New Spaces from Old*

いんてぐま（@integmath）

2021 年 12 月 6 日

概要

集合 X と位相空間族 $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ とが与えられたとき，X から X_λ への，あるいは X_λ から X への写像族を用いて X にいい感じの位相を定めることができる．

目次

* 本稿の内容は主に Dugundji [3, Chap. IV, VI] に依るが，命題番号等にいちいち言及することはしなかった．

1　簡単な復習

集合 X とその “開集合系”$\tau(X)$ との組 $(X,\tau(X))$ を**位相空間**という．このとき，$\tau(X)$ を X の**位相**ともいう．また，$\tau^c(X) \coloneqq \{C \subset X \mid X \smallsetminus C \in \tau(X)\}$ を位相空間 $(X,\tau(X))$ の**閉集合系**という．部分集合 $A \subset X$ に対して，A を含む X の開集合全体，すなわち A の**開近傍**全体を $\tau(A,X)$ で表わす．点 $x \in X$ に対して，$\tau(\{x\},X)$ を単に $\tau(x,X)$ と書く．

位相空間 $(X,\tau(X))$ の部分集合 $A \subset X$ に対して，

$$\overline{A} = \mathrm{cl}_X(A) \coloneqq \bigcap\{C \in \tau^c(X) \mid A \subset C\},$$

$$\mathrm{int}(A) = \mathrm{int}_X(A) \coloneqq \bigcup \{U \in \tau(X) \mid U \subset A\}$$

を，それぞれ A の（X における）**閉包**，**開核**という．$A \subset X$ が閉集合（resp. 開集合）であるためには，$\overline{A} = A$（resp. $\mathrm{int}(A) = A$）となることが必要かつ充分である．

位相空間の間の写像 $f\colon (X, \tau(X)) \to (Y, \tau(Y))$ が与えられたとする．このとき，任意の $V \in \tau(Y)$ に対して $f^{-1}(V) \in \tau(X)$ が成り立つならば，f を**連続写像**という；任意の $U \in \tau(X)$ に対して $f(U) \in \tau(Y)$ が成り立つならば，f を**開写像**という；任意の $C \in \tau^c(X)$ に対して $f(C) \in \tau^c(Y)$ が成り立つならば，f を**閉写像**という．また，連続写像 $f\colon (X, \tau(X)) \to (Y, \tau(Y))$ に対して，連続写像 $g\colon (Y, \tau(Y)) \to (X, \tau(X))$ であって $g \circ f = \mathrm{id}_X$，$f \circ g = \mathrm{id}_Y$ となるものが存在するとき，f を**同相写像**という．とくに，全単射連続写像 f が同相写像であるためには，f が開写像（resp. 閉写像）であることが必要かつ充分である．

位相空間 X の部分集合 A が与えられたとする．このとき，A の任意の開被覆が有限部分被覆をもつならば，A を**コンパクト集合**という．X 自身がコンパクト集合であるとき，とくに**コンパクト空間**という．位相空間 X の任意の 2 点 $x, y \in X$，$x \neq y$，が交わらない開近傍をもつとき，X を **T_2 空間**，または **Hausdorff 空間**という．

1.0.1 命題. つぎが成り立つ：

(i) コンパクト空間の閉集合はコンパクトである．
(ii) コンパクト空間の連続像はコンパクトである．
(iii) T_2 空間のコンパクト集合は閉集合である．
(iv) コンパクト空間から T_2 空間への連続写像は閉写像である．
(v) コンパクト T_2 空間 X の任意の点 $x \in X$ とその開近傍 $U \in \tau(x, X)$ が与えられたとする．このとき，$V \in \tau(x, X)$ であって $\overline{V} \subset U$ となるものが存在する．

証明. (i) コンパクト空間 X の閉集合 $A \subset X$，およびその開被覆 $\mathcal{U}$ が与えられたとする．このとき，$\mathcal{U} \cup \{X \setminus A\}$ はコンパクト空間 X の開被覆であるから有限部分被覆を持つ．

