Лекции по алгебре (1 курс, 25-26)

github.com/int28t/hse-se-lecture-notes

Михайлец Екатерина Викторовна
emihaylets@hse.ru
ТГК: t.me/alg_pi_25_26

Содержание

1 Матрицы

Матрицей размера/типа/порядка nxm называется упорядоченная таблица с m строками и n столбцами.

Обозначение:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn}$$

i - строка, j - столбец

$M_{mn}(\mathbb{R})$ - множество всех матриц размера mxn с вещественными элементами

1) При $m = n$ матрица называется квадратной порядка n

2) При $m = 1$ матрица 1xn - n-мерная строка

При $n = 1$ матрица mx1 - m-мерный столбец

Матрица 1x1 - число

3) Матрица состоящая из нулей (т.е. $a_{ij} = 0\ \forall i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}$) называется нулевой матрицей. **Обозначение:** $\mathbb{O}$

4) Будем называть единичной квадратную матрицу порядка n, если:

$$a_{ij} = \underbrace{\delta^i_j}_{\text{Символ Кронекера}} = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases}$$

Обозначение:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Определение: Две матрицы a и b называются равными если они одного размера и соответствующие элементы равны (т.е. $a_{ij} = b_{ij} \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$)

Определение: Матрица C называется суммой матриц A и B если все матрицы A, B и C одинакового размера и $c_{ij} = b_{ij} + a_{ij}, \forall i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$

Обозначение: $C = A + B$

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1 Свойства сложения матриц

1. Коммутативность ($A + B = B + A$)

☐ Поэлементно: $[A+B]_{ij} \underbrace{=}_{\text{по определению сложения}} [A]_{ij} + [B]_{ij} \underbrace{=}_{\text{Вещественные числа коммутативны}} [B]_{ij} + [A]_{ij} \underbrace{=}_{\text{по определению сложения}} [B + A]_{ij}$ ■

2. Ассоциативность $(A + B) + C = A + (B + C)$

3. $\exists$ нейтральный элемент по сложению т.е. $\exists$ матрица $\mathbb{O} \in M_{mn}(\mathbb{R})\ \forall A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ выполняется $\mathbb{O} + A = A + \mathbb{O} = A$

☐ $[\mathbb{O}]_{ij} = 0$ – нулевая матрица ■

4. $\forall$ матрицы $A \in M_{mn}(\mathbb{R})\ \exists\ B \in M_{mn}(\mathbb{R}) : A + B = B + A = \mathbb{O}$ – нулевая матрица

☐ $B_{ij} = -A_{ij}$ ■

Обозначение: $B = -A$ – Обратная по сложению к A или противоположная

Определение: Матрица C называется произведением числа $\lambda \in \mathbb{R}$ и матрицы A, если матрицы C и A одинакового размера и $[C]_{ij} = \lambda * [A]_{ij}\ \forall i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$

Обозначение: $C = \lambda * A$

Пример:

$$2 * \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Определение: Разностью матриц A и B называется сумма A и $-B$

1.2 Свойства умножения на число

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : (\lambda * \mu) * A = \lambda * (\mu * A)$ – ассоциативность относительно умножения на число

$(\lambda + \mu) * A = \lambda * A + \mu * A$ – дистрибутивность относительно умножения чисел

$\lambda * (A + B) = \lambda * A + \lambda * B$ – дистрибутивность относительно сложения матриц

Это место стоит перепроверить (!!!)

$1 * A = A$ – унарность

1.3 Умножение матриц

Рассмотрим $A_{mxn} \in M_{mn}(\mathbb{R}), B_{nxk} \in M_{nk}(\mathbb{R})$:

Определение: Произведением матрицы A_{mxn} и B_{nxk} (число столбцов в A равно числу строк в B) называется C_{mk} где:

$$C_{ij} = \sum_{q=1}^{n} a_{iq} * b_{qj}$$

$(C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}\ \forall i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,k})$

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{3x2} * \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}_{2x1} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}_{3x1}$$

1.4 Свойства умножения матриц

1. Ассоциативность Пусть A_{mxn}, B_{nxk}, C_{kxl}. Тогда $(A * B) * C = A * (B * C)$

$\square$ $[(A * B) * C]_{ij} = \sum\limits_{r=1}^{k} [A * B]_{ir} * [C]_{rj} = \sum\limits_{r=1}^{k} (\sum\limits_{s=1}^{n} [A]_{is} * [B]_{sr}) * [C]_{rj} = \sum\limits_{r=1}^{k} \sum\limits_{s=1}^{n} [A]_{is} * [B]_{sr} * [C]_{rj} \underbrace{=}_{\text{перегруппируем слагаемые}} \sum\limits_{s=1}^{n} \sum\limits_{r=1}^{k} [A]_{is} * [B]_{sr} * [C]_{rj} = \sum\limits_{s=1}^{n} [A]_{is} * (\sum\limits_{r=1}^{k} [B]_{sr} * [C]_{rj}) = \sum\limits_{s=1}^{n} [A]_{is} * [B * C]_{sj} \underbrace{=}_{\text{по определению умножения}} = A * (B * C)$ ■

2. $\exists$ Нейтрального элемента по умножению (для квадратных матриц) $\exists$ матрица $E \in M_n(\mathbb{R}) : \forall A \in M_n(\mathbb{R})\ E * A = A * E = A$

$\square$ Предъявим единичную матрицу

$[E]_{ij} = \delta^i_j$

$[A * E]_{ij} = \sum\limits_{r=1}^{n} [A]_{ir} * [E]_{rj} = \sum\limits_{r=1}^{n} [A]_{ir} * \delta^i_j = 0 + \ldots + [A]_{ij} + \ldots + 0 = [A]_{ij}\ \forall i, j = \overline{1,n}$

$E * A$ аналогично ■

3. $A * \mathbb{O} = \mathbb{O} * A = \mathbb{O}$ Для квадратных A и $\mathbb{O}$ порядка n

Рассмотрим: $(A + B) * C = A * C + B * C$ – дистрибутивность умножения матриц
Замечание: Вообще говоря умножение матриц некоммутативно (даже для квадратных)
Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2 Транспонирование

Определение: Транспонирование — операция, переводящая все строки в столбцы с сохранением порядка, то есть:

$$[A^T]_{ij} = [A]_{ji} \; \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$$

Обозначение: A^T
$A_{m \times n} \xrightarrow{T} (A^T)_{n \times m}$

2.1 Свойства транспонирования

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$
4. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

