Лекции по алгебре (1 курс, 25-26)

github.com/int28t/hse-se-lecture-notes

Михайлец Екатерина Викторовна
emihaylets@hse.ru
ТГК: t.me/alg_pi_25_26

Содержание

1 Матрицы

Матрицей размера/типа/порядка nxm называется упорядоченная таблица с m строками и n столбцами.

Обозначение:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn}$$

i - строка, j - столбец

$M_{mn}(\mathbb{R})$ - множество всех матриц размера mxn с вещественными элементами

1) При $m = n$ матрица называется квадратной порядка n

2) При $m = 1$ матрица 1xn - n-мерная строка

При $n = 1$ матрица mx1 - m-мерный столбец

Матрица 1x1 - число

3) Матрица состоящая из нулей (т.е. $a_{ij} = 0\ \forall i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$) называется нулевой матрицей. **Обозначение:** $\mathbb{O}$

4) Будем называть единичной квадратную матрицу порядка n, если:

$$a_{ij} = \underbrace{\delta^i_j}_{\text{Символ Кронекера}} = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases}$$

Обозначение:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Определение: Две матрицы a и b называются равными если они одного размера и соответствующие элементы равны (т.е. $a_{ij} = b_{ij} \forall i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$)

Определение: Матрица C называется суммой матриц A и B если все матрицы A, B и C одинакового размера и $c_{ij} = b_{ij} + a_{ij}, \forall i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$

Обозначение: $C = A + B$

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1 Свойства сложения матриц

1. Коммутативность $(A + B = B + A)$

☐ Поэлементно: $[A+B]_{ij} \underbrace{=}_{\text{по определению сложения}} [A]_{ij} + [B]_{ij} \underbrace{=}_{\text{Вещественные числа коммутативны}} [B]_{ij} + [A]_{ij} \underbrace{=}_{\text{по определению сложения}} [B + A]_{ij}$ ■

2. Ассоциативность $(A + B) + C = A + (B + C)$

3. $\exists$ нейтральный элемент по сложению т.е. $\exists$ матрица $\mathbb{O} \in M_{mn}(\mathbb{R})\ \forall A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ выполняется $\mathbb{O} + A = A + \mathbb{O} = A$

☐ $[\mathbb{O}]_{ij} = 0$ – нулевая матрица ■

4. $\forall$ матрицы $A \in M_{mn}(\mathbb{R})\ \exists\ B \in M_{mn}(\mathbb{R}) : A + B = B + A = \mathbb{O}$ – нулевая матрица

☐ $B_{ij} = -A_{ij}$ ■

Обозначение: $B = -A$ – Обратная по сложению к A или противоположная

Определение: Матрица C называется произведением числа $\lambda \in \mathbb{R}$ и матрицы A, если матрицы C и A одинакового размера и $[C]_{ij} = \lambda * [A]_{ij}$ $\forall i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$

Обозначение: $C = \lambda * A$

Пример:

$$2 * \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Определение: Разностью матриц A и B называется сумма A и $-B$

1.2 Свойства умножения на число

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : (\lambda * \mu) * A = \lambda * (\mu * A)$ – ассоциативность относительно умножения на число

$(\lambda + \mu) * A = \lambda * A + \mu * A$ – дистрибутивность относительно умножения чисел

$\lambda * (A + B) = \lambda * A + \lambda * B$ – дистрибутивность относительно сложения матриц

Это место стоит перепроверить (!!!)

$1 * A = A$ – унарность

1.3 Умножение матриц

Рассмотрим $A_{mxn} \in M_{mn}(\mathbb{R}), B_{nxk} \in M_{nk}(\mathbb{R})$:

Определение: Произведением матрицы A_{mxn} и B_{nxk} (число столбцов в A равно числу строк в B) называется C_{mk} где:

$$C_{ij} = \sum_{q=1}^{n} a_{iq} * b_{qj}$$

$(C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$ $\forall i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,k})$

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{3x2} * \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}_{2x1} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}_{3x1}$$

1.4 Свойства умножения матриц

1. Ассоциативность Пусть A_{mxn}, B_{nxk}, C_{kxl}. Тогда $(A * B) * C = A * (B * C)$

