Лекции по математическому анализу (1 курс, 25-26)

github.com/int28t/hse-se-lecture-notes

Эрлих Иван Генрихович

Содержание

1 Информация о курсе

1.1 Оценка

Тут когда-нибудь появится оценка

2 Основы логики и комбинаторика

2.1 Логические операции и методы доказательств

Определение

Высказывание - словестное утверждение, про которое можно сказать, истинное оно или ложное.
Обозначение: заглавные латинские буквы: $A, B, C \ldots$

Определение

Предикат - высказывание, зависящее от переменной (при этом не являющееся высказыванием)

Пример

$$B(x) : x + 5 = 10$$

2.1.1 Кванторы

- $\forall$ - всеобщности
- $\exists$ - существования

2.1.2 Метод математической индукции

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)} \text{ — истинно, если:}$$

1) $P(1)$ - истинно (база)
2) $\forall n \in \mathbb{N}\ (P(n) \to P(n+1))$ - истинно (шаг)

Пример

Требуется доказать

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \geqslant -1 : (1+x)^n \geqslant 1 + xn} \text{ — неравенство Бернулли}$$

Докажем с помощью ММИ

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \underbrace{\forall x \geqslant -1\ \underbrace{(1+x)^n \geqslant 1 + xn}_{Q(n)}}_{P(n)}$$

1) $\forall x \geqslant -1\ (1+x) \geqslant 1 + x$ - истина

2) Предположим $(1+x)^{n_0} \geqslant 1+xn_0$ - истина. Докажем, что $(1+x)^{n_0+1} \geqslant 1+x(n_0+1)$:

$$(1+x)^{n_0+1} \geqslant 1+x(n_0+1)$$

$$(1+x)^{n_0+1} = (1+x)^{n_0}\underbrace{(1+x)}_{\geqslant 0} \geqslant (1+x)(1+xn_0) =$$

$$= 1+x+xn_0+\underbrace{x^2n_0}_{\geqslant 0} \geqslant 1+x+xn_0 = 1+x(n_0+1)$$

2.1.3 Доказательство от противного

Обозначения: $\overline{A}$ - отрицание к A

Пример

Доказать, что количество простых чисел бесконечно
Пп (предположим противное). Тогда количество простых чисел конечное число:

$$n_1, \ldots, n_k$$

Рассмотрим следующее число:

$$m = n_1 \cdot \ldots \cdot n_k + 1,\ m \in \mathbb{N},\ m > n_i\ \forall i = \overline{1,k} \text{ то есть } m \neq n_i\ \forall i = \overline{1,k}$$

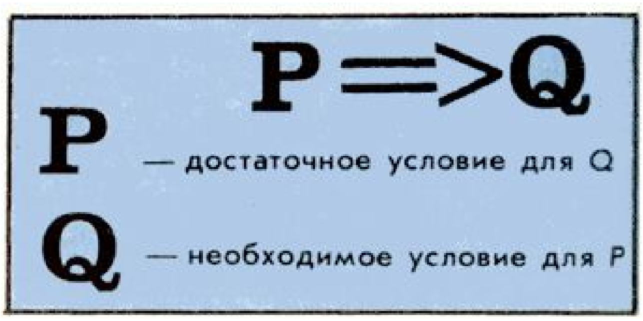
Следовательно, m - составное. Тогда:

$$m = n_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot n_k^{\alpha_k}$$

$$\exists n_j : m \,\vdots\, n_j$$

Но $m = n_1 \cdot \ldots \cdot n_k + 1$ и при делении на n_i $\forall i = \overline{1,k}$ дает остаток 1 ($\perp$)
Утверждение доказано

2.1.4 Достаточность и необходимость



2.2 Комбинаторика и Бином Ньютона

2.2.1 Бином Ньютона

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}}$$

$$C_n^0 a^0 b^{n-0} + C_n^1 a^1 b^{n-1} + \ldots + C_n^n a^n b^{n-n}$$

где $C_n^0, C_n^1, \ldots$ - биномиальные коэффициенты

2.2.2 Комбинаторика

Определение

Перестановка - упорядоченное множество размера n
$\#$ перестановок $= n!$

Определение

Размещения - упорядоченное подмножество размера k множества размера n
$\#$ размещений $= \dfrac{n!}{(n-k)!} = A_n^k$

Определение

Сочетания - неупорядоченное подмножество размера k множества размера n
Одному сочетанию соответствуют $k!$ размещений
$\dfrac{A_n^k}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k$

3 Последовательности

3.1 Основные понятия и предел последовательности

Определение

Последовательность - индексированный набор чисел
$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

3.1.1 Способы задания последовательности

1) Формульный $a_n = n^2 + n - 7$

2) Рекуррентный $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Определение

Последовательность называется **ограниченной**, если

$$\boxed{\exists c\ \forall n\ |a_n| \leqslant c} = P(\{a_n\})$$

И **неограниченной**, если

$$\boxed{\forall c\ \exists n(c)\ |a_{n(c)}| > c}$$

Пример

$$a_n = \frac{3n^2 + 5n - 2}{2n^2 + n + 1}$$

$$\left|\frac{3n^2 + 5n - 2}{2n^2 + n + 1}\right| \leqslant \left|\frac{3n^2 + 5n^2}{2n^2}\right| \leqslant \left|\frac{8n^2}{2n^2}\right| \leqslant c$$

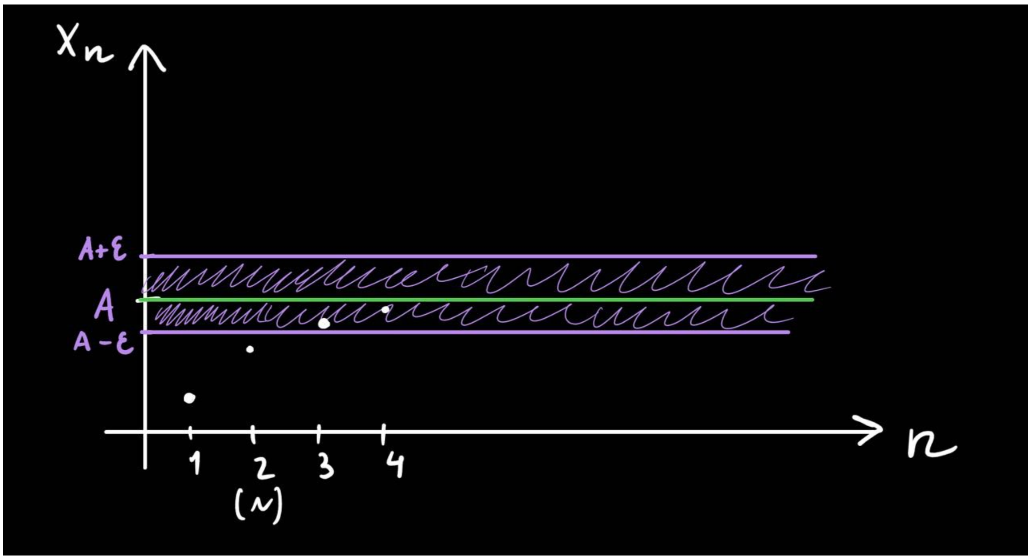
$$4 \leqslant c$$

$$\exists c = \pi^2\ \forall n\ \left|\frac{3n^2 + 5n - 2}{2n^2 + n + 1}\right| \leqslant c$$

3.1.2 Предел последовательности

Определение

Окрестность точки A: $U_\varepsilon(A) = (A-\varepsilon; A+\varepsilon)$



Определение

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, если

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ |a_n - A| < \varepsilon}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ \ -\varepsilon < a_n - A < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ a_n \in U_\varepsilon(A)$$

Пример

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} + 1 \right\rceil$$

Определение

Последовательность называется **сходящейся**, если у нее есть предел

$$\Updownarrow$$

$$\exists a : \lim_{n\to\infty} a_n = A$$

3.1.3 Теорема об ограниченности сходящейся последовательности

Теорема

Если последовательность сходящаяся, то она ограничена

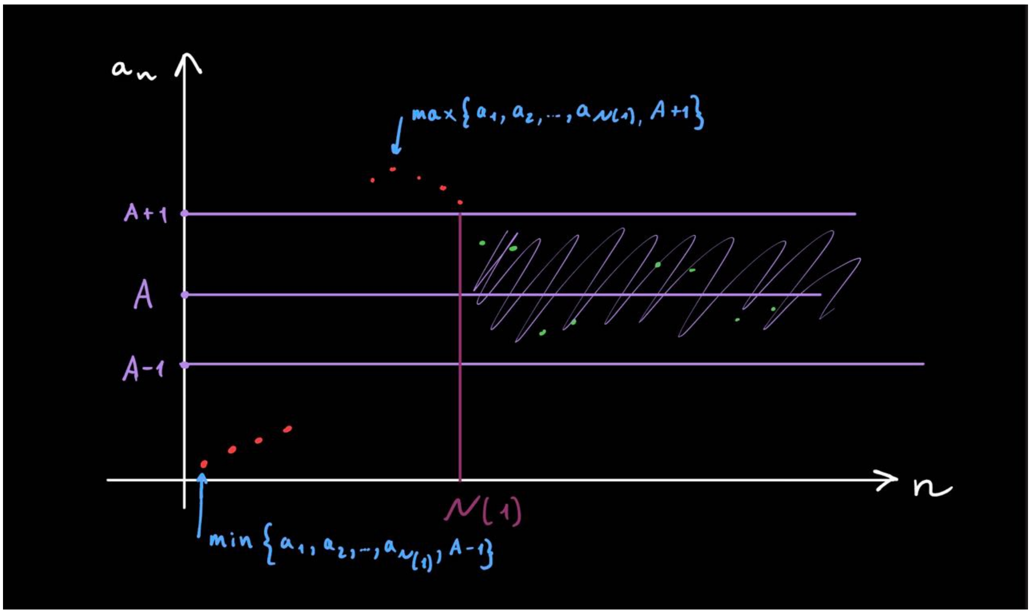
Доказательство

Рассмотрим $\{a_n\}$

$$\exists A\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ |a_n - A| < \varepsilon$$

$$\exists A\ \exists N(1) \in \mathbb{N}\ \forall n > N(1)\ |a_n - A| < 1 \Leftrightarrow a_n \in U_1(A)$$

Очевидно, что элементов a_k, где $k <= N(1)$ конечное число. А для всех элементов a_n, $n > N(1)$ выполняется $|a_n - A| < 1$. Тогда можем взять нижнюю границу $min\{a_1, \ldots, a_{N(1)}, A - 1\}$ и верхнюю $max\{a_1, \ldots, a_{N(1)}, A + 1\}$.



Теорема

У последовательности может быть только 1 предел

Доказательство

Пп $\exists$ хотя бы 2 $\lim$: A и B, $A \neq B$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > N_1(\varepsilon)\ a_n \in U_\varepsilon(A)$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > N_2(\varepsilon)\ a_n \in U_\varepsilon(B)$$

Возьмем $\varepsilon_0 = \dfrac{|A - B|}{3}$ и $n_0 = N_1(\varepsilon_0) + N_2(\varepsilon_0)$

Получаем

$$a_{n_0} \in U_{\varepsilon_0}(A),\ a_{n_0} \in U_{\varepsilon_0}(B)$$

Но

$$U_{\varepsilon_0}(A) \cap U_{\varepsilon_0}(B) = \varnothing$$

Противоречие

3.1.4 Арифметика предела

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, то

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}\ (b_n \neq 0; B \neq 0)$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{A}\ (a_n \geqslant 0; A \geqslant 0)$

Доказательство свойства 1

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > N_1(\varepsilon)\ |a_n - A| < \varepsilon$$
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > N_2(\varepsilon)\ |b_n - B| < \varepsilon$$

Хотим

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_3(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > N_3(\varepsilon)\ |(a_n + b_n) - (A + B)| < \varepsilon$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_3(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > N_3(\varepsilon)\ |(a_n - A) + (b_n - B)| < \varepsilon$$
$$\Uparrow$$
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_3(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > N_3(\varepsilon)\ \underbrace{|a_n - A|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|b_n - B|}_{<\frac{2\varepsilon}{3}} < \varepsilon$$
$$\forall n > N_1\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)\ \forall n > N_2\left(\frac{2\varepsilon}{3}\right)$$
$$N_3(\varepsilon) = max\left\{N_1\left(\frac{\varepsilon}{3}\right), N_2\left(\frac{2\varepsilon}{3}\right)\right\}$$

