Семинар 6. Обратная матрица

1 Вычисление обратной матрицы с помощью союзной матрицы

Все матрицы данного листка предполагаются квадратными, если не оговорено обратное.

Определение. *Обратной матрицей* для матрицы A (обозначение A^{-1}) называется матрица B, такая что $A \cdot B = B \cdot A = E$.

Определение. *Транспонированной матрицей* для матрицы A (обозначение A^T) называется матрица B, такая что $b_{ij} = a_{ji}$.

Определение. *Союзной (или присоединённой) матрицей* для матрицы A (обозначение $\tilde{A}$) называется матрица B, такая что $b_{ij} = A_{ji}$ (т.е. её элементы — это алгебраические дополнения соответствующих элементов транспонированной матрицы).

Задачи:

1. Докажите:
   а) Что всякая матрица имеет не более одной обратной;
   б) Что $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
   в) Что $(cA)^{-1} = \frac{A^{-1}}{c}$ (c — некое ненулевое число).

2. Пусть $\det A \neq 0$. Докажите, что $A^{-1} = (\det A)^{-1} \cdot \tilde{A}$.

3. Вычислите обратные матрицы с помощью союзной матрицы:
   а) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Пусть $\det A = a \neq 0$, где A — квадратная матрица порядка n.
   а) Чему равен $\det(A^{-1})$?
   б) Чему равно a, если матрица A — ортогональна (т.е. $A^T = A^{-1}$)?
   в) Чему равен $\det \tilde{A}$?

5. Решите следующую систему уравнений:
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2 = 0, \\ x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

2 Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований

Метод нахождения обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.

Пусть дана квадратная невырожденная (т.е. с ненулевым определителем) матрица A. Припишем к ней справа единичную матрицу того же размера. Приведём элементарными преобразованиями строк исходную матрицу к единичной, параллельно производя те же преобразования с приписанной справа единичной матрицей. Матрица, полученная преобразованиями единичной матрицы, будет обратной для исходной.

Задачи:

6. Докажите корректность метода нахождения обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.

7. Вычислите обратные матрицы с помощью элементарных преобразований:

а) $\begin{pmatrix} 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

3 Матричные уравнения

Задачи:

8. Найдите матрицу X такую, что:

а) $X \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

9. * Решите матричные уравнения из предыдущей задачи, не используя умножение матриц.

4 Метод Крамера

Формулы Крамера:

Пусть дана система уравнений $Ax = b$, где A — квадратная матрица. Пусть $\Delta = \det A \neq 0$. Обозначим Δ_i определитель матрицы, полученной из A заменой i-го столбца на столбец b. Тогда решение системы уравнений можно получить по формулам

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}.$$

Задачи:

10. Решите систему уравнений из задачи 5 методом Крамера.

5 ДЗ

1. Проскуряков: 836, 839, 840, 845 (с помощью элементарных преобразований), 847, 854, 863, 865, 872.

2. Решить методом Крамера. Проскуряков: 25, 78.