(ii) コンパクト空間 X からの全射連続写像 $f\colon X \to Y$ が与えられたとする．このとき，Y の開被覆 $\mathcal{V}$ に対して，$\left\{f^{-1}(V) \,\middle|\, V \in \mathcal{V}\right\}$ はコンパクト空間 X の開被覆であるから有限部分被覆を持つ．

(iii) X を T_2 空間，$K \subset X$ をそのコンパクト集合とする．$x \in X \setminus K$ とする．任意

の $y \in K$ に対して，$V_y \in \tau(x, X)$，$W(y) \in \tau(y, X)$ であって，$V_y \cap W(y) = \varnothing$ となるものが存在する．このとき，$\{W(y) \mid y \in K\}$ はコンパクト集合 K の開被覆であるから有限部分被覆 $\{W(y_1), \dots, W(y_n)\}$ を持つ．そこで，$W = \bigcup W(y_i)$，$V = \bigcap V_{y_i}$ とおくと，$V \cap W = \varnothing$ となるから，$x \in V \subset X \setminus W \subset X \setminus K$ が成り立つ．よって，$X \setminus K$ は開集合，すなわち $K \in \tau^c(X)$ を得る．

(iv) (i)，(ii)，(iii) よりしたがう．

(v) $X \setminus U \in \tau^c(X)$ であるから，(i) より $X \setminus U$ はコンパクトである．したがって，(iii) の証明と同様にして $V \in \tau(x, X)$，$W \in \tau(X \setminus U, X)$ であって，$V \cap W = \varnothing$ となるものの存在がわかる．この V に対して，$\overline{V} \subset \overline{X \setminus W} = X \setminus W \subset U$ が成り立つ． □

2 ドメインに誘導される位相

2.1 写像によって誘導される位相

2.1.1 定義． 集合 X と位相空間 $(Y, \tau(Y))$，および写像 $f\colon X \to Y$ が与えられたとする．このとき，

$$f^{-1}(\tau(Y)) = \{f^{-1}(U) \mid U \in \tau(Y)\}$$

とおくと，これは X の位相を定める．この位相を **f によって X に誘導される位相**，あるいは単に（f による）**誘導位相（induced topology）**という．

2.1.2 注意． 誘導位相の定義からつぎがわかる：

- $f\colon (X, f^{-1}(\tau(Y))) \to (Y, \tau(Y))$ は連続である．
- f が全射ならば，$f\colon (X, f^{-1}(\tau(Y))) \to (Y, \tau(Y))$ は開写像かつ閉写像である．

2.1.3 注意． より一般に，X の部分集合 $A \subset X$ 上で定義された写像 $f\colon A \to Y$ に対して，$\left\{f^{-1}(U) \,\middle|\, U \in \tau(Y)\right\}$ で生成される位相も同じ記号 $f^{-1}(\tau(Y))$ で表わす．

2.1.4 補題． 集合 X と位相空間 $(Y, \tau(Y))$，および写像 $f\colon X \to Y$ が与えられたとする．このとき，$(f^{-1}(\tau(Y)))^c = f^{-1}(\tau^c(Y)) \coloneqq \left\{f^{-1}(C) \,\middle|\, C \in \tau^c(Y)\right\}$ が成り立つ．

証明． 任意の $U \in \tau(Y)$ に対して，

$$X \setminus f^{-1}(U) = f^{-1}(Y \setminus U)$$

が成り立つことからわかる． □

2.1.5 定理 (誘導位相の普遍性)**．** 位相空間 $(Z, \tau(Z))$ と写像 $g\colon Z \to X$ とが与えられたとする．このとき，写像 $g\colon (Z, \tau(Z)) \to (X, f^{-1}(\tau(Y)))$ が連続であるためには，合成 $f \circ g\colon (Z, \tau(Z)) \to (Y, \tau(Y))$ が連続であることが必要かつ充分である：