Примечание: Доказательства свойств 2 и 3, рассмотренные далее, были выведены после доказательства теоремы о произведении б.м. и огр. последовательностей

Доказательство свойства 2

Хотим

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$$

По теореме о связи предела с бесконечно малой последовательностью

$$\alpha_n = (a_n - A) \text{ — б.м.},\ \beta_n = (b_n - B) \text{ — б.м.}$$

Хотим

$$(a_n b_n - AB) \text{ — б.м.}$$

$$(a_n b_n - AB) = (\alpha_n + A)(\beta_n + B) - AB = \alpha_n\beta_n + \alpha_n B + A\beta_n + AB - AB =$$
$$= \underbrace{\alpha_n\beta_n}_{\text{б.м.}} + \underbrace{\alpha_n B}_{\text{б.м.}} + \underbrace{\underbrace{A}_{\text{огр}}\ \underbrace{\beta_n}_{\text{б.м.}}}_{\text{б.м.}} = \text{б.м.} + \text{б.м.} + \text{б.м.} = \text{б.м.}$$

Доказательство свойства 3

Хотим
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{A}{B}\ (b_n\neq 0; B\neq 0)$$
По теореме о связи предела с бесконечно малой последовательностью
$$\alpha_n=(a_n-A)\text{ — б.м.},\ \beta_n=(b_n-B)\text{ — б.м.}$$
Хотим
$$\frac{a_n}{b_n}-\frac{A}{B}\text{ — б.м.}$$
$$\frac{a_n}{b_n}-\frac{A}{B}=\frac{\alpha_n+A}{\beta_n+B}-\frac{A}{B}=\frac{(\alpha_n+A)B-A(\beta_n+B)}{(\beta_n+B)B}=$$
$$=\frac{(\alpha_n+A)B-A(\beta_n+B)}{(\beta_n+B)B}=\frac{\alpha_nB+AB-A\beta_n-AB}{b_nB}=\frac{\alpha_nB-A\beta_n}{b_nB}=$$
$$=\underbrace{\frac{1}{b_n}\cdot\frac{1}{B}}_{\text{огр}\cdot\text{огр}}\cdot\underbrace{(\alpha_nB-A\beta_n)}_{\text{б.м}}=\text{б.м.}$$

3.1.5 Бесконечно большая и бесконечно малая последовательности

Определение

Бесконечно малой (б.м.) последовательностью называют последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такую что, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

Определение

Бесконечно большой (б.б.) последовательностью называют последовательность $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такую что, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$
$$\forall M>0\ \exists N(M)\in\mathbb{N}\ \forall n>N(M)\ |b_n|>M$$
$$b_n>M\ (+\infty)$$
$$b_n<M\ (-\infty)$$

Теорема

$$\frac{1}{\text{б.б.}}=\text{б.м.}$$

Доказательство

Пусть b_n - б.б. Тогда
$$\forall M>0\ \exists N_1(M)\in\mathbb{N}\ \forall n>N_1(M)\ |b_n|>M$$
Хотим $a_n=\dfrac{1}{b_n}$ - б.м.:
$$\forall\varepsilon>0\ \exists N_2(\varepsilon)\ \forall n>N_2(\varepsilon)\ |a_n|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{b_n}\right| < \varepsilon$$

$$|b_n| > \frac{1}{\varepsilon}$$

Возьмем $N_2(\varepsilon) = N_1\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$

Теорема

$$\text{б.м.} \cdot \text{огр.} = \text{б.м.}$$

Доказательство

Хотим $a_n \cdot b_n = c_n$, где a_n, c_n - б.м., b_n - огр.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n > N_1(\varepsilon) \ |a_n| < \varepsilon$$

$$\exists c \ \forall n \in \mathbb{N} \ |b_n| \leqslant c$$

Хотим:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n > N_2(\varepsilon) \ |a_n \cdot b_n| < \varepsilon$$

$$\Uparrow$$

$$|a_n| \cdot |b_n| < \varepsilon$$

$$|a_n| \cdot c < \varepsilon$$

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{c}$$

Возьмем $N_2(\varepsilon) = N_1\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)$

Пример

б.б. + б.б.
Мы точно не можем сказать, чем будет являться эта сумма. Например $n + (-n) = 0$ и $n + n = 2n$

Пример

б.б. + огр. = б.б.
Покажем, что это так
Хотим: $b_n + c_n = u_n$ соответственно. Тогда:

$$\forall M > 0 \ \exists N(M) \in \mathbb{N} \ \forall n > N(M) \ |b_n| > M$$

$$\exists C > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ |c_n| \leqslant C$$

Хотим:

$$\forall K > 0 \ \exists N_2(K) \in \mathbb{N} \ \forall n > N_2(K) \ |b_n + c_n| > K$$

Так, как $|x + y| \geqslant |x| - |y|$:

$$|b_n| - |c_n| > K$$

$$|b_n| - C > K$$

$$|b_n| > K + C$$

Возьмем $N_2(K) = N(K + C)$

Теорема

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow (a_n - A) = \alpha_n \text{ - бесконечно малая}$$

Доказательство

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n > N_1(\varepsilon) \ |a_n - A| < \varepsilon$$

Хотим

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n > N_2(\varepsilon) \ |(a_n - A) - 0| < \varepsilon$$

$$N_2(\varepsilon) = N_1(\varepsilon)$$

Примечание

Теперь можно спокойно доказать свойство 2) из арифметики пределов

Примечание

Произведение бесконечно малых - бесконечно малая последовательность. Так как можно представить одну из них как ограниченную и использовать теорему выше

Определение

Назовем последовательность d_n **отделимой от нуля**, если:

$$\exists \delta > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ |d_n| \geqslant \delta$$

Пример

$(-1)^n$

Теорема

$$\frac{1}{\text{огр}} = \text{отделима от нуля}, \ \frac{1}{\text{отделима от нуля}} = \text{огр}$$

Доказательство

$$\exists \delta > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ |d_n| \geqslant \delta$$

$$u_n = \frac{1}{d_n}, \ \exists c > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ |u_n| \leqslant c$$

$$\Updownarrow$$

$$\left|\frac{1}{d_n}\right| \leqslant c$$

$$\Updownarrow$$

$$|d_n| \geqslant \frac{1}{c}$$

Возьмем $c = \frac{1}{\delta}$. Тогда $|d_n| \geqslant \delta$ верно $\forall n \in \mathbb{N}$

Теорема

Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = U;\ u_n, U \neq 0$, то u_n отделима от нуля

Доказательство

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > N(\varepsilon)\ |u_n - U| < \varepsilon$$

Хотим

$$\exists \delta > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ |u_n| \geqslant \delta$$

Возьмем $\varepsilon_0 = \frac{|U|}{2}$

$$\exists N_0 = N\left(\frac{|U|}{2}\right) = N(\varepsilon_0)$$

$$\forall n > N_0\ u_n \in U_{\frac{|U|}{2}}(U)$$

Очевидно, что существует конечное число u_k, $k \leqslant N(\varepsilon_0)$, причем $u_k \neq 0$

Возьмем $\delta = min\{|u_1|, |u_2|, \ldots, \frac{|U|}{2}\}$

3.1.6 Предельный переход в неравенствах

Теорема

Если $\exists N_0\ \forall n > N_0\ a_n > b_n$ и $a_n \underset{n\to\infty}{\to} A$ и $b_n \underset{n\to\infty}{\to} B$, то $A \geqslant B$

Доказательство

Пп $A < B$. Возьмем $\varepsilon_0 = \frac{B-A}{2}$

$$\exists N_1(\varepsilon_0)\ \forall n > N_1(\varepsilon_0)\ a_n \in U_{\varepsilon_0}(A)$$

$$\exists N_2(\varepsilon_0)\ \forall n > N_2(\varepsilon_0)\ b_n \in U_{\varepsilon_0}(B)$$

Возьмем $n_0 = N_1(\varepsilon_0) + N_2(\varepsilon_0) + N_0$ Тогда по условию $a_{n_0} > b_{n_0}$, но также $a_{n_0} < b_{n_0}$ (так как окрестность a по предположению левее окрестности b). Получили противоречие

3.1.7 Теорема о зажатой последовательности

Теорема о зажатой последовательности

Если $\exists N_0\ \forall n > N_0\ a_n \leqslant c_n \leqslant d_n$, а также $a_n \underset{n\to\infty}{\to} A$ и $d_n \underset{n\to\infty}{\to} A$, то $c_n \underset{n\to\infty}{\to} A$

Доказательство

$$a_n \underset{n\to\infty}{\to} A;\ \forall\varepsilon>0\ \exists N_1(\varepsilon)\ \forall n>N_1(\varepsilon)\ A-\varepsilon<a_n<A+\varepsilon$$

$$d_n \underset{n\to\infty}{\to} A;\ \forall\varepsilon>0\ \exists N_2(\varepsilon)\ \forall n>N_2(\varepsilon)\ A-\varepsilon<d_n<A+\varepsilon$$

Хотим

$$c_n \underset{n\to\infty}{\to} A;\ \forall\varepsilon>0\ \exists N_3(\varepsilon)\ \forall n>N_3(\varepsilon)\ A-\varepsilon<c_n<A+\varepsilon$$

Получаем

$$\underbrace{A-\varepsilon<}_{\forall n>N_1(\varepsilon)} a_n \underbrace{\leqslant c_n \leqslant}_{\forall n>N_0} d_n \underbrace{< A+\varepsilon}_{\forall n>N_2(\varepsilon)}$$

Возьмем $N_3(\varepsilon)=max\{N_1(\varepsilon),\, N_2(\varepsilon),\, N_0\}$

3.1.8 Bonus: Список хороших пределов

1. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0,\ |q|<1$
   $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty,\ |q|>1$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\ a>0$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^a}{b^n} = 0$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b^n}{n!} = 0$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n^a} = 0,\ a>0$

3.2 Действительные числа

Определение

Множество **действительных чисел** - это четверка $(\mathbb{R}; +; \times; \leqslant)$ (множество, 2 операции, 1 отношение)

Примечание

Отличие операции от отношения. Для того чтобы задать операцию, нужно поставить в соответствие для каждой пары чисел число $(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R})$. В отношении для каждой пары чисел нужно поставить в соответствие 0 или 1 $(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \{0, 1\})$.

3.2.1 Аксиома непрерывности

$A, B \subset \mathbb{R}$

1) $A, B \neq \varnothing$

2) $\forall x \in A \ \forall y \in B \ x \leqslant y$

Тогда $\exists \xi \in \mathbb{R} : \forall x \in A \ \forall y \in B \ x \leqslant \xi \leqslant y$

Определение

Верхней гранью множества $A \subset \mathbb{R}$ называется число $C \in \mathbb{R}$, такое что $\forall x \in A \ x \leqslant C$

Определение

Точной верхней гранью $(sup\ A)$ ограниченного сверху множества A называют наименьшую верхнюю грань множества A

Определение

Нижней гранью множества $A \subset \mathbb{R}$ называется число $D \in \mathbb{R}$, такое что $\forall x \in A \ x \geqslant D$

Определение

Точной нижней гранью $(inf\ A)$ ограниченного снизу множества A называют наибольшую нижнюю грань множества A

Пример

$A = (-1; 0)$. Множество верхних граней: $[0; +\infty)$, $sup\ A = 0$

Теорема

У ограниченного сверху множества есть точная верхняя грань

Доказательство

$$\left.\begin{array}{l} A - \text{огр. сверху, } A \neq \varnothing \\ B = \{\text{верхние грани A}\},\ B \neq \varnothing \\ \forall x \in A \ \forall y \in B \ x \leqslant y \end{array}\right] \exists \xi \in \mathbb{R} : \forall x \in A \ \forall y \in B \ x \leqslant \xi \leqslant y$$

1) Из $x \leqslant \xi$ получаем, что ξ - верхняя грань $A \Rightarrow \xi \in B$

2) Так, как $\xi \leqslant y$, то ξ - минимальный элемент из B. $\boxed{\xi = sup\ A}$

Определение

Точной верхней гранью неограниченного сверху множества назовем $+\infty$

3.2.2 Теорема Вейерштрасса

Определение

$\{a_n\}$ - **неубывает**, если $a_{n+1} \geqslant a_n$

Определение

$\{a_n\}$ - **возрастает**, если $a_{n+1} > a_n$

Пример (3-й способ доказательства монотонности)

Доказать, что последовательность $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ строго возрастает

