

Математический анализ. Коллок I

1 курс, 25-26

github.com/int28t/hse-se-lecture-notes

Содержание

1	Понятие высказывания и n-местного предиката. Логические операции. Кванторы. Построение отрицания к высказыванию с кванторами.	3
1.1	Понятие высказывания и n -местного предиката	3
1.2	Логические операции	3
1.3	Кванторы	3
1.4	Построение отрицания к высказыванию с кванторами	3
2	Доказательства методами математической индукции и от противного. Неравенство Бернулли.	4
2.1	Метод математической индукции	4
2.2	Доказательство от противного. Пример	4
2.3	Неравенство Бернулли	4
3	Перестановки, размещения и сочетания. Бином Ньютона.	5
3.1	5
3.2	5
4	Понятие последовательности. Предел последовательности. Единственность предела. Ограниченные, бесконечно малые, бесконечно большие и отделимые от нуля последовательности. Связь между ними. Ограниченность сходящейся последовательности. Отделимость от нуля последовательности, сходящейся не к нулю.	6
4.1	6
4.2	6
4.3	6
4.4	6
4.5	6
5	Арифметические свойства предела последовательности.	7
6	Предельный переход в неравенствах. Теорема о зажатой последовательности.	8
6.1	8
6.2	8

7	Ограниченные подмножества действительных чисел. Аксиома непрерывности действительных чисел. Верхняя и нижняя грань. Точная верхняя и точная нижняя грань. Теорема о существовании точной верхней и нижней грани.	9
7.1	9
7.2	9
7.3	9
7.4	9
7.5	9
8	Теорема Вейерштрасса.	10
9	Число e . Постоянная Эйлера.	11
10	Подпоследовательность. Предельная точка последовательности. Частичный предел. Эквивалентность понятий частичного предела и предельной точки.	12
10.1	12
10.2	12
10.3	12
10.4	12
11	Теорема Больцано-Вейерштрасса.	13
12	Фундаментальные последовательности. Критерий Коши.	14
12.1	14
12.2	14
13	Понятие функции, числовой функции. График числовой функции. Инъекция, сюръекция, биекция.	15
13.1	15
13.2	15
13.3	15
14	Предел функции в точке: определения по Коши и по Гейне. Эквивалентность двух определений. Арифметика предела функции. Теорема о зажатой функции.	16
14.1	16
14.2	16
14.3	16
14.4	16
15	Сходимость стандартных последовательностей.	17

1 Понятие высказывания и n-местного предиката. Логические операции. Кванторы. Построение отрицания к высказыванию с кванторами.

1.1 Понятие высказывания и n-местного предиката

1.2 Логические операции

1.3 Кванторы

1.4 Построение отрицания к высказыванию с кванторами

2 Доказательства методами математической индукции и от противного. Неравенство Бернулли.

2.1 Метод математической индукции

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} P(n)} - \text{истинно, если:}$$

- 1) $P(1)$ - истинно (база)
- 2) $\forall n \in \mathbb{N} (P(n) \rightarrow P(n+1))$ - истинно (шаг)

2.2 Доказательство от противного. Пример

Доказать, что количество простых чисел бесконечно

Пп (предположим противное). Тогда количество простых чисел конечное число:

$$n_1, \dots, n_k$$

Рассмотрим следующее число:

$$m = n_1 \cdot \dots \cdot n_k + 1, m \in \mathbb{N}, m > n_i \forall i = \overline{1, k} \text{ то есть } m \neq n_i \forall i = \overline{1, k}$$

Следовательно, m - составное. Тогда:

$$m = n_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot n_k^{\alpha_k}$$

$$\exists n_j : m \div n_j$$

Но $m = n_1 \cdot \dots \cdot n_k + 1$ и при делении на $n_i \forall i = \overline{1, k}$ дает остаток 1 (\perp)

2.3 Неравенство Бернулли

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \forall x \geq -1 : (1+x)^n \geq 1+xn} - \text{неравенство Бернулли}$$

Докажем с помощью ММИ

$$\underbrace{\forall n \in \mathbb{N} \forall x \geq -1 \underbrace{(1+x)^n \geq 1+xn}_{Q(n)}}_{P(n)}$$

- 1) $\forall x \geq -1 (1+x) \geq 1+x$ - истина
- 2) Предположим $(1+x)^{n_0} \geq 1+xn_0$ - истина. Докажем, что $(1+x)^{n_0+1} \geq 1+x(n_0+1)$:

$$\begin{aligned} (1+x)^{n_0+1} &\geq 1+x(n_0+1) \\ (1+x)^{n_0+1} &= (1+x)^{n_0} \underbrace{(1+x)}_{\geq 0} \geq (1+x)(1+xn_0) = \\ &= 1+x+xn_0 + \underbrace{x^2n_0}_{\geq 0} \geq 1+x+xn_0 = 1+x(n_0+1) \end{aligned}$$

3 Перестановки, размещения и сочетания. Бином Ньютона.

3.1

3.2

4 Понятие последовательности. Предел последовательности. Единственность предела. Ограниченные, бесконечно малые, бесконечно большие и отделимые от нуля последовательности. Связь между ними. Ограниченность сходящейся последовательности. Отделимость от нуля последовательности, сходящейся не к нулю.

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

5 Арифметические свойства предела последовательности.

6 Предельный переход в неравенствах. Теорема о зажатой последовательности.

6.1

6.2

7 Ограниченные подмножества действительных чисел. Аксиома непрерывности действительных чисел. Верхняя и нижняя грань. Точная верхняя и точная нижняя грань. Теорема о существовании точной верхней и нижней грани.

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

8 Теорема Вейерштрасса.

9 Число e . Постоянная Эйлера.

10 Подпоследовательность. Предельная точка последовательности. Частичный предел. Эквивалентность понятий частичного предела и предельной точки.

10.1

10.2

10.3

10.4

11 Теорема Больцано-Вейерштрасса.

12 Фундаментальные последовательности. Критерий Коши.

12.1

12.2

13 Понятие функции, числовой функции. График числовой функции. Инъекция, сюръекция, биекция.

13.1

13.2

13.3

14 Предел функции в точке: определения по Коши и по Гейне. Эквивалентность двух определений. Арифметика предела функции. Теорема о зажатой функции.

14.1

14.2

14.3

14.4

15 Сходимость стандартных последовательностей.