Коллоквиум по матану ПИ 1 курс весна

github.com/int28t/hse-se-lecture-notes

Содержание

1 Предел функции в точке и на бесконечности: определения по Коши и по Гейне. Эквивалентность двух определений. Односторонние пределы. Бесконечный предел.

1.1 Предел функции в точке

Определение по Коши

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)\ \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)\ |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)\ \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta\ |f(x) - A| < \varepsilon$$

Определение по Гейне

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, если истинна импликация

$$\forall \underset{\substack{x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \\ x_n \neq x_0}}{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}} \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} A$$

1.2 Предел функции на бесконечности

Определение

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = A$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M = M(\varepsilon)\ \forall x > M :\ |f(x) - A| < \varepsilon$$

Определение

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = A$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M = M(\varepsilon)\ \forall x < -M :\ |f(x) - A| < \varepsilon$$

Примечание

$$\mathring{U}_\delta(+\infty) = (\delta; +\infty),\ \mathring{U}_\delta(-\infty) = (-\infty; \delta),\ \mathring{U}_\delta(\pm\infty) = (-\infty; \delta) \cup (\delta; +\infty)$$

1.3 Эквивалентность определений

Теорема

Определения предела функции по Коши и Гейне равносильны

Доказательство

$(\Rightarrow)$:
Имеем:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)\ \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta\ |f(x) - A| < \varepsilon$$

Предположим, что посылка истинна. Тогда также имеем:

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0,\ x_n \neq x_0,\ \text{ то есть } \forall \omega > 0\ \exists N_1(\omega)\ \forall n > N_1(\omega)\ 0 < |x_n - x_0| < \omega$$

Хотим:

$$f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} A,\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N_2(\varepsilon)\ \forall n > N_2(\varepsilon)\ |f(x_n) - A| < \varepsilon$$

Чтобы $|f(x_n) - A| < \varepsilon$ нужно $0 < |x_n - x_0| < \delta(\varepsilon)$ (Подставили в определение Коши $f(x_n)$ вместо $f(x)$). Поэтому возьмем $\omega = \delta(\varepsilon)$.
Получаем $N_1(\delta(\varepsilon))$ и $\forall n > N_1(\delta(\varepsilon))\ 0 < |x_n - x_0| < \delta(\varepsilon)$ и тогда $|f(x_n) - A| < \varepsilon$
Возьмем $N_2(\varepsilon) = N_1(\delta(\varepsilon))$
$(\Leftarrow)$:
Имеем:

$$\forall \{x_n\}_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \\ x_n \neq x_0}} \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} A$$

Пп т.е верно:

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x(\delta) \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)\ |f(x) - A| \geqslant \varepsilon$$

Для каждого $\delta = \dfrac{1}{n}$ найдем $x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$
Получим

$$\underbrace{x_0 - \frac{1}{n}}_{\xrightarrow[]{n\to\infty} x_0} < x_n < \underbrace{x_0 + \frac{1}{n}}_{\xrightarrow[]{n\to\infty} x_0}$$

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0, x_n \neq x_0$$

Значит $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} A$
Но $|f(x) - A| \geqslant \varepsilon$. Получили противоречие (расписать определение и в качестве ε взять ε_0)

1.4 Односторонние пределы

Определение

Односторонним пределом $\lim\limits_{x\to x_{0-}^{+}} f(x) = A$ называется такое число, что:

- $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$

  $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)\ \forall x : 0 < x - x_0 < \delta(\varepsilon)\ |f(x) - A| < \varepsilon$ — **правосторонний предел**

- $\lim\limits_{x\to x_{0-}} f(x) = A$

  $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon)\ \forall x : 0 < x_0 - x < \delta(\varepsilon)\ |f(x) - A| < \varepsilon$ — **левосторонний предел**

Теорема

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \exists \lim_{x\to x_{0-}} f(x)$$

Доказательство

$(\Rightarrow)$:
Пусть
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$
т.е.
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon)\ \forall x :\ 0 < |x - x_0| < \delta\ |f(x) - A| < \varepsilon$$
Тогда, если $0 < x - x_0 < \delta$, автоматически выполнено $0 < |x - x_0| < \delta$, следовательно
$$|f(x) - A| < \varepsilon$$
Значит
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A$$
Аналогично, если $0 < x_0 - x < \delta$, то снова $0 < |x - x_0| < \delta$, и
$$|f(x) - A| < \varepsilon$$
Значит
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A$$

$(\Leftarrow)$:
Пусть
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A,\ \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A$$
Тогда
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)\ \forall x :\ 0 < x - x_0 < \delta_1\ |f(x) - A| < \varepsilon$$
и
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_2 = \delta_2(\varepsilon)\ \forall x :\ 0 < x_0 - x < \delta_2\ |f(x) - A| < \varepsilon$$
Положим
$$\delta = \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$$
Тогда из условия
$$0 < |x - x_0| < \delta$$
следует либо
$$0 < x - x_0 < \delta$$
либо
$$0 < x_0 - x < \delta$$

В обоих случаях

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

Следовательно,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

1.5 Бесконечный предел

Определение

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, если

$$\forall M > 0 \; \exists \delta(M) > 0 \; \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) : f(x) > M$$

Определение

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, если

$$\forall M > 0 \; \exists \delta(M) > 0 \; \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) : f(x) < -M$$

Определение

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, если

$$\forall M > 0 \; \exists \delta(M) > 0 \; \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) : |f(x)| > M$$