   $\square$ Пусть матрицы $A \in M_{mn}(\mathbb{R}), B \in M_{nk}(\mathbb{R})$

   $$[(A \cdot B)^T]_{ij} \overbrace{=}^{\text{по определению T}} [A \cdot B]_{ji} \overbrace{=}^{\text{по определению произведения матриц}} \sum_{r=1}^{n} A_{jr} \cdot B_{ri} =$$

   $$\overbrace{=}^{\text{по коммутативности произведения}} \sum_{r=1}^{n} B_{ri} \cdot A_{jr} = \sum_{r=1}^{n} B^T_{ir} \cdot A^T_{rj} = [B^T \cdot A^T]_{ij} \; \forall i = \overline{1, k}, j = \overline{1, m} \blacksquare$$

2.2 Элементарное преобразование строк(столбцов)

Определение: — это 3 следующие операции:

1. Перестановка двух строк в матрице

   $(i) \Leftrightarrow (k)$(i-ая строка меняется местами с k-ой)

2. Умножение строки на ненулевое число

   $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0, (i) \Rightarrow \lambda \cdot (i), \lambda \neq 0$

3. Прибавление к i-ой строке другой k-ой строки с коэффициентом λ, $\lambda \in \mathbb{R}$

   $(i) \Rightarrow (i) \cdot \lambda(k)$, $i \neq k$

Замечание 1: Все элементарные преобразования обратимы

Замечание 2: Каждое элементарное преобразование строк матрицы можно трактовать как умножение на матрицу слева специального вида (квадратную). Эта матрица получается применением к единичной матрице того же самого элементарного преобразования

Пример: (1) элементарное преобразование к E

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{(2)-2(1)} \begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix} \text{— матрица элементарного преобразования}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix} A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -3\end{pmatrix}$$

Замечание 3: Преобразования можно применять и к столбцам. Это будет соответствовать умножению справа на матрицу специального вида

Определение: Матрица имеет:

1) ступенчатый вид, если номера первых ненулевых элементов всех строк последовательно возрастают, такие элементы называются ведущими (нижние ведущие элементы находятся правее, чем верхние), а все нулевые строки стоят внизу

2) канонический вид (улучшенные ступенчатый), если матрица имеет ступенчатый вид, в которой все ведущие элементы равны 1, и в любом столбце с ведущими элементами все остальные равны 0

Теорема о методе Гаусса: Любую конечную матрицу можно привести к ступенчатому и каноническому виду элементарными преобразованиями строк.

□ Предъявим алгоритм. Берем матрицу $m \times n$ и двигаемся из левого верхнего угла.

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & & \dots & & \\ \dots & & & \dots & \\ a_{m1} & & & & a_{mn}\end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{п. 1}}$ Если текущий элемент равен 0, тогда переходим к $\boxed{\text{п. 2}}$, иначе объявляем теущий элемент ведущим. Прибавляем текущую строку к остальным так, чтобы элементы ниже ведущего (и выше в случае канонического вида) обратились в 0. Пусть a_{ij} — текущий элемент. Тогда для $k \neq i$ строки берем $\lambda = -\dfrac{a_{kj}}{a_{ij}}$, где $a_{ij} \neq 0$ и $(k) \to (k) + \lambda(i)$ (для канонического вида $(i) \to \dfrac{1}{a_{ij}}(i)$, чтобы получить 1 на месте ведущего элемента).

Выбираем новый текущий элемент, смещаясь в матрице на один столбец вправо и на одну строку вниз $\Rightarrow$ следующий шаг, повторяем $\boxed{\text{п. 1}}$, если это невозможно stop

$\boxed{\text{п. 2}}$ Если текущий элемент равен нулю, то просматриваем все элементы под ним. Если среди них нет не равных 0, то переходим к $\boxed{\text{п. 3}}$. Иначе если в k-ой строке ненулевой элемент нашелся (под текущим), то $(i) \leftrightarrow (k)$

$\boxed{\text{п. 3}}$ Если текущий элемент и все под ним равны 0, то меняем текущий столбец смещаясь на один столбец вправо. Если возможно, то $\boxed{\text{п. 1}}$, иначе stop

Так как матрица имеет конечные размеры, а за 1 итерацию смещается вправо на 1 столбец — процесс преобразования к ступенчатому (каноническому) виду закончится не более чем за n шагов

3 Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Покоординатная запись СЛАУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Rightarrow Ax = b, \text{где } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \text{— столбец неизвестных, } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \text{— столбец свободных членов}$$

$$(A|B)_{m\times(n+1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \text{— элементарными преобр. к каноническому виду}$$

Замечание: Элементарные преобразования матрицы не меняют множество решений СЛАУ

4 Перестановки (Подстановки)

Определение: Перестановкой чисел $1, \ldots, n$ называется расположение их в определённом порядке.

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Пример:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 5, & 3, & 4, & 1, & 2 \end{pmatrix}$$

Определение: α_i и α_j образуют инверсию в перестановке если $\alpha_i > \alpha_j$, но $i < j$
Определение: Знак перестановки это $(-1)^n$, где n - число инверсий в перестановке
Обозначение: $sgn(\alpha)$
Пример:

$$\alpha = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}}_{3+3+0+1+1+1+0}$$

$$sgn(\alpha) = 1$$

Определение: Если $sgn(\alpha) = 1$ то α - чётная перестановка, если $sqn(\alpha) = -1$ то α - нечётная перестановка

Определение: Транспозицией называется преобразование при котором в α меняются местами только α_i и α_j, а остальные элементы не меняются

Утверждение: Каждая транспозиция меняет чётность перестановки

$\square$ а) Транспозиция соседних элементов:

$\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n$

$\downarrow$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_{i+1}, \alpha_i, \ldots, \alpha_n$

$\Rightarrow$ Число инверсий изменилось на $1 \Rightarrow$ знак перестановки поменялся

б)

$\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_{i+k}, \dots, \alpha_n$
Меняем $\alpha_i \leftrightarrow \alpha_{i+k}$ с $k-1$ соседних транспозиций
$\alpha_1, \dots, \alpha_{i+k}, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n$
$\Rightarrow k + k - 1 = 2k - 1$ шагов (соседних транспозиций)
$\Rightarrow$ Знак перестановки поменяется $\blacksquare$

Определение: Подстановка

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \delta(1) & \delta(2) & \dots & \delta(n) \end{pmatrix}$$

– отображение чисел в себя являющееся взаимо-однозначным
Нижняя строка – перестановка

Пример:

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$sgn(\delta) = 1$ $\delta(2) = 2$ - стационарный элемент

Определение: Знаком подстановки называется знак перестановки в её нижней строке

Обозначение: S_n - множество подстановок длины n
$|S_n| = n!$ число элементов и мощность множества

Замечание: Транспозиция - нечётная подстановка (в которой α_i и α_j переходят друг в друга, а остальные элементы неподвижны)

Замечание: Часто используют запись подстановок «в циклах», и каждый элементы выписывается справа

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} * \underbrace{(2)}_{\text{можно не писать}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Циклическая запись транспозиции: (α_i, α_j)