$\square$ $[(A * B) * C]_{ij} = \sum\limits_{r=1}^{k} [A * B]_{ir} * [C]_{rj} = \sum\limits_{r=1}^{k} (\sum\limits_{s=1}^{n} [A]_{is} * [B]_{sr}) * [C]_{rj} = \sum\limits_{r=1}^{k} \sum\limits_{s=1}^{n} [A]_{is} * [B]_{sr} * [C]_{rj} \underbrace{=}_{\text{перегруппируем слагаемые}} \sum\limits_{s=1}^{n} \sum\limits_{r=1}^{k} [A]_{is} * [B]_{sr} * [C]_{rj} = \sum\limits_{s=1}^{n} [A]_{is} * (\sum\limits_{r=1}^{k} [B]_{sr} * [C]_{rj}) = \sum\limits_{s=1}^{n} [A]_{is} * [B * C]_{sj} \underbrace{=}_{\text{по определению умножения}} = A * (B * C)$ $\blacksquare$

2. $\exists$ Нейтрального элемента по умножению (для квадратных матриц) $\exists$ матрица $E \in M_n(\mathbb{R}) : \forall A \in M_n(\mathbb{R})$ $E * A = A * E = A$

$\square$ Предъявим единичную матрицу

$[E]_{ij} = \delta^i_j$

$$[A * E]_{ij} = \sum_{r=1}^{n} [A]_{ir} * [E]_{rj} = \sum_{r=1}^{n} [A]_{ir} * \delta^i_j = 0 + \ldots + [A]_{ij} + \ldots + 0 = [A]_{ij}\ \forall i, j = \overline{1,n}$$

$E * A$ аналогично $\blacksquare$

3. $A * \mathbb{O} = \mathbb{O} * A = \mathbb{O}$ Для квадратных A и $\mathbb{O}$ порядка n

Рассмотрим: $(A+B) * C = A * C + B * C$ – дистрибутивность умножения матриц
Замечание: Вообще говоря умножение матриц некоммутативно (даже для квадратных)
Пример:

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

2 Транспонирование

Определение: Транспонирование — операция, переводящая все строки в столбцы с сохранением порядка, то есть:

$$[A^T]_{ij} = [A]_{ji} \ \forall i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$$

Обозначение: A^T
$A_{m\times n} \xrightarrow{T} (A^T)_{n\times m}$

2.1 Свойства транспонирования

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$
4. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

   $\square$ Пусть матрицы $A \in M_{mn}(\mathbb{R}), B \in M_{nk}(\mathbb{R})$

   $$[(A\cdot B)^T]_{ij} \overbrace{=}^{\text{по определению T}} [A\cdot B]_{ji} \overbrace{=}^{\text{по определению произведения матриц}} \sum_{r=1}^{n} A_{jr}\cdot B_{ri} =$$

   $$\overbrace{=}^{\text{по коммутативности произведения}} \sum_{r=1}^{n} B_{ri}\cdot A_{jr} = \sum_{r=1}^{n} B^T_{ir}\cdot A^T_{rj} = [B^T\cdot A^T]_{ij} \ \forall i = \overline{1,k}, j = \overline{1,m} \ \blacksquare$$

2.2 Элементарное преобразование строк(столбцов)

Определение: — это 3 следующие операции:

1. Перестановка двух строк в матрице

   $(i) \Leftrightarrow (k)$(i-ая строка меняется местами с k-ой)

2. Умножение строки на ненулевое число

   $\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0, (i) \Rightarrow \lambda \cdot (i), \lambda \neq 0$

3. Прибавление к i-ой строке другой k-ой строки с коэффициентом λ, $\lambda \in \mathbb{R}$

   $(i) \Rightarrow (i) \cdot \lambda(k)$, $i \neq k$

Замечание 1: Все элементарные преобразования обратимы

Замечание 2: Каждое элементарное преобразование строк матрицы можно трактовать как умножение на матрицу слева специального вида (квадратную). Эта матрица получается применением к единичной матрице того же самого элементарного преобразования

