Лекции по алгебре (1 курс, 25-26)

github.com/int28t/hse-se-lecture-notes

Михайлец Екатерина Викторовна
emihaylets@hse.ru
ТГК: t.me/alg_pi_25_26

Содержание

1 Комплы 2 Wed Nov 19 11:10:48 MSK 2025

Свойства сложения и умножения комплексных чисел

$$\forall z_1,z_2,z_3,z \in \mathbb{C}$$

$$№1\ z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \text{ - коммутативность}$$

$$№2\ (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \text{ - ассоциативность}$$

$$№3 \text{ Существует нейтральный элемент по сложению - } O = (0,0) \in \mathbb{C}:$$

$$z + 0 = 0 + z = z \forall z \in \mathbb{C} \text{ (Ноль)}$$

$$№4\ \forall z \in \mathbb{C} \exists - z \in \mathbb{C} : z + (-z) = -z + z = 0$$

Т.е.

$$\forall z \exists$$

противопололжный или обратный элемент по сложению.

$$№5\ z_1 * z_2 = z_2 * z_1 \text{- коммутативность}$$

$$№6\ z_1 * z_2 * z_3 = z_1 * z_2 * z_3 \text{- ассоциативность}$$

$$№7\ \exists e \in \mathbb{C} : z{*}e = e{*}z = z \forall z \text{ Существует единица - нейтральный элемент по умножению } (e = (1,0) =$$

$$№8\ \forall z \neq 0 \exists z^{-1} \in \mathbb{C} : z * z^{-1} = z^{-1} * z = e \text{ Существует обратный элемент по умножению)}$$

$$№9\ z_1 * (z_2 + z_3) = z_1 * z_2 + z_1 * z_3 \text{ Дистрибутивность умножения относительно сложения}$$

Замечание: Эти 9 свойств-аксиом числового поля котороые и позволяют называть комплексные числа числами

1.1 Тригонометрическая форма

Здесь будет картинка
Перейдём к полярным координатам (r, ϕ)

$$\begin{cases} x = r * cos\phi \\ y = r * sin\phi \end{cases}$$

Тогда:

$$z = x{+}iy = r{*}cos\phi{+}ir{*}sin\phi = r(cos\phi{+}isin\phi) = \text{тригонометрическая форма комплексного числа}$$

Определение:

$$№1\ r = \sqrt{x^2 + y^2} - \text{ модуль комплексного числа (угол между положительным направлением вещест}$$

Обозначение:

$$\phi = Argz = \{argz{+}2\pi k | k \in \mathbb{Z}\}, \text{ где arg z - главное значение аргумента, его выбирают произвольно н}$$

1.2 Умножение и деление в тригонометрической форме

№1 Умножение. $z_1 * z_2 = r_1 * r_2(cos(\phi_1 + \phi_2) + isin(\phi_1 + \phi_2)$

№2 Деление. $(z_2 \neq 0) : \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(cos(\phi_1 - \phi_2) - isin(\phi_1 - \phi_2))$

□Умножение: $z_1 * z_2 = r_1 * r_2 * (cos\phi_1 + isin\phi_1) * (cos\phi_2 + isin\phi_2) = r_1 * r_2 = (\underbrace{cos\phi_1 cos\phi_2 - sin\phi_1 * sin\phi_2}\, cos($

Теорема (Муавра)

$$\forall z \in \mathbb{C} \forall n \in \mathbb{N} z^n = r^n * cos(n\phi) + isin(n * \phi)$$

□По индукции: $n = 1 \Rightarrow z = r(cos\phi + isin\phi) =$ база индукции, верно

Пусть верно для$n = k$, покажем для$n = k + 1$ (шаг индукции)

$$z^{k+1} = z^k * z = r^k(cosk\phi + isink\phi) * r * (cos\phi + isin\phi) = r^{k+1}(cos(k + 1)\phi + isin(k + 1)\phi) \blacksquare$$

1.3 Извлечение комплексного корня:

Теорема: $\forall$комплексное число $w \neq 0 (w \in \mathbb{C})$ имеет ровно n различных корней n-ой степени, т.е. так

□Как их найти?