Определение:

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} = (1)(2)(3)\dots(n) = Id$$

называется тождественной подстановкой

Обозначение: Id (id)

Определение: Умножением подстановок называется их последовательное применение (т.е. композиция отображений)

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(умножая слева направо)
В циклах: $(12) * (132) = (1)(23) = (23)$

Замечание: Умножение подстановок некоммутативно

Пример: $(132)(12) = (13) \neq (23)$

Замечание: Id – нейтральный элемент по умножению

Замечание: Подстановку обратную к

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \delta(1) & \delta(2) & \delta(3) & \dots & \delta(n) \end{pmatrix}$$

можно получить как

$$\delta^{-1} = \begin{pmatrix} \delta(1) & \delta(2) & \delta(3) & \dots & \delta(n) \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

и отсортировав столбцы

$\Rightarrow \delta * \delta^{-1} = \delta^{-1} * \delta = Id$

Пример:

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\delta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Замечание: $\forall$ Подстановку можно представить как произведение транспозиций

$\square$ Запишем подстановку в циклах $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = (\alpha_k, \alpha_{k-1})(\alpha_{k-1}, \alpha_{k-2}) \ldots (\alpha_2, \alpha_1)$ - произведение $k-1$ транспозиций слева направо $\blacksquare$

Замечание: $sgn(\delta_1 * \delta_2) = sgn(\delta_1) * sgn(\delta_2)$

5 Определитель

Определение Определителем или детерминантом квадратной матрицы A порядка n называется сумма $n!$ слагаемых следующего вида:

$\det A = \sum\limits_{\delta \in S_n} sgn(\delta) * a_{1\delta(1)} * a_{2\delta(2)} * a_{3\delta(3)} * \ldots * a_{n\delta(n)}$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

и

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \delta(1) & \delta(2) & \delta(3) & \ldots & \delta(n) \end{pmatrix}$$

Обозначение: $\det A$ или $|A|$

Замечание: По сути $\det A$ является суммой произведений элементов матрицы по одному из каждой строки и столбца (стоящие в разных строках и столбцах по всем способам так сделать (с учётом знака))

Пример: $n = 2 \Rightarrow n! = 2! = 2$

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = Id$$

$$\delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} * a_{22} - a_{21} * a_{12}$$

Пример: $n = 3 \Rightarrow n! = 3! = 6$

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13}, & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}, & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right]$$

$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{22}a_{23}a_{11} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$ - Правило Саррюса

(Диагонали $\searrow$ идут с плюсом, диагонали с $\nearrow$ с минусом)

5.1 Свойства определителей

№1 $\det A = \det A^T$ ($\Rightarrow$ Все свойства det верные для строк матрицы справедливы и для столбцов)

$\square$ $B = A^T, b_{ij} = a_{ji}$ Переставим $b_{i\delta_i}$ по возрастанию номеров столбцов

$\det B = \sum\limits_{\delta \in S_n} sgn(\delta) * b_{1\delta(1)} * b_{2\delta(2)} * \ldots * b_{n\delta(n)} =$

Используем:

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \delta(1) & \delta(2) & \ldots & \delta(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta(1)^{-1} & \delta(2)^{-1} & \ldots & \delta(n)^{-1} \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$$

$sgn(\delta^{-1}) = sgn(\delta)$ так как $sgn(\delta * \delta^{-1}) = sgn(\delta) * sgn(\delta^{-1}) = 1$

$= \sum\limits_{\delta \in S_n} sgn(\delta^{-1}) b_{\delta^{-1}(1)1} b_{\delta^{-1}(2)2} * \ldots * b_{\delta^{-1}(n)n} = \sum\limits_{\delta \in S_n} sgn(\delta^{-1}) * a_{1\delta^{-1}(1)} * a_{2\delta^{-1}(2)} * \ldots * a_{n\delta^{-1}(n)}$

Переименуем $\tau = \delta^{-1}$

$= \sum\limits_{\tau \in S_n} sgn(\tau) * a_{1\tau_1} * \ldots * a_{n\tau_n} = \det A \blacksquare$

№2 Определитель линеен по строкам и столбцам т.е. пусть $A = (A_1, \ldots, A_n)$ – матрица как набор строк

Тогда:

а) $\det(A_1, \ldots, A_i' + A_i'', \ldots, A_n) = \det(A_1, \ldots, A_i', \ldots, A_n) + \det(A_1, \ldots, A_i'', \ldots, A_n)$

б) $\det(A_1, \ldots, \alpha * A_i, \ldots, A_n) = \alpha * \det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n)$

Пример:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3+x \\ 2 & 7+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & x \end{vmatrix} = (1*7 - 3*2) + x * \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - x$$

6 test

Замечание Для однородной СЛАУ $Ax = 0$ теорема Кронекера-К. выполняется всегда: $RgA = Rg(A|O)$ - всегда есть решения

Однородные СЛАУ

Рассмотрим ОСЛАУ $Ax = 0$ (где $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$

Определение: Любые $n - r$ линейно независимых столбцов (где $n - r$ - число неизвестных, $r = RgA$) является решениями однородных СЛАУ $Ax = 0$, называют фундаментальной системой решений (ФСР) однородной СЛАУ $Ax = 0$

Теорема: (о существовании ФСР): Рассмотрим ОСЛАУ $Ax = 0$ У неё $\exists$ $k = n - r$ (где n - число неизвестных), $r = RgA$) линейно независимых решений

$\square$ Предположим, что БМ, расположен в левом верхнем углу матрицы A. Пусть $RgA = R$

А = рисунок вставим потом1

По теореме о БМ строки $A_{r+1}, \ldots, A_m$ линейно выражаются через базисные строки $A_1, \ldots, A_r$

Сделаем элементарные преобразования: $A_{r+1} - > A_{r+1} - \alpha_1 A_1 - \ldots, \alpha_r * A_r$

$A_m - > A_m - \mu_1 A_1 - \ldots - \mu_r A_r$

Получим матрицу A', у которой последние $m - r$ строк равны 0

А = рисунок 2

Элементарные преобразования строк матрицы A (А следовательно и строк расширенной матрицы $(A|O)$) соответствуют эквивалентным преобразованиям уравнений исходной ОСЛАУ $Ax = 0 \Rightarrow$ исходная ОСЛАУ $Ax = 0$ эквивалентна СЛАУ $A'x = 0$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1r+1}xr+1 + \ldots + a_{11}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r + a_{rr+1}xr+1 + \ldots + a_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

Будем называть переменные, отвечающие базисны столбцам, главными (или базисными), а все остальные переменные свободными

В(*) $x_1, \ldots, x_r$ - главные (их $r = RgA$), $x_{r+1}, \ldots, x_n$- свободные (их $n - r$ штук)