Пример: (1) элементарное преобразование к E

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)-2(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{— матрица элементарного преобразования}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Замечание 3: Преобразования можно применять и к столбцам. Это будет соответствовать умножению справа на матрицу специального вида

Определение: Матрица имеет:

1) ступенчатый вид, если номера первых ненулевых элементов всех строк последовательно возрастают, такие элементы называются ведущими (нижние ведущие элементы находятся правее, чем верхние), а все нулевые строки стоят внизу

2) канонический вид (улучшенные ступенчатый), если матрица имеет ступенчатый вид, в которой все ведущие элементы равны 1, и в любом столбце с ведущими элементами все остальные равны 0

Теорема о методе Гаусса: Любую конечную матрицу можно привести к ступенчатому и каноническому виду элементарными преобразованиями строк.

☐ Предъявим алгоритм. Берем матрицу $m \times n$ и двигаемся из левого верхнего угла.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & & \dots & & \\ \dots & & & \dots & \\ a_{m1} & & & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{п. 1}}$ Если текущий элемент равен 0, тогда переходим к $\boxed{\text{п. 2}}$, иначе объявляем теущий элемент ведущим. Прибавляем текущую строку к остальным так, чтобы элементы ниже ведущего (и выше в случае канонического вида) обратились в 0. Пусть a_{ij} — текущий элемент. Тогда для $k \neq i$ строки берем $\lambda = -\dfrac{a_{kj}}{a_{ij}}$, где $a_{ij} \neq 0$ и $(k) \to (k) + \lambda(i)$ (для канонического вида $(i) \to \dfrac{1}{a_{ij}}(i)$, чтобы получить 1 на месте ведущего элемента).

Выбираем новый текущий элемент, смещаясь в матрице на один столбец вправо и на одну строку вниз $\Rightarrow$ следующий шаг, повторяем $\boxed{\text{п. 1}}$, если это невозможно stop

$\boxed{\text{п. 2}}$ Если текущий элемент равен нулю, то просматриваем все элементы под ним. Если среди них нет не равных 0, то переходим к $\boxed{\text{п. 3}}$. Иначе если в k-ой строке ненулевой элемент нашелся (под текущим), то $(i) \leftrightarrow (k)$

$\boxed{\text{п. 3}}$ Если текущий элемент и все под ним равны 0, то меняем текущий столбец смещаясь на один столбец вправо. Если возможно, то $\boxed{\text{п. 1}}$, иначе stop

Так как матрица имеет конечные размеры, а за 1 итерацию смещается вправо на 1 столбец — процесс преобразования к ступенчатому (каноническому) виду закончится не более чем за n шагов

3 Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Покоординатная запись СЛАУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Rightarrow Ax = b, \text{где } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \text{— столбец неизвестных, } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \text{— столбец свободных членов}$$

$$(A|B)_{m\times(n+1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \text{— элементарными преобр. к каноническому виду}$$

Замечание: Элементарные преобразования матрицы не меняют множество решений СЛАУ

4 Перестановки (Подстановки)

Определение: Перестановкой чисел $1, \ldots, n$ называется расположение их в определённом порядке.

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Пример:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 5, & 3, & 4, & 1, & 2 \end{pmatrix}$$

Определение: α_i и α_j образуют инверсию в перестановке если $\alpha_i > \alpha_j$, но $i < j$
Определение: Знак перестановки это $(-1)^n$, где n - число инверсий в перестановке
Обозначение: $sgn(\alpha)$
Пример:

$$\alpha = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}}_{3+3+0+1+1+0}$$

$$sgn(\alpha) = 1$$

Определение: Если $sgn(\alpha) = 1$ то α - чётная перестановка, если $sqn(\alpha) = -1$ то α - нечётная перестановка

Определение: Транспозицией называется преобразование при котором в α меняются местами только α_i и α_j, а остальные элементы не меняются

Утверждение: Каждая транспозиция меняет чётность перестановки

☐ а) Транспозиция соседних элементов:

$\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n$

$\downarrow$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_{i+1}, \alpha_i, \ldots, \alpha_n$

$\Rightarrow$ Число инверсий изменилось на 1 $\Rightarrow$ знак перестановки поменялся

б)