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "fg"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y. \end{tikzcd}$$

証明． 必要性は明らかなので充分性を示す．$U \in \tau(Y)$ とする．このとき，

$$g^{-1}(f^{-1}(U)) = (f \circ g)^{-1}(U) \in \tau(Z)$$

が成り立つ．よって，$g\colon (Z, \tau(Z)) \to (X, f^{-1}(\tau(Y)))$ は連続である． □

2.1.6 系． 誘導位相 $f^{-1}(\tau(Y))$ は $f\colon X \to Y$ が連続となるような X の位相のうち最も粗い，すなわち最も開集合が少ないものである．

証明． 写像 $f\colon (X, \tau(X)) \to (Y, \tau(Y))$ が連続であるとする．このとき，誘導位相の普遍性 (2.1.5) より $\mathrm{id}_X\colon (X, \tau(X)) \to (X, f^{-1}(\tau(Y)))$ は連続，すなわち $\tau(X) \supset f^{-1}(\tau(Y))$ が成り立つ：

$$\begin{tikzcd} (X, \tau(X)) \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] \arrow[dr, "f"'] & (X, f^{-1}(\tau(Y))) \arrow[d, "f"] \\ & (Y, \tau(Y)). \end{tikzcd}$$

□

2.1.7 命題 (誘導位相の推移性)**．** 集合 X，Y と位相空間 $(Z, \tau(Z))$，および写像 $f\colon X \to Y$，$g\colon Y \to Z$ が与えられたとする．このとき，X 上の二つの誘導位相 $(g \circ f)^{-1}(\tau(Z))$ と $f^{-1}(g^{-1}(\tau(Z)))$ とは一致する．

証明． 任意の開集合 $U \in \tau(Z)$ に対して，$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ が成り立つ． □

2.2 相対位相

2.2.1 定義． 位相空間 $(Y, \tau(Y))$ と部分集合 $X \subset Y$ が与えられたとする．このとき，包含写像 $i\colon X \to Y$ によって X に誘導される位相

$$\tau(Y)|X \coloneqq i^{-1}(\tau(Y)) = \{U \cap X \mid U \in \tau(Y)\}$$

を相対位相（**relative topology**）といい，$(X, \tau(Y)|X)$ を $(Y, \tau(Y))$ の部分空間（**subspace**）という．

2.2.2 命題 (相対位相の推移性)**.** 位相空間 $(Z, \tau(Z))$ が与えられたとする．このとき，その部分集合 $X \subset Y \subset Z$ に対して，$\tau(Z)|X = (\tau(Z)|Y)|X$ が成り立つ，すなわち "部分空間の部分空間は部分空間である"． □

2.2.3 命題. $(\tau(Y)|X)^c = \tau^c(Y)|X$ が成り立つ，すなわち部分集合 $A \subset X$ が相対位相に関して閉集合であるためには，$C \in \tau^c(Y)$ であって $A = C \cap X$ となるものが存在することが必要かつ充分である． □

2.2.4 系. 位相空間 $(Y, \tau(Y))$ とその部分集合 $X \subset Y$ とが与えられたとする．このとき，

(i) $X \in \tau(Y)$ ならば $\tau(Y)|X \subset \tau(Y)$ が成り立つ．

(ii) $X \in \tau^c(Y)$ ならば $\tau^c(Y)|X \subset \tau^c(Y)$ が成り立つ．

すなわち，"開集合（resp. 閉集合）の開集合（resp. 閉集合）は開集合（resp. 閉集合）である"． □

2.2.5 系. 位相空間 $(Y, \tau(Y))$ とその部分集合 $X \subset Y$ とが与えられたとする．このとき，部分空間 $(X, \tau(X) \coloneqq \tau(Y)|X)$ の任意の部分集合 $A \subset X$ に対して，つぎが成り立つ：

$$\mathrm{cl}_X(A) = \mathrm{cl}_Y(A) \cap X, \ \mathrm{int}_X(A) \supset \mathrm{int}_Y(A) \cap X.$$

