# Лекции по математическому анализу (1 курс, 25-26)

github.com/int28t/hse-se-lecture-notes

Эрлих Иван Генрихович

## Содержание

# 1 Информация

## 1.1 Оценка

Тут когда-нибудь появится оценка

# 2 Формальная логика

**Определение**

**Высказывание** - словестное утверждение, про которое можно сказать, истинное оно или ложное.
Обозначение: заглавные латинские буквы: $A, B, C \dots$

**Определение**

**Предикат** - высказывание, зависящее от переменной (при этом не являющееся высказыванием)

**Пример**

$$B(x) : x + 5 = 10$$

## 2.1 Кванторы

- $\forall$ - всеобщности
- $\exists$ - существования

## 2.2 Метод математической индукции

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)} \text{ — истинно, если:}$$

1) $P(1)$ - истинно (база)
2) $\forall n \in \mathbb{N}\ (P(n) \to P(n+1))$ - истинно (шаг)

**Пример**

Требуется доказать

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \geqslant -1 : (1+x)^n \geqslant 1 + xn} \text{ — неравенство Бернулли}$$

Докажем с помощью ММИ

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \underbrace{\forall x \geqslant -1\ \underbrace{(1+x)^n \geqslant 1 + xn}_{Q(n)}}_{P(n)}$$

1) $\forall x \geqslant -1\ (1+x) \geqslant 1 + x$ - истина

2) Предположим $(1+x)^{n_0} \geqslant 1+xn_0$ - истина. Докажем, что $(1+x)^{n_0+1} \geqslant 1+x(n_0+1)$:

$$(1+x)^{n_0+1} \geqslant 1+x(n_0+1)$$

$$(1+x)^{n_0+1} = (1+x)^{n_0}\underbrace{(1+x)}_{\geqslant 0} \geqslant (1+x)(1+xn_0) =$$

$$= 1+x+xn_0+\underbrace{x^2n_0}_{\geqslant 0} \geqslant 1+x+xn_0 = 1+x(n_0+1)$$

## 2.3 Доказательство от противного

Обозначения: $\overline{A}$ - отрицание к $A$

**Пример**

Доказать, что количество простых чисел бесконечно
Пп (предположим противное). Тогда количество простых чисел конечное число:

$$n_1, \dots, n_k$$

Рассмотрим следующее число:

$$m = n_1 \cdot \ldots \cdot n_k + 1,\ m \in \mathbb{N},\ m > n_i\ \forall i = \overline{1,k} \text{ то есть } m \neq n_i\ \forall i = \overline{1,k}$$

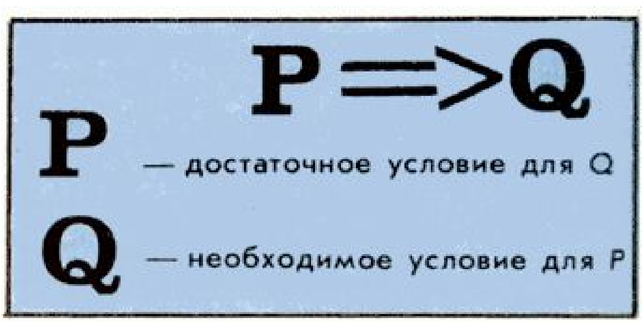
Следовательно, $m$ - составное. Тогда:

$$m = n_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot n_k^{\alpha_k}$$

$$\exists n_j : m \,\vdots\, n_j$$

Но $m = n_1 \cdot \ldots \cdot n_k + 1$ и при делении на $n_i$ $\forall i = \overline{1,k}$ дает остаток 1 $(\perp)$
Утверждение доказано

## 2.4 Достаточность и необходимость



# 3 Комбинаторика и Бином Ньютона

## 3.1 Бином Ньютона

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}}$$

$$C_n^0 a^0 b^{n-0} + C_n^1 a^1 b^{n-1} + \ldots + C_n^n a^n b^{n-n}$$

где $C_n^0, C_n^1, \ldots$ - биномиальные коэффициенты

## 3.2 Комбинаторика

**Определение**

**Перестановка** - упорядоченное множество размера $n$
$\#$ перестановок $= n!$

**Определение**

**Размещения** - упорядоченное подмножество размера $k$ множества размера $n$
$\#$ размещений $= \dfrac{n!}{(n-k)!} = A_n^k$

**Определение**

**Сочетания** - неупорядоченное подмножество размера $k$ множества размера $n$
Одному сочетанию соответствуют $k!$ размещений
$\dfrac{A_n^k}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k$

# 4 Последовательности

**Определение**

**Последовательность** - индексированный набор чисел
$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

## 4.1 Способы задания последовательности

1) Формульный $a_n = n^2 + n - 7$

2) Рекуррентный $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

**Определение**

Последовательность называется **ограниченной**, если

$$\boxed{\exists c\ \forall n\ |a_n| \leqslant c} = P(\{a_n\})$$

И **неограниченной**, если

$$\boxed{\forall c \ \exists n(c) \ |a_{n(c)}| > c}$$

**Пример**

$$a_n = \frac{3n^2 + 5n - 2}{2n^2 + n + 1}$$

$$\left|\frac{3n^2 + 5n - 2}{2n^2 + n + 1}\right| \leqslant \left|\frac{3n^2 + 5n^2}{2n^2}\right| \leqslant \left|\frac{8n^2}{2n^2}\right| \leqslant c$$