$\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_{i+k}, \dots, \alpha_n$
Меняем $\alpha_i \leftrightarrow \alpha_{i+k}$ с $k-1$ соседних транспозиций
$\alpha_1, \dots, \alpha_{i+k}, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n$
$\Rightarrow k + k - 1 = 2k - 1$ шагов (соседних транспозиций)
$\Rightarrow$ Знак перестановки поменяется $\blacksquare$

Определение: Подстановка

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \delta(1) & \delta(2) & \dots & \delta(n) \end{pmatrix}$$

– отображение чисел в себя являющееся взаимо-однозначным
Нижняя строка – перестановка

Пример:

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$sgn(\delta) = 1$ $\delta(2) = 2$ - стационарный элемент

Определение: Знаком подстановки называется знак перестановки в её нижней строке

Обозначение: S_n - множество подстановок длины n
$|S_n| = n!$ число элементов и мощность множества

Замечание: Транспозиция - нечётная подстановка (в которой α_i и α_j переходят друг в друга, а остальные элементы неподвижны)

Замечание: Часто используют запись подстановок «в циклах», и каждый элементы выписывается справа

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} * \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}}_{\text{можно не писать}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Циклическая запись транспозиции: (α_i, α_j)

Определение:

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} = (1)(2)(3)\dots(n) = Id$$

называется тождественной подстановкой

Обозначение: Id (id)

Определение: Умножением подстановок называется их последовательное применение (т.е. композиция отображений)

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(умножая слева направо)
В циклах: $(12) * (132) = (1)(23) = (23)$

Замечание: Умножение подстановок некоммутативно

Пример: $(132)(12) = (13) \neq (23)$

Замечание: Id – нейтральный элемент по умножению

Замечание: Подстановку обратную к

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \delta(1) & \delta(2) & \delta(3) & \dots & \delta(n) \end{pmatrix}$$

можно получить как

$$\delta^{-1} = \begin{pmatrix} \delta(1) & \delta(2) & \delta(3) & \dots & \delta(n) \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

и отсортировав столбцы

$\Rightarrow \delta * \delta^{-1} = \delta^{-1} * \delta = Id$

Пример:

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\delta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Замечание: $\forall$ Подстановку можно представить как произведение транспозиций

$\square$ Запишем подстановку в циклах $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = (\alpha_k, \alpha_{k-1})(\alpha_{k-1}, \alpha_{k-2}) \dots (\alpha_2, \alpha_1)$ - произведение $k-1$ транспозиций слева направо $\blacksquare$

Замечание: $sgn(\delta_1 * \delta_2) = sgn(\delta_1) * sgn(\delta_2)$

5 Определитель

Определение Определителем или детерминантом квадратной матрицы A порядка n называется сумма $n!$ слагаемых следующего вида:

$\det A = \sum\limits_{\delta \in S_n} sgn(\delta) * a_{1\delta(1)} * a_{2\delta(2)} * a_{3\delta(3)} * \dots * a_{n\delta(n)}$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

и

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \delta(1) & \delta(2) & \delta(3) & \dots & \delta(n) \end{pmatrix}$$

Обозначение: $\det A$ или $|A|$

Замечание: По сути $\det A$ является суммой произведений элементов матрицы по одному из каждой строки и столбца (стоящие в разных строках и столбцах по всем способам так сделать (с учётом знака))

Пример: $n = 2 \Rightarrow n! = 2! = 2$

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = Id$$

$$\delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} * a_{22} - a_{21} * a_{12}$$

Пример: $n = 3 \Rightarrow n! = 3! = 6$

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13}, & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}, & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right]$$

$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{22}a_{23}a_{11} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$ - Правило Саррюса

(Диагонали $\searrow$ идут с плюсом, диагонали с $\nearrow$ с минусом)

5.1 Свойства определителей

№1 $\det A = \det A^T$ ($\Rightarrow$ Все свойства det верные для строк матрицы справедливы и для столбцов)

$\square$ $B = A^T, b_{ij} = a_{ji}$ Переставим $b_{i\delta_i}$ по возрастанию номеров столбцов

$\det B = \sum\limits_{\delta \in S_n} sgn(\delta) * b_{1\delta(1)} * b_{2\delta(2)} * \ldots * b_{n\delta(n)} =$

