Математический анализ. Коллок I
1 курс, 25-26

github.com/int28t/hse-se-lecture-notes

Содержание

1 Понятие высказывания и n-местного предиката. Логические операции. Кванторы. Построение отрицания к высказыванию с кванторами.

1.1 Понятие высказывания и n-местного предиката

Высказывание - словестное утверждение, про которое можно сказать, истинное оно или ложное.
Обозначение: заглавные латинские буквы: $A, B, C \ldots$
/TODO: N-местный предикат -

1.2 Логические операции

1.3 Кванторы

- $\forall$ - всеобщности
- $\exists$ - существования

1.4 Построение отрицания к высказыванию с кванторами

2 Доказательства методами математической индукции и от противного. Неравенство Бернулли.

2.1 Метод математической индукции

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)} \text{ — истинно, если:}$$

1) $P(1)$ - истинно (база)

2) $\forall n \in \mathbb{N}\ (P(n) \to P(n+1))$ - истинно (шаг)

2.2 Доказательство от противного. Пример

Доказать, что количество простых чисел бесконечно
Пп (предположим противное). Тогда количество простых чисел конечное число:

$$n_1, \ldots, n_k$$

Рассмотрим следующее число:

$$m = n_1 \cdot \ldots \cdot n_k + 1,\ m \in \mathbb{N},\ m > n_i\ \forall i = \overline{1,k} \text{ то есть } m \neq n_i\ \forall i = \overline{1,k}$$

Следовательно, m - составное. Тогда:

$$m = n_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot n_k^{\alpha_k}$$

$$\exists n_j : m \,\vdots\, n_j$$

Но $m = n_1 \cdot \ldots \cdot n_k + 1$ и при делении на n_i $\forall i = \overline{1,k}$ дает остаток 1 ($\perp$)

2.3 Неравенство Бернулли

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \geqslant -1 : (1+x)^n \geqslant 1 + xn} \text{ — неравенство Бернулли}$$

Докажем с помощью ММИ

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \underbrace{\forall x \geqslant -1\ \underbrace{(1+x)^n \geqslant 1 + xn}_{Q(n)}}_{P(n)}$$

1) $\forall x \geqslant -1\ (1+x) \geqslant 1 + x$ - истина

2) Предположим $(1+x)^{n_0} \geqslant 1 + xn_0$ - истина. Докажем, что $(1+x)^{n_0+1} \geqslant 1 + x(n_0+1)$:

$$(1+x)^{n_0+1} \geqslant 1 + x(n_0+1)$$

$$(1+x)^{n_0+1} = (1+x)^{n_0}\underbrace{(1+x)}_{\geqslant 0} \geqslant (1+x)(1+xn_0) =$$

$$= 1 + x + xn_0 + \underbrace{x^2 n_0}_{\geqslant 0} \geqslant 1 + x + xn_0 = 1 + x(n_0+1)$$

3 Перестановки, размещения и сочетания. Бином Ньютона.

3.1 Перестановки, размещения и сочетания

Перестановка - упорядоченное множество размера n
$\#$ перестановок $= n!$
Размещения - упорядоченное подмножество размера k множества размера n
$\#$ размещений $= \dfrac{n!}{(n-k)!} = A_n^k$
Сочетания - неупорядоченное подмножество размера k множества размера n
Одному сочетанию соответствуют $k!$ размещений
$\dfrac{A_n^k}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k$

3.2 Бином Ньютона

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}}$$

$$C_n^0 a^0 b^{n-0} + C_n^1 a^1 b^{n-1} + \ldots + C_n^n a^n b^{n-n}$$

где $C_n^0, C_n^1, \ldots$ - биномиальные коэффициенты

4 Понятие последовательности. Предел последовательности. Единственность предела. Ограниченные, бесконечно малые, бесконечно большие и отделимые от нуля последовательности. Связь между ними. Ограниченность сходящейся последовательности. Отделимость от нуля последовательности, сходящейся не к нулю.

4.1 Понятие последовательности

Последовательность - индексированный набор чисел
$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

4.1.1 Способы задания последовательности:

1) Формульный $a_n = n^2 + n - 7$

2) Рекуррентный $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

4.2 Предел последовательности

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, если

$$\boxed{\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ |a_n - A| < \varepsilon}$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ \ -\varepsilon < a_n - A < \varepsilon$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ a_n \in U_\varepsilon(A)$$

4.3 Единственность предела

Теорема: У последовательности может быть только 1 предел

Доказательство. Пп $\exists$ хотя бы 2 $\lim$: A и B, $A \neq B$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > N_1(\varepsilon)\ a_n \in U_\varepsilon(A)$$
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > N_2(\varepsilon)\ a_n \in U_\varepsilon(B)$$

Возьмем $\varepsilon_0 = \dfrac{|A-B|}{3}$ и $n_0 = N_1(\varepsilon_0) + N_2(\varepsilon_0)$
Получаем

$$a_{n_0} \in U_{\varepsilon_0}(A),\ a_{n_0} \in U_{\varepsilon_0}(B)$$

Но

$$U_{\varepsilon_0}(A) \cap U_{\varepsilon_0}(B) = \varnothing$$

Противоречие $\square$

4.4 Ограниченные, бесконечно малые, бесконечно большие и отделимые от нуля последовательности. Связь между ними

Последовательность называется **ограниченной**, если

$$\boxed{\exists c \ \forall n \ |a_n| \leqslant c} = P(\{a_n\})$$

И **неограниченной**, если

$$\boxed{\forall c \ \exists n(c) \ |a_{n(c)}| > c}$$

Бесконечно малой (б.м.) последовательностью называют последовательность $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ такую что, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$
Бесконечно большой (б.б.) последовательностью называют последовательность $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ такую что, $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = \infty$

$$\forall M > 0 \ \exists N(M) \in \mathbb{N} \ \forall n > N(M) \ |b_n| > M$$

$$b_n > M \ (+\infty)$$

$$b_n < M \ (-\infty)$$

Назовем последовательность d_n **отделимой от нуля**, если:

$$\exists \delta > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ |d_n| \geqslant \delta$$

Пример: $(-1)^n$

4.5 Ограниченность сходящейся последовательности

4.6 Отделимость от нуля последовательности, сходящейся не к нулю

5 Арифметические свойства предела последовательности.

6 Предельный переход в неравенствах. Теорема о зажатой последовательности.

6.1

6.2

7 Ограниченные подмножества действительных чисел. Аксиома непрерывности действительных чисел. Верхняя и нижняя грань. Точная верхняя и точная нижняя грань. Теорема о существовании точной верхней и нижней грани.

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

8 Теорема Вейерштрасса.

9 Число e. Постоянная Эйлера.

10 Подпоследовательность. Предельная точка последовательности. Частичный предел. Эквивалентность понятий частичного предела и предельной точки.

10.1

10.2

10.3

10.4

11 Теорема Больцано-Вейерштрасса.

12 Фундаментальные последовательности. Критерий Коши.

12.1

12.2

13 Понятие функции, числовой функции. График числовой функции. Инъекция, сюръекция, биекция.

13.1

13.2

13.3

14 Предел функции в точке: определения по Коши и по Гейне. Эквивалентность двух определений. Арифметика предела функции. Теорема о зажатой функции.

14.1

14.2

14.3

14.4

15 Сходимость стандартных последовательностей.