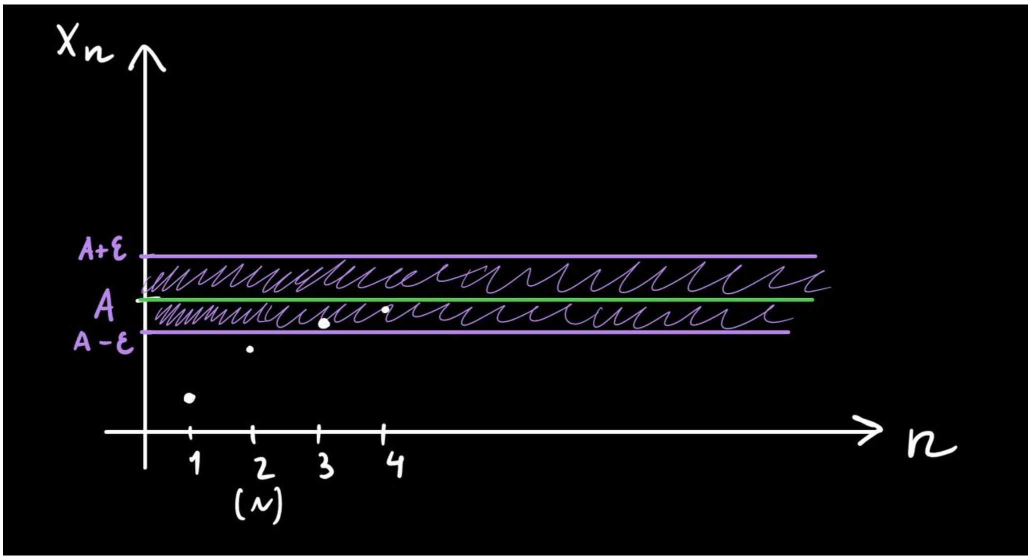
$$4 \leqslant c$$

$$\exists c = \pi^2 \ \forall n \ \left|\frac{3n^2 + 5n - 2}{2n^2 + n + 1}\right| \leqslant c$$

## 4.2 Предел последовательности

**Определение**

Окрестность точки $A$: $U_\varepsilon(A) = (A - \varepsilon; A + \varepsilon)$




**Определение**

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A$, если

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N \ |a_n - A| < \varepsilon}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N \ \ -\varepsilon < a_n - A < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N \ \ A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N \ \ a_n \in U_\varepsilon(A)$$

**Пример**

Доказать, что $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n > N \; \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} + 1 \right\rceil$$

**Определение**

Последовательность называется **сходящейся**, если у нее есть предел

$$\Updownarrow$$

$$\exists a : \lim_{n \to \infty} a_n = A$$

## 4.3 Теорема об ограниченности сходящейся последовательности

**Теорема**

Если последовательность сходящаяся, то она ограничена

**Доказательство**

Рассмотрим $\{a_n\}$

$$\exists A\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ |a_n - A| < \varepsilon$$

$$\exists A\ \exists N(1) \in \mathbb{N}\ \forall n > N(1)\ |a_n - A| < 1 \Leftrightarrow a_n \in U_1(A)$$

Очевидно, что элементов $a_k$, где $k <= N(1)$ конечное число. А для всех элементов $a_n$, $n > N(1)$ выполняется $|a_n - A| < 1$. Тогда можем взять нижнюю границу $min\{a_1, \ldots, a_{N(1)}, A - 1\}$ и верхнюю $max\{a_1, \ldots, a_{N(1)}, A + 1\}$. $\square$

