

Лекции по алгебре (1 курс, 25-26)

github.com/int28t/hse-se-lecture-notes

Михайлец Екатерина Викторовна
emihaylets@hse.ru
ТГК: t.me/alg_pi_25_26

Содержание

1	Матрицы	2
1.1	Свойства сложения матриц	2
1.2	Свойства умножения на число	3
1.3	Умножение матриц	3
1.4	Свойства умножения матриц	3
2	Транспонирование	4
2.1	Свойства транспонирования	4
2.2	Элементарное преобразование строк(столбцов)	4
3	Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)	6
4	Перестановки (Подстановки)	6
5	Определитель	8
5.1	Свойства определителей	9
6	test	9
6.1	Тригонометрическая форма	12
6.2	Умножение и деление в тригонометрической форме	12
6.3	Извлечение комплексного корня:	13
6.4	Геометрическая интерпретация	13
6.5	Формула эйлера	14
6.6	Комплексные многочлены	14
7	Аналитическая геометрия	15
8	Смешанное произведение	18

1 Матрицы

Матрицей размера/типа/порядка $n \times m$ называется упорядоченная таблица с m строками и n столбцами.

Обозначение:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

i - строка, j - столбец

$M_{mn}(\mathbb{R})$ - множество всех матриц размера $m \times n$ с вещественными элементами

1) При $m = n$ матрица называется квадратной порядка n

2) При $m = 1$ матрица $1 \times n$ - n -мерная строка

При $n = 1$ матрица $m \times 1$ - m -мерный столбец

Матрица 1×1 - число

3) Матрица состоящая из нулей (т.е. $a_{ij} = 0 \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) называется нулевой матрицей. **Обозначение:** \mathbb{O}

4) Будем называть единичной квадратную матрицу порядка n , если:

$$a_{ij} = \underbrace{\delta_{ij}}_{\text{Символ Кронекера}} = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases}$$

Обозначение:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Определение: Две матрицы a и b называются равными если они одного размера и соответствующие элементы равны (т.е. $a_{ij} = b_{ij} \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$)

Определение: Матрица C называется суммой матриц A и B если все матрицы A , B и C одинакового размера и $c_{ij} = b_{ij} + a_{ij}, \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$

Обозначение: $C = A + B$

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1 Свойства сложения матриц

1. Коммутативность ($A + B = B + A$)

□ Поэлементно: $[A+B]_{ij} \underbrace{=}_{\text{по определению сложения}} [A]_{ij} + [B]_{ij} \underbrace{=}_{\text{Вещественные числа коммутативны}} [B]_{ij} +$

$[A]_{ij} \underbrace{=}_{\text{по определению сложения}} [B+A]_{ij} \blacksquare$

2. Ассоциативность ($(A + B) + C = A + (B + C)$)

3. \exists нейтральный элемент по сложению т.е. \exists матрица $\mathbb{O} \in M_{mn}(\mathbb{R}) \forall A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ выполняется $\mathbb{O} + A = A + \mathbb{O} = A$

□ $[\mathbb{O}]_{ij} = 0$ - нулевая матрица \blacksquare

4. \forall матрицы $A \in M_{mn}(\mathbb{R}) \exists B \in M_{mn}(\mathbb{R}) : A + B = B + A = \mathbb{O}$ - нулевая матрица

□ $B_{ij} = -A_{ij} \blacksquare$

Обозначение: $B = -A$ – Обратная по сложению к A или противоположная

Определение: Матрица C называется произведением числа $\lambda \in \mathbb{R}$ и матрицы A , если матрицы C и A одинакового размера и $[C]_{ij} = \lambda * [A]_{ij} \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$

Обозначение: $C = \lambda * A$

Пример:

$$2 * \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Определение: Разностью матриц A и B называется сумма A и $-B$

1.2 Свойства умножения на число

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : (\lambda * \mu) * A = \lambda * (\mu * A)$ – ассоциативность относительно умножения на число

$(\lambda + \mu) * A = \lambda * A + \mu * A$ – дистрибутивность относительно умножения чисел

$\lambda * (A + B) = \lambda * A + \lambda * B$ – дистрибутивность относительно сложения матриц

Это место стоит перепроверить (!!!)

$1 * A = A$ – унарность

1.3 Умножение матриц

Рассмотрим $A_{m \times n} \in M_{mn}(\mathbb{R}), B_{n \times k} \in M_{nk}(\mathbb{R})$:

Определение: Произведением матрицы $A_{m \times n}$ и $B_{n \times k}$ (число столбцов в A равно числу строк в B) называется C_{mk} где:

$$C_{ij} = \sum_{q=1}^n a_{iq} * b_{qj}$$

$$(C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} \quad \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, k})$$

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{3 \times 2} * \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}_{2 \times 1} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}_{3 \times 1}$$

1.4 Свойства умножения матриц

1. Ассоциативность Пусть $A_{m \times n}, B_{n \times k}, C_{k \times l}$. Тогда $(A * B) * C = A * (B * C)$

$$\begin{aligned} \square [(A * B) * C]_{ij} &= \sum_{r=1}^k [A * B]_{ir} * [C]_{rj} = \sum_{r=1}^k \left(\sum_{s=1}^n [A]_{is} * [B]_{sr} \right) * [C]_{rj} = \sum_{r=1}^k \sum_{s=1}^n [A]_{is} * \\ & [B]_{sr} * [C]_{rj} \quad \underbrace{=}_{\text{перегруппируем слагаемые}} \sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^k [A]_{is} * [B]_{sr} * [C]_{rj} = \sum_{s=1}^n [A]_{is} * \left(\sum_{r=1}^k [B]_{sr} * [C]_{rj} \right) = \\ & \sum_{s=1}^n [A]_{is} * [B * C]_{sj} \quad \underbrace{=}_{\text{по определению умножения}} = A * (B * C) \blacksquare \end{aligned}$$