№1 Представим w в тригонометрической форме: $w = \rho(cos\psi + isin\psi)(\rho, \psi$ даны по условию)

№2 Ищем корни тоже в тригонометрической форме: $z = r(cos\phi + isin\phi)$

№3 По условию $w = z^n \Rightarrow$ по формуле Муавра $z^n = r^n(cosn\phi + isinn\phi) = \rho(cos\psi + isin\psi)$

№4 Приравняем модули и аргументы:

$$z^n = w \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = \rho(\rho, r \in \mathbb{R}_1 > 0) \\ n\phi = \psi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{p} \\ \psi = \frac{\psi + 2\pi k}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

5. Заметим, что достаточно брать $k = \overline{0,n-1}$ т.к. начиная с $k = n$ корни станут повторяться $\Rightarrow$ Су

$$\Rightarrow \sqrt[n]{w} = \{ \sqrt[n]{p}(cos(\frac{\psi + 2\pi k}{n}) + isin(\frac{\psi + 2\pi k}{n})|k = \overline{0,n-1}\} \blacksquare$$

1.4 Геометрическая интерпретация

При

$$k = 0, \phi_0 = \frac{\psi}{n}$$

соответствует первому корню, $\dfrac{2pi}{n}$ - угол между соседними корнями - "шаг"

Здесь будет картиночка чуть позже

Корни лежат в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{\rho}$ При этом 1-ый корень z_0 имеет аргумент $\phi_0 = \dfrac{\psi}{n}$, а каждый следующий корень получен поворотом на угол $\dfrac{2\pi}{n}$

Пример:
$\sqrt[6]{1}$ - Найти все комлексные корни

$$1 = 1 * (cos0 + isin0) \Rightarrow \rho = 1, \psi = 0(+2\pi k)$$

$$\sqrt[6]{1} = \{\sqrt[6]{1}(cos\frac{0+2\pi k}{6} + isin\frac{0+2\pi k}{6}, k = \overline{0,5}\} = \{cos\frac{\pi k}{3} + sin\frac{\pi k}{3}, k = \overline{0,5}\}$$

$$k = 0 \Rightarrow \phi_0 = 0, \text{шаг } = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

Здесь будет ещё один рисуночек

1.5 Формула эйлера

$\boxed{e^{i\phi} = cos\phi + isin\phi}$ $\forall \phi \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} cos\phi = Fe * e^{i\phi} \\ sin\phi = Im * e^{i\phi} \end{cases}$$

Замечание: Тождество Эйлера: $\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$
Следствие:

$$\begin{cases} e^{i\phi} = cos\phi + isin\phi \\ e^{-i\phi} = cos\phi - isin\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2cos\phi = e^{i\phi} + e^{-i\phi} \\ 2sin\phi = e^{i\phi} - e^{-i\phi} \end{cases} \Rightarrow$$

$\boxed{cos\phi = \dfrac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} \text{ и } sin\phi = \dfrac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2}}$

1.6 Комплексные многочлены

Теорема: "Основная"теорема алгебры
Для любого многочлена с комплексными коэффициентами:

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + z_0, a_i \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$$

Существует корень уравнения $f(z) = 0$, и этот корень всегда принадлежит $\mathbb{C}$

Замечание: Это утверждение означает, что поле комплексных чисел алгебраически замкнуто. (у $\forall$ многочлена с коэффициентами из $\mathbb{C}$ есть корень из $\mathbb{C}$)

Это не так для $\mathbb{Q}$ (например $x^2 - 2$ имеет корень $\sqrt{2} \notin Q$)

и не так для $\mathbb{R}$: $x^2 + 1$ имеет комплексные корни $\pm i \notin \mathbb{R}$

Теорема (Безу) Остаток от деления много члена $f(x)$ на х-с (что?) есть $f(c)$

$\square$ Разделим $f(x)$ с остатком на х-с: $f(x) = (x - c) * Q(x) + R(x)$, где $\deg\ R(x) < deg(x - c) = 1 \Rightarrow$ остаток $R(x) = const \Rightarrow f(c) = (c - c)Q(c) + const \Rightarrow R(x) = f(c)\blacksquare$