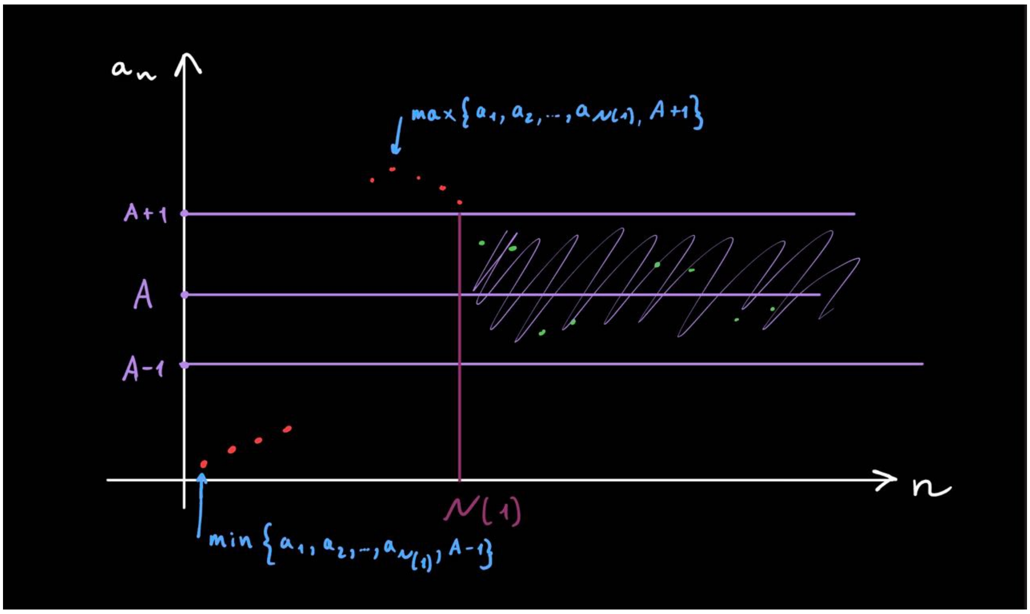



Рис. 1: К доказательству

**Теорема**

У последовательности может быть только 1 предел

**Доказательство**

Пп $\exists$ хотя бы 2 $\lim$ : $A$ и $B$, $A \neq B$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > N_1(\varepsilon)\ a_n \in U_\varepsilon(A)$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > N_2(\varepsilon)\ a_n \in U_\varepsilon(B)$$

Возьмем $\varepsilon_0 = \dfrac{|A - B|}{3}$ и $n_0 = N_1(\varepsilon_0) + N_2(\varepsilon_0)$

Получаем

$$a_{n_0} \in U_{\varepsilon_0}(A),\ a_{n_0} \in U_{\varepsilon_0}(B)$$

Но

$$U_{\varepsilon_0}(A) \cap U_{\varepsilon_0}(B) = \varnothing$$

Противоречие $\square$

## 4.4 Арифметика предела

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, то

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$ $(b_n \neq 0; B \neq 0)$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{A}$ $(a_n \geqslant 0; A \geqslant 0)$

**Доказательство свойства 1**

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > N_1(\varepsilon)\ |a_n - A| < \varepsilon$$
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > N_2(\varepsilon)\ |b_n - B| < \varepsilon$$

Хотим

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_3(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > N_3(\varepsilon)\ |(a_n + b_n) - (A + B)| < \varepsilon$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_3(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > N_3(\varepsilon)\ |(a_n - A) + (b_n - B)| < \varepsilon$$
$$\Uparrow$$
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_3(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > N_3(\varepsilon)\ \underbrace{|a_n - A|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|b_n - B|}_{<\frac{2\varepsilon}{3}} < \varepsilon$$
$$\forall n > N_1\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)\ \forall n > N_2\left(\frac{2\varepsilon}{3}\right)$$
$$N_3(\varepsilon) = max\left\{N_1\left(\frac{\varepsilon}{3}\right), N_2\left(\frac{2\varepsilon}{3}\right)\right\}$$

$\square$

Примечание: Доказательства свойств 2 и 3, рассмотренные далее, были выведены после доказательства теоремы о произведении б.м. и огр. последовательностей

**Доказательство свойства 2**

Хотим

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$$

По теореме о связи предела с бесконечно малой последовательностью

$$\alpha_n = (a_n - A) \text{ — б.м.}, \ \beta_n = (b_n - B) \text{ — б.м.}$$

Хотим

$$(a_n b_n - AB) \text{ — б.м.}$$
$$(a_n b_n - AB) = (\alpha_n + A)(\beta_n + B) - AB = \alpha_n\beta_n + \alpha_n B + A\beta_n + AB - AB =$$

$$= \underbrace{\alpha_n \beta_n}_{\text{б.м.}} + \underbrace{\alpha_n B}_{\text{б.м.}} + \underbrace{\underbrace{A}_{\text{огр}} \underbrace{\beta_n}_{\text{б.м.}}}_{\text{б.м.}} = \text{б.м.} + \text{б.м.} + \text{б.м.} = \text{б.м.}$$

$\square$

**Доказательство свойства 3**

Хотим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B} \ (b_n \neq 0; B \neq 0)$$

По теореме о связи предела с бесконечно малой последовательностью

$$\alpha_n = (a_n - A) \text{ — б.м.}, \ \beta_n = (b_n - B) \text{ — б.м.}$$

Хотим

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} \text{ — б.м.}$$

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} = \frac{\alpha_n + A}{\beta_n + B} - \frac{A}{B} = \frac{(\alpha_n + A)B - A(\beta_n + B)}{(\beta_n + B)B} =$$

$$= \frac{(\alpha_n + A)B - A(\beta_n + B)}{(\beta_n + B)B} = \frac{\alpha_n B + AB - A\beta_n - AB}{b_n B} = \frac{\alpha_n B - A\beta_n}{b_n B} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{b_n} \cdot \frac{1}{B}}_{\text{огр} \cdot \text{огр}} \cdot \underbrace{(\alpha_n B - A\beta_n)}_{\text{б.м}} = \text{б.м.}$$

