl}. Тогда $(A * B) * C = A * (B * C)$

$\square$ $[(A * B) * C]_{ij} = \sum\limits_{r=1}^{k} [A * B]_{ir} * [C]_{rj} = \sum\limits_{r=1}^{k} (\sum\limits_{s=1}^{n} [A]_{is} * [B]_{sr}) * [C]_{rj} = \sum\limits_{r=1}^{k} \sum\limits_{s=1}^{n} [A]_{is} * [B]_{sr} * [C]_{rj} \underbrace{=}_{\text{перегруппируем слагаемые}} \sum\limits_{s=1}^{n} \sum\limits_{r=1}^{k} [A]_{is} * [B]_{sr} * [C]_{rj} = \sum\limits_{s=1}^{n} [A]_{is} * (\sum\limits_{r=1}^{k} [B]_{sr} * [C]_{rj}) = \sum\limits_{s=1}^{n} [A]_{is} * [B * C]_{sj} \underbrace{=}_{\text{по определению умножения}} = A * (B * C)$ ■

2. $\exists$ Нейтрального элемента по умножению (для квадратных матриц) $\exists$ матрица $E \in M_n(\mathbb{R}) : \forall A \in M_n(\mathbb{R})$ $E * A = A * E = A$

$\square$ Предъявим единичную матрицу

$[E]_{ij} = \delta^i_j$

$[A * E]_{ij} = \sum\limits_{r=1}^{n} [A]_{ir} * [E]_{rj} = \sum\limits_{r=1}^{n} [A]_{ir} * \delta^i_j = 0 + \ldots + [A]_{ij} + \ldots + 0 = [A]_{ij}$ $\forall i, j = \overline{1,n}$

$E * A$ аналогично ■

3. $A * \mathbb{O} = \mathbb{O} * A = \mathbb{O}$ Для квадратных A и $\mathbb{O}$ порядка n

Рассмотрим: $(A + B) * C = A * C + B * C$ – дистрибутивность умножения матриц

Замечание: Вообще говоря умножение матриц некоммутативно (даже для квадратных)

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2 Перестановки (Подстановки)

Определение: Перестановкой чисел $1, \ldots, n$ называется расположение их в определённом порядке.

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Пример:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 5, & 3, & 4, & 1, & 2 \end{pmatrix}$$

Определение: α_i и α_j образуют инверсию в перестановке если $\alpha_i > \alpha_j$, но $i < j$

Определение: Знак перестановки это $(-1)^n$, где n - число инверсий в перестановке

Обозначение: $sgn(\alpha)$

Пример:

$$\alpha = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}}_{3+3+0+1+1+0}$$

$$sgn(\alpha) = 1$$

Определение: Если $sgn(\alpha) = 1$ то α - чётная перестановка, если $sqn(\alpha) = -1$ то α - нечётная перестановка

Определение: Транспозицией называется преобразование при котором в α меняются местами только α_i и α_j, а остальные элементы не меняются

Утверждение: Каждая транспозиция меняет чётность перестановки

$\square$ а) Транспозиция соседних элементов:

$\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n$

$\downarrow$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_{i+1}, \alpha_i, \ldots, \alpha_n$

$\Rightarrow$ Число инверсий изменилось на 1 $\Rightarrow$ знак перестановки поменялся

б)

$\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_{i+k}, \ldots, \alpha_n$

Меняем $\alpha_i \leftrightarrow \alpha_{i+k}$ с $k - 1$ соседних транспозиций

$\alpha_1, \ldots, \alpha_{i+k}, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n$

$\Rightarrow k + k - 1 = 2k - 1$ шагов (соседних транспозиций)

$\Rightarrow$ Знак перестановки поменяется $\blacksquare$

Определение: Подстановка

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \delta(1) & \delta(2) & \ldots & \delta(n) \end{pmatrix}$$

– отображение чисел в себя являющееся взаимо-однозначным

Нижняя строка – перестановка

Пример:

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$sgn(\delta) = 1$ $\delta(2) = 2$ - стационарный элемент

Определение: Знаком подстановки называется знак перестановки в её нижней строке

Обозначение: S_n - множество подстановок длины n

$|S_n| = n!$ число элементов и мощность множества

Замечание: Транспозиция - нечётная подстановка (в которой α_i и α_j переходят друг в друга, а остальные элементы неподвижны)

Замечание: Часто используют запись подстановок «в циклах», и каждый элементы выписывается справа

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} * \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}}_{\text{можно не писать}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Циклическая запись транспозиции: (α_i, α_j)

Определение:

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} = (1)(2)(3)\dots(n) = Id$$