Необходимо доказать: $\forall n\ a_{n+1} > a_n$

$$1 < \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

По неравенству Бернулли $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \geqslant -1\ (1+x)^n \geqslant 1 + xn}$

$$\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) =$$

$$= \left(1 + \underbrace{\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right)}_{\geqslant -1}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \geqslant \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) =$$

$$= \frac{(n^2+n+1)(n+2)}{(n+1)^3} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1$$

Теорема Вейерштрасса

Если $\{a_n\}$ неубывает и ограничена сверху, то она сходится

Доказательство

$\{a_n\} \neq \varnothing$, огр. сверху
$\exists sup\ \{a_n\} = A \in \mathbb{R}$
Хотим доказать: $a_n \underset{n\to\infty}{\to} A$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n > N(\varepsilon)\ \underbrace{|a_n - A|}_{\leqslant 0} < \varepsilon$$

$$A - a_n < \varepsilon$$

$$a_n > A - \varepsilon \Leftrightarrow a_{N(\varepsilon)+1} > A - \varepsilon$$

Тогда докажем:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ a_{N(\varepsilon)+1} > A - \varepsilon$$

Пп

$$\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ a_{N+1} \leqslant A - \varepsilon_0$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leqslant A - \varepsilon_0$$

Получаем, что самая маленькая верхняя граница $= A - \varepsilon_0$, но $sup\ a_n = A$. $\perp$

Контрпример (Если $\{a_n\}$ сходится, то необязательно она неубывает)

$$\boxed{a_n = \frac{\sin n}{2^n} \underset{n\to\infty}{\to} 0}$$

3.3 Число e и постоянная Эйлера

3.3.1 Число e

Определение

$$\exists \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Доказательство

Ранее мы доказали, что данная последовательность неубывает.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{1}{n}+1\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n-k} =$$

$$= 1+\frac{n!}{(n-1)!\,1!}\cdot\frac{1}{n}+\ldots+\frac{n!}{(n-k)!\,k!}\cdot\frac{1}{n^k}+\ldots =$$

$$= 1+1+\ldots+\underbrace{\frac{n}{n}}_{\leqslant 1}\cdot\underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\leqslant 1}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{\leqslant 1}\cdot\frac{1}{k!}+\ldots < 1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$$

Напоминение о телескопических суммах:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1}}$$

Хотим получить нечто похожее, тогда выкинем из каждого знаменателя все множители, кроме последних двух:

$$1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\underbrace{<}_{n\geqslant 4}2+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n} = 2+\left(1-\frac{1}{n}\right) < 3$$

Следствие

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{kn}\right)^n = e^{\frac{1}{k}}$$

Доказательство

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{kn}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{kn}\right)^{nk}\right)^{\frac{1}{k}}$$

$\left(1+\frac{1}{kn}\right)^{nk}$ — подпоследовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Значит, она тоже сходится к e

Получаем:

$$\left(\left(1+\frac{1}{kn}\right)^{nk}\right)^{\frac{1}{k}} = e^{\frac{1}{k}}$$

Следствие

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

Доказательство

$c_n = \left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n$
Мы не умеем доказывать для $\forall a \in \mathbb{R}$:(
Докажем для $\forall a \in \mathbb{Q}$
1. $a = -1$
Хотим:

$$d_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{e} = e^{-1}$$

$$\frac{1}{d_n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} e\cdot 1 = e$$

Получили исходную последовательность со сдвинутой нумерацией
2. $a = \dfrac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$
Хотим:

$$d_n = \left(1+\frac{1}{kn}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\frac{1}{k}}$$

Данный случай также разбирался выше (на семинаре)

$$d_n = \left(1+\frac{1}{kn}\right)^n = \sqrt[k]{\underbrace{\left(1+\frac{1}{kn}\right)^{kn}}_{e_n}}$$

e_n — подпоследовательность $c_n : e_n = c_{k\cdot n} \Rightarrow e_n \xrightarrow[n\to\infty]{} e$

$$\sqrt[k]{\left(1+\frac{1}{kn}\right)^{kn}} \to \sqrt[k]{e} = e^{\frac{1}{k}}$$

3. $a = k, k \in \mathbb{N}$

$$d_n = \left(1+\frac{k}{n}\right)^n = \left(\underbrace{\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{k}}}_{f_n}\right)^k$$

c_n — подпоследовательность $f_n : c_n = f_{k\cdot n} \Rightarrow$ если f_n сходится, то она сходится к e
Докажем, что f_n сходится:
1. Монотонность f_n (Она должна возрастать, так как c_n ее подпоследовательность и она возрастает)

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\left(1+\frac{k}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{k}}}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{k}}} = \left(\left(\frac{(n+1+k)n}{(n+1)(n+k)}\right)^n \frac{n+1+k}{n+1}\right)^{\frac{1}{k}} =$$

$$= \left(\left(\frac{n^2+n+nk}{n^2+nk+n+k} \right)^n \frac{n+1+k}{n+1} \right)^{\frac{1}{k}} = \left(\left(1 - \frac{k}{n^2+nk+n+k} \right)^n \frac{n+1+k}{n+1} \right)^{\frac{1}{k}}$$

$$\left(\left(1 - \frac{k}{n^2+nk+n+k} \right)^n \frac{n+1+k}{n+1} \right)^{\frac{1}{k}} \geqslant \left(\left(1 - \frac{nk}{n^2+nk+n+k} \right) \frac{n+1+k}{n+1} \right)^{\frac{1}{k}} =$$

$$= \left(\frac{(n^2+n+k)(n+1+k)}{(n^2+nk+n+k)(n+1)} \right)^{\frac{1}{k}} = \left(\frac{n^3+n^2+n^2k+n^2+n+nk+nk+k+k^2}{n^3+n^2+n^2k+nk+n^2+n+nk+k} \right)^{\frac{1}{k}} =$$

$$= \left(\frac{n^3+2n^2+n^2k+2nk+n+k+k^2}{n^3+2n^2+n^2k+2nk+n+k} \right)^{\frac{1}{k}}; \frac{n^3+2n^2+n^2k+2nk+n+k+k^2}{n^3+2n^2+n^2k+2nk+n+k} > 1$$

Получили $f_{n+1} > f_n$. f_n строго возрастает. Тогда f_n либо сходится, либо стремится к $+\infty$. У f_n есть сходящаяся подпоследовательность $\Rightarrow$ она не может стремиться к $+\infty$. Значит, она сходится

~~2. Ограниченность~~

Так как f_n сходится, то она сходится к e. Доказано. Возвращаемся к d_n:

$$d_n = \Bigg(\underbrace{\left(1 + \frac{k}{n} \right)^{\frac{n}{k}}}_{f_n} \Bigg)^k \xrightarrow[n\to\infty]{} e^k = e^a$$

4. $a = -k, k \in \mathbb{N}$

$$d_n = \left(1 - \frac{k}{n} \right)^n$$

$$\frac{1}{d_n} = \left(\frac{n}{n-k} \right)^n = \left(1 + \frac{k}{n-k} \right)^{n-k} \left(1 + \frac{k}{n-k} \right)^k \xrightarrow[n\to\infty]{} e^k \cdot 1 = e^k \Rightarrow d_n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-k} = e^a$$

5. $a \in \mathbb{Q}$

Тогда

$$\exists m \in \mathbb{Z},\, k \in \mathbb{N} : a = \frac{m}{k}$$

$$d_n = \left(1 + \frac{a}{n} \right)^n = \left(1 + \frac{m}{kn} \right)^n = \sqrt[k]{\left(1 + \frac{m}{kn} \right)^{kn}}$$

Под корнем подпоследовательность из пункта 3 или 4, она сходится к e^m при $n \to \infty$. Тогда:

$$\sqrt[k]{\left(1 + \frac{m}{kn} \right)^{kn}} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\frac{m}{k}} = e^a$$

3.3.2 Постоянная Эйлера

(Не путать с e, константой Эйлера)

$a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

$\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n \right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \gamma$ — постоянная Эйлера

Определение

$$\exists \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)=\gamma$$

Примечание

В доказательстве будем пользоваться строгим возрастанием $y=\ln x$ и свойствами ln

Доказательство

1. γ_n убывает:
Будем рассматривать разность соседних, так как мы не знаем знаки членов последовательности, а также будет удобно сокращать слагаемые

$$\gamma_{n+1}-\gamma_n=\frac{1}{n+1}+\ln n-\ln(n+1)=\frac{1}{n+1}-(\ln(n+1)-\ln n)=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=\frac{1}{n+1}\left(1-(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{1}{n+1}\left(1-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$$

Вспомогательное доказательство

$$b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}e\cdot 1=e$$

Мы знаем, что $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$ возрастает и сходится к e. Докажем, что b_n убывает. Мы знаем, что все члены b_n положительные, рассмотрим частное:

$$\frac{b_n}{b_{n+1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}=\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}}=\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}=\left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+2}{n+1}}\right)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)=$$

$$=\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)=\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)=$$

По неравенству Бернулли:

$$=\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\geqslant\left(1+\frac{n+1}{n(n+2)}\right)\left(\frac{n+1}{n+2}\right)=$$

$$=\frac{(n^2+3n+1)(n+1)}{n(n+2)^2}=\frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n}>1$$

Вывод: b_n убывает к $e\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}\ b_n>e$

Из вспомогательного доказательства получаем (по монотонности ln):

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>e\Rightarrow\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)>\ln e=1$$

Тогда:

$$\left(1 - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right) < 0$$

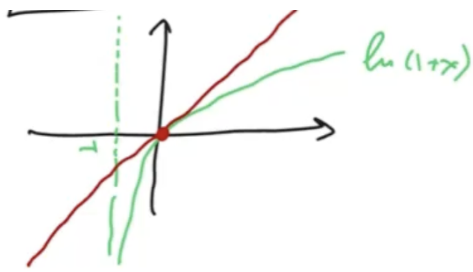
$$\frac{1}{n+1}\left(1 - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right) < 0$$

Получаем: γ_n убывает

2. γ_n ограничена снизу:

Вспомогательное доказательство

Известный факт: $\boxed{\ln(1+x) \leqslant x \ \forall x > -1}$ Докажем его



$$\ln(1+x) \leqslant x \ \forall x > -1$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$n \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant 1$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant 1$$

Возьмем $c_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $c_n < e$. Тогда, по монотонности ln:

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n \geqslant \ln(1+1) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ldots + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln n =$$

$$= \ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln n =$$

$$= \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \ldots + \ln n - \ln(n-1) + \ln(n+1) - \ln n - \ln n =$$

$$= -\ln 1 + \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) > \ln 1 = 0$$

Получили γ_n ограничена снизу 0. По т.Вейерштрасса:

$$\exists \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)=\gamma$$

3.4 Предел рекуррентно заданных последовательностей

Для того чтобы найти пример рекуррентно заданных последовательностей
Шаг 1: Проверить, что последовательность сходится (можно пытаться делать через теорему Вейерштрасса или критерий Коши)
Шаг 2: Найти предел используя арифметику пределов

3.5 Доказательства стандартных сходимостей

$$a_n = q^n,\ q\in\mathbb{R}$$

Доказательство

Не будем рассматривать тривиальные случаи $q = 0; 1; -1$
(1) $q > 1,\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

$$\forall M>0\ \exists N(M)\ \forall n>N(M)\ a_n>M$$
$$q^n > M$$

Используем неравенство Бернулли $(q-1>0)$

$$(1+(q-1))^n > M$$

$$1+n(q-1) > M$$
$$n > \frac{M-1}{q-1}$$

Предъявим номер

$$N(M) = \left|\left[\frac{M-1}{q-1}\right]\right| + 1$$

(2) $0 < q < 1,\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

$$q^n = \left(\frac{1}{1/q}\right)^n = \frac{1}{(1/q)^n},\ \frac{1}{q} > 1$$

$(1/q)^n$ — б.б, тогда $\dfrac{1}{(1/q)^n}$ — б.м
(3) $-1 < q < 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

$$q^n = (-1)^n(|q|)^n,\ |q|\in(0;1)$$

Последовательность $(-1)^n$ ограничена, а $|q|^n$ — бесконечно малая. Следовательно, $q^n \to 0$
(4) $q < -1\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

$$q^n = (-1)^n(|q|)^n$$

Последовательность $(-1)^n$ отделена от нуля, а $|q|^n$ — бесконечно большая. Следовательно, $q^n \to \infty$.