$\square$

## 4.5 Бесконечно большая и бесконечно малая последовательности

**Определение**

**Бесконечно малой** (б.м.) последовательностью называют последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такую что, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

**Определение**

**Бесконечно большой** (б.б.) последовательностью называют последовательность $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такую что, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$

$$\forall M > 0 \ \exists N(M) \in \mathbb{N} \ \forall n > N(M) \ |b_n| > M$$

$$b_n > M \ (+\infty)$$

$$b_n < M \ (-\infty)$$

**Теорема**

$$\frac{1}{\text{б.б.}} = \text{б.м.}$$

**Доказательство**

Пусть $b_n$ - б.б. Тогда

$$\forall M > 0\ \exists N_1(M) \in \mathbb{N}\ \forall n > N_1(M)\ |b_n| > M$$

Хотим $a_n = \dfrac{1}{b_n}$ - б.м.:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2(\varepsilon)\ \forall n > N_2(\varepsilon)\ |a_n| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{b_n}\right| < \varepsilon$$

$$|b_n| > \frac{1}{\varepsilon}$$

Возьмем $N_2(\varepsilon) = N_1\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right) + 1$ $\square$

**Теорема**

б.м. $\cdot$ огр. $=$ б.м.

**Доказательство**

Хотим $a_n \cdot b_n = c_n$, где $a_n, c_n$ - б.м., $b_n$ - огр.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > N_1(\varepsilon)\ |a_n| < \varepsilon$$
$$\exists c\ \forall n \in \mathbb{N}\ |b_n| \leqslant c$$

Хотим:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > N_2(\varepsilon)\ |a_n \cdot b_n| < \varepsilon$$

$$\Uparrow$$

$$|a_n| \cdot |b_n| < \varepsilon$$

$$|a_n| \cdot c < \varepsilon$$

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{c}$$

Возьмем $N_2(\varepsilon) = N_1\left(\dfrac{\varepsilon}{c}\right)$ $\square$

**Пример**

б.б. $+$ б.б.
Мы точно не можем сказать, чем будет являться эта сумма. Например $n + (-n) = 0$ и $n + n = 2n$

**Пример**

б.б. $+$ огр. $=$ б.б.
Покажем, что это так

Хотим: $b_n + c_n = u_n$ соответственно. Тогда:

$$\forall M > 0\ \exists N(M) \in \mathbb{N}\ \forall n > N(M)\ |b_n| > M$$

$$\exists C > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ |c_n| \leqslant C$$

Хотим:

$$\forall K > 0\ \exists N_2(K) \in \mathbb{N}\ \forall n > N_2(K)\ |b_n + c_n| > K$$

Так, как $|x+y| \geqslant |x| - |y|$:

$$|b_n| - |c_n| > K$$

$$|b_n| - C > K$$

$$|b_n| > K + C$$

Возьмем $N_2(K) = N(K+C)$

**Теорема**

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow (a_n - A) = \alpha_n \text{ - бесконечно малая}$$

**Доказательство**

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > N_1(\varepsilon)\ |a_n - A| < \varepsilon$$

Хотим

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > N_2(\varepsilon)\ |(a_n - A) - 0| < \varepsilon$$

$$N_2(\varepsilon) = N_1(\varepsilon)$$

□

**Примечание**

Теперь можно спокойно доказать свойство 2) из арифметики пределов

**Примечание**

Произведение бесконечно малых - бесконечно малая последовательность. Так как можно представить одну из них как ограниченную и использовать теорему выше

**Определение**

Назовем последовательность $d_n$ **отделимой от нуля**, если:

$$\exists \delta > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ |d_n| \geqslant \delta$$

**Пример**

$(-1)^n$

**Теорема**

$$\frac{1}{\text{огр}} = \text{отделима от нуля}, \ \frac{1}{\text{отделима от нуля}} = \text{огр}$$

**Доказательство**

$$\exists \delta > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ |d_n| \geqslant \delta$$

$$u_n = \frac{1}{d_n}, \ \exists c > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ |u_n| \leqslant c$$

$$\Updownarrow$$

$$\left|\frac{1}{d_n}\right| \leqslant c$$

$$\Updownarrow$$

$$|d_n| \geqslant \frac{1}{c}$$

Возьмем $c = \dfrac{1}{\delta}$. Тогда $|d_n| \geqslant \delta$ верно $\forall n \in \mathbb{N}$ $\square$

**Теорема**

Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = U; \ u_n, U \neq 0$, то $u_n$ отделима от нуля

**Доказательство**

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n > N(\varepsilon) \ |u_n - U| < \varepsilon$$

Хотим

$$\exists \delta > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ |u_n| \geqslant \delta$$

Возьмем $\varepsilon_0 = \dfrac{|U|}{2}$

$$\exists N_0 = N\left(\frac{|U|}{2}\right) = N(\varepsilon_0)$$

$$\forall n > N_0 \ u_n \in U_{\frac{|U|}{2}}(U)$$

Очевидно, что существует конечное число $u_k$, $k \leqslant N(\varepsilon_0)$, причем $u_k \neq 0$

