

1 Метод окаймляющих миноров

Определение. Минором k -го порядка матрицы A (обозначение $M_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_k}$) называют минор, стоящий на пересечении строк i_1, \dots, i_k и столбцов j_1, \dots, j_k .

Определение. Окаймляющими минорами минора $M_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_k}$ называют миноры $M_{i_1, \dots, i_k, i_{k+1}}^{j_1, \dots, j_k, j_{k+1}}$.

Задачи:

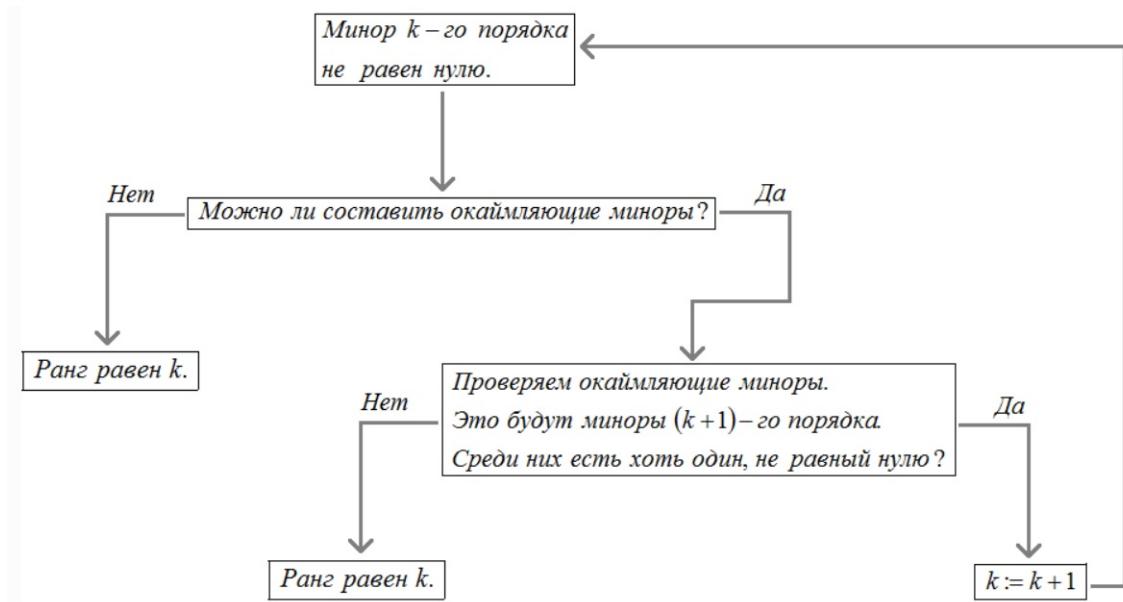
1. Для матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) Выпишите 3 минора порядка 2;
- б) Найдите ненулевой минор порядка 2;
- в) Выпишите все миноры порядка 3;
- г) Вычислите значения всех миноров порядка 3, окаймляющих найденный в пункте б минор.

Определение. Рангом матрицы A (обозначение $\text{Rg } A$ или $\text{rank } A$) называют максимальный порядок её миноров, среди которых есть хотя бы один, не равный нулю.

Метод окаймляющих миноров



2. Вычислите ранг матрицы из задачи 1. Ответ обоснуйте с точки зрения метода окаймляющих миноров.
3. При всех значениях параметра λ вычислите ранг следующей матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

2 Вычисление ранга с помощью элементарных преобразований

Утверждение. Ранг матрицы равен количеству ненулевых строк в ступенчатом виде.

4. Вычислите ранг матрицы из задачи 1 с помощью элементарных преобразований

5. Вычислите ранг следующей матрицы с помощью элементарных преобразований

$$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$$

3 Ранг системы векторов

Утверждение. Ранг системы векторов равен рангу матрицы, составленной из этих векторов.

6. Вычислите ранг системы векторов $a_1 = (2, -1, 1, 2, 0)$, $a_2 = (4, -2, 2, 1, 1)$, $a_3 = (2, -1, 1, -4, 2)$.

7. Вычислите ранг системы векторов $a_1 = (3, 1, 0)$, $a_2 = (2, 1, 1)$, $a_3 = (0, 1, 3)$, $a_4 = (1, 1, 2)$, $a_5 = (-1, 1, 4)$.

Утверждение. Система векторов линейно независима тогда и только тогда, когда её ранг равен количеству векторов в ней.

8. Выясните, является ли система векторов $a_1 = (1, 1, 0, 2)$, $a_2 = (2, 1, 1, 0)$, $a_3 = (3, 1, 3, 1)$ линейно независимой.

9. Докажите, что если количество векторов в системе больше размерности векторов, то система векторов линейно зависима.

Утверждение. Вектор b линейно выражается через систему векторов a_1, a_2, \dots, a_k тогда и только тогда, когда ранг последней системы не меняется при добавлении к ней вектора b .

10. Найдите все λ , при которых вектор $b = (1, 2, 3)$ линейно выражается через систему векторов $a_1 = (2, 1, -1)$, $a_2 = (1, -2, 4)$, $a_3 = (3, -1, \lambda)$.

4 ДЗ

1. Прокуряков: 609, 613, 621, 640, 644, 645, 666, 667.