$$a_n = \sqrt[n]{a},\ a > 0$$

Доказательство

Случай $a = 1$ очевиден

(1) $a > 1,\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n > N(\varepsilon)\ |\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$$

$$\sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon$$

$$\sqrt[n]{a} < \varepsilon + 1$$

$$a < (\varepsilon + 1)^n$$

По неравенству Бернулли:

$$1 + n\varepsilon \leqslant (1 + \varepsilon)^n$$

$$a < 1 + n\varepsilon$$

$$n > \frac{a-1}{\varepsilon}$$

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{a-1}{\varepsilon}\right] + 1$$

(2) $0 < a < 1,\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{1/a}}, \qquad \frac{1}{a} > 1$$

$$\sqrt[n]{1/a} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$\frac{1}{1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$a_n = \sqrt[n]{n}$$

Доказательство

Хотим $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n > N(\varepsilon)\ |\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$$

$$|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$$

$$\sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon$$

$$\sqrt[n]{n} < \varepsilon + 1$$

$$n < (1 + \varepsilon)^n$$

По биному Ньютона:

$$(1+\varepsilon)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varepsilon^k > \binom{n}{2} \varepsilon^2$$

$$n < \binom{n}{2} \varepsilon^2$$

$$n < \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon^2$$

$$1 < \frac{n-1}{2} \varepsilon^2$$

$$\frac{2}{\varepsilon^2} < n - 1$$

$$n > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1$$

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{2}{\varepsilon^2} + 1\right]$$

$$a_n = \frac{n^2}{2^n}, \quad + \text{ обобщить результат}$$

Доказательство

По теореме о зажатой последовательности:

$$0 < \frac{n^2}{(1+1)^n} < \frac{n^2}{\binom{n}{3}} = \frac{n^2}{\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Получаем

$$\frac{n^2}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Обобщение:

$$\frac{n^k}{a^n}, a > 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Потому что всегда можно сделать оценку с помощью бинома в знаменателе.
Вывод: показательная функция растет быстрее степенной

$$a_n = \frac{2^n}{n!}, \quad + \text{ обобщить результат}$$

Доказательство

$$\frac{2^n}{n!} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2}{k} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{n}$$

По теореме о зажатой последовательности

$$0 < \frac{2^n}{n!} \leqslant \frac{2}{n} \cdot 2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Вывод: факториал растет быстрее любой показательной

3.6 Подпоследовательности

Определение

Подпоследовательностью последовательности $\{a_n\}$ называется последовательность $\{b_k\}$, такая что $b_k = a_{n_k}$, где n_k - строго возрастающая последовательность номеров ($\mathbb{N}$)

Замечание

$$n_k \geqslant k$$

Пример

$$a_n = \sin\frac{\pi n}{2}$$
$$b_k = a_{4k} = \sin 2\pi k \equiv 0$$
$$c_k = a_{4k-1} = \sin\frac{\pi(4k-1)}{2} \equiv -1$$
$$d_k = a_{2k+1} = \sin\frac{\pi(2k+1)}{2} = (-1)^k$$

3.6.1 Частичные пределы

Определение

Частичный предел - конечный или бесконечный предел подпоследовательности

Примечание

У какой (ограниченной) последовательности бесконечное число частичных пределов?

Определение

Верхний предел последовательности — это точная верхняя грань множества частичных пределов последовательности.
Обозначение: $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$

Определение

Нижний предел последовательности — это точная нижняя грань множества частичных пределов последовательности.
Обозначение: $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$

3.6.2 Предельные точки

Определение

Предельная точка последовательности $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — число $A \in \mathbb{R}$, такое что:

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ в } U_\varepsilon(A) \text{ находится } \infty \text{ число членов } \{a_n\}$$

3.6.3 Свойства частичных пределов

Теорема

Конечный частичный предел $\Leftrightarrow$ предельная точка

Доказательство

($\Rightarrow$):
$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K(\varepsilon)\ \forall k > K(\varepsilon)\ a_{n_k} \in U_\varepsilon(A)$$

($\Leftarrow$):
a — предельная точка
Возьмем $\varepsilon = 1$
$U_1(A)$ Возьмем 1 член, его номер объявим n_1
Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}$
$U_{\frac{1}{2}}(A)$ Возьмем член с номером $> n_1$. Его номер объявим n_2
$\dots$
Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{k}$
$U_{\frac{1}{k}}(A)$ Возьмем член с номером $> n_{k-1}$. Его номер объявим n_k
$\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$
Рассмотрим $\{a_{n_k}\}$:

$$\underbrace{A - \frac{1}{k}}_{\xrightarrow{k\to\infty} A} < \{a_{n_k}\} < \underbrace{A + \frac{1}{k}}_{\xrightarrow{k\to\infty} A}$$

3.6.4 Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема

Если $a_n \underset{n\to\infty}{\to} A$, то $\forall n_k\ b_k = a_{n_k} \underset{n\to\infty}{\to} A$

Доказательство

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n > N(\varepsilon)\ |a_n - A| < \varepsilon$$

Хотим

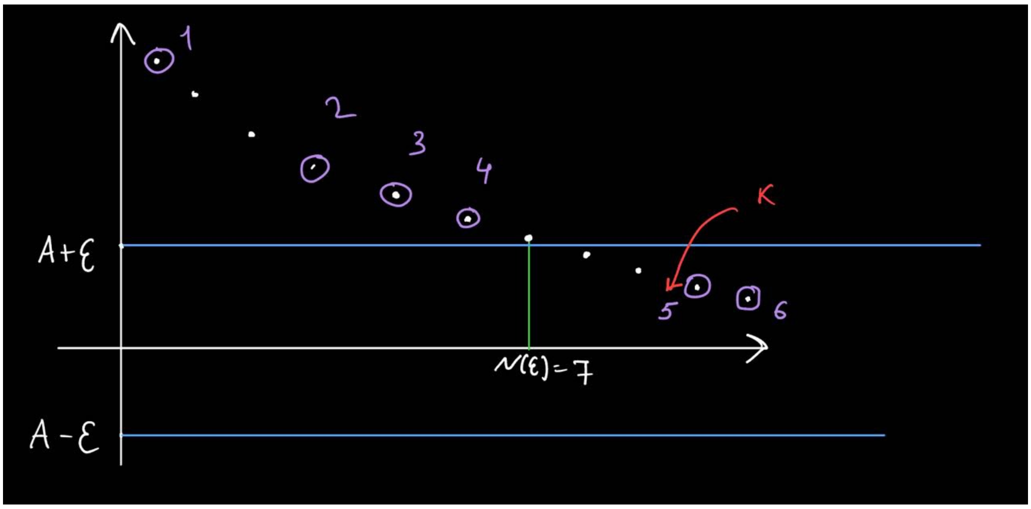
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K(\varepsilon)\ \forall k > k(\varepsilon)\ |a_{n_k} - A| < \varepsilon$$

Возьмем $K(\varepsilon) = N(\varepsilon)$

$$\left.\begin{array}{l} \forall k > N(\varepsilon) \\ \text{т.к } n_k \geqslant k \end{array}\right] \Rightarrow n_k > N(\varepsilon). \text{ Тогда } |a_{n_k} - A| < \varepsilon \text{ истина}$$

Теорема Больцано-Вейерштрасса

Если последовательность ограничена, то у нее есть сходящаяся подпоследовательность



Доказательство

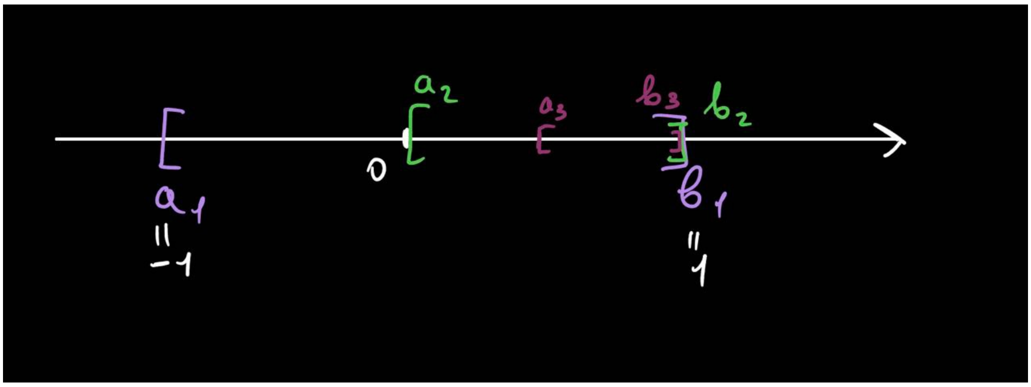
c_n – огр. Докажем что у нее есть сходящаяся подпоследовательность
$A = inf\{c_n\}$
$B = sup\{c_n\}$
$A, B \in \mathbb{R}$
Рассмотрим отрезок $[a_1,b_1] = [A,B]$
Шаг 1: разделим отрезок $[a_1,b_1]$ пополам. В какой-то половине (одной или обеих) лежит бесконечное число членов c_n. Выберем в качестве $[a_2,b_2]$ эту половинку (если в обеих бесконечное число, то любую)
Шаг 2: ...
Получаем некоторую последовательность подотрезков $\{[a_k,b_k]\}_{k\in\mathbb{N}}$
На первом шаге выберем какой-то член $c_n \in [a_1,b_1]$. Его номер возьмем в качестве n_1
$\exists$ член последовательности $\in [a_2,b_2]$ такой, что его номер $> n_1$ (Это следует из того, что на каждом шаге мы выбираем отрезок, содержащий бесконечное число членов). Его возьмем в качестве n_2
...
Таким образом, параллельно строя последовательность отрезков, мы построили подпоследовательность $\{C_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$
Рассмотрим $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Она неубывает, ограничена сверху B.
По т. Вейерштрасса: $\exists \lim\limits_{k\to\infty} a_k = A'$
$\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Она невозрастает, ограничена снизу A.
По т. Вейерштрасса: $\exists \lim\limits_{k\to\infty} b_k = B'$
На каждом шаге мы вдвое уменьшаем длину отрезка. Выпишем общую формулу:

$$b_k - a_k = \frac{B-A}{2^{k-1}}, \text{ для строгости необходимо доказать по индукции}$$

Также по арифметике пределов сходящихся последовательностей b_k, a_k ($b_k \to B'$, $a_k \to A'$), их разность стремится к $B' - A'$ при $k \to \infty$
$\frac{B-A}{2^{k-1}} \to 0,\ k \to \infty \Rightarrow B' - A' = 0 \Rightarrow B' = A'$
Получаем, что у a_k и b_k один и тот же предел
Заметим, что $a_k \leqslant c_{n_k} \leqslant b_k\ \forall k \in \mathbb{N}$. По теореме о сходящейся последовательности: $a_k \to A', b_k \to B', A' = B'$ при $k \to \infty$. Следовательно: $\lim\limits_{k\to\infty} c_{n_k} = A' = B'$

Пример

$c_n = (-1)^n$



3.6.5 Критерий Коши

Определение

Последовательность a_n называется фундаментальной, если:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n, m > N(\varepsilon)\ |a_n - a_m| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > N(\varepsilon)\ \forall k \in \mathbb{N}\ |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$$

Теорема о критерии Коши

Последовательность a_n сходится $\Leftrightarrow$ последовательность a_n фундаментальна

Доказательство

($\Rightarrow$):
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > N_1(\varepsilon)\ |a_n - A| < \varepsilon$$

Хотим:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n, m > N_2(\varepsilon)\ |a_n - a_m| < \varepsilon$$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n, m > N_2(\varepsilon)\ |(a_n - A) + (A - a_m)| < \varepsilon$$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n, m > N_2(\varepsilon)\ \underbrace{|a_n - A|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_m - A|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

Это выполняется $\forall n > N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ и $\forall m > N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$

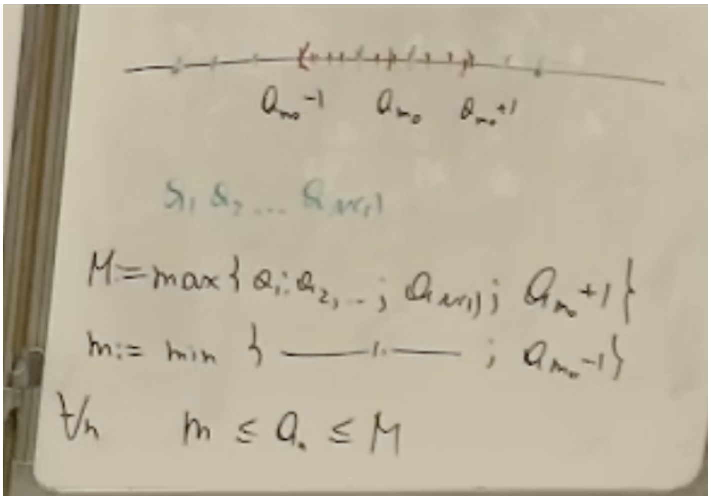
Возьмем $N_2(\varepsilon) = N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$