Возьмем $\delta = min\{|u_1|, |u_2|, \ldots, \dfrac{|U|}{2}\}$ $\square$

## 4.6 Предельный переход в неравенствах

**Теорема**

Если $\exists N_0 \ \forall n > N_0 \ a_n > b_n$ и $a_n \underset{n\to\infty}{\to} A$ и $b_n \underset{n\to\infty}{\to} B$, то $A \geqslant B$

**Доказательство**

Пп $A < B$. Возьмем $\varepsilon_0 = \dfrac{B-A}{2}$

$$\exists N_1(\varepsilon_0)\ \forall n > N_1(\varepsilon_0)\ a_n \in U_{\varepsilon_0}(A)$$

$$\exists N_2(\varepsilon_0)\ \forall n > N_2(\varepsilon_0)\ b_n \in U_{\varepsilon_0}(B)$$

Возьмем $n_0 = N_1(\varepsilon_0) + N_2(\varepsilon_0) + N_0$ Тогда по условию $a_{n_0} > b_{n_0}$, но также $a_{n_0} < b_{n_0}$ (так как окрестность $a$ по предположению левее окрестности $b$). Получили противоречие $\square$

## 4.7 Теорема о зажатой последовательности

**Теорема о зажатой последовательности**

Если $\exists N_0\ \forall n > N_0\ a_n \leqslant c_n \leqslant d_n$, а также $a_n \underset{n\to\infty}{\to} A$ и $d_n \underset{n\to\infty}{\to} A$, то $c_n \underset{n\to\infty}{\to} A$

**Доказательство**

$$a_n \underset{n\to\infty}{\to} A;\ \forall\varepsilon > 0\ \exists N_1(\varepsilon)\ \forall n > N_1(\varepsilon)\ A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$
$$d_n \underset{n\to\infty}{\to} A;\ \forall\varepsilon > 0\ \exists N_2(\varepsilon)\ \forall n > N_2(\varepsilon)\ A - \varepsilon < d_n < A + \varepsilon$$

Хотим

$$c_n \underset{n\to\infty}{\to} A;\ \forall\varepsilon > 0\ \exists N_3(\varepsilon)\ \forall n > N_3(\varepsilon)\ A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon$$

Получаем

$$\underbrace{A - \varepsilon <}_{\forall n > N_1(\varepsilon)} a_n \underbrace{\leqslant c_n \leqslant}_{\forall n > N_0} d_n \underbrace{< A + \varepsilon}_{\forall n > N_2(\varepsilon)}$$

Возьмем $N_3(\varepsilon) = max\{N_1(\varepsilon),\ N_2(\varepsilon),\ N_0\}$ $\square$

## 4.8 Список хороших пределов

1. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0,\ |q| < 1$
   $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty,\ |q| > 1$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\ a > 0$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^a}{b^n} = 0$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b^n}{n!} = 0$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n^a} = 0,\ a > 0$

# 5 Действительные числа

**Определение**

Множество **действительных чисел** - это четверка $(\mathbb{R}; +; \times; \leqslant)$ (множество, 2 операции, 1 отношение)

**Примечание**

Отличие операции от отношения. Для того чтобы задать операцию, нужно поставить в соответствие для каждой пары чисел число ($\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). В отношении для каждой пары чисел нужно поставить в соответствие 0 или 1 ($\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \{0, 1\}$).

## 5.1 Аксиома непрерывности

$A, B \subset \mathbb{R}$

1) $A, B \neq \varnothing$

2) $\forall x \in A \ \forall y \in B \ x \leqslant y$

Тогда $\exists \xi \in \mathbb{R} : \forall x \in A \ \forall y \in B \ x \leqslant \xi \leqslant y$

**Определение**

**Верхней гранью** множества $A \subset \mathbb{R}$ называется число $C \in \mathbb{R}$, такое что $\forall x \in A \ x \leqslant C$

**Определение**

**Точной верхней гранью** ($sup \ A$) ограниченного сверху множества $A$ называют наименьшую верхнюю грань множества $A$

**Определение**

**Нижней гранью** множества $A \subset \mathbb{R}$ называется число $D \in \mathbb{R}$, такое что $\forall x \in A \ x \geqslant D$

**Определение**

**Точной нижней гранью** ($inf \ A$) ограниченного снизу множества $A$ называют наибольшую нижнюю грань множества $A$

**Пример**

$A = (-1; 0)$. Множество верхних граней: $[0; +\infty)$, $sup \ A = 0$

**Теорема**

У ограниченного сверху множества есть точная верхняя грань

**Доказательство**

$$\left.\begin{array}{l} A - \text{огр. сверху}, \ A \neq \varnothing \\ B = \{\text{верхние грани A}\}, \ B \neq \varnothing \\ \forall x \in A \ \forall y \in B \ x \leqslant y \end{array}\right] \exists \xi \in \mathbb{R} : \forall x \in A \ \forall y \in B \ x \leqslant \xi \leqslant y$$