Перепишем (*) так чтобы слева остались только главные переменные, а справа свободные

**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}xr+1 - \ldots - a_{11}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}xr+1 - \ldots - a_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

Присвоим свободные переменные $x_{r+1}, \ldots, x_n$ след. наборы значений

рисунок3

Для каждого набора решим СЛАУ (**)

Она всегда имеет решение, т.к. это СЛАУ с квадратной невырожденной матрицей (её $\det = M \neq 0$, т.к. это БМ) (решения можно найти например по формулам Крамера)

Получим следующие решения: рисунок4

$\Rightarrow$ столбцы рисунок5

являющиеся решениями СЛАУ (**) $\Leftrightarrow$ (*) $\Leftrightarrow$ исходной СЛАУ $Ax = 0$ (здесь $k = n - r = n - RgA$)

Покажем, что $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ линейно независимы. Составим матрицу $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_k)$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \ldots & \phi 1k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{r1} & \phi_{r2} & \ldots & \phi_{rk} \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

$M^{1,\ldots,k}_{r+1,\ldots,n} = |E| = 1 \neq 0 \Rightarrow$ это БМ в матрице Φ размера nxk $\Rightarrow$ по теореме о БМ столбцы $\phi_1, \ldots, \phi_k$ - линейно независимы $\Rightarrow$ по определению $k = n - r$ линейно независимых решений $\phi_1, \ldots, \phi_k$ образуют ФСР ОСЛАУ $Ax = 0$■

Замечание 1: Построенная в ходе доказательства ФСР называется нормальной (значения свободных переменных образуют столбцы единичной матрицы E т.е. в каждом столбце ФСР 1 свободная переменная = 1, остальные свободные переменные = 0)

Замечание 2: Различных ФСР бесконечно много (при $k = n - r >= 1$) т.к. значения свободных переменных можно брать любыми с условием, чтобы на них образовался БМ в матрице Φ ("таблице ФСР"), и тоже получим ФСР ($n - r$ линейно независимых решений)

Следствие (из теоремы о существовании ФСР): (Критерий существования ненулевого решения однородной квадратной СЛАУ)

пусть A - квадратная матрица. Тогда ОСЛАУ $Ax = 0$ имеет ненулевое решение $\Leftrightarrow$ $\det A = 0$

□ Необходимость ($\Rightarrow$): Дано: $Ax = 0$ Доказать: $\det A = 0$

Предположим противное

Предположим, что $\det A \neq 0$ $\Rightarrow$ по формулам Крамера СЛАУ имеет единственное решение, но всегда есть решение $x = 0 \Rightarrow$ других нет - противоречие

Достаточность ($\Leftarrow$): Дано: $\det A = 0$

Доказать: $\exists$ ненулевое решение

Если $\det A = 0 \Rightarrow RgA \leq n$ Пусть $RgA = r$ По теореме о существовании ФСР найдётся $n - r > 0$ линейно независимых решений - они и будут ненулевыми решениями (т.к. $\forall$ система, содержащая нулевой столбец является линейно зависимой) $\blacksquare$

Теорема: (о структуре общего решения ОСЛАУ)

Пусть $\phi_1, \ldots ,\phi_k$ - ФСР однор. СЛАУ $Ax = 0$ (где $k = n - r$, n - число переменных, $r = RgA$)

Тогда $\forall$ решение этой ОСЛАУ можно представить в виде линейной комбинации столбцов ФСР:

$x = c_1 * \phi_1 + \ldots + c_k * \phi_k$

$\square$ Пусть $x^o = (x_1^o, \ldots ,x_n^o)^T$ - произвольное решение ОСЛАУ $Ax = 0$. Покажем, что x^o линейно зависима через столбцы ФСР $\phi_1, \ldots ,\phi_k$

Предположим, что БП располжоена в левом верхнем углу матрицы A.

Тогда исходная СЛАУ эквивалентна следующей СЛАУ:

(1)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ \ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

Решим (1) относительно главных переменных $x_1, \ldots ,x_r$ (как решение матричного уравнения или методом Крамера или методом Гаусса) - всегда существует решение, т.к. это квадратная невырожденная СЛАУ (в левом углу БМ)

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{1r+1}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n \\ \ldots \\ x_r = \alpha_{r+r+1}x_r + \ldots + \alpha_{rn}x_n \end{cases}$$

Свойства сложения и умножения комплексных чисел

$$\forall z_1,z_2,z_3,z \in \mathbb{C}$$

$$\text{№1 } z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \text{ - коммутативность}$$

$$\text{№2 } (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \text{ - ассоциативность}$$

$$\text{№3 Существует нейтральный элемент по сложению - } O = (0,0) \in \mathbb{C} :$$

$$z + 0 = 0 + z = z \forall z \in \mathbb{C} \text{ (Ноль)}$$

$$\text{№4 } \forall z \in \mathbb{C} \exists -z \in \mathbb{C} : z + (-z) = -z + z = 0$$

Т.е.

$$\forall z \exists$$

противopололжный или обратный элемент по сложению.

$$\text{№5 } z_1 * z_2 = z_2 * z_1 \text{- коммутативность}$$

$$\text{№6 } z_1 * z_2 * z_3 = z_1 * z_2 * z_3 \text{- ассоциативность}$$

№7 $\exists e \in \mathbb{C} : z*e = e*z = z \forall z$ Существует единица - нейтральный элемент по умножению $(e = (1,0) =$

№8 $\forall z \neq 0 \exists z^{-1} \in \mathbb{C} : z * z^{-1} = z^{-1} * z = e$ Существует обратный элемент по умножению)

№9 $z_1 * (z_2 + z_3) = z_1 * z_2 + z_1 * z_3$ Дистрибутивность умножения относительно сложения

Замечание: Эти 9 свойств-аксиом числового поля котороые и позволяют называть комплексные числа числами

6.1 Тригонометрическая форма

Здесь будет картинка

Перейдём к полярным координатам (r, ϕ)

$$\begin{cases} x = r * cos\phi \\ y = r * sin\phi \end{cases}$$

Тогда:

$z = x+iy = r*cos\phi+ir*sin\phi = r(cos\phi+isin\phi) =$ тригонометрическая форма комплексного числа

Определение:

№1 $r = \sqrt{x^2 + y^2}-$ модуль комплексного числа (угол между положительным направлением веществ

Обозначение:

$\phi = Argz = \{argz+2\pi k | k \in \mathbb{Z}\}$, где arg z - главное значение аргумента, его выбирают произвольно н

6.2 Умножение и деление в тригонометрической форме

$$№1 \text{ Умножение. } z_1 * z_2 = r_1 * r_2(cos(\phi_1 + \phi_2) + isin(\phi_1 + \phi_2)$$

$$№2 \text{ Деление. } (z_2 \neq 0) : \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(cos(\phi_1 - \phi_2) - isin(\phi_1 - \phi_2))$$