($\Leftarrow$):
1) Фундаментальные последовательности ограниченны
Возьмем $\varepsilon_0 = 1, N(1)$

$$\forall n, m > N(1)\ |a_n - a_m| < 1$$

Возьмем $m_0 = N(1) + 1$

$$\forall n > N(1), a_n \in U_1(a_{m_0})$$



2) По теореме Больцано-Вейерштрасса:

$$\exists a_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} A$$

Доказать:

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$$

Имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1(\varepsilon) \ \forall n, m > N_1(\varepsilon) \ |a_n - a_m| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K(\varepsilon) \ \forall k > K(\varepsilon) \ |a_{n_k} - A| < \varepsilon$$

Хотим:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2(\varepsilon) \ \forall n > N_2(\varepsilon) \ |a_n - A| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2(\varepsilon) \ \forall n > N_2(\varepsilon) \ \underbrace{|a_n - a_{n_k}|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_{n_k} - A|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

Это выполнено $\forall k > K\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ и $n, n_k > N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$
Так как $n_k \geqslant k$, потребуем $n, k > N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$
Изначально мы прибавили и вычли $a_{n_k}, k > \max\{N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), K\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\}$
k — вспомогательный аргумент, которого изначально не было (требовалось только показать существование). Поэтому при предъявлении $N_2(\varepsilon)$ мы не будем использовать вспомогательное $K(\varepsilon)$
Возьмем $N_2(\varepsilon) = N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$

4 Функции

4.1 Понятия функции и ее предела

4.1.1 Функция. График функции

$f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Определение

Функцией f отображающей множество X во множество Y $(f : X \to Y)$ множество упорядоченных пар $\{(x, y)\}_{x \in X, y \in Y}$, причем каждый элемент X встречается в какой-то паре на первой позиции и только один раз.
В частности, X называется областью определения функции и обозначается D_f
Множество вторых элементов пар обозначается E_f, множество значений функции.
$E_f \subset Y$

Определение

График функции — множество точек на декартовой (координатной) плоскости, координаты которых — пары функции

4.1.2 Инъекция, сюрьекция, биекция

Определение

Функция называется **инъекцией**, если вторые элементы пар не повторяются

Определение

Функция называется **сюрьекцией**, если $E_f = Y$

$$\forall y \in Y \ \exists x \in X \ : f(x) = y$$

Определение

Функция называется **биекцией**, если она инъекция и сюрьекция

4.1.3 Обратимость функции

Определение

Функция $f^{-1} : Y \to X$ называется **обратной** к $f : X \to Y$, если пары $f^{-1} \rightharpoondown$ пары f, где элементы поменяны местами

Примечание

Чтобы $f : X \to Y$ была обратима нужно, чтобы она была биекцией

Пример

$$f(x) = \sin(x), \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ — не обратима}$$

$$f(x) = \sin(x),\ \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to [-1; 1]$$

Тогда обратима

$$f^{-1}(x) = \arcsin(y) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

Далее работаем с числовыми функциями ($X, Y \subset \mathbb{R}$)

4.1.4 Предел функции по Коши

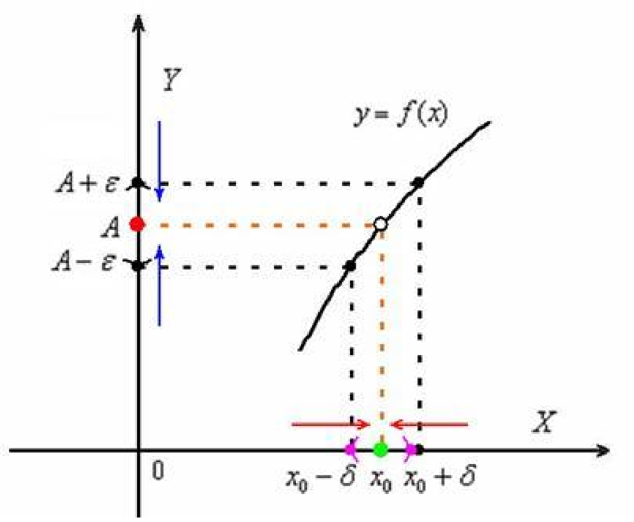
Определение по Коши

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)\ |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)\ \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta\ |f(x) - A| < \varepsilon$$



Пример

$\lim\limits_{x \to 3}(2x - 7) = -1$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)\ \forall x : 0 < |x - 3| < \delta\ |(2x - 7) - (-1)| < \varepsilon$$

$$|2x - 6| < \varepsilon$$

$$2 \cdot |x - 3| < \varepsilon$$

$$|x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Возьмем $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{3}$

4.1.5 Предел функции по Гейне

Определение по Гейне

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, если истинна импликация

$$\forall \{x_n\}_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \\ x_n \neq x_0}} \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} A$$

Пример

$\lim\limits_{x\to 3}(2x-7) = -1$
Возьмем $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 3, x_n \neq 3$
Посмотрим $f(x_n) = \underbrace{\underbrace{2\underbrace{x_n}_{3}}_{6} - 7}_{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$

Теорема

Определения предела функции по Коши и Гейне равносильны

Доказательство

$(\Rightarrow)$:
Имеем:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)\ \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta\ |f(x) - A| < \varepsilon$$

Предположим, что посылка истинна. Тогда также имеем:

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0,\ x_n \neq x_0, \text{ то есть } \forall \omega > 0\ \exists N_1(\omega)\ \forall n > N_1(\omega)\ 0 < |x_n - x_0| < \omega$$

Хотим:

$$f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} A,\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N_2(\varepsilon)\ \forall n > N_2(\varepsilon)\ |f(x_n) - A| < \varepsilon$$

Чтобы $|f(x_n) - A| < \varepsilon$ нужно $0 < |x_n - x_0| < \delta(\varepsilon)$ (Подставили в определение Коши $f(x_n)$ вместо $f(x)$). Поэтому возьмем $\omega = \delta(\varepsilon)$.
Получаем $N_1(\delta(\varepsilon))$ и $\forall n > N_1(\delta(\varepsilon))\ 0 < |x_n - x_0| < \delta(\varepsilon)$ и тогда $|f(x_n) - A| < \varepsilon$
Возьмем $N_2(\varepsilon) = N_1(\delta(\varepsilon))$
$(\Leftarrow)$:
Имеем:

$$\forall \{x_n\}_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \\ x_n \neq x_0}} \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} A$$

Пп т.е верно:

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta = \delta(\varepsilon)\ \exists x(\delta) \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)\ |f(x) - A| \geqslant \varepsilon$$

Для каждого $\delta = \dfrac{1}{n}$ найдем $x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$
Получим

$$\underbrace{x_0 - \frac{1}{n}}_{\xrightarrow{n\to\infty} x_0} < x_n < \underbrace{x_0 + \frac{1}{n}}_{\xrightarrow{n\to\infty} x_0}$$

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0, x_n \neq x_0$$

Значит $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} A$

Но $|f(x) - A| \geqslant \varepsilon$. Получили противоречие (расписать определение и в качестве ε взять ε_0)

Пример

Рассмотрим функцию Дирихле:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Утверждается, что у данной функции нет предела ни в какой точке. Рассмотрим $x_0 = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} D(x)\ \neg\exists$

$x_n = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\ x_n \neq 0;\ f(x_n) \equiv 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$x'_n = \dfrac{\sqrt{2}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, x'_n \neq 0;\ f(x'_n) \equiv 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

4.1.6 Арифметика предела функции

Если $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} A,\ g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} B$, тогда:

1. $f(x) \pm g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} A \pm B$
2. $f(x) \cdot g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} A \cdot B$
3. $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} \dfrac{A}{B}, B \neq 0$
4. $\sqrt[k]{f(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} \sqrt[k]{A}$

Доказательство 1

Возьмем произвольную последовательность $\boxed{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0,\ x_n \neq x_0}$. Тогда по Гейне:

$$f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} A,\ g(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} B$$

По арифметике предела последовательности:

$$\boxed{f(x_n) - g(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} A - B}$$

Тогда по Гейне:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = A - B$$

Примечание

Остальные свойства доказываются аналогично

4.1.7 Теорема о зажатой функции

Теорема

$$\exists\delta_0\ \forall x \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)\ \ : f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = A,\ \text{тогда}\ \lim_{x\to x_0} h(x) = A$$

Доказательство

Возьмем $\boxed{\text{произвольную } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0,\ x_n \neq x_0}$

$$\exists N_0\ \forall n > N_0\ x_0 \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$$

$$\forall n > N_0\ f(x_n) \leqslant h(x_n) \leqslant g(x_n)$$

$$\underbrace{f(x_n)}_{\xrightarrow[]{n\to\infty} A} \leqslant h(x_n) \leqslant \underbrace{g(x_n)}_{\xrightarrow[]{n\to\infty} A} \Rightarrow \boxed{h(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} A} \Rightarrow h(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} A$$

4.1.8 Предел сложной функции

Вернемся к арифметике предела функции. Хотим:

5. ~~Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{y\to A} h(y) = A$, то $\lim\limits_{x\to x_0} h(f(x)) = A$~~. Это неправда

Контрпример:

$$f(x) \equiv 0, x_n \to 0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) \to 0$$

$$h(y) = |sign\ y|,\ sign(y) = \begin{cases} 1, & y > 0 \\ 0, & y = 0 \\ -1, & y < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{y\to 0} h(y) = 1$$

Хотим:

$$h(f(x)) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

Но:

$$h(f(x)) \implies h(0) \implies 0. \text{ Противоречие}$$

Мы всегда смотрели на аргумент из проколотой окрестности, а $f(x)$ попал в центр окрестности

Теорема о пределе сложной функции

Если $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} A$, $h(y) \xrightarrow[y \to A]{} h(A)$, тогда:

$$h(f(x)) \xrightarrow[x \to x_0]{} h(A)$$

Доказательство

$$\forall \omega > 0 \; \exists \delta = \delta(\omega) \; \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \; |f(x) - A| < \omega$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \eta = \eta(\varepsilon) \; \forall y \in \overset{\circ}{U}_\eta(A) \; |h(y) - h(A)| < \varepsilon$$

Добавляем в окрестность η_0, так как неравенство выполнено $(0 < \varepsilon)$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \eta = \eta(\varepsilon) \; \forall y \in U_\eta(A) \; |h(y) - h(A)| < \varepsilon$$

Нужно доказать:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) \; \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_1}(x_0) \; |h(f(x)) - h(A)| < \varepsilon$$

Верно, если $f(x) \in U_{\eta(\varepsilon)}(A)$

$$\exists \delta = \delta(\eta(\varepsilon)) \; \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \; |f(x) - A| < \eta(\varepsilon)$$

Возьмем $\delta_1(\varepsilon) = \delta(\eta(\varepsilon))$

Пример

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x} = ?$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5 = \lim_{x \to 0} \frac{\sin t}{t} \cdot 5 = 1 \cdot 5 = 5$$

Рассмотрим обоснование:

$$h(y) = \frac{\sin y}{y}, \; f(x) = 5x$$

Кажется нужно искать $h(f(x))$ и тогда:

$$\lim_{x \to 0} h(f(x)) \sim h(0) \sim 1$$

В чем кроется замена переменной: если найдем предел $h(y)$, то $h(f(x))$ будет такой же. Но эта теорема неверна (см контрпример выше). Тогда требуются доп ограничения (спойлер: теорема ниже)

Вторая теорема о пределе сложной функции

$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$, $f(x)$ — строго монотонна в какой-то окрестности x_0, $h(y) \xrightarrow[y \to f(x_0)]{} A$

Тогда:

$$h(f(x)) \xrightarrow[x \to x_0]{} A$$

Доказательство

$$\forall \omega > 0\ \exists \delta = \delta(\omega)\ \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)\ |f(x) - f(x_0)| < \omega$$

$$\forall \omega > 0\ \exists \delta = \delta(\omega)\ \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)\ 0 < |f(x) - f(x_0)| < \omega$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta = \eta(\varepsilon)\ \forall y \in \mathring{U}_\eta(f(x_0))\ |h(y) - A| < \varepsilon$$

Нужно:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon)\ \forall y \in \mathring{U}_{\delta_1}(x_0)\ |h(f(x)) - A| < \varepsilon$$

Верно при $f(x) \in \mathring{U}_{\eta(\varepsilon)}(f(x_0)) \Rightarrow 0 < |f(x) - f(x_0)| < \eta(\varepsilon)$. Это верно при $x \in \mathring{U}_{\delta(\eta(\varepsilon))}(x_0)$
Возьмем $\delta_1(\varepsilon) = \delta(\eta(\varepsilon))$

Определение

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0, если:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in U_\delta(x_0)\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\boxed{x \in \mathrm{I} \Rightarrow \sin x < x}$$

Доказательство

...