Используем:

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \delta(1) & \delta(2) & \ldots & \delta(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta(1)^{-1} & \delta(2)^{-1} & \ldots & \delta(n)^{-1} \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$$

$sgn(\delta^{-1}) = sgn(\delta)$ так как $sgn(\delta * \delta^{-1}) = sgn(\delta) * sgn(\delta^{-1}) = 1$

$= \sum\limits_{\delta \in S_n} sgn(\delta^{-1}) b_{\delta^{-1}(1)1} b_{\delta^{-1}(2)2} * \ldots * b_{\delta^{-1}(n)n} = \sum\limits_{\delta \in S_n} sgn(\delta^{-1}) * a_{1\delta^{-1}(1)} * a_{2\delta^{-1}(2)} * \ldots * a_{n\delta^{-1}(n)}$

Переименуем $\tau = \delta^{-1}$

$= \sum\limits_{\tau \in S_n} sgn(\tau) * a_{1\tau_1} * \ldots * a_{n\tau_n} = \det A \blacksquare$

№2 Определитель линеен по строкам и столбцам т.е. пусть $A = (A_1, \ldots, A_n)$ – матрица как набор строк

Тогда:

а) $\det(A_1, \ldots, A_i' + A_i'', \ldots, A_n) = \det(A_1, \ldots, A_i', \ldots, A_n) + \det(A_1, \ldots, A_i'', \ldots, A_n)$

б) $\det(A_1, \ldots, \alpha * A_i, \ldots, A_n) = \alpha * \det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n)$

Пример:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3+x \\ 2 & 7+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & x \end{vmatrix} = (1*7 - 3*2) + x * \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - x$$

6 test

Замечание Для однородной СЛАУ $Ax = 0$ теорема Кронекера-К. выполняется всегда: $RgA = Rg(A|O)$ - всегда есть решения

Однородные СЛАУ

Рассмотрим ОСЛАУ $Ax = 0$ (где $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$

Определение: Любые $n - r$ линейно независимых столбцов (где $n - r$ - число неизвестных, $r = RgA$) является решениями однородных СЛАУ $Ax = 0$, называют фундаментальной системой решений (ФСР) однородной СЛАУ $Ax = 0$

Теорема: (о существовании ФСР): Рассмотрим ОСЛАУ $Ax = 0$ У неё $\exists$ $k = n - r$ (где n - число неизвестных), $r = RgA$) линейно независимых решений

$\square$ Предположим, что БМ, расположен в левом верхнем углу матрицы A. Пусть $RgA = R$

А = рисунок вставим потом1

По теореме о БМ строки $A_{r+1}, \ldots, A_m$ линейно выражаются через базисные строки $A_1, \ldots, A_r$

Сделаем элементарные преобразования: $A_{r+1} -> A_{r+1} - \alpha_1 A_1 - \ldots, \alpha_r * A_r$

$A_m -> A_m - \mu_1 A_1 - \ldots - \mu_r A_r$

Получим матрицу A', у которой последние $m - r$ строк равны 0

А = рисунок 2

Элементарные преобразования строк матрицы A (А следовательно и строк расширенной матрицы $(A|O)$) соответствуют эквивалентным преобразованиям уравнений исходной ОСЛАУ $Ax = 0 \Rightarrow$ исходная ОСЛАУ $Ax = 0$ эквивалентна СЛАУ $A'x = 0$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1r+1}xr+1 + \ldots + a_{11}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r + a_{rr+1}xr+1 + \ldots + a_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

Будем называть переменные, отвечающие базисны столбцам, главными (или базисными), а все остальные переменные свободными

В(*) $x_1, \ldots ,x_r$ - главные (их $r = RgA$), $x_{r+1}, \ldots ,x_n$- свободные (их $n - r$ штук)

Перепишем (*) так чтобы слева остались только главные переменные, а справа свободные

**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}xr+1 - \ldots - a_{11}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}xr+1 - \ldots - a_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

Присвоим свободные переменные $x_{r+1}, \ldots ,x_n$ след. наборы значений

рисунок3

Для каждого набора решим СЛАУ (**)

