Семинар 3. Подстановки

1 Знак подстановки

Определение. *Подстановкой* σ называется функция, заданная на множестве $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, переставляющая элементы этого множества.

Подстановку σ удобно задавать таблицей $2 \times n$, такой что σ переводит каждый элемент первой строки в элемент, стоящий под ним.

Определение. Будем говорить, что в состоящей из чисел строке возникает *инверсия*, если при $i > j$ на i-ом месте стоит число меньшее, чем на на j-ом.

Определение. *Четностью подстановки* σ называется четность количества инверсий в таблице, которой она задается. *Знаком подстановки* σ (обозначение $sgn(\sigma)$) называется функция от σ, сопоставляющая четным подстановкам 1, нечетным – -1. То есть можно считать, что $sgn(\sigma) = (-1)^N$, где N – количество инверсий.

Пример: Рассмотрим подстановку, заданную таблицей $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. σ переставляет 1,3,4 по циклу и оставляет 2 на месте, например $\sigma(1) = 3$. В первой строке таблицы (как это обычно и бывает) 0 инверсий, во второй 4 инверсии. $0 + 4 = 4$, то есть σ – четная и $sgn(\sigma)$=1.

Задачи:

1. Определите знак следующих подстановок с помощью подсчёта числа инверсий:

   а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$;

   в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 2n-3 & 2n-2 & 2n-1 & 2n \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & 2n-1 & 2n & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2 Разложение подстановки в циклы

Любая подстановка σ может быть разложена в произведение (композицию) непересекающихся циклов, причём единственным образом с точностью до порядка следования циклов в произведении. При этом одноэлементные циклы иногда опускают, если ясно о подстановке на каком количестве элементов идёт речь. Например:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 6 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (152)(36).$$

Теорема 2.1. *Назовем* декрементом *подстановки σ разность между суммарной длиной циклов, на которые она разлагается, и количеством циклов. Тогда $sgn(\sigma) = (-1)^D$, где D – декремент подстановки σ.*

Задачи:

2. Определите знак подстановок из задачи 1 с помощью разложения в произведение циклов и вычисления декремента.

3. Запишите следующие подстановки в виде таблицы из двух строк и найдите их знак (любым способом):

   а) $(368)(1524)(7)$; б) $(123\dots n)$.

3 Умножение подстановок

Определение. Будем говорить, что подстановка τ является произведением подстановок σ и μ (обозначение $\tau = \sigma \cdot \mu$), если $\tau(i) = \mu(\sigma(i))\ \forall i$.

Определение. Будем называть *единичной подстановкой* (обозначение e) такую подстановку, что $e\sigma = \sigma e = \sigma$ для любой подстановки σ.

Определение. Пусть дана подстановка σ. Будем называть *обратной для σ подстановкой* (обозначение σ^{-1}) такую подстановку, что $\sigma^{-1}\sigma = \sigma\sigma^{-1} = e$.

Задачи:

4. Пусть $\sigma = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&4&1&2\end{smallmatrix}\right)$, $\mu = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&4&1&3\end{smallmatrix}\right)$. Вычислите: а) $\sigma\mu$; б) $\mu\sigma$; в) σ^2; г) σ^3.

5. Докажите существование и единственность единичной подстановки.

6. Докажите существование и единственность обратной для σ подстановки.

7. Решите следующие уравнения:

   а) $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&4&1&2\end{smallmatrix}\right) x \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&4&1&3\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&4&1&5\end{smallmatrix}\right)$; б) $(123)x(345) = (234)$, где x – подстановка на 5 элементах.

8. Пусть $\sigma = (2673)(195)(48)$. Найдите σ^2, σ^3, σ^9, σ^{123}.

4 Знак произведения подстановок

Теорема 4.1. *$sgn(\sigma\mu) = sgn(\sigma)sgn(\mu)$.*

9. Вычислите $sgn(\sigma)$, $sgn(\mu)$ и $sgn(\sigma\mu)$, где σ и μ — подстановки из задачи 4.

10. Пусть $\sigma = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&4&6&1&3&5\end{smallmatrix}\right)$, $\mu = (1345)(26)$. Можно ли, умножая σ и μ (в любых количествах и любых порядках), получить подстановку $\sigma = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&1&6&2&5&3\end{smallmatrix}\right)$?

5 ДЗ

1. Проскуряков: 123, 129, 153, 165, 169, 173, 176, 177, 178, 179*, 180*, 181*.

2. Пусть подстановка σ раскладывается в произведение непересекающихся циклов длин $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Чему равно наименьшее натуральное n такое, что $\sigma^n = e$?

3. Решите уравнение $x^5 = (123)$, где x – подстановка на 6 элементах.