Пример

$\sin x$ непрерывен на $\mathbb{R}$, т.е $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$
Хотим: $(\sin x - \sin x_0)$ — б.м. Будем рассматривать по модулю, так как неважно, само выражение б.м. или модуль от него. Используя $\boxed{x \in \mathrm{I} \Rightarrow \sin x < x}$:

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2 \cdot \sin \frac{x - x_0}{2} \cdot \cos \frac{x + x_0}{2}\right| \leqslant 2 \cdot \sin \frac{|x - x_0|}{2} < 2 \cdot \frac{|x - x_0|}{2} = |x - x_0|$$

$$|x - x_0| \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

Пример

$\cos x$ непрерывен на $\mathbb{R}$, т.е $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \lim\limits_{x \to x_0} \sin \underbrace{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}_{\frac{\pi}{2} - x_0} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right) = \cos x_0$

Пример

$\operatorname{tg} x$ непрерывен на D_f, т.е $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x_0 \neq \frac{\pi}{2}+\pi n, n \in \mathbb{Z}}} \operatorname{tg} x = \dfrac{\overset{\to \sin x_0}{\sin x}}{\underset{\to \cos x_0 \neq 0}{\cos x}} \to \dfrac{\sin x_0}{\cos x_0} = \operatorname{tg} x_0$

Определение

Односторонним пределом $\lim\limits_{x \to x_{0-}^{+}} f(x) = A$ называется такое число, что:

- $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$

  $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta = \delta(\varepsilon)\, \forall x : 0 < x - x_0 < \delta(\varepsilon)\, |f(x) - A| < \varepsilon$ — **правосторонний предел**

- $\lim\limits_{x \to x_{0-}} f(x) = A$

  $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta = \delta(\varepsilon)\, \forall x : 0 < x_0 - x < \delta(\varepsilon)\, |f(x) - A| < \varepsilon$ — **левосторонний предел**

Замечание

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \exists \lim_{x \to x_{0-}} f(x)$$

Доказательство тривиальное (в обратную сторону нужно взять минимум из двух δ)

4.2 Классификация разрывов

1 рода: $\exists \lim\limits_{x \to x_0 \pm} f(x)$

1.1 — Устранимый (устранимый, значит вы можете переопределить/доопределить функцию в точке, и она станет непрерывной в этой точке)

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$$

Пример

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Функция неопределена в 0, можем доопределить единицей и тогда она станет непрерывной в 0

Пример

$$f(x) = |sign(x)|$$

Функция в 0 разрывна, так как предел есть и равен 1. Можем переопределить функцию в 0 и она станет непрерывной

1.2 — Скачок

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

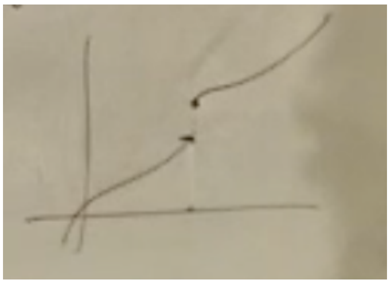


Рис. 1: Скачок на примере функции распределения

Примечание

Доказать, что если функция монотонная, то у нее есть разрывы только типа скачок

2 рода: $\neg\exists \lim\limits_{x\to x_0\pm} f(x)$

Примечание

У таких функций нет предела или они бесконечно большие

2.1 — Полюс

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty, \boxed{x_0 \text{ - полюс}}$$

2.2 — Никак((

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$$

$$\forall M > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in (2; 2+\delta)\ f(x) < -M$$

Определение

$f(x)$ огр. при $x \to x_0$, если

$$\exists C\ \exists\delta_0\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)\ |f(x)| \leqslant C$$

4.3 Асимптоты

4.3.1 Вертикальная

Определение

Прямая $x = a$ называется $\boxed{\text{вертикальной асимптотой}}$, если $\lim\limits_{x\to a^\infty} f(x) = \pm\infty$ или $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$

Пример

$$f(x) = \frac{x+3}{x-2}$$

$\boxed{x = 2 \text{ — вертикальная асимптота}}$ $D_f = \mathbb{R}^{\setminus\{2\}}$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x+3}{x-2} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x+3}{x-2} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

Определение

$f(x)$ ограничена при $x \to x_0$: $\exists \delta_0\ \exists c_0\ \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0)\ |f(x)| \leqslant c_0$

Определение

$f(x)$ отделима от нуля при $x \to x_0$: $\exists \delta_0\ \exists c_0\ \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0)|f(x)| \geqslant c_0$

Пример

$$f(x) = \frac{1}{1-\{x\}}$$

ДОБАВИТЬ РИСУНОК
$\{x\} = x - [x]$ — дробная часть
$[x] - \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leqslant x\}$ — целая часть

4.3.2 Горизонтальная

Определение

$y = b$ — горизонтальная асимптота при $x \to \pm\infty$, если

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$$

4.3.3 Наклонная

Определение

$y = kx + b$ — наклонная асимптота при $x \to \pm\infty$, если

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - f(kx+b)) = 0$$

Примечание

Горизонтальная — частный случай наклонной

Теорема

$y = kx + b$ — наклонная асимптота при $x \to \pm\infty$
$\exists \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k\ \exists \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b$

Доказательство

$\Rightarrow$

$$f(x) - (kx + b) = \alpha(x),\ \alpha(x) \to 0$$
$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha}{x} \to k$$
$$f(x) - kx = b + \alpha(x) \to b$$

$\Leftarrow$

$$f(x) - kx = b + \alpha(x)$$
$$f(x) - kx - b = \alpha(x)$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$$

Пример

$$y = \sqrt{x^2 + 7x + 14}$$

Вертикальных нет, так как $\forall x_0 \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ Наклонная:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 7x + 4}}{x}$$

1)
$$x \to +\infty \sqrt{1 + \frac{7}{x} + \frac{14}{x^2}} \to -1$$

2)
$$x \to +\infty - \sqrt{1 + \frac{7}{x} + \frac{14}{x^2}} \to \frac{7}{2}$$

1)
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 + 7x + 14} - x = \frac{7}{2}$$

2)
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 + 7x + 14} + x = \frac{7}{2}$$

4.4 O — символика

4.4.1 O малое

Определение

$f(x) = \overline{o}(g(x))$ при $x \to x_0$ ($x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$), если

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \text{бесконечно малая при } x \to x_0$$

4.4.2 О большое

Определение

$f(x) = \underline{O}(g(x))$ при $x \to x_0$ $(x_0 \in \overline{\mathbb{R}})$, если

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \text{ограниченная при } x \to x_0$$

Пример

$$x^2 = \overline{o}(x^3) \text{ при } x \to 0 \quad :($$

$$\frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x} \to \infty$$

$$x^2 = \bar{()}$$

Примечание

1. Впредь бесконечно малые будем обозначать $\overline{o}(1)$

$$f(x) - kx - b = \overline{o}(1)$$

$$\overline{o}(1) + \overline{o}(1) = \overline{o}(1)$$

2. Впредь ограниченные будем обозначать $\underline{O}(1)$

$$\overline{o}(1) + \underline{O}(1) = \underline{O}(1)$$

4.5 Замечательные пределы

Теорема

$\cos x$ непрерывен на $\mathbb{R}$

Доказательство

$$\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$$

$$\Updownarrow$$

$$\cos x - \cos x_0 = \overline{o}(1) \text{ при } x \to x_0$$

$$\left| -2 \cdot \sin \frac{x + x_0}{2} \cdot \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \leqslant 2 \cdot 1 \cdot \left| \frac{x - x_0}{2} \right| \to 0$$

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Доказательство

$$S_{\triangle OAB} < S_{\triangle OAB} < S_{\triangle OAC}$$

$$\frac{\sin x}{2} < \pi \cdot \frac{x}{2\pi} < \frac{tg\ x}{2}$$

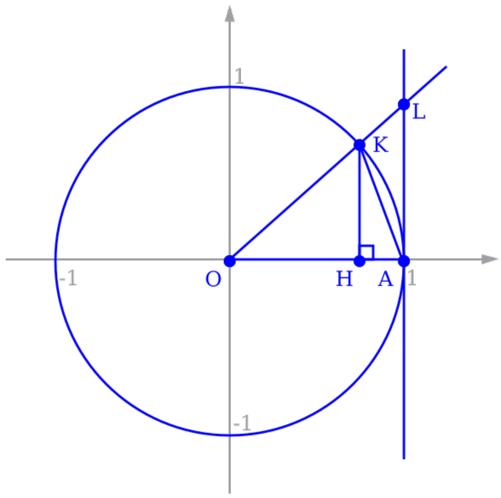


Рис. 2: К доказательству

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e,\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-n} = e$

Примечание

Неопределенность $\dfrac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$; $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, а также $\dfrac{\infty}{\infty}, \infty - \infty$

$x_0 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Доказательство

Хотим:

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t = e,\ \lim\limits_{n\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t = e$

$$\left(1+\frac{1}{[t]+1}\right)^{[t]} \leqslant \left(1+\frac{1}{t}\right)^{[t]} \leqslant \left(1+\frac{1}{[t]}\right)^{[t]+1}, \boxed{t \geqslant 1, t \in \mathbb{R}}$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon) \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - e\right| < \varepsilon$$

$h(t)$ принимают те же значения, что и a_n

Утверждение: $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = e$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M(\varepsilon)\ \forall t > M(\varepsilon) \left|\left(1+\frac{1}{[t]}\right)^{[t]+1} - e\right| < \varepsilon$$

$M(\varepsilon) = N(\varepsilon) + 1$

$$\forall t > M(\varepsilon) \text{ верно } [t] > N(\varepsilon)$$

Аналогично рассмотрим $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n = e$

Аналогично доказывается $\lim\limits_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0^\pm}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Доказательство

Замена $t = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$$

$$\lim_{x\to0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$$

Следствие 1

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x) = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \to \ln e = 1$$

Непрерывность $f(x)$ в т x_0

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim_{x\to x_0} x)$$

$$\lim_{x\to x_0}\ln(x) = \ln(x_0)$$

Следствие 2

$$\lim_{x\to x_0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

Замена $t = e^x - 1$, при $x \to 0$, $t = e^x - 1 \to 0$, $t+1 = e^x, x = \ln(t+1)$

$$\frac{t}{\ln(t+1)} = \frac{1}{\frac{\ln(t+1)}{t} \to 1} \to 1$$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^0}{x-0} = (e^x)'|_{x=0}$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

4.6 Непрерывность функции на отрезке

Определение

Функция непрерывна на $[a;b]$, если

1) $[a;b]\subset D_f$
2) $f(x)$ непрерывна в т. $x_0 \in (a;b)$
3) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

TODO: рисунок

Теорема

Если функция непрерывна на отрезке $[a;b]$, то

1) она ограничена на $[a;b]$

2) достигает $\sup f(x) x \in [a;b] = \sup E_f$ и $\inf f(x) x \in [a;b] = \inf E_f$

$$M = \sup f(x) x \in [a;b] \in \overline{\mathbb{R}}$$
$$m = \inf f(x) x \in [a;b] \in \overline{\mathbb{R}}$$

1) $M \in \mathbb{R}$

2) $\exists x_0 \in [a;b] M = f(x_0)$

Построим $a_n \uparrow M$
$$\forall n \exists x_n f(x_n) \geqslant a_n$$

TODO: рисунок

$$\text{Пп} \exists n_0 \forall x \in [a;b] f(x) < a_{n_0} \ a_{n_0} \text{ — верхняя грань для } E_+ \text{противоречие}$$

Построили $\{x_n\}$:
$$a_n \leqslant f(x_n) \leqslant M$$
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M$$

$x_n \in [a;b] \Rightarrow$ ограничена
$$\exists x_{n_k} : x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} x_0$$
$$\text{Предельный переход в нер-вах } a \leqslant x_{n_k} \leqslant b \Rightarrow x_0 \in [a;b]$$
$$\text{Определение непрерывности по Гейне } f(x_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\to} f(x_0)$$
$$f(x_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\to} M$$