2. \exists Нейтрального элемента по умножению (для квадратных матриц) \exists матрица $E \in M_n(\mathbb{R}) : \forall A \in M_n(\mathbb{R}) E * A = A * E = A$

\square Предъявим единичную матрицу

$$[E]_{ij} = \delta_j^i$$

$$[A * E]_{ij} = \sum_{r=1}^n [A]_{ir} * [E]_{rj} = \sum_{r=1}^n [A]_{ir} * \delta_j^r = 0 + \dots + [A]_{ij} + \dots + 0 = [A]_{ij} \quad \forall i, j = \overline{1, n}$$

$E * A$ аналогично \blacksquare

3. $A * \mathbb{O} = \mathbb{O} * A = \mathbb{O}$ Для квадратных A и \mathbb{O} порядка n

Рассмотрим: $(A + B) * C = A * C + B * C$ – дистрибутивность умножения матриц

Замечание: Вообще говоря умножение матриц некоммукативно (даже для квадратных)

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2 Транспонирование

Определение: Транспонирование — операция, переводящая все строки в столбцы с сохранением порядка, то есть:

$$[A^T]_{ij} = [A]_{ji} \quad \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$$

Обозначение: A^T

$$A_{m \times n} \xrightarrow{T} (A^T)_{n \times m}$$

2.1 Свойства транспонирования

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$
4. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

□ Пусть матрицы $A \in M_{mn}(\mathbb{R}), B \in M_{nk}(\mathbb{R})$

$$[(A \cdot B)^T]_{ij} \xrightarrow[\text{по определению } T]{=} [A \cdot B]_{ji} \xrightarrow[\text{по определению произведения матриц}]{=} \sum_{r=1}^n A_{jr} \cdot B_{ri} =$$

$$\xrightarrow[\text{по коммутативности произведения}]{=} \sum_{r=1}^n B_{ri} \cdot A_{jr} = \sum_{r=1}^n B_{ir}^T \cdot A_{rj}^T = [B^T \cdot A^T]_{ij} \quad \forall i = \overline{1, k}, j = \overline{1, m} \quad \blacksquare$$

2.2 Элементарное преобразование строк(столбцов)

Определение: — это 3 следующие операции:

1. Перестановка двух строк в матрице
 $(i) \Leftrightarrow (k)$ (i-ая строка меняется местами с k-ой)
2. Умножение строки на ненулевое число
 $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0, (i) \Rightarrow \lambda \cdot (i), \lambda \neq 0$
3. Прибавление к i-ой строке другой k-ой строки с коэффициентом $\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$
 $(i) \Rightarrow (i) \cdot \lambda(k), i \neq k$

Замечание 1: Все элементарные преобразования обратимы

Замечание 2: Каждое элементарное преобразование строк матрицы можно трактовать как умножение на матрицу слева специального вида (квадратную). Эта матрица получается применением к единичной матрице того же самого элементарного преобразования

Пример: (1) элементарное преобразование к E

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)-2(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \text{матрица элементарного преобразования}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Замечание 3: Преобразования можно применять и к столбцам. Это будет соответствовать умножению справа на матрицу специального вида

Определение: Матрица имеет:

- 1) ступенчатый вид, если номера первых ненулевых элементов всех строк последовательно возрастают, такие элементы называются ведущими (нижние ведущие элементы находятся правее, чем верхние), а все нулевые строки стоят внизу
- 2) канонический вид (улучшенный ступенчатый), если матрица имеет ступенчатый вид, в которой все ведущие элементы равны 1, и в любом столбце с ведущими элементами все остальные равны 0

Теорема о методе Гаусса: Любую конечную матрицу можно привести к ступенчатому и каноническому виду элементарными преобразованиями строк.

□ Предъявим алгоритм. Берем матрицу $m \times n$ и двигаемся из левого верхнего угла.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & & \dots & & \\ \dots & & & \dots & \\ a_{m1} & & & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

п. 1 Если текущий элемент равен 0, тогда переходим к **п. 2**, иначе объявляем текущий элемент ведущим. Прибавляем текущую строку к остальным так, чтобы элементы ниже ведущего (и выше в случае канонического вида) обратились в 0. Пусть a_{ij} — текущий элемент. Тогда для $k \neq i$ строки берем $\lambda = -\frac{a_{kj}}{a_{ij}}$, где $a_{ij} \neq 0$ и $(k) \rightarrow (k) + \lambda(i)$ (для канонического вида $(i) \rightarrow \frac{1}{a_{ij}}(i)$, чтобы получить 1 на месте ведущего элемента).

Выбираем новый текущий элемент, смещаясь в матрице на один столбец вправо и на одну строку вниз \Rightarrow следующий шаг, повторяем **п. 1**, если это невозможно stop

п. 2 Если текущий элемент равен нулю, то просматриваем все элементы под ним. Если среди них нет не равных 0, то переходим к **п. 3**. Иначе если в k -ой строке ненулевой элемент найден (под текущим), то $(i) \leftrightarrow (k)$

п. 3 Если текущий элемент и все под ним равны 0, то меняем текущий столбец смещаясь на один столбец вправо. Если возможно, то **п. 1**, иначе stop

Так как матрица имеет конечные размеры, а за 1 итерацию смещается вправо на 1 столбец — процесс преобразования к ступенчатому (каноническому) виду закончится не более чем за n шагов

3 Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Покоординатная запись СЛАУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Rightarrow Ax = b, \text{ где } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{столбец неизвестных}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} - \text{столбец свободных членов}$$

$$(A|B)_{m \times (n+1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) - \text{элементарными преобр. к каноническому виду}$$

Замечание: Элементарные преобразования матрицы не меняют множество решений СЛАУ

4 Перестановки (Подстановки)

Определение: Перестановкой чисел $1, \dots, n$ называется расположение их в определённом порядке.