1) Из $x \leqslant \xi$ получаем, что $\xi$ - верхняя грань $A \Rightarrow \xi \in B$

2) Так, как $\xi \leqslant y$, то $\xi$ - минимальный элемент из $B$. $\boxed{\xi = sup\ A}$

$\square$

**Определение**

**Точной верхней гранью неограниченного сверху множества** назовем $+\infty$

## 5.2 Теорема Вейерштрасса

**Определение**

$\{a_n\}$ - **неубывает**, если $a_{n+1} \geqslant a_n$

**Определение**

$\{a_n\}$ - **возрастает**, если $a_{n+1} > a_n$

**Пример (3-й способ доказательства монотонности)**

Доказать, что последовательность $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ строго возрастает

Необходимо доказать: $\forall n\ a_{n+1} > a_n$

$$1 < \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

По неравенству Бернулли $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \geqslant -1\ (1+x)^n \geqslant 1 + xn}$

$$\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) =$$

$$= \left(1 + \underbrace{\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right)}_{\geqslant -1}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \geqslant \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) =$$

$$= \frac{(n^2+n+1)(n+2)}{(n+1)^3} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1$$

**Теорема Вейерштрасса**

Если $\{a_n\}$ неубывает и ограничена сверху, то она сходится

**Доказательство**

$\{a_n\} = A \neq \varnothing$, огр. сверху
$\exists sup\ A = a \in \mathbb{R}$
Хотим доказать: $a_n \underset{n\to\infty}{\to} A$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n > N(\varepsilon)\ \underbrace{|a_n - A|}_{\leqslant 0} < \varepsilon$$

$$A - a_n < \varepsilon$$

$$a_n > A - \varepsilon \Leftrightarrow a_{N(\varepsilon)+1} > A - \varepsilon$$

Тогда докажем:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ a_{N(\varepsilon)+1} > A - \varepsilon$$

Пп

$$\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ a_{N+1} \leqslant A - \varepsilon_0$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leqslant A - \varepsilon_0$$

Получаем, что самая маленькая верхняя граница $= A - \varepsilon_0$, но $sup\ a_n = A$. $\perp$ $\square$

**Контрпример** (Если $\{a_n\}$ сходится, то необязательно она неубывает)

$$\boxed{a_n = \frac{\sin n}{2^n} \underset{n\to\infty}{\to} 0}$$

## 5.3 Второй замечательный предел

**Теорема о втором замечательном пределе**

$$\exists \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

**Доказательство**

Ранее мы доказали, что данная последовательность неубывает.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{1}{n} + 1\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n-k} =$$

$$= 1 + \frac{n!}{(n-1)!\ 1!} \cdot \frac{1}{n} + \ldots + \frac{n!}{(n-k)!\ k!} \cdot \frac{1}{n^k} + \ldots =$$

$$= 1 + 1 + \ldots + \underbrace{\frac{n}{n}}_{\leqslant 1} \cdot \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\leqslant 1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{\leqslant 1} \cdot \frac{1}{k!} + \ldots < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

Напоминение о телескопических суммах:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}}$$

Хотим получить нечто похожее, тогда выкинем из каждого знаменателя все множители, кроме последних двух:

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \underbrace{<}_{n \geqslant 4} 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) < 3$$

□

**Следствие**

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{kn}\right)^n = e^{\frac{1}{k}}$$

**Доказательство**

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{kn}\right)^n = \lim_{n \to \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{kn}\right)^{nk}\right)^{\frac{1}{k}}$$

$\left(1 + \frac{1}{kn}\right)^{nk}$ — подпоследовательность $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Значит, она тоже сходится к $e$

Получаем:

$$\left(\left(1 + \frac{1}{kn}\right)^{nk}\right)^{\frac{1}{k}} = e^{\frac{1}{k}}$$

□

## 5.4 Предел рекуррентно заданных последовательностей

Для того чтобы найти пример рекуррентно заданных последовательностей

**Шаг 1:** Проверить, что последовательность сходится (можно пытаться делать через теорему Вейерштрасса или критерий Коши)

**Шаг 2:** Найти предел используя арифметику пределов

## 5.5 Постоянная Эйлера

# 6 Подпоследовательности

**Определение**

**Подпоследовательностью** последовательности $\{a_n\}$ называется последовательность $\{b_k\}$, такая что $b_k = a_{n_k}$, где $n_k$ - строго возрастающая последовательность номеров ($\mathbb{N}$)

**Замечание**

$$n_k \geqslant k$$

**Пример**

$a_n = \sin\frac{\pi n}{2}$
$b_k = a_{4k} = \sin 2\pi k \equiv 0$
$c_k = a_{4k-1} = \sin\frac{\pi(4k-1)}{2} \equiv -1$
$d_k = a_{2k+1} = \sin\frac{\pi(2k+1)}{2} = (-1)^k$

## 6.1 Частичные пределы

**Определение**

**Частичный предел последовательности -** предел подпоследовательности

**Примечание**

У какой (ограниченной) последовательности бесконечное число частичных пределов?