Теорема

Непрерывная на отрезке функция принимает все промежуточные значения, т.е $f(x), [a;b]$
$A = f(x_1), B = f(x_2), A < B \ x_1, x_2 \in [a;b]$
тогда $\forall C \in (A;B) \exists x_0 \in [a;b] : f(x_0) = C$

Следствие $f(x)$ непрерывна на $[a;b] = D_f$, то $E_f = [m;M]$

Доказательство

Построим последовательность влож отрезков $\{[a_k;b_k]\}_{k\in\mathbb{N}}$, будем считать $x_1 < x_2$
$[a_1;b_1] = [x_1;x_2]$
Возьмем середину $x_3 = \dfrac{x1 + x2}{2}$

1. $f(x_3) = C$ чтд

2. $f(x_3) < C \ [a_2;b_2] = [x_3;b_1]$

3. $f(x_3) > C$ $[a_2; b_2] = [a_1; x_3]$

TODO: рисунок

$\{a_k\}_k$ — неубывающая и огр сверху b
$\{b_k\}_k$ — невозрастает и огр снизу a
При $k \to \infty$: $a_k \to \alpha$, $b_k \to \beta$
$b_k - a_k = \dfrac{1}{2^{k-1}}(x_2 - x_1) \underset{k\to\infty}{\to} 0$
Следовательно по теореме Вейерштрасса: $\alpha = \beta$

$$f(a_k) < C \to f(\alpha) \leqslant C$$

Непрерывность f по Гейне в т. $x_0 = \alpha$

$$f(b_k) > C \to f(\beta) \geqslant C$$

$$f(\alpha) = f(\beta) = C$$

4.7 Обратные функции

$f(x) : X \to Y$ $D_f = X$, $E_f \subset Y$
$f^{-1}(y) : E_f \to X$
$f^{-1} : \{(y; x)\}_{x\in X,\ y\in E_f}$
$f(.)$ инъекция
$X, Y \subset \mathbb{R}$

Теорема о достаточном условии обратимости

Если $f(x)$ — строго монотонна, то она обратима

Доказательство

Пусть $f(x)$ возрастает
о/п (от противного):

$$\exists x_1 \text{ и } x_2 : x_1 \neq x_2 \Rightarrow (x_1 > x_2) \vee (x_1 < x_2) \Rightarrow (y_1 > y_2) \vee (y_1 < y_2)$$

Но: $y_1 = y_2, \perp$

Теорема о критерии обратимости непрерывной функции

Если $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то:

$$f(x) \text{ обратима } \Leftrightarrow f(x) \text{ строго монотонна}$$

Доказательство

$\Leftarrow$ Доказано ранее
$\Rightarrow$
о/п (от противного)

$$1)\ \exists x_1 < x_2 < x_3 : y_1 > y_2 < y_3$$

ИЛИ

$$2)\ \exists x_1 < x_2 < x_3 : y_1 < y_2 > y_3$$

3) ИЛИ когда-то равны $\Rightarrow$ тогда функция не инъективна $\Rightarrow$ она не обратима $\perp$

//TODO: рисунок

$$1)\ \exists c : c \in (y_2; y_1),\ c \in (y_2; y_3)$$

По теореме о промежуточных значениях:

$$\exists z_1 \in (x_1, x_2) : f(z_1) = c$$

$$\exists z_2 \in (x_2, x_3) : f(z_2) = c$$

$$z_1 \neq z_2$$

$$\perp$$

Теорема

$$f(x)$$

1) $D_f = [a; b]$

2) $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$

3) $f(x)$ строго монотонна на $[a; b]$, то

$$f^{-1}(y)$$

1) область определения — отрезок с концами $f(a)$ и $f(b)$

2) непрерывна на этом отрезке

3) также строго монотонна на этом отрезке

Доказательство

1) $\Rightarrow$ из теоремы о промежуточных значениях

3) Пусть $f(.)$ возрастает. о/п:

$$\exists y_1 < y_2 \in [f(a); f(b)] : f^{-1}(y_1) \geqslant f^{-1}(y_2)$$

$$x_1 \geqslant x_2 \Rightarrow y_1 \geqslant y_2 \text{ но } y_1 < y_2 \perp$$

Словарик

Без ограничений общности — кажется что мы накладываем ограничение превращая в частный случай, но на самом деле не влияя на справедливость доказательства в целом, так как остальные случаи рассматриваются похожим образом

Упражнение

$$\forall y_1, y_2 \in E_f = D_{f^{-1}}\ (y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2))$$
$$\ldots \overline{y_1 < y_2} \vee f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$
$$\exists y_1{,}y_2 \in E_f\ (y_1 < y_2 \wedge f^{-1}(y_1) \geqslant f^{-1}(y_2))$$

2) $f^{-1}(y)$

//TODO: рисунок

Предположим, что она не непрерывна на отрезке, тогда у нее разрыв типа скачок. Но тогда в множестве значений появилась дыра (или две), чего не может быть (теория из доп листка)

Докажем другим способом:

$$y_0 \in (f(a); f(b))$$
$$\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)\ \forall y \in U_\delta(y_0)\ |f^{-1}(y) - \underbrace{f^{-1}(y_0)}_{x_0 \in (a;b)}| < \varepsilon$$

Без ограничений обзности считаем, что:

$$U_\varepsilon(x_0) \subset (a; b)$$

//TODO

$$x_0 + \varepsilon,\ x_0 - \varepsilon \in (a; b)$$
$$\Downarrow$$
$$y_1 = f(x_0 - \varepsilon),\ y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$$
$$y_1 < y_0 < y_2 \text{ тк } f \text{ возрастает}$$

Возьмем $\delta = \min\{y_0 - y_1; y_2 - y_0\}$

$$\forall y \in U_\delta(y_0) \Rightarrow y_1 < y < y_2 \text{ тк } f^{-1} \text{ возрастает}$$
$$\underset{=x_0-\varepsilon}{f^{-1}(y_1)} < f^{-1}(y) < \underset{=x_0+\varepsilon}{f^{-1}(y_2)}\ |f^{-1}(y) - \underset{\text{todo}}{x_0}| < \varepsilon$$

Следствие

Если $f(x)$ определена, непрерывна и строго монотонна на промежутке

$$(a; b) a{,}b \in \overline{\mathbb{R}} (a; b] a \in \overline{\mathbb{R}}$$

TODO

Без доказательства
TODO!!!

5 Производная

Определение

Производной функции $y = f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ в т. x_0 называется:

$$\lim_{x \to x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}, \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$$V_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Пример

$$y = x^n, n \in \mathbb{N}$$

$$\boxed{a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} = \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + x_0^{n-1})}{(x - x_0)} =$$

$$\boxed{(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, x \in \mathbb{R}}$$

$$= n \cdot x^{n-1}$$

Замечание

Если $\exists f'(x_0), x_0 \in X$, то говорят о производной как о функции $y = f'(x_0)$

5.1 Дифференцируемость функции

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \Leftrightarrow a_n = a + \underset{\text{б.м.}}{\alpha_n}$$

$$\lim_{x \to x_0, x_0 \in \overline{\mathbb{R}}} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + o(1)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = B \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = B + o(1) \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + B(x - x_0) + \underbrace{o(x - x_0)}_{=o(1) \cdot (x - x_0)}$$

$$\vdots$$

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n)$$

Определение

Функция $f(x)$ называется дифференцируемой в т x_0, если:

$$f(x) = f(x_0) + B(x - x_0) + o((x - x_0))$$

Теорема

$f(x)$ дифференцируема в т. $x_0 \Leftrightarrow \exists f'(x_0)$, причем $B = f'(x_0)$

Определение

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в т. x_0 называется линейная функция $B \cdot \Delta x$, такая что $\Delta f = B \cdot \Delta x + o(\Delta x)$

$$df(x_0)(\Delta x) = B \cdot \Delta x$$
$$dx(\Delta x) = 1 \cdot \Delta x$$
$$df(x_0)(\Delta x) = B \cdot dx(\Delta x)$$
$$df(x_0) = B \cdot dx$$
$$B = f'(x_0)$$

Теорема

Если $f(x)$ дифференцируема в т. x_0, то $f(x)$ непрерывна в т. x_0

Доказательство

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_{\to 0} + \underbrace{o(x - x_0)}_{\to 0} \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$$

5.2 Правила подсчета производной

Если $\exists f'(x_0), g'(x_0)$, то:

1) $\exists (f(x) + g(x))'\Big|_{x=x_0}$

2) $\exists (f(x) + g(x))'\Big|_{x=x_0}$ TODO

3) $\exists (f(x) + g(x))'\Big|_{x=x_0}$ TODO

Доказательство 3)

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)\Big|_{x \to x_0} := \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x_0) \overset{\pm f(x_0)(g(x_0))}{-} g(x)f(x_0)}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} =$$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x_0)\frac{(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} - f(x_0)}{g(x)g(x_0)}$$

TODO

4) TODO

5) Если $\exists f'(x_0) \neq 0$ и $f(x)$ строго монотонна в какой-то окрестности x_0, то:

$$\exists (f^{-1}(y))'\Big|_{y_0 = f(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Доказательство 5)

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$$(f^{-1}(y))'\Big|_{y=y_0=f(x_0)} \cdot f'(x_0) = 1$$

$$= \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Пример

$$x = \arcsin y = f^{-1} = h(y)$$

$$h'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)}$$

5.3 Применение производных

$f(x) : X \to Y,\ X, Y \subset \mathbb{R}$

Определение

Функция $f(x)$ возрастает (неубывает) на $E \subset X$, если:

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$$f(x_1) \leqslant f(x_2)$$

Определение

x_0 — т. min $f(x)$, если $\exists \delta_0$:

$$\forall x \in U_{\delta_0}(x_0) : f(x) \geqslant f(x_0)$$

$$\forall x \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) : f(x) > f(x_0)$$

где $f(x_0)$ - локальный min

//TODO: рис

Определение

Точка экстремума — т. min $\vee$ т. max
Экстремум — min $\vee$ max

5.3.1 Необходимое условие локального экстремума

Теорема Ферма

Если x_0 — т. локального экстремума,

$$\text{то} \left[\begin{array}{l} \text{либо } \neg\exists f'(x_0) \\ \text{либо } f'(x_0) = 0 \end{array} \right.$$

Доказательство

x_0 — т. min
Пусть $\exists f'(x_0)$

$$\exists \lim_{x \to x_0^+} \frac{\overset{\geqslant 0}{f(x) - f(x_0)}}{\underset{>0}{x - x_0}} \geqslant 0$$

$$\|$$

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{\overset{\geqslant 0}{f(x) - f(x_0)}}{\underset{<0}{x - x_0}} \leqslant 0$$

$$\Rightarrow = 0$$

5.3.2 Алгоритм нахождения наибольнего и наименьшего значения

непрерывной на $[a;\ b]$ функции $y > f(x)$

$$\begin{matrix} \exists x_1 \in [a;\ b] \\ M > \sup f(x) = f(x_1),\ x \in [a;\ b] \end{matrix} \to \begin{matrix} x_1\text{— т. max} \\ \vee x_1\text{— конец отрезка} \end{matrix}$$

Аналогично m, x_2
1) Находим $x_1, \ldots, x_n : \neg f'(x_i)$ или $f'(x_i) > 0$ называются критическими
2) Утверждение: M и m достигаются в одной из точек : $a, b, x_1, \ldots, x_n$
$\to$ выберем max и min $\{f(a); f(b); f(x_1); \ldots; f(x_n)\}$
$\boxed{\vec{x} \in \mathbb{R}}$

5.3.3 Теорема Ролля

Теорема Ролля

Если $y = f(x)$

$\boxed{1}$ непрерывна на $[a;\ b]$

$\boxed{2}$ дифференцируема на $(a;\ b)$

$\boxed{3}$ $f(a) = f(b)$

тогда $\exists \xi \in (a;\ b) : f'(\xi) = 0$

Доказательство

$M = \sup\limits_{[a;\ b]} f(x)$, $m = \inf\limits_{[a;\ b]} f(x)$

1) $M = m$, тогда $f(x) = \text{const} \Rightarrow \xi = \dfrac{a+b}{2}$

2) $M > m$

$$\begin{matrix} f(x_1) = M \\ \neq \\ f(x_2) = m \end{matrix} \quad \Rightarrow \{x_1;\ x_2\} \neq \{a;\ b\}$$