Она всегда имеет решение, т.к. это СЛАУ с квадратной невырожденной матрицей (её $\det = M \neq 0$, т.к. это БМ) (решения можно найти например по формулам Крамера)

Получим следующие решения: рисунок4

$\Rightarrow$ столбцы рисунок5

являющиеся решениями СЛАУ (**) $\Leftrightarrow$ (*) $\Leftrightarrow$ исходной СЛАУ $Ax = 0$ (здесь $k = n - r = n - RgA$)

Покажем, что $\Phi_1, \ldots ,\Phi_k$ линейно независимы. Составим матрицу $\Phi = (\Phi_1, \ldots , \Phi_k)$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \ldots & \phi 1k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{r1} & \phi_{r2} & \ldots & \phi_{rk} \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

$M^{1,\ldots,k}_{r+1,\ldots,n} = |E| = 1 \neq 0 \Rightarrow$ это БМ в матрице Φ размера nx$k \Rightarrow$ по теореме о БМ столбцы $\phi_1, \ldots ,\phi_k$ - линейно независимы $\Rightarrow$ по определению $k = n - r$ линейно независимых решений $\phi_1, \ldots ,\phi_k$ образуют ФСР ОСЛАУ $Ax = 0$■

Замечание 1: Построенная в ходе доказательства ФСР называется нормальной (значения свободных переменных образуют столбцы единичной матрицы E т.е. в каждом столбце ФСР 1 свободная переменная = 1, остальные свободные переменные = 0)

Замечание 2: Различных ФСР бесконечно много (при $k = n - r >= 1$) т.к. значения свободных переменных можно брать любыми с условием, чтобы на них образовался БМ в матрице Φ ("таблице ФСР"), и тоже получим ФСР ($n - r$ линейно независимых решений)

Следствие (из теоремы о существовании ФСР): (Критерий существования ненулевого решения однородной квадратной СЛАУ)

пусть A - квадратная матрица. Тогда ОСЛАУ $Ax = 0$ имеет ненулевое решение $\Leftrightarrow$ $\det A = 0$

□ Необходимость ($\Rightarrow$): Дано: $Ax = 0$ Доказать: $\det A = 0$

Предположим противное

Предположим, что $\det A \neq 0$ $\Rightarrow$ по формулам Крамера СЛАУ имеет единственное решение, но всегда есть решение $x = 0 \Rightarrow$ других нет - противоречие

Достаточность ($\Leftarrow$): Дано: $\det A = 0$

Доказать: $\exists$ ненулевое решение

Если $\det A = 0 \Rightarrow RgA \leq n$ Пусть $RgA = r$ По теореме о существовании ФСР найдётся $n - r > 0$ линейно независимых решений - они и будут ненулевыми решениями (т.к. $\forall$ система, содержащая нулевой столбец является линейно зависимой) $\blacksquare$

Теорема: (о структуре общего решения ОСЛАУ)

Пусть $\phi_1, \ldots, \phi_k$ - ФСР однор. СЛАУ $Ax = 0$ (где $k = n - r$, n - число переменных, $r = RgA$)

Тогда $\forall$ решение этой ОСЛАУ можно представить в виде линейной комбинации столбцов ФСР:

$x = c_1 * \phi_1 + \ldots + c_k * \phi_k$

$\square$ Пусть $x^o = (x_1^o, \ldots, x_n^o)^T$ - произвольное решение ОСЛАУ $Ax = 0$. Покажем, что x^o линейно зависима через столбцы ФСР $\phi_1, \ldots, \phi_k$

Предположим, что БП располжоена в левом верхнем углу матрицы A.

Тогда исходная СЛАУ эквивалентна следующей СЛАУ:

(1)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ \ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

Решим (1) относительно главных переменных $x_1, \ldots, x_r$ (как решение матричного уравнения или методом Крамера или методом Гаусса) - всегда существует решение, т.к. это квадратная невырожденная СЛАУ (в левом углу БМ)

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{1r+1}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n \\ \ldots \\ x_r = \alpha_{r+r+1}x_r + \ldots + \alpha_{rn}x_n \end{cases}$$