## 6.2 Предельные точки

## 6.3 Свойства частичных пределов

## 6.4 Теорема Больцано-Вейерштрасса

**Теорема**

Если $a_n \underset{n\to\infty}{\to} A$, то $\forall n_k\ b_k = a_{n_k} \underset{n\to\infty}{\to} A$

**Доказательство**

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n > N(\varepsilon)\ |a_n - A| < \varepsilon$$

Хотим

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists K(\varepsilon)\ \forall k > k(\varepsilon)\ |a_{n_k} - A| < \varepsilon$$

Возьмем $K(\varepsilon) = N(\varepsilon)$

$$\left.\begin{array}{l}\forall k > N(\varepsilon)\\ \text{т.к } n_k \geqslant k\end{array}\right] \Rightarrow n_k > N(\varepsilon).\ \text{Тогда } |a_{n_k} - A| < \varepsilon \text{ истина}$$

□

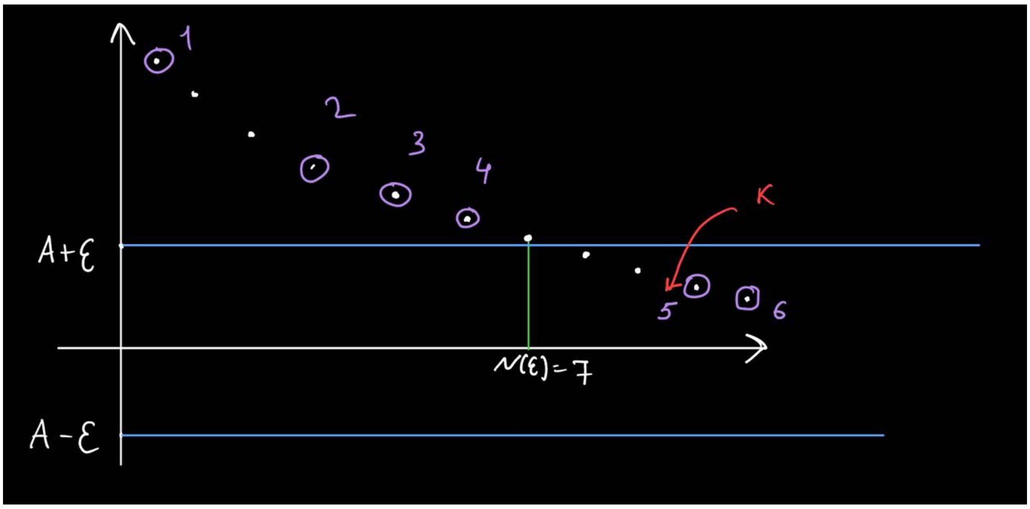



Рис. 2: К теореме

**Теорема Больцано-Вейерштрасса**

Если последовательность ограничена, то у нее есть сходящаяся подпоследовательность

**Доказательство**

$c_n$ – огр. Докажем что у нее есть сходящаяся подпоследовательность
$A = inf\{c_n\}$
$B = sup\{c_n\}$
$A, B \in \mathbb{R}$
Рассмотрим отрезок $[a_1,b_1] = [A,B]$
**Шаг 1:** разделим отрезок $[a_1,b_1]$ пополам. В какой-то половине (одной или обеих) лежит бесконечное число членов $c_n$. Выберем в качестве $[a_2,b_2]$ эту половинку (если в обеих бесконечное число, то любую)
**Шаг 2:** ...

Получаем некоторую последовательность подотрезков $\{[a_k,b_k]\}_{k\in\mathbb{N}}$
На первом шаге выберем какой-то член $c_n \in [a_1,b_1]$. Его номер возьмем в качестве $n_1$
$\exists$ член последовательности $\in [a_2,b_2]$ такой, что его номер $> n_1$ (Это следует из того, что на каждом шаге мы выбираем отрезок, содержащий бесконечное число членов).
Его возьмем в качестве $n_2$
...
Таким образом, параллельно строя последовательность отрезков, мы построили подпоследовательность $\{C_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$
Рассмотрим $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Она неубывает, ограничена сверху $B$.
По т. Вейерштрасса: $\exists \lim\limits_{k\to\infty} a_k = A'$
$\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Она невозрастает, ограничена снизу $A$.
По т. Вейерштрасса: $\exists \lim\limits_{k\to\infty} b_k = B'$
На каждом шаге мы вдвое уменьшаем длину отрезка. Выпишем общую формулу:

$$b_k - a_k = \frac{B-A}{2^{k-1}}, \text{ для строгости необходимо доказать по индукции}$$