2 Лекция Wed Nov 26 11:09:40 MSK 2025

Определение: Разложение многочлена $f(x) = g(x) * h(x)$ будем называть нетривиальным если

$$\begin{cases} \deg g < \deg f \\ \deg h < \deg f \end{cases}$$

,где $deff$ - степень многочлена

Пример: $(x^2 + 1)(x - 1)$ - нетривиальный т.к.

$$\begin{cases} 2 < 3 \\ 1 < 3 \end{cases}$$

Определение: Многочлен называется приводимым если существует нетривиальное разложение $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ и неприводимым в противном случае

Утверждение: Любой многочлен степени $n \in \mathbb{N}$ раскладывается в произведение неприводимых многочленов

Частные случаи

№1 Многочлен над $\mathbb{C}$ (с коэффициентами из $\mathbb{C}$) степени n всегда разлагается в произведение степеней линейных множителей

$f(z) = a_n(z - z_1)^{\alpha_1} \dots (z - z_k)^{\alpha_k}$, где $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = n$,$\alpha_i \in \mathbb{N}$ - кратности корней, $z_i \in \mathbb{C}$ - корни многочлена, $a_n \in \mathbb{C}$

№2 Разложение над $\mathbb{R}$

Утверждение: Если $z_0 \in \mathbb{C}$ является корнем нмогочлена с вещественными корнями, то и z_0 тоже является корнем этого многочлена

$\square$ Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$ - корень $f(x) \Rightarrow f(z_0) = 0$, т.е. $f(z_0) = a_n \cdot z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \ldots + a_1 z_0 + a_0 = 0$ (*)

Рассмотрим комплексное сопряжение равенства (*) $\overline{f(z_0)} = \overline{a_n} \cdot \overline{z_0^n} + \overline{a_{n-1}} \overline{z_0^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1 z_0} + \overline{a_0} = \overline{0} = 0$

Но $a_i \in \mathbb{R}$ по условию $\Rightarrow \overline{a_i} = a_i \Rightarrow a_n \cdot \overline{z_0^n} + a_{n-1} \overline{z_0^{n-1}} + \ldots + a_1 \overline{z_0} + a_0 \Leftrightarrow f(\overline{z_0}) = 0$, т.е. $\overline{z_0}$ - тоже корень $f(x)\blacksquare$

Замечание: $(z - z_0)(z - \overline{z_0}) = z^2 - z_0 \cdot z - \overline{z_0} \cdot z + z_0 \cdot \overline{z_0} = z^2 - (z_0 + \overline{z_0}) \cdot z + |z_0|^2 =$ (если $z_0 = x + iy, \overline{z_0} = x - iy \Rightarrow z_0 + \overline{z_0} = 2x = 2Re\ z_0 \in \mathbb{R}$)

$= z^2 - \underbrace{2Re z_0}_{\in\mathbb{R}} \cdot z + \underbrace{|z_0|^2}_{\in\mathbb{R}}$ многочлен от z с вещественными коэффициентами

Соответственно, разложение на неприводимые множители над R имеет вид:

$f(x) = a_n(x - c_1)^{k_1} \dots (x - c_s)^{k_s} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_t x + q_t)^{l_t}$, где

$a_n, c_i, p_j, q_j \in \mathbb{R}, k_i, l_j, \in \mathbb{N}$

Здесь квадратичные сомножители не имеют вещественных корней, а обладают парой комплексных сопряжеённых коренй с ненулевой мнимой частью (дискриминант $D < 0$)

Теорема Виета

Пусть $c_1, \ldots, c_n$ - корни многочлена степени n

$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$

$$\begin{cases} a_1 = -(c_1 + \ldots + c_n) \\ a_2 = c_1c_2 + c_1c_3 + \ldots + c_{n-1}c_n \\ \vdots \\ a_n = (-1)^n \cdot c_1 \ldots c_n \end{cases}$$

Т.е. $(-1)^j a_j$ равно сумме всех возможных произведений j корней
Пример $(n = 3)$**:**
$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = -a \\ c_1 \cdot c_2 + c_1 \cdot c_3 + c_2 \cdot c_3 = b \\ c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 = -c \end{cases}$$

На этом комплексное заканчивается

3 Аналитическая геометрия

Определение: Угол между векторами a и b.