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

Пример:

$$\alpha = (5, 3, 4, 1, 2)$$

Определение: α_i и α_j образуют инверсию в перестановке если $\alpha_i > \alpha_j$, но $i < j$

Определение: Знак перестановки это $(-1)^n$, где n - число инверсий в перестановке

Обозначение: $sgn(\alpha)$

Пример:

$$\alpha = \underbrace{(4 \ 5 \ 1 \ 3 \ 6 \ 2)}_{3+3+0+1+1+0}$$

$$sgn(\alpha) = 1$$

Определение: Если $sgn(\alpha) = 1$ то α - чётная перестановка, если $sgn(\alpha) = -1$ то α - нечётная перестановка

Определение: Транспозицией называется преобразование при котором в α меняются местами только α_i и α_j , а остальные элементы не меняются

Утверждение: Каждая транспозиция меняет чётность перестановки

□ а) Транспозиция соседних элементов:

$$\alpha_1, \dots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n$$

↓

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{i+1}, \alpha_i, \dots, \alpha_n$$

⇒ Число инверсий изменилось на 1 ⇒ знак перестановки поменялся

б)

$\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_{i+k}, \dots, \alpha_n$

Меняем $\alpha_i \leftrightarrow \alpha_{i+k}$ с $k-1$ соседних транспозиций

$\alpha_1, \dots, \alpha_{i+k}, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n$

$\Rightarrow k+k-1=2k-1$ шагов (соседних транспозиций)

\Rightarrow Знак перестановки поменяется ■

Определение: Подстановка

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \delta(1) & \delta(2) & \dots & \delta(n) \end{pmatrix}$$

– отображение чисел в себя являющееся взаимно-однозначным

Нижняя строка – перестановка

Пример:

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$sgn(\delta) = 1$ $\delta(2) = 2$ – стационарный элемент

Определение: Знаком подстановки называется знак перестановки в её нижней строке

Обозначение: S_n – множество подстановок длины n

$|S_n| = n!$ число элементов и мощность множества

Замечание: Транспозиция – нечётная подстановка (в которой α_i и α_j переходят друг в друга, а остальные элементы неподвижны)

Замечание: Часто используют запись подстановок «в циклах», и каждый элемент выписывается справа

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1 \ 4 \ 3) * \underbrace{(2)}_{\text{можно не писать}} = (1 \ 4 \ 3)$$

Циклическая запись транспозиции: (α_i, α_j)

Определение:

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} = (1)(2)(3)\dots(n) = Id$$

называется тождественной подстановкой

Обозначение: Id (id)

Определение: Умножением подстановок называется их последовательное применение (т.е. композиция отображений)

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(умножая слева направо)

В циклах: $(12) * (132) = (1)(23) = (23)$

Замечание: Умножение подстановок некоммукативно

Пример: $(132)(12) = (13) \neq (23)$

Замечание: Id – нейтральный элемент по умножению

Замечание: Подстановку обратную к

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \delta(1) & \delta(2) & \delta(3) & \dots & \delta(n) \end{pmatrix}$$

можно получить как

$$\delta^{-1} = \begin{pmatrix} \delta(1) & \delta(2) & \delta(3) & \dots & \delta(n) \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

и отсортировав столбцы
 $\Rightarrow \delta * \delta^{-1} = \delta^{-1} * \delta = Id$

Пример:

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\delta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Замечание: \forall Подстановку можно представить как произведение транспозиций
 \square Запишем подстановку в циклах $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = (\alpha_k, \alpha_{k-1})(\alpha_{k-1}, \alpha_{k-2}) \dots (\alpha_2, \alpha_1)$
 - произведение $k - 1$ транспозиций слева направо ■

Замечание: $sgn(\delta_1 * \delta_2) = sgn(\delta_1) * sgn(\delta_2)$

5 Определитель

Определение Определителем или детерминантом квадратной матрицы A порядка n называется сумма $n!$ слагаемых следующего вида:

$$\det A = \sum_{\delta \in S_n} sgn(\delta) * a_{1\delta(1)} * a_{2\delta(2)} * a_{3\delta(3)} * \dots * a_{n\delta(n)}, \text{ где}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

и

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \delta(1) & \delta(2) & \delta(3) & \dots & \delta(n) \end{pmatrix}$$

Обозначение: $\det A$ или $|A|$

Замечание: По сути $\det A$ является суммой произведений элементов матрицы по одному из каждой строки и столбца (стоящие в разных строках и столбцах по всем способам так сделать (с учётом знака))

Пример: $n = 2 \Rightarrow n! = 2! = 2$

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = Id$$

$$\delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} * a_{22} - a_{21} * a_{12}$$

Пример: $n = 3 \Rightarrow n! = 3! = 6$

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13}, & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}, & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right]$$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{22}a_{23}a_{11} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} -$$

Правило Саррюса

(Диагонали \searrow идут с плюсом, диагонали с \nearrow с минусом)

5.1 Свойства определителей

№1 $\det A = \det A^T$ (\Rightarrow Все свойства \det верные для строк матрицы справедливы и для столбцов)

$\square B = A^T, b_{ij} = a_{ji}$ Переставим $b_{i\delta_i}$ по возрастанию номеров столбцов

$$\det B = \sum_{\delta \in S_n} \operatorname{sgn}(\delta) * b_{1\delta(1)} * b_{2\delta(2)} * \dots * b_{n\delta(n)} =$$

Используем:

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \delta(1) & \delta(2) & \dots & \delta(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta(1)^{-1} & \delta(2)^{-1} & \dots & \delta(n)^{-1} \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

$\operatorname{sgn}(\delta^{-1}) = \operatorname{sgn}(\delta)$ так как $\operatorname{sgn}(\delta * \delta^{-1}) = \operatorname{sgn}(\delta) * \operatorname{sgn}(\delta^{-1}) = 1$

$$= \sum_{\delta \in S_n} \operatorname{sgn}(\delta^{-1}) b_{\delta^{-1}(1)1} b_{\delta^{-1}(2)2} * \dots * b_{\delta^{-1}(n)n} = \sum_{\delta \in S_n} \operatorname{sgn}(\delta^{-1}) * a_{1\delta^{-1}(1)} * a_{2\delta^{-1}(2)} * \dots * a_{n\delta^{-1}(n)}$$

Переименуем $\tau = \delta^{-1}$

$$= \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau) * a_{1\tau_1} * \dots * a_{n\tau_n} = \det A \blacksquare$$

№2 Определитель линеен по строкам и столбцам т.е. пусть $A = (A_1, \dots, A_n)$ – матрица как набор строк

Тогда:

$$\text{а) } \det(A_1, \dots, A'_i + A''_i, \dots, A_n) = \det(A_1, \dots, A'_i, \dots, A_n) + \det(A_1, \dots, A''_i, \dots, A_n)$$

$$\text{б) } \det(A_1, \dots, \alpha * A_i, \dots, A_n) = \alpha * \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_n)$$

Пример:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3+x \\ 2 & 7+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & x \end{vmatrix} = (1 * 7 - 3 * 2) + x * \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - x$$

6 test

Замечание Для однородной СЛАУ $Ax = 0$ теорема Кронекера-К. выполняется всегда: $RgA = Rg(A|O)$ - всегда есть решения

Однородные СЛАУ

Рассмотрим ОСЛАУ $Ax = 0$ (где $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$)

Определение: Любые $n - r$ линейно независимых столбцов (где $n - r$ - число неизвестных, $r = RgA$) является решениями однородных СЛАУ $Ax = 0$, называют фундаментальной системой решений (ФСР) однородной СЛАУ $Ax = 0$

Теорема: (о существовании ФСР): Рассмотрим ОСЛАУ $Ax = 0$ У неё $\exists k = n - r$ (где n - число неизвестных), $r = RgA$) линейно независимых решений

\square Предположим, что БМ, расположен в левом верхнем углу матрицы A . Пусть $RgA = R$ A = рисунок вставим потом1

По теореме о БМ строки A_{r+1}, \dots, A_m линейно выражаются через базисные строки A_1, \dots, A_r

Сделаем элементарные преобразования: $A_{r+1} -> A_{r+1} - \alpha_1 A_1 - \dots, \alpha_r * A_r$

$A_m -> A_m - \mu_1 A_1 - \dots - \mu_r A_r$

Получим матрицу A' , у которой последние $m - r$ строк равны 0

A = рисунок 2

Элементарные преобразования строк матрицы A (а следовательно и строк расширенной матрицы $(A|O)$) соответствуют эквивалентным преобразованиям уравнений исходной ОСЛАУ $Ax = 0 \Rightarrow$ исходная ОСЛАУ $Ax = 0$ эквивалентна СЛАУ $A'x = 0$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r + a_{1r+1}x_{r+1} + 1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r + a_{rr+1}x_{r+1} + 1 + \dots + a_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

Будем называть переменные, отвечающие базисны столбцам, главными (или базисными), а все остальные переменные свободными

В(*) x_1, \dots, x_r - главные (их $r = RgA$), x_{r+1}, \dots, x_n - свободные (их $n - r$ штук)

Перепишем (*) так чтобы слева остались только главные переменные, а справа свободные

**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - 1 - \dots - a_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - 1 - \dots - a_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

Присвоим свободные переменные x_{r+1}, \dots, x_n след. наборы значений
рисунок3

Для каждого набора решим СЛАУ (**)

Она всегда имеет решение, т.к. это СЛАУ с квадратной невырожденной матрицей (её $\det = M \neq 0$, т.к. это БМ) (решения можно найти например по формулам Крамера)

Получим следующие решения: рисунок4

\Rightarrow столбцы рисунок5

являющиеся решениями СЛАУ (**) $\Leftrightarrow (*) \Leftrightarrow$ исходной СЛАУ $Ax = 0$ (здесь $k = n - r = n - RgA$)

Покажем, что Φ_1, \dots, Φ_k линейно независимы. Составим матрицу $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_k)$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{r1} & \phi_{r2} & \dots & \phi_{rk} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$M_{r+1, \dots, n}^{1, \dots, k} = |E| = 1 \neq 0 \Rightarrow$ это БМ в матрице Φ размера $n \times k \Rightarrow$ по теореме о БМ столбцы ϕ_1, \dots, ϕ_k - линейно независимы \Rightarrow по определению $k = n - r$ линейно независимых решений ϕ_1, \dots, ϕ_k образуют ФСР ОСЛАУ $Ax = 0$ ■

Замечание 1: Построенная в ходе доказательства ФСР называется нормальной (значения свободных переменных образуют столбцы единичной матрицы E т.е. в каждом столбце ФСР 1 свободная переменная = 1, остальные свободные переменные = 0)

Замечание 2: Различных ФСР бесконечно много (при $k = n - r \geq 1$) т.к. значения свободных переменных можно брать любыми с условием, чтобы на них образовался БМ в матрице Φ ("таблице ФСР"), и тоже получим ФСР ($n - r$ линейно независимых решений)