Также по арифметике пределов сходящихся последовательностей $b_k$, $a_k$ ($b_k \to B'$, $a_k \to A'$), их разность стремится к $B' - A'$ при $k \to \infty$
$\frac{B-A}{2^{k-1}} \to 0,\ k \to \infty \Rightarrow B' - A' = 0 \Rightarrow B' = A'$
Получаем, что у $a_k$ и $b_k$ один и тот же предел
Заметим, что $a_k \leqslant c_{n_k} \leqslant b_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$. По теореме о сходящейся последовательности:
$a_k \to A', b_k \to B', A' = B'$ при $k \to \infty$. Следовательно: $\lim\limits_{k\to\infty} c_{n_k} = A' = B'$ $\square$

**Пример**

$c_n = (-1)^n$

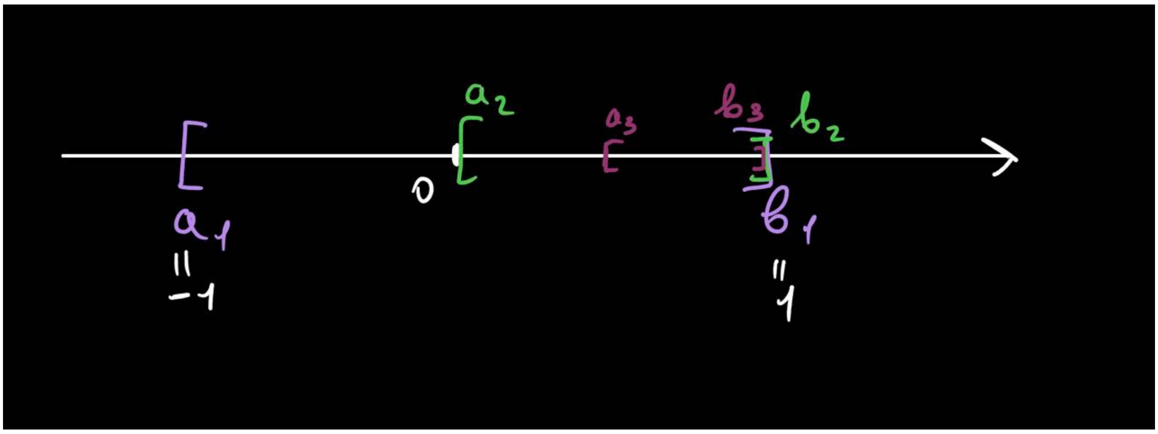



Рис. 3: К примеру

## 6.5 Критерий Коши

**Определение**

Последовательность $a_n$ называется фундаментальной, если:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n, m > N(\varepsilon)\ |a_n - a_m| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > N(\varepsilon)\ \forall k \in \mathbb{N}\ |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$$

**Теорема о критерии Коши**

Последовательность $a_n$ сходится $\Leftrightarrow$ последовательность $a_n$ фундаментальна

**Доказательство**

**($\Rightarrow$):**
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > N_1(\varepsilon)\ |a_n - A| < \varepsilon$$

Хотим:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n, m > N_2(\varepsilon)\ |a_n - a_m| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n, m > N_2(\varepsilon)\ |(a_n - A) + (A - a_m)| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n, m > N_2(\varepsilon)\ \underbrace{|a_n - A|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_m - A|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

Это выполняется $\forall n > N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ и $\forall m > N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$
Возьмем $N_2(\varepsilon) = N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$
**($\Leftarrow$):**
1) Фундаментальные последовательности ограниченны
Возьмем $\varepsilon_0 = 1, N(1)$

$$\forall n, m > N(1)\ |a_n - a_m| < 1$$

Возьмем $m_0 = N(1) + 1$

$$\forall n > N(1), a_n \in U_1(a_{m_0})$$

$\square$

//TODO рисунок к 1 части

2) По теореме Больцано-Вейерштрасса:

$$\exists a_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} A$$

Доказать:

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$$

Имеем:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1(\varepsilon)\ \forall n, m > N_1(\varepsilon)\ |a_n - a_m| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K(\varepsilon)\ \forall k > K(\varepsilon)\ |a_{n_k} - A| < \varepsilon$$

Хотим:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2(\varepsilon) \ \forall n > N_2(\varepsilon) \ |a_n - A| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2(\varepsilon) \ \forall n > N_2(\varepsilon) \ \underbrace{|a_n - a_{n_k}|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_{n_k} - A|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

Это выполнено $\forall k > K\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ и $n, n_k > N_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$

Так как $n_k \geqslant k$, потребуем $n, k > N_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$

Изначально мы прибавили и вычли $a_{n_k}$, $k > \max\{N_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right), K\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\}$

$k$ — вспомогательный аргумент, которого изначально не было (требовалось только показать существование). Поэтому при предъявлении $N_2(\varepsilon)$ мы не будем использовать вспомогательное $K(\varepsilon)$

Возьмем $N_2(\varepsilon) = N_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ $\square$

# 7 Функции

## 7.1 Функция. График функции

## 7.2 Инъекция, сюрьекция, биекция

## 7.3 Обратимость функции

## 7.4 Предел функции по Коши

## 7.5 Предел функции по Гейне