называется тождественной подстановкой

Обозначение: Id (id)

Определение: Умножением подстановок называется их последовательное применение (т.е. композиция отображений)

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(умножая слева направо)

В циклах: $(12) * (132) = (1)(23) = (23)$

Замечание: Умножение подстановок некоммутативно

Пример: $(132)(12) = (13) \neq (23)$

Замечание: Id – нейтральный элемент по умножению

Замечание: Подстановку обратную к

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \delta(1) & \delta(2) & \delta(3) & \dots & \delta(n) \end{pmatrix}$$

можно получить как

$$\delta^{-1} = \begin{pmatrix} \delta(1) & \delta(2) & \delta(3) & \dots & \delta(n) \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

и отсортировав столбцы

$\Rightarrow \delta * \delta^{-1} = \delta^{-1} * \delta = Id$

Пример:

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\delta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Замечание: $\forall$ Подстановку можно представить как произведение транспозиций

$\square$ Запишем подстановку в циклах $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = (\alpha_k, \alpha_{k-1})(\alpha_{k-1}, \alpha_{k-2})\dots(\alpha_2, \alpha_1)$ - произведение $k-1$ транспозиций слева направо $\blacksquare$

Замечание: $sgn(\delta_1 * \delta_2) = sgn(\delta_1) * sgn(\delta_2)$

3 Определитель

Определение Определителем или детерминантом квадратной матрицы A порядка n называется сумма $n!$ слагаемых следующего вида:

$\det A = \sum\limits_{\delta \in S_n} sgn(\delta) * a_{1\delta(1)} * a_{2\delta(2)} * a_{3\delta(3)} * \ldots * a_{n\delta(n)}$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

и

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \delta(1) & \delta(2) & \delta(3) & \ldots & \delta(n) \end{pmatrix}$$

Обозначение: $\det A$ или $|A|$

Замечание: По сути $\det A$ является суммой произведений элементов матрицы по одному из каждой строки и столбца (стоящие в разных строках и столбцах по всем способам так сделать (с учётом знака))

Пример: $n = 2 \Rightarrow n! = 2! = 2$

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = Id$$

$$\delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} * a_{22} - a_{21} * a_{12}$$

Пример: $n = 3 \Rightarrow n! = 3! = 6$

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13}, & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}, & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right]$$

$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{22}a_{23}a_{11} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$ - Правило Саррюса

(Диагонали $\searrow$ идут с плюсом, диагонали с $\nearrow$ с минусом)

3.1 Свойства определителей

№1 $\det A = \det A^T$ ($\Rightarrow$ Все свойства $\det$ верные для строк матрицы справедливы и для столбцов)

$\square$ $B = A^T, b_{ij} = a_{ji}$ Переставим $b_{i\delta_i}$ по возрастанию номеров столбцов

$\det B = \sum\limits_{\delta \in S_n} sgn(\delta) * b_{1\delta(1)} * b_{2\delta(2)} * \ldots * b_{n\delta(n)} =$

Используем:

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \delta(1) & \delta(2) & \ldots & \delta(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta(1)^{-1} & \delta(2)^{-1} & \ldots & \delta(n)^{-1} \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$$

$sgn(\delta^{-1}) = sgn(\delta)$ так как $sgn(\delta * \delta^{-1}) = sgn(\delta) * sgn(\delta^{-1}) = 1$

$= \sum_{\delta \in S_n} sgn(\delta^{-1}) b_{\delta^{-1}(1)1} b_{\delta^{-1}(2)2} * \ldots * b_{\delta^{-1}(n)n} = \sum_{\delta \in S_n} sgn(\delta^{-1}) * a_{1\delta^{-1}(1)} * a_{2\delta^{-1}(2)} * \ldots * a_{n\delta^{-1}(n)}$

Переименуем $\tau = \delta^{-1}$

$= \sum_{\tau \in S_n} sgn(\tau) * a_{1\tau_1} * \ldots * a_{n\tau_n} = \det A \blacksquare$

№2 Определитель линеен по строкам и столбцам т.е. пусть $A = (A_1, \ldots, A_n)$ – матрица как набор строк

Тогда:

а) $\det(A_1, \ldots, A_i' + A_i'', \ldots, A_n) = \det(A_1, \ldots, A_i', \ldots, A_n) + \det(A_1, \ldots, A_i'', \ldots, A_n)$

б) $\det(A_1, \ldots, \alpha * A_i, \ldots, A_n) = \alpha * \det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n)$

Пример:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3+x \\ 2 & 7+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & x \end{vmatrix} = (1 * 7 - 3 * 2) + x * \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - x$$