$\square$Умножение: $z_1*z_2 = r_1*r_2*(cos\phi_1+isin\phi_1)*(cos\phi_2+isin\phi_2) = r_1*r_2 = (\underbrace{cos\phi_1 cos\phi_2 - sin\phi_1 * sin\phi_2} cos($

Теорема (Муавра)

$$\forall z \in \mathbb{C} \forall n \in \mathbb{N} z^n = r^n * cos(n\phi) + isin(n * \phi)$$

$$\square\text{По индукции: } n = 1 \Rightarrow z = r(cos\phi + isin\phi) = \text{ база индукции, верно}$$

$$\text{Пусть верно для} n = k, \text{ покажем для} n = k + 1 \text{ (шаг индукции)}$$

$$z^{k+1} = z^k * z = r^k(cosk\phi + isink\phi) * r * (cos\phi + isin\phi) = r^{k+1}(cos(k + 1)\phi + isin(k + 1)\phi)\blacksquare$$

6.3 Извлечение комплексного корня:

Теорема: $\forall$комплексное число $w \neq 0 (w \in \mathbb{C})$ имеет ровно n различных корней n-ой степени, т.е. так

□Как их найти?

№1 Представим w в тригонометрической форме: $w = \rho(cos\psi + isin\psi)(\rho, \psi$ даны по условию)

№2 Ищем корни тоже в тригонометрической форме: $z = r(cos\phi + isin\phi)$

№3 По условию $w = z^n \Rightarrow$ по формуле Муавра $z^n = r^n(cosn\phi + isinn\phi) = \rho(cos\psi + isin\psi)$

№4 Приравняем модули и аргументы:

$$z^n = w \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = \rho(\rho, r \in \mathbb{R}_1 > 0) \\ n\phi = \psi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{p} \\ \psi = \dfrac{\psi + 2\pi k}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

5. Заметим, что достаточно брать $k = \overline{0,n-1}$ т.к. начиная с $k = n$ корни станут повторяться $\Rightarrow$ Су

$$\Rightarrow \sqrt[n]{w} = \{\sqrt[n]{p}(cos(\frac{\psi + 2\pi k}{n}) + isin(\frac{\psi + 2\pi k}{n})|k = \overline{0,n-1}\}\blacksquare$$

6.4 Геометрическая интерпретация

При

$$k = 0, \phi_0 = \frac{\psi}{n}$$

соответствует первому корню, $\dfrac{2pi}{n}$ - угол между соседними корнями - "шаг"

Здесь будет картиночка чуть позже

Корни лежат в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{\rho}$ При этом 1-ый корень z_0 имеет аргумент $\phi_0 = \dfrac{\psi}{n}$, а каждый следующий корень получен поворотом на угол $\dfrac{2\pi}{n}$

Пример:

$\sqrt[6]{1}$ - Найти все комлексные корни

$$1 = 1 * (cos0 + isin0) \Rightarrow \rho = 1, \psi = 0(+2\pi k)$$

$$\sqrt[6]{1} = \{\sqrt[6]{1}(cos\frac{0 + 2\pi k}{6} + isin\frac{0 + 2\pi k}{6}, k = \overline{0,5}\} = \{cos\frac{\pi k}{3} + sin\frac{\pi k}{3}, k = \overline{0,5}\}$$

$$k = 0 \Rightarrow \phi_0 = 0, \text{ шаг } = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

Здесь будет ещё один рисуночек

6.5 Формула эйлера

$\boxed{e^{i\phi} = cos\phi + isin\phi}$ $\forall \phi \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} cos\phi = Fe * e^{i\phi} \\ sin\phi = Im * e^{i\phi} \end{cases}$$

Замечание: Тождество Эйлера: $\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$
Следствие:

$$\begin{cases} e^{i\phi} = cos\phi + isin\phi \\ e^{-i\phi} = cos\phi - isin\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2cos\phi = e^{i\phi} + e^{-i\phi} \\ 2sin\phi = e^{i\phi} - e^{-i\phi} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boxed{cos\phi = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} \text{ и } sin\phi = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2}}$$

6.6 Комплексные многочлены

Теорема: "Основная"теорема алгебры
Для любого многочлена с комплексными коэффициентами:

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + z_0, a_i \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$$

Существует корень уравнения $f(z) = 0$, и этот корень всегда принадлежит $\mathbb{C}$

Замечание: Это утверждение означает, что поле комплексных чисел алгебраически замкнуто. (у $\forall$ многочлена с коэффициентами из $\mathbb{C}$ есть корень из $\mathbb{C}$)

Это не так для $\mathbb{Q}$ (например $x^2 - 2$ имеет корень $\sqrt{2} \notin Q$)
и не так для $\mathbb{R} : x^2 + 1$ имеет комплексные корни $\pm i \notin \mathbb{R}$

Теорема (Безу) Остаток от деления много члена $f(x)$ на x-c (что?) есть $f(c)$

$\square$ Разделим $f(x)$ с остатком на x-c: $f(x) = (x - c) * Q(x) + R(x)$, где deg $R(x) < deg(x - c) = 1 \Rightarrow$ остаток $R(x) = const \Rightarrow f(c) = (c - c)Q(c) + const \Rightarrow R(x) = f(c)$■

Определение: Разложение многочлена $f(x) = g(x) * h(x)$ будем называть нетривиальным если

$$\begin{cases} \deg g < \deg f \\ \deg h < \deg f \end{cases}$$

,где $deff$ - степень многочлена

Пример: $(x^2 + 1)(x - 1)$ - нетривиальный т.к.

$$\begin{cases} 2 < 3 \\ 1 < 3 \end{cases}$$

Определение: Многочлен называется приводимым если существует нетривиальное разложение $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ и неприводимым в противном случае

Утверждение: Любой многочлен степени $n \in \mathbb{N}$ раскладывается в произведение неприводимых многочленов

Частные случаи

№1 Многочлен над $\mathbb{C}$ (с коэффициентами из $\mathbb{C}$) степени n всегда разлагается в произведение степеней линейных множителей

$f(z) = a_n(z - z_1)^{\alpha_1} \ldots (z - z_k)^{\alpha_k}$, где $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = n$,$\alpha_i \in \mathbb{N}$ - кратности корней, $z_i \in \mathbb{C}$ - корни многочлена, $a_n \in \mathbb{C}$

№2 Разложение над $\mathbb{R}$

Утверждение: Если $z_0 \in \mathbb{C}$ является корнем нмогочлена с вещественными корнями, то и z_0 тоже является корнем этого многочлена