Следствие (из теоремы о существовании ФСР): (Критерий существования ненулевого решения однородной квадратной СЛАУ)

пусть A - квадратная матрица. Тогда ОСЛАУ $Ax = 0$ имеет ненулевое решение $\Leftrightarrow \det A = 0$

□ Необходимость (\Rightarrow): Дано: $Ax = 0$ Доказать: $\det A = 0$

Предположим противное

Предположим, что $\det A \neq 0 \Rightarrow$ по формулам Крамера СЛАУ имеет единственное решение, но всегда есть решение $x = 0 \Rightarrow$ других нет - противоречие

Достаточность (\Leftarrow): Дано: $\det A = 0$

Доказать: \exists ненулевое решение

Если $\det A = 0 \Rightarrow \text{Rg} A \leq n$ Пусть $\text{Rg} A = r$ По теореме о существовании ФСР найдётся $n - r > 0$ линейно независимых решений - они и будут ненулевыми решениями (т.к. \forall система, содержащая нулевой столбец является линейно зависимой) ■

Теорема: (о структуре общего решения ОСЛАУ)

Пусть ϕ_1, \dots, ϕ_k - ФСР однор. СЛАУ $Ax = 0$ (где $k = n - r$, n - число переменных, $r = \text{Rg} A$)

Тогда \forall решение этой ОСЛАУ можно представить в виде линейной комбинации столбцов ФСР:

$$x = c_1 * \phi_1 + \dots + c_k * \phi_k$$

□ Пусть $x^o = (x_1^o, \dots, x_n^o)^T$ - произвольное решение ОСЛАУ $Ax = 0$. Покажем, что x^o линейно зависима через столбцы ФСР ϕ_1, \dots, ϕ_k

Предположим, что БП расположена в левом верхнем углу матрицы A .

Тогда исходная СЛАУ эквивалентна следующей СЛАУ:

(1)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

Решим (1) относительно главных переменных x_1, \dots, x_r (как решение матричного уравнения или методом Крамера или методом Гаусса) - всегда существует решение, т.к. это квадратная невырожденная СЛАУ (в левом углу БМ)

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{1r+1}x_{r+1} + \dots + \alpha_{1n}x_n \\ \dots \\ x_r = \alpha_{rr+1}x_{r+1} + \dots + \alpha_{rn}x_n \end{cases}$$

Свойства сложения и умножения комплексных чисел

$$\forall z_1, z_2, z_3, z \in \mathbb{C}$$

$$\text{№1 } z_1 + z_2 = z_2 + z_1 - \text{коммутативность}$$

$$\text{№2 } (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) - \text{ассоциативность}$$

$$\text{№3 Существует нейтральный элемент по сложению - } O = (0, 0) \in \mathbb{C} :$$

$$z + 0 = 0 + z = z \forall z \in \mathbb{C} \text{ (Ноль)}$$

$$\text{№4 } \forall z \in \mathbb{C} \exists -z \in \mathbb{C} : z + (-z) = -z + z = 0$$

Т.е.

$$\forall z \exists$$

противоположный или обратный элемент по сложению.

$$\text{№5 } z_1 * z_2 = z_2 * z_1 - \text{коммутативность}$$

$$\text{№6 } z_1 * z_2 * z_3 = z_1 * z_2 * z_3 - \text{ассоциативность}$$

$$\text{№7 } \exists e \in \mathbb{C} : z * e = e * z = z \forall z \text{ Существует единица - нейтральный элемент по умножению } (e = (1, 0) =$$

$$\text{№8 } \forall z \neq 0 \exists z^{-1} \in \mathbb{C} : z * z^{-1} = z^{-1} * z = e \text{ Существует обратный элемент по умножению)}$$

№9 $z_1 * (z_2 + z_3) = z_1 * z_2 + z_1 * z_3$ Дистрибутивность умножения относительно сложения

Замечание: Эти 9 свойств-аксиом числового поля которые и позволяют называть комплексные числа числами

6.1 Тригонометрическая форма

Здесь будет картинка

Перейдём к полярным координатам (r, ϕ)

$$\begin{cases} x = r * \cos\phi \\ y = r * \sin\phi \end{cases}$$

Тогда:

$z = x + iy = r * \cos\phi + ir * \sin\phi = r(\cos\phi + i \sin\phi)$ = тригонометрическая форма комплексного числа

Определение:

№1 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ — модуль комплексного числа (угол между положительным направлением вещественной оси и вектором z)

Обозначение:

$\phi = \text{Arg} z = \{ \arg z + 2\pi k | k \in \mathbb{Z} \}$, где $\arg z$ — главное значение аргумента, его выбирают произвольно из множества $\{ \arg z + 2\pi k | k \in \mathbb{Z} \}$

6.2 Умножение и деление в тригонометрической форме

№1 Умножение. $z_1 * z_2 = r_1 * r_2 (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2))$

№2 Деление. $(z_2 \neq 0) : \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\phi_1 - \phi_2) + i \sin(\phi_1 - \phi_2))$

□ Умножение: $z_1 * z_2 = r_1 * r_2 (\cos\phi_1 + i \sin\phi_1) (\cos\phi_2 + i \sin\phi_2) = r_1 * r_2 (\underbrace{\cos\phi_1 \cos\phi_2 - \sin\phi_1 \sin\phi_2}_{\cos(\phi_1 + \phi_2)} + i \underbrace{\sin\phi_1 \cos\phi_2 + \cos\phi_1 \sin\phi_2}_{\sin(\phi_1 + \phi_2)})$

Теорема (Муавра)

$$\forall z \in \mathbb{C} \forall n \in \mathbb{N} z^n = r^n (\cos(n\phi) + i \sin(n\phi))$$

□ По индукции: $n = 1 \Rightarrow z = r(\cos\phi + i \sin\phi)$ — база индукции, верно

Пусть верно для $n = k$, покажем для $n = k + 1$ (шаг индукции)

$$z^{k+1} = z^k * z = r^k (\cos k\phi + i \sin k\phi) * r (\cos\phi + i \sin\phi) = r^{k+1} (\cos(k+1)\phi + i \sin(k+1)\phi) \blacksquare$$

6.3 Извлечение комплексного корня:

Теорема: \forall комплексное число $w \neq 0 (w \in \mathbb{C})$ имеет ровно n различных корней n -ой степени, т.е. так

□ Как их найти?