証明. 閉包の定義，および 2.2.3 より，

$$\begin{aligned}
\mathrm{cl}_X(A) &= \bigcap \{C_X \in \tau^c(X) \mid A \subset C_X\} \\
&= \bigcap \{C \cap X \mid C \in \tau^c(Y), \ A \subset C\} \\
&= \left(\bigcap \{C \in \tau^c(Y) \mid A \subset C\}\right) \cap X \\
&= \mathrm{cl}_Y(A) \cap X
\end{aligned}$$

が成り立つ．同様に，開核の定義より，

$$\begin{aligned}
\mathrm{int}_X(A) &= \bigcup \{U_X \in \tau(X) \mid U_X \subset A\} \\
&= \bigcup \{U \cap X \mid U \in \tau(Y), \ U \cap X \subset A\} \\
&\supset \bigcup \{U \cap X \mid U \in \tau(Y), \ U \subset A\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Bigl(\bigcup\{U \in \tau(Y) \mid U \subset A\}\Bigr) \cap X \\
&= \mathrm{int}_Y(A) \cap X
\end{aligned}
$$

が成り立つ． $\square$

連続写像のドメイン，またはコドメインを部分空間に制限した写像はまた連続になる：

2.2.6 命題． 連続写像 $f\colon (Y,\tau(Y)) \to (Z,\tau(Z))$ の，部分空間 $(X,\tau(Y)|X)$ への制限

$$f|X \coloneqq f \circ i\colon (X,\tau(Y)|X) \to (Z,\tau(Z))$$

は連続である． $\square$

2.2.7 定理 (部分空間の普遍性)**．** 位相空間 $(Z,\tau(Z))$ と連続写像 $g\colon (Z,\tau(Z)) \to (Y,\tau(Y))$ とが与えられたとする．このとき，$g(Z) \subset X$ が成り立つならば，連続写像 $X|g\colon (Z,\tau(Z)) \to (X,\tau(Y)|X)$ であって $i \circ (X|g) = g$ をみたすものがただ一つ存在する：

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, dashed, "X|g"] \arrow[dr, "g"'] & X \arrow[d, "i"] \\
& Y.
\end{tikzcd}
$$

証明． 写像 $X|g\colon Z \to X$ を $z \mapsto g(z)$ で定めればよい．（定めるしかない．） $\square$

2.2.8 系． 連続写像 $f\colon (X,\tau(X)) \to (Y,\tau(Y))$ が与えられたとする．このとき，部分集合 $X_1 \subset X$，$Y_1 \subset Y$ であって $f(X_1) \subset Y_1$ を満たすものに対して，写像

$$Y_1|f|X_1 \coloneqq Y_1|(f|X_1)\colon (X_1,\tau(X)|X_1) \to (Y_1,\tau(Y)|Y_1)$$

は連続である． $\square$

2.2.9 系． 単射連続開写像（resp. 閉写像）$f\colon (X,\tau(X)) \to (Y,\tau(Y))$ が与えられたとする．このとき，写像 $f(X)|f\colon (X,\tau(X)) \to (f(X),\tau(Y)|f(X))$ は同相写像である．

証明． 部分空間の普遍性（2.2.7）より，$f(X)|f\colon (X,\tau(X)) \to (f(X),\tau(Y)|f(X))$ は全単射連続写像である．また，f は開写像なので，任意の $U \in \tau(X)$ に対して $(f(X)|f)(U) = f(U) \cap f(X) \in \tau(Y)|f(X)$ が成り立つ．よって，$f(X)|f$ は全単射連続開写像，すなわち同相写像である．閉写像の場合も同様． $\square$

2.3 写像族によって誘導される位相

2.3.1