$\square$ Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$ - корень $f(x) \Rightarrow f(z_0) = 0$, т.е. $f(z_0) = a_n \cdot z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \ldots + a_1 z_0 + a_0 = 0$ (*)

Рассмотрим комплексное сопряжение равенства (*) $\overline{f(z_0)} = \overline{a_n} \cdot \overline{z_0^n} + \overline{a_{n-1}} \overline{z_0^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1 z_0} + \overline{a_0} = \overline{0} = 0$

Но $a_i \in \mathbb{R}$ по условию $\Rightarrow \overline{a_i} = a_i \Rightarrow a_n \cdot \overline{z_0^n} + a_{n-1} \overline{z_0^{n-1}} + \ldots + a_1 \overline{z_0} + a_0 \Leftrightarrow f(\overline{z_0}) = 0$, т.е. $\overline{z_0}$ - тоже корень $f(x)$$\blacksquare$

Замечание: $(z - z_0)(z - \overline{z_0}) = z^2 - z_0 \cdot z - \overline{z_0} \cdot z + z_0 \cdot \overline{z_0} = z^2 - (z_0 + \overline{z_0}) \cdot z + |z_0|^2 =$ (если $z_0 = x + iy, \overline{z_0} = x - iy \Rightarrow z_0 + \overline{z_0} = 2x = 2Re\ z_0 \in \mathbb{R}$)

$= z^2 - \underbrace{2Re z_0}_{\in \mathbb{R}} \cdot z + \underbrace{|z_0|^2}_{\in \mathbb{R}}$ многочлен от z с вещественными коэффициентами

Соответственно, разложение на неприводимые множители над R имеет вид:

$f(x) = a_n (x - c_1)^{k_1} \ldots (x - c_s)^{k_s} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \ldots (x^2 + p_t x + q_t)^{l_t}$, где

$a_n, c_i, p_j, q_j \in \mathbb{R}, k_i, l_j, \in \mathbb{N}$

Здесь квадратичные сомножители не имеют вещественных корней, а обладают парой комплексных сопряжённых коренй с ненулевой мнимой частью (дискриминант $D < 0$)

Теорема Виета

Пусть $c_1, \ldots, c_n$ - корни многочлена степени n

$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$

$$\begin{cases} a_1 = -(c_1 + \ldots + c_n) \\ a_2 = c_1 c_2 + c_1 c_3 + \ldots + c_{n-1} c_n \\ \vdots \\ a_n = (-1)^n \cdot c_1 \ldots c_n \end{cases}$$

Т.е. $(-1)^j a_j$ равно сумме всех возможных произведений j корней

Пример $(n = 3)$**:**

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = -a \\ c_1 \cdot c_2 + c_1 \cdot c_3 + c_2 \cdot c_3 = b \\ c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 = -c \end{cases}$$

На этом комплексное заканчивается

7 Аналитическая геометрия

Определение: Угол между векторами a и b.

Отложим a и b из одной точки, назовём углом ϕ между векторами a и b наименьший из двух плоских углов которые они образуют, т.е. $\phi \in [0, \pi]$

Определение: Если $\phi = \dfrac{\pi}{2}$, то векторы называются ортогональными. Нулевой вектор ортогонален любому вектору

Определение: Ортогональная проекция вектора $\overline{a}$ на нправлении вектора $\overline{b} (\overline{b} \neq 0)$

№1 скалярная - число $\text{Пр}_{\overline{b}}^{\overline{a}} = |a| \cdot cos\phi$, где ϕ - угол между $\overline{a}$ и $\overline{b}$

№2 векторная - вектор $\overline{\text{Пр}_{\overline{b}}^{\overline{a}}} = |\overline{a}| \cdot cos(\phi) \cdot \dfrac{\overline{b}}{|\overline{b}|}$

Определение: Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называют коллинеарными, если они лежат на одной либо параллельных прямых

Замечание: Нулевой вектор коллинеарен любому вектору

Замечание: Коллинеарные векторы a и b могут быть сонаправленными ($a \upuparrows b$) или противоположно направленными ($\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$)

Определение: Векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ называются компланарными, если они лежат на прямых, параллельных фиксированной плоскости (т.е. если их отложить из одной точки, они лежат в одной плоскости)

Определение: Скалярное произведение векторов - это функция, ставящая в соответствие паре векторов число, удовлетворяющее следующим свойствам: Для любых векторов a,b,c и для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1. $(a,b) = (b,a)$ - симметричность
2. $(\alpha a + \beta b, c) = \alpha(ac) + \beta(b,c)$ - линейность
3. $(a,a) \geqslant 0$ и $(a,a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ - положительная определённость

Замечание: В V_3 скалярное произведение задаётся, как $(a,b) = |a| \cdot |b| \cdot cos\widehat{a,b}$

Определение: Базис - это упорядоченный набор векторов $a_1, \ldots, a_k$ такой что

1. $a_1, \ldots, a_k$ - линейно независимы 2. Любой вектор линейно зависим через $a_1, \ldots, a_k$

Определеие: Матрицей Грама базиса $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ в V_3 называется матрица, состоящая из попарных скалярных произведений этих векторов

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (e_1,e_1) & (e_1,e_2) & (e_1,e_3) \\ (e_2,e_1) & (e_2,e_2) & (e_2,e_3) \\ (e_3,e_1) & (e_3,e_2) & (e_3,e_3) \end{pmatrix}$$

Утверждение: Пусть $\overline{a} = a_1\overline{e_1} + a_2\overline{e_2} + a_3\overline{e_3}$

$\overline{b} = b_1\overline{e_1} + b_2\overline{e_2} + b_3\overline{e_3}$

- разложение векторов a и b по базису e

$$\text{Тогда } \boxed{(\overline{a}, \overline{b})} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (e_1,e_1) & (e_1,e_2) & (e_1,e_3) \\ (e_2,e_1) & (e_2,e_2) & (e_2,e_3) \\ (e_3,e_1) & (e_3,e_2) & (e_3,e_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_e^T \Gamma b_e$$

, где

$$a_e = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, b_e = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

- координаты векторов a и b в базисе e_1, e_2, e_3

□ ■

Определение: Упорядоченную тройку векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ называют правой тройкой, если со стороны вектора $\overline{c}$ (с конца) кратчайший поворот от вектора $\overline{a}$ до вектора $\overline{b}$ происходит против часовой стрелки

В противном случае тройка векторов называется **левой** (если поворот по часовой стрелке)

Определение: Вектор $\overline{c}$ называется векторным произведением векторов a и b если выполняются 3 свойства

1. $|c| = |a| \cdot |b| \cdot sin(\phi)$, где ϕ - угол между $\overline{a}$ и $\overline{b}$
2. $\overline{c} \perp \overline{a}, c \perp b$ (ортогонален a и b)
3. a,b,c - правая тройка