Пусть $x_1 \neq a, b \Rightarrow x_1$ — т. локального max , $x_1 \in (a;b)$ $f'(x_1) = 0$

5.3.4 Теорема Лагранжа

Теорема Лагранжа

Если $y = f(x)$, $\boxed{1}$ и $\boxed{2}$, тогда:

$$\exists \xi \in (a;b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

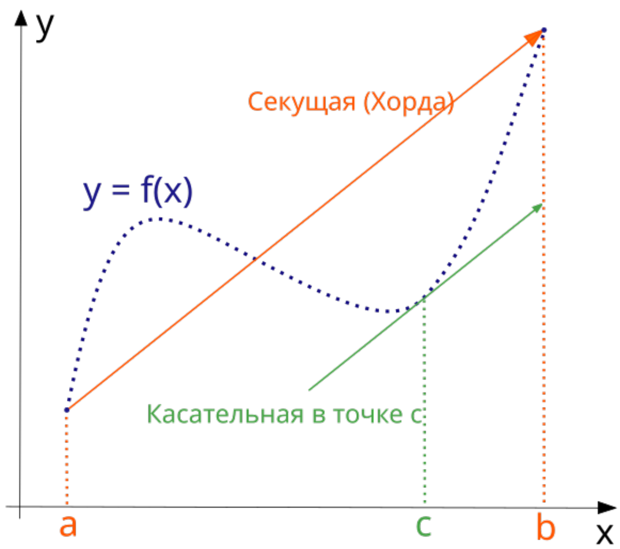
Доказательство

$$F(x) = f(x) - \lambda x \leftarrow \text{ выполнено } \boxed{1} \text{ и } \boxed{2}$$

$$F(a) = F(b) \Leftrightarrow f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b \Leftrightarrow \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

По теореме Ролля для $y = F(x) : \exists \xi \in (a;\ b) : F'(\xi) = 0 = f'(\xi) - \lambda = 0$

$$f'(\xi) = \lambda$$



Следствия:

1) Если $y = f(x)$, $\boxed{1}$ и $\boxed{2}$ и $f'(x) = 0$ на $(a;\ b)$, то $f(x) = const$

Доказательство

о/п: $\exists x_1,\ x_2 \in [a;\ b]$

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

$[x_1;\ x_2]$ — выполнено $\boxed{1}$ и $\boxed{2}$ $\Rightarrow$ верна т. Лагранжа т.е $\exists \xi \in (x_1;\ x_2)$

$$\underbrace{f(x_2) - f(x_1)}_{\neq 0} = \underbrace{f'(\xi)(x_2 - x_1)}_{=0}, \perp$$

2) Если $f(x)$ и $g(x)$ выполнено $\boxed{1}$ и $\boxed{2}$ и $f'(x) = g'(x)$ на $(a;\ b)$, то $f(a) - g(a) = const$ на $[a;\ b]$

5.3.5 Теорема Коши

Теорема Коши

Если $f(x)$ и $g(x)$ выполнено $\boxed{1}$ и $\boxed{2}$ и $g(a) \neq g(b)$, $g'(x) \neq 0$ на $(a;\ b)$, тогда:

$$\exists \xi \in (a;\ b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Доказательство

Рассмотрим $F(x) = f(x) - \lambda g(x)$ — выполнено $\boxed{1}$ и $\boxed{2}$
Найдем $\lambda : F(a) = F(b)$

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

По теореме Ролля:

$$\exists \xi : F'(\xi) = 0$$

$$\parallel$$

$$f'(\xi) - \lambda g'(\xi) = 0$$

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lambda$$

Теорема

$f(x)$ удовлетворяющее $\boxed{1}$ и $\boxed{2}$

$$f'(x) \geqslant 0 \text{ на } (a;\ b) \Leftrightarrow f(x) \text{ неубывает на } [a;\ b]$$

$$f'(x) > 0 \text{ на } (a;\ b) \Rightarrow f(x) \text{ возрастает на } [a;\ b]$$

Доказательство

$\Leftarrow$

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\geqslant 0} \geqslant 0, x_0 \in (a;\ b)$$

$\Rightarrow$

$$\forall x_1, x_2 : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2) \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0$$

$$[x_1;\ x_2] \subset [a;\ b] \text{ выполняется } \boxed{1} \text{ и } \boxed{2} \text{ т.е } \exists \xi \in (x_1;\ x_2)$$

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{\geqslant 0} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \geqslant 0$$

$$\underbrace{f'(\xi)}_{>0} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} > 0$$

5.3.6 Достаточное условие экстремума

Достаточное условие экстремума

Если $\exists \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)$:
на $(x_0 - \delta_0 : x_0)$ $f'(x) \geqslant 0$
на $(x_0 : x_0 + \delta_0)$ $f'(x) \leqslant 0$
непрерывна в т. x_0
тогда x_0 — точка локального max

Доказательство

$$\forall x \in (x_0 + \delta_0;\ x_0)$$

$$f(x) \leqslant f(x_0), [x;\ x_0]$$

6 Bonus: Консультации по доп листкам

Консультации старшего ассистента Вадима Колбасина

6.1 Консультация по 2 листку

Определение

Множество $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$ называется **открытым**, если

$$\forall x\ (x \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists \delta\ (\delta > 0 \wedge \mathcal{U}_\delta(x) \subseteq \mathcal{U}))$$

Определение

Множество $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}$ называется **замкнутым**, если $\mathbb{R} \backslash \mathcal{F}$ открыто

Примечание

Если множество не открыто, то не значит что оно замкнуто

$$(0; 1]$$

$$(-\infty; 0] \cup (1; +\infty)$$

Существуют одновременно открытые и замкнутые множества

Примечание

$$A \backslash B \coloneqq \{x \in A | x \notin B\}$$

Критерий замкнутости

$$\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R} \text{ замкнуто } \Leftrightarrow \forall \{x_n\}(\{x_n\} \subset \mathcal{F} \wedge x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} A \in \mathbb{R} \Rightarrow A \in \mathcal{F})$$

"любая сходящаяся сходится в само множество"

Доказательство

$\Rightarrow$

$$x_n \to A \ \Rightarrow |x_n - A| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

о/п:

$$A \notin F \Rightarrow A \in \setminus F \text{ — открыто}$$

$$\exists \delta > 0 : U_\delta(A) \subseteq \setminus F \Rightarrow \forall x \in F(|x - A| > \delta) \perp$$

$\Leftarrow$

о/п: F не замкнуто $\Rightarrow \setminus F$ не открыто

$$\exists x_0 \in \setminus F \ \forall \delta > 0 \ U_\delta(x_0) \cap F \neq 0$$

$$\delta_0 = 1, \delta_{n+1} = \frac{|x_n - x_0|}{2}, \ x_n \notin \setminus F \Leftrightarrow x_n \in F$$

$$x_n \to x_0, \ x_n \in F, \ x_0 \notin F, \perp$$

Примечание

Почему только $\mathbb{R}$ и $\varnothing$ одновременно открытые и пустые множества?

Замечание

$$(A(\text{open}) \land A(\text{closed})) \Rightarrow (A = \mathbb{R} \lor A = \varnothing)$$

Доказательство

о/п:

$$\exists A(\varnothing \subsetneq A \subsetneq \mathbb{R} \land A(\text{closed}) \land A(\text{closed}))$$

$$\Rightarrow \exists b \notin A \land \exists a \in A$$

Без ограничений общности $b > a$:

$$S = \{x \in [a; b] \mid [a; x] \subseteq A\} \ni A$$

$$c = \sup S, \ \delta = \frac{1}{n}, \ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} c, \ x_n \in A, \ c \in A, \ U_{\delta>0}(c) \subseteq A, \ \perp$$

Определение

Множество $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}$ называется компактом, если

$$\forall \{x_n\}(\{x_n\} \subset \mathcal{K} \Rightarrow \exists \{n_m\}(x_{n_m} \to A \land A \in \mathcal{K}))$$

"из любой последовательности можно выделить подпоследовательность"

Критерий компактности

$\mathcal{K}$ — компактно $\Leftrightarrow \mathcal{K}$ замкнуто $\land$ $\mathcal{K}$ ограничено

Доказательство

$\Rightarrow$

1) $x_n \to \widetilde{A}$

$$x_{n_m} \to A \in K$$
$$x_n \to A \in K$$

2) ограниченность

о/п: $x_n \to \infty$

$$\forall \{n_m\}(x_{n_m} \to \infty), \perp$$

$\Rightarrow \{x_n\} \subset \mathcal{K} \xrightarrow{\text{по теореме Б-В}} x_{n_m} \to A, \mathcal{K}$ — замкнуто $\to A \in \mathcal{K}$

Упражнение

$$\left\{\left[-\frac{1}{2^{2n}}; -\frac{1}{2^{2n+1}}\right]\right\}_{n=1}^{\infty} \bigcup \{0\}$$

Теорема

1) $\bigcup\limits_{\alpha} \mathcal{U}_\alpha = \mathcal{U}$

2) $\bigcup\limits_{k=1}^{n} \mathcal{U}_k = \mathcal{U}$

3) $\bigcap\limits_{\alpha} \mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}$

4) $\bigcap\limits_{k=1}^{n} \mathcal{F}_k = \mathcal{F}$

$$\mathbb{R} \backslash \bigcup_{\alpha} \mathcal{A}_\alpha = \bigcap_{\alpha} (\mathbb{R} \backslash \mathcal{A}_\alpha)$$
$$\mathbb{R} \backslash \bigcap_{\alpha} \mathcal{A}_\alpha = \bigcup_{\alpha} (\mathbb{R} \backslash \mathcal{A}_\alpha)$$

Доказательство

Доказательство устно

Определение

$f : X \to Y, X, Y \subseteq \mathbb{R}$ называется равномерно непрерывной, если:

$$\exists \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \; \forall x_1, x_2 \in X \; (|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$$

Теорема о равномерной непрерывности (Кантора)

Если f непрерывна на компакте, то она равномерно непрерывна на нем

Доказательство

о/п:

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x, y \in \mathcal{X}\ (|x-y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon)$$

$$\delta = \frac{1}{n}, \{x_n\}, \{y_n\}, |x_n - y_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\ \mathcal{K} \text{ — компакт} \Rightarrow x_{n_m} \to A \in \mathcal{K} \text{ И } y_{n_m} \to A \in \mathcal{K}$$

$$\xrightarrow{\text{по Гейне}} f(x_{n_m}) \to f(A),\ f(y_{n_m}) \to f(A), \perp$$

Определение

Функция называется **непрерывной на множестве** если она непрерывна в каждой его предельной точкой

$$\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \cap \mathcal{X}$$

Функция Римана:

$$R(x) = \begin{cases} 0, x \notin \mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{q}, x = \dfrac{p}{q}, (pq) = 1 \end{cases}$$

$$R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\{x_n\} \subset \mathbb{Q},\ x_n \to r \in \mathbb{Q},\ x_n = \frac{p_n}{q_r}(p_n, q_n) = 1 \Rightarrow q_r \to \infty$$

Определение

Отображением $f : X \to X, X$ — полное множество, называется **Липшицевым**, если:

$$\forall x, y \in X\ |f(x) - f(y)| \leqslant \mathcal{L}|x - y|$$

Определение

Отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется **сжимающимся**, если оно Липшицевое и $\mathcal{L} \in [0; 1)$

$$f(x) = x(\text{неподвижная точка})$$

Интересные факты:

$$|\sin x| < |x|$$

$$|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$$

Теорема Банаха

$f : X \to X, X$ — компакт, — сжимающее. Тогда:

1) уравнение $f(x) = x$ имеет единственное решение x^*

2) последовательность $x_{n+1} = f(x_n) \forall x_0$ своим пределом имеет x^*

Доказательство

План доказательства

1) $f(cont)$

2) $x_{n+1} = f(x_n)$ фундаментальная

3) $f(x^*) = x*$

4) x^* единственный

$$s_n = |x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leqslant \mathcal{L}|x_n - x_{n-1}| = \mathcal{L}s_{n-1}$$
$$s_1 \leqslant \mathcal{L}s_0 = |x_1 - x_0|$$
$$\dots$$
$$s_n \leqslant \mathcal{L}^n s_0 = \mathcal{L}^n |x_1 - x_0|$$

$$|x_n - x_m| \leqslant |x_n - x_n - 1| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + \dots + |x_{m-1} - x_m| \leqslant \sum_{k=m}^{m+1} \mathcal{L}^k s_0 \leqslant \mathcal{L}^{n+1} s_0 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=n}^{\infty}$$