№1 Представим w в тригонометрической форме: $w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$ (ρ, ψ даны по условию)

№2 Ищем корни тоже в тригонометрической форме: $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$

№3 По условию $w = z^n \Rightarrow$ по формуле Муавра $z^n = r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$

№4 Приравняем модули и аргументы:

$$z^n = w \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = \rho, r \in \mathbb{R}_1 > 0 \\ n\phi = \psi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \psi = \frac{\psi + 2\pi k}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

5. Заметим, что достаточно брать $k = \overline{0, n-1}$ т.к. начиная с $k = n$ корни станут повторяться \Rightarrow Су

$$\Rightarrow \sqrt[n]{w} = \left\{ \sqrt[n]{\rho} \left(\cos\left(\frac{\psi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\psi + 2\pi k}{n}\right) \right) \mid k = \overline{0, n-1} \right\} \blacksquare$$

6.4 Геометрическая интерпретация

При

$$k = 0, \phi_0 = \frac{\psi}{n}$$

соответствует первому корню, $\frac{2\pi i}{n}$ - угол между соседними корнями - "шаг"

Здесь будет картиночка чуть позже

Корни лежат в вершинах правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса

$\sqrt[n]{\rho}$ При этом 1-ый корень z_0 имеет аргумент $\phi_0 = \frac{\psi}{n}$, а каждый следующий корень получен поворотом на угол $\frac{2\pi}{n}$

Пример:

$\sqrt[6]{1}$ - Найти все комплексные корни

$$1 = 1 * (\cos 0 + i\sin 0) \Rightarrow \rho = 1, \psi = 0 (+2\pi k)$$

$$\sqrt[6]{1} = \left\{ \sqrt[6]{1} \left(\cos \frac{0 + 2\pi k}{6} + i\sin \frac{0 + 2\pi k}{6} \right), k = \overline{0, 5} \right\} = \left\{ \cos \frac{\pi k}{3} + i\sin \frac{\pi k}{3}, k = \overline{0, 5} \right\}$$

$$k = 0 \Rightarrow \phi_0 = 0, \text{ шаг} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

Здесь будет ещё один рисуночек

6.5 Формула эйлера

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi \quad \forall \phi \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \cos\phi = \operatorname{Re} e^{i\phi} \\ \sin\phi = \operatorname{Im} e^{i\phi} \end{cases}$$

Замечание: Тождество Эйлера: $e^{i\pi} + 1 = 0$

Следствие:

$$\begin{cases} e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi \\ e^{-i\phi} = \cos\phi - i\sin\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\cos\phi = e^{i\phi} + e^{-i\phi} \\ 2\sin\phi = e^{i\phi} - e^{-i\phi} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\cos\phi = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} \text{ и } \sin\phi = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2}$$

6.6 Комплексные многочлены

Теорема: "Основная" теорема алгебры

Для любого многочлена с комплексными коэффициентами:

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, a_i \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$$

Существует корень уравнения $f(z) = 0$, и этот корень всегда принадлежит \mathbb{C}

Замечание: Это утверждение означает, что поле комплексных чисел алгебраически замкнуто. (у \forall многочлена с коэффициентами из \mathbb{C} есть корень из \mathbb{C})

Это не так для \mathbb{Q} (например $x^2 - 2$ имеет корень $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)

и не так для \mathbb{R} : $x^2 + 1$ имеет комплексные корни $\pm i \notin \mathbb{R}$

Теорема (Безу) Остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x - c$ (что?) есть $f(c)$

□ Разделим $f(x)$ с остатком на $x - c$: $f(x) = (x - c) * Q(x) + R(x)$, где $\deg R(x) < \deg(x - c) = 1 \Rightarrow$ остаток $R(x) = \text{const} \Rightarrow f(c) = (c - c)Q(c) + \text{const} \Rightarrow R(x) = f(c)$ ■

Определение: Разложение многочлена $f(x) = g(x) * h(x)$ будем называть нетривиальным если

$$\begin{cases} \deg g < \deg f \\ \deg h < \deg f \end{cases}$$

, где $\deg f$ - степень многочлена

Пример: $(x^2 + 1)(x - 1)$ - нетривиальный т.к.

$$\begin{cases} 2 < 3 \\ 1 < 3 \end{cases}$$

Определение: Многочлен называется приводимым если существует нетривиальное разложение $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ и неприводимым в противном случае

Утверждение: Любой многочлен степени $n \in \mathbb{N}$ раскладывается в произведение неприводимых многочленов

Частные случаи

№1 Многочлен над \mathbb{C} (с коэффициентами из \mathbb{C}) степени n всегда разлагается в произведение степеней линейных множителей

$f(z) = a_n(z - z_1)^{\alpha_1} \dots (z - z_k)^{\alpha_k}$, где $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = n, \alpha_i \in \mathbb{N}$ - кратности корней, $z_i \in \mathbb{C}$ - корни многочлена, $a_n \in \mathbb{C}$

№2 Разложение над \mathbb{R}

Утверждение: Если $z_0 \in \mathbb{C}$ является корнем многочлена с вещественными корнями, то и \bar{z}_0 тоже является корнем этого многочлена

□ Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$ - корень $f(x) \Rightarrow f(z_0) = 0$, т.е. $f(z_0) = a_n \cdot z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_1 z_0 + a_0 = 0$ (*)

Рассмотрим комплексное сопряжение равенства (*) $\overline{f(z_0)} = \overline{a_n \cdot z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_1 z_0 + a_0} = \overline{a_n} \cdot \overline{z_0^n} + \overline{a_{n-1}} \overline{z_0^{n-1}} + \dots + \overline{a_1} \overline{z_0} + \overline{a_0} = \bar{0} = 0$

Но $a_i \in \mathbb{R}$ по условию $\Rightarrow \bar{a_i} = a_i \Rightarrow a_n \cdot \overline{z_0^n} + a_{n-1} \overline{z_0^{n-1}} + \dots + a_1 \overline{z_0} + a_0 \Leftrightarrow f(\bar{z}_0) = 0$, т.е. \bar{z}_0 - тоже корень $f(x)$ ■

Замечание: $(z - z_0)(z - \bar{z}_0) = z^2 - z_0 \cdot z - \bar{z}_0 \cdot z + z_0 \cdot \bar{z}_0 = z^2 - (z_0 + \bar{z}_0) \cdot z + |z_0|^2 =$ (если $z_0 = x + iy, \bar{z}_0 = x - iy \Rightarrow z_0 + \bar{z}_0 = 2x = 2Re\ z_0 \in \mathbb{R}$)

$= z^2 - \underbrace{2Re z_0}_{\in \mathbb{R}} \cdot z + \underbrace{|z_0|^2}_{\in \mathbb{R}}$ многочлен от z с вещественными коэффициентами

Соответственно, разложение на неприводимые множители над \mathbb{R} имеет вид:

$f(x) = a_n(x - c_1)^{k_1} \dots (x - c_s)^{k_s} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_tx + q_t)^{l_t}$, где

$a_n, c_i, p_j, q_j \in \mathbb{R}, k_i, l_j \in \mathbb{N}$

Здесь квадратичные сомножители не имеют вещественных корней, а обладают парой комплексных сопряжённых корней с ненулевой мнимой частью (дискриминант $D < 0$)

Теорема Виета

Пусть c_1, \dots, c_n - корни многочлена степени n

$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$

$$\begin{cases} a_1 = -(c_1 + \dots + c_n) \\ a_2 = c_1c_2 + c_1c_3 + \dots + c_{n-1}c_n \\ \vdots \\ a_n = (-1)^n \cdot c_1 \dots c_n \end{cases}$$

Т.е. $(-1)^j a_j$ равно сумме всех возможных произведений j корней

Пример ($n = 3$):

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = -a \\ c_1 \cdot c_2 + c_1 \cdot c_3 + c_2 \cdot c_3 = b \\ c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 = -c \end{cases}$$

На этом комплексное заканчивается

7 Аналитическая геометрия

Определение: Угол между векторами a и b .

Отложим a и b из одной точки, назовём углом ϕ между векторами a и b наименьший из двух плоских углов которые они образуют, т.е. $\phi \in [0, \pi]$

Определение: Если $\phi = \frac{\pi}{2}$, то векторы называются ортогональными. Нулевой вектор ортогонален любому вектору

Определение: Ортогональная проекция вектора \bar{a} на направление вектора \bar{b} ($\bar{b} \neq 0$)

№1 скалярная - число $\text{Pr}_{\bar{b}}^{\bar{a}} = |\bar{a}| \cdot \cos \phi$, где ϕ - угол между \bar{a} и \bar{b}

№2 векторная - вектор $\overline{\text{Pr}_{\bar{b}}^{\bar{a}}} = |\bar{a}| \cdot \cos(\phi) \cdot \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$

Определение: Векторы \bar{a} и \bar{b} называют коллинеарными, если они лежат на одной либо параллельных прямых

Замечание: Нулевой вектор коллинеарен любому вектору

Замечание: Коллинеарные векторы a и b могут быть сонаправленными ($a \uparrow \uparrow b$) или противоположно направленными ($\bar{a} \uparrow \downarrow \bar{b}$)

Определение: Векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ называются компланарными, если они лежат на прямых, параллельных фиксированной плоскости (т.е. если их отложить из одной точки, они лежат в одной плоскости)

Определение: Скалярное произведение векторов - это функция, ставящая в соответствие паре векторов число, удовлетворяющее следующим свойствам: Для любых векторов a, b, c и для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1. $(a, b) = (b, a)$ - симметричность
2. $(\alpha a + \beta b, c) = \alpha(a, c) + \beta(b, c)$ - линейность
3. $(a, a) \geq 0$ и $(a, a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ - положительная определённость

Замечание: В V_3 скалярное произведение задаётся, как $(a, b) = |a| \cdot |b| \cdot \widehat{\cos a, b}$

Определение: Базис - это упорядоченный набор векторов a_1, \dots, a_k такой что

1. a_1, \dots, a_k - линейно независимы
2. Любой вектор линейно зависим через a_1, \dots, a_k

Определение: Матрицей Грама базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ в V_3 называется матрица, состоящая из попарных скалярных произведений этих векторов

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & (e_1, e_3) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & (e_2, e_3) \\ (e_3, e_1) & (e_3, e_2) & (e_3, e_3) \end{pmatrix}$$

Утверждение: Пусть $\bar{a} = a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 + a_3 \bar{e}_3$

$\bar{b} = b_1 \bar{e}_1 + b_2 \bar{e}_2 + b_3 \bar{e}_3$

- разложение векторов a и b по базису e

$$\text{Тогда } \boxed{(\bar{a}, \bar{b})} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & (e_1, e_3) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & (e_2, e_3) \\ (e_3, e_1) & (e_3, e_2) & (e_3, e_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_e^T \Gamma b_e$$