Скалярное произв.	**Векторное произв.**	**Смешанное произв.**
$(.,.) : V_3 \times V_3 \to \mathbb{R}$ (число). Обозн.: $\langle x,y \rangle$, $x \cdot y$.	$[.,.] : V_3 \times V_3 \to V$ (вектор). Обозн.: $[x,y]$, $x \times y$.	
Опр. $(a,b) = \lvert a \rvert \lvert b \rvert \cos(\hat{a},\hat{b})$ в V_3.	Опр. $c = [a,b]$, $a,b \in V_3$. 1) $\lvert c \rvert = \lvert a \rvert \lvert b \rvert \sin(\hat{a},\hat{b})$.	
Геом. св-ва: $(a,b) = 0 \Leftrightarrow a \perp b$ (a ортогонален b).		
Алгебр. св-ва: 1) Линейность 2) Симметричность 3) Полож.опр-ть $(a,a) \geq 0$ и $(a,a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$.		
Вычисл. в координатах: В ОНБ: $(a,b) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ В произв. б-се: $(a,b) = a^T\Gamma b$.		
Геом. приложения: $\lvert a \rvert = \sqrt{(a,a)} = \sqrt{a^2}$ $\cos(a^\circ) = \dfrac{(a,b)}{\lvert a \rvert \lvert b \rvert}$ Про а $= \dfrac{(a,b)}{(b,b)}b$.		

Утверждение 1 Векторы a и b коллинеарны ($a \parallel b$) $\Leftrightarrow [a,b] = 0$

$\square \Rightarrow$ Пусть $a \parallel b \Rightarrow$ либо $sin\phi = 0 (\phi = 0 \phi = \pi)$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \quad \text{хотя бы один} \Rightarrow |[a,b]| = 0 \Rightarrow [a,b] = 0$$

$\Leftarrow$ Пусть $[a,b] = 0$. Если один из них $= 0 \Rightarrow$ коллинеарны по определению. Если оба $\neq 0$, то из $|[a,b]| = 0 \Rightarrow sin\phi = 0 \Rightarrow a \parallel b$ ■

Определение: Базис e_1,e_2,e_3 называется правым если тройка векторов e_1,e_2,e_3 правая, и левым если тройка левая.

Далее будем полагать, что рассматривается правый ортонормированный базис $\{i,j,k\}$

Утверждение:

$$[a,b] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \bar{i}(a_yb_z - a_xb_y) + \bar{j}(a_zb_x - a_xb_z) + \bar{k}(a_xb_y - a_yb_z)$$

, где $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$ и $\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}$

$\square[a,b] = [a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}, b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}] = a_xb_x\underbrace{[i,i]}_{=0} + a_xb_y\underbrace{[i,j]}_{=k} + a_xb_z + a_xb_z\underbrace{[i,k]}_{=-j} + a_yb_x\underbrace{[j,i]}_{=-k} + a_yb_y\underbrace{[j,j]}_{=0} + a$

$= i(a_yb_z - a_zb_y) + j(a_zb_x - a_xb_z) + k(a_xb_y - a_yb_x)$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

■

8 Смешанное произведение

Смешанным произведением Смешанным произведением векторов a,b и c называется число $([a,b],c)$

Обозначение: $< a,b,c >$

Утвереждение: Пусть V - объём параллелепипеда построенного на неколлинеарных векторах a,b,c

Тогда:

$$< a,b,c >= \begin{cases} V \text{если a,b,c - правая тройка} \\ -V \text{если a,b,c - левая тройка} \end{cases}$$

$|[a,b]| = S$ параллелограмма на векторах a и b

Обозначим за $\bar{l}$ единичный ортогональный $\bar{l} \uparrow\uparrow [a,b] \Rightarrow [a,b] = S \cdot \bar{l} \Rightarrow < a,b,c >= ([a,b],c) = (S \cdot \bar{l}, \bar{c}) = S * \cos\phi$, где ϕ - угол между c

и $\phi \in (\frac{\pi}{2}; \pi]$, если a,b,c - левая $\Rightarrow \cos\phi < 0 \Rightarrow |c| * \cos\phi = -h(\phi \neq \frac{\pi}{2}$так как a,b,c не компланарны)

Таким образом

$$< a,b,c >= \begin{cases} S \cdot h = V \text{если a,b,c - правая тройка} \\ -S \cdot h = -V \text{если a,b,c - левая тройка} \end{cases}$$

$\blacksquare$

Следствие 1 a,b,c - компанарны $\Leftrightarrow < a,b,c >= 0$

$\square \Rightarrow$ Пусть a,b,c - компланарны. Если $a \parallel b$, то $[a,b] = 0 \Rightarrow < a,b,c >= 0$

Если $a \nparallel b$, то $[a,b] \perp c$ (так как c компланарен a и b) $\Rightarrow < a,b,c >= 0$

9 Прямоугольная декартова система координат

Определение: Прямоугольной декартовой системой координат (ПДСК) будем называть пару состоящуюю из

10 Теория Групп. Начало общей алгебры

10.1 Алгебраические структуры

$$\boxed{\text{множество}} \xrightarrow[\text{опер.}]{} \underbrace{\boxed{\text{группоид}} \xrightarrow[\text{ассоц. оп.}]{} \boxed{\text{полугруппа}} \xrightarrow[\text{нейтр. эл.}]{} \boxed{\text{моноид}} \xrightarrow[\text{любой эл-т обратим}]{} \boxed{\text{группа}}}_{\text{алгебраические структуры}}$$

Эквивалентное определение группы

Множество G с бинарной операцией $\times$ называется группой, если:

1) $\forall a, b, c \in G \ (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ — ассоциативность

2) $\exists e \in G \ \forall x \in G \ e \times x = x \times e = x$ (существует нейтральный элемент)

3) $\forall x \in G \ \exists x^{-1} \in G : x \times x^{-1} = x^{-1} \times x = e$ (любой элемент обратим)

Пример

Множество всех невырожденных матриц порядка n с операциями матричного умножения
Обозначение: $GL_n(\mathbb{R})$ — общая линейная группа

Пример

Множество подстановок длины n с операцией композиции образует группу S_n
Она называется симметрической группой

Определение

Порядком группы G называется число элементов в ней (мощность группы)
Обозначение: $|G|$

Пример

$$|GL_n(\mathbb{R})| = \infty,\ |S_n| = n!$$

Определение

Группа с коммутативной бинарной операцией называется абелевой

Пример

$$(\mathbb{Z}, +) \text{ — абелева группа}$$

Определение

Подмножество $H \subseteq G$ называется подгруппой в группе G, если:

1) $e \in H$
2) $\forall h_1, h_2 \in H : h_1 \times h_2 \in H$ (замкнутость относительно бинарной операции)
3) $\forall h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H$ (замкнутость относительно взятия обратного элемента)