Отложим a и b из одной точки, назовём углом ϕ между векторами a и b наименьший из двух плоских углов которые они образуют, т.е. $\phi \in [0, \pi]$

Определение: Если $\phi = \dfrac{\pi}{2}$, то векторы называются ортогональными. Нулевой вектор ортогонален любому вектору

Определение: Ортогональная проекция вектора $\overline{a}$ на нправлении вектора $\overline{b}(\overline{b} \neq 0)$

№1 скалярная - число $\text{Пр}_{\overline{b}}^{\overline{a}} = |a| \cdot cos\phi$, где ϕ - угол между $\overline{a}$ и $\overline{b}$

№2 векторная - вектор $\overline{\text{Пр}_{\overline{b}}^{\overline{a}}} = |\overline{a}| \cdot cos(\phi) \cdot \dfrac{\overline{b}}{|\overline{b}|}$

Определение: Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называют коллинеарными, если они лежат на одной либо параллельных прямых

Замечание: Нулевой вектор коллинеарен любому вектору

Замечание: Коллинеарные векторы a и b могут быть сонаправленными ($a \uparrow\uparrow b$) или противоположно направленными ($\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$)

Определение: Векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ называются компланарными, если они лежат на прямых, параллельных фиксированной плоскости (т.е. если их отложить из одной точки, они лежат в одной плоскости)

Определение: Скалярное произведение векторов - это функция, ставящая в соответствие паре векторов число, удовлетворяющее следующим свойствам: Для любых векторов a,b,c и для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1. $(a,b) = (b,a)$ - симметричность
2. $(\alpha a + \beta b, c) = \alpha(ac) + \beta(b,c)$ - линейность
3. $(a,a) \geqslant 0$ и $(a, a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ - положительная определённость

Замечание: В V_3 скалярное произведение задаётся, как $(a,b) = |a| \cdot |b| \cdot cos\widehat{a,b}$

Определение: Базис - это упорядоченный набор векторов $a_1, \ldots ,a_k$ такой что

1. $a_1, \ldots , a_k$ - линейно независимы 2. Любой вектор линейно зависим через $a_1, \ldots , a_k$

Определеие: Матрицей Грама базиса $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ в V_3 называется матрица, состоящая из попарных скалярных произведений этих векторов

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (e_1,e_1) & (e_1,e_2) & (e_1,e_3) \\ (e_2,e_1) & (e_2,e_2) & (e_2,e_3) \\ (e_3,e_1) & (e_3,e_2) & (e_3,e_3) \end{pmatrix}$$

Утверждение: Пусть $\overline{a} = a_1\overline{e_1} + a_2\overline{e_2} + a_3\overline{e_3}$
$\overline{b} = b_1\overline{e_1} + b_2\overline{e_2} + b_3\overline{e_3}$
- разложение векторов a и b по базису e

$$\text{Тогда } \boxed{(\overline{a},\overline{b})} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (e_1,e_1) & (e_1,e_2) & (e_1,e_3) \\ (e_2,e_1) & (e_2,e_2) & (e_2,e_3) \\ (e_3,e_1) & (e_3,e_2) & (e_3,e_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_e^T \Gamma b_e$$

, где

$$a_e = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, b_e = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

- координаты векторов a и b в базисе e_1, e_2, e_3

$\square$ $\blacksquare$

Определение: Упорядоченную тройку векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ называют правой тройкой, если со стороны вектора $\overline{c}$ (с конца) кратчайший поворот от вектора $\overline{a}$ до вектора $\overline{b}$ происходит против часовой стрелки

В противном случае тройка векторов называется **левой** (если поворот по часовой стрелке)

Определение: Вектор $\overline{c}$ называется векторным произведением векторов a и b если выполняются 3 свойства

1. $|c| = |a| \cdot |b| \cdot sin(\phi)$, где ϕ - угол между $\overline{a}$ и $\overline{b}$
2. $\overline{c} \perp \overline{a}, c \perp b$ (ортогонален a и b)
3. a,b,c - правая тройка