, где

$$a_e = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, b_e = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

- координаты векторов a и b в базисе e_1, e_2, e_3

□ ■

Определение: Упорядоченную тройку векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ называют правой тройкой, если со стороны вектора \bar{c} (с конца) кратчайший поворот от вектора \bar{a} до вектора \bar{b} происходит против часовой стрелки

В противном случае тройка векторов называется **левой** (если поворот по часовой стрелке)

Определение: Вектор \bar{c} называется векторным произведением векторов a и b если выполняются 3 свойства

1. $|c| = |a| \cdot |b| \cdot \sin(\phi)$, где ϕ - угол между \bar{a} и \bar{b}
2. $\bar{c} \perp \bar{a}, \bar{c} \perp \bar{b}$ (ортогонален a и b)
3. a, b, c - правая тройка

Скалярное произв.	Векторное произв.	Смешанное произв.
$(.,.) : V_3 \times V_3 \rightarrow \mathbb{R}$ (число). Обозн.: $\langle x, y \rangle, x \cdot y$.	$[.,.] : V_3 \times V_3 \rightarrow V$ (вектор). Обозн.: $[x, y], x \times y$.	
Опр. $(a, b) = a b \cos(\hat{a}, \hat{b})$ в V_3 .	Опр. $c = [a, b], a, b \in V_3$. 1) $ c = a b \sin(\hat{a}, \hat{b})$.	
Геом. св-ва: $(a, b) = 0 \Leftrightarrow a \perp b$ (a ортогонален b).		
Алгебр. св-ва: 1) Линейность 2) Симметричность 3) Полож.опр-ть $(a, a) \geq 0$ и $(a, a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$.		
Вычисл. в координатах: В ОНБ: $(a, b) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ В произв. б-се: $(a, b) = a^T G b$.		
Геом. приложения: $ a = \sqrt{(a, a)} = \sqrt{a^2}$ $\cos(a^\circ) = \frac{(a, b)}{ a b }$ Про a = $\frac{(a, b)}{(b, b)} b$.		

Утверждение 1 Векторы a и b коллинеарны $(a \parallel b) \Leftrightarrow [a, b] = 0$

$\square \Rightarrow$ Пусть $a \parallel b \Rightarrow$ либо $\sin \phi = 0 (\phi = 0 \text{ или } \pi)$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \text{ хотя бы один} \Rightarrow |[a, b]| = 0 \Rightarrow [a, b] = 0$$

\Leftarrow Пусть $[a, b] = 0$. Если один из них $= 0 \Rightarrow$ коллинеарны по определению. Если оба $\neq 0$, то из $[a, b] = 0 \Rightarrow \sin \phi = 0 \Rightarrow a \parallel b$ ■

Определение: Базис e_1, e_2, e_3 называется правым если тройка векторов e_1, e_2, e_3 правая, и левым если тройка левая.

Далее будем полагать, что рассматривается правый ортонормированный базис $\{i, j, k\}$

Утверждение:

$$[a, b] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \bar{i}(a_y b_z - a_x b_y) + \bar{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \bar{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$

, где $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$ и $\bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}$

$$\begin{aligned} \square [a, b] &= [a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}, b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}] = a_x b_x \underbrace{[i, i]}_{=0} + a_x b_y \underbrace{[i, j]}_{=k} + a_x b_z + a_x b_z \underbrace{[i, k]}_{=-j} + a_y b_x \underbrace{[j, i]}_{=-k} + a_y b_y \underbrace{[j, j]}_{=0} + a_z b_z \\ &= i(a_y b_z - a_z b_y) + j(a_z b_x - a_x b_z) + k(a_x b_y - a_y b_x) \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

■

8 Смешанное произведение

Смешанным произведением Смешанным произведением векторов a, b и c называется число $([a, b], c)$

Обозначение: $\langle a, b, c \rangle$

Утверждение: Пусть V - объём параллелепипеда построенного на неколлинеарных векторах a, b, c

Тогда:

$$\langle a, b, c \rangle = \begin{cases} V & \text{если } a, b, c \text{ - правая тройка} \\ -V & \text{если } a, b, c \text{ - левая тройка} \end{cases}$$

$|[a, b]| = S$ параллелограмма на векторах a и b

Обозначим за \vec{l} единичный ортогональный $\vec{l} \uparrow \uparrow [a, b] \Rightarrow [a, b] = S \cdot \vec{l} \Rightarrow \langle a, b, c \rangle = ([a, b], c) = (S \cdot \vec{l}, \vec{c}) = S * \cos \phi$, где ϕ - угол между c

и $\phi \in (\frac{\pi}{2}; \pi]$, если a, b, c - левая $\Rightarrow \cos \phi < 0 \Rightarrow |c| * \cos \phi = -h$ ($\phi \neq \frac{\pi}{2}$ так как a, b, c не компланарны)

Таким образом

$$\langle a, b, c \rangle = \begin{cases} S \cdot h = V & \text{если } a, b, c \text{ - правая тройка} \\ -S \cdot h = -V & \text{если } a, b, c \text{ - левая тройка} \end{cases}$$

■

Следствие 1 a, b, c - компланарны $\Leftrightarrow \langle a, b, c \rangle = 0$

□ \Rightarrow Пусть a, b, c - компланарны. Если $a \parallel b$, то $[a, b] = 0 \Rightarrow \langle a, b, c \rangle = 0$

Если $a \nparallel b$, то $[a, b] \perp c$ (так как c компланарен a и b) $\Rightarrow \langle a, b, c \rangle = 0$