Другими словами, само H является группой относительно операций в $(G, \times)$, (т.е групповой операции)

Пример

1) $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) | \det A = 1\}$ — специальная линейная подгруппа (т.к $\det(E) = 1, \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = 1 \cdot 1 = 1, \det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} = \dfrac{1}{1} = 1)$
2) $A_n = \{\delta \in S_n | sgn\ \delta = 1\}$ — подгруппа, четных подстановок длины n. Она называется знакопеременной
   $\prod\limits_{i<j}(x_i - x_j)$ — знакопеременный многочлен, det Вандермонда. Подстановки из A_n не меняют его знак

Определение

Подгруппа H называется собственной подгруппой в G, если $H \neq \{e\}, H \neq G, (SL_n(\mathbb{R})_n A_n$ — собств. подгруппы в $GL_n(\mathbb{R})$ и S_n соотв.)

$$|A_n| = \frac{n!}{2}$$

Критерий подгруппы

Пусть H — подмножество в группе G.
H является подгруппой $\Leftrightarrow \forall h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1 \times h_2^{-1} \in H$

□ Необходимость ($\Rightarrow$). Дано, что H-подгруппа. Тогда $\forall h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_2^{-1} \in H$ по определению, $\Rightarrow$ и произведение двух элементов h_1 и h_2^{-1} из H тоже лежит в H

Достаточность ($\Leftarrow$)

Дано: $\forall h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1 \times h_2^{-1} \in H$

Доказать:

1) $e \in H$
2) $h_1 \times h_2 \in H \ \forall h_1, h_2 \in H$
3) $h^{-1} \in H \ \forall h \in H$

Поскольку h_1 и h_2 произвольны, возьмем $h_2 = h_1 \Rightarrow h_1 \times h_1^{-1} \in H$, то есть $e \in H \Rightarrow$ выполнено 1)

Возьмем $h_1 = e \Rightarrow \forall h_2 \in H \Rightarrow h_2^{-1} \in H$, т.е выполнено 3)

Пусть $h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_2^{-1} \in H$. Следовательно, $h_1 \times (h_2^{-1})^{-1} \in H$, то есть $h_1 \times h_2 \in H \Rightarrow$ выполнено 2) ■

10.2 Гомоморфизмы

Определение

Отображение, $f : G_1 \to G_2$. (Здесь $(G_1, \times)$ и $(G_2, \circ)$ — группы) называется гомоморфизмом групп, если $\boxed{\forall a, b \in G \Rightarrow f(a \times b) = f(a) \circ f(b)}$. Говорят, что f *уважает* операцию.

Пример

1) $\det : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^\times = (R \setminus \{0\}, \cdot)$ — группа

   Т.е $A \xrightarrow{\det} \det A \in \mathbb{R}^\times \ \forall A \in GL_n(\mathbb{R})$

   ($\det A \cdot B = \det A \cdot \det B \Rightarrow \det$ — гомоморфизм групп)

2) $G_1 = (\mathbb{R}_+, \cdot)$ — группа$\{x \in \mathbb{R} | x > 0\}, G_2 = (\mathbb{R}, +)$

   Рассмотрим $f = \ln x, f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

   $\forall a, b \in G_1 (a > 0, b > 0) \Rightarrow \ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b \in G_2$ — уважает операцию $\Rightarrow$ логарифм — гомоморфизм групп.

Определение

Инъективный гомоморфизм называется мономорфизмом.

Определение

Сюръективный гомоморфизм называется эпиморфизмом.

Определение

Биективный гомоморфизм называется изоморфизмом.

Пример

1) $\det$ — эпиморфизм

2) $\ln x$ — изоморфизм

Замечание

Если две группы изоморфны, то они тождественно неразличимы с точки зрения алгебры.
Обозначение $G_1 \cong G_2$ (G_1 и G_2 изоморфны)

Пример

1) $(\mathbb{R}_+, \cdot) \cong (\mathbb{R}, +)$

2) G_1 — группа движений (т.е отображений, переводящих фигуру в себя) правильного треугольника на плоскости:

   - повороты (p_0 – тождественное отображение, $p_{\frac{2\pi}{3}}, p_{\frac{4\pi}{3}} = p_{-\frac{2\pi}{3}}$)

   - отражения относительно осей симметрии (s_1, s_2, s_3)

   Закодируем движения фигуры подстановками из S_3)

   $G_2 = S_3 = \{Id, (12), (13), (23), (123), (132)\}$

   $p_0 \sim Id$

   $p_{\frac{2\pi}{3}} \sim (123)$

   $p_{\frac{4\pi}{3}} \sim (123)^2 = (132)$

   $s_1 \sim (23)$

   $s_2 \sim (13)$

   $s_3 \sim (12)$

   Построили гомоморфизм, даже изоморфизм.

Определение

Группа диэдра — группа движений (симметрий) правильного n-угольника на плоскости, включающая вращения и отражения, переводящие фигуру в себя.
Обозначение: D_n, $|D_n| = 2n$, так как там есть n вращений вокруг центра и n отражений (осевых симметрий)

Замечание

$D_3 \cong S_3$ (пр.2)

10.3 Таблица Кэли

Определение

Таблица Кэли алгебраической структуры (в частности, группы) называется матрица:

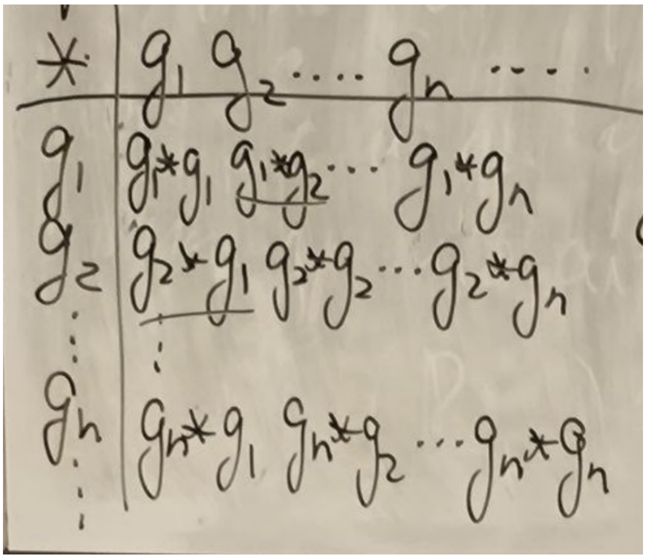

Рис. 1: таблица умножения

Примечание

Если таблица Кэли симметрична, то группа абелева

Примечание

Если G-группа, то в ее таблице Кэли каждый элемент встречается только 1 раз в каждой строке и каждом столбце

☐ Так как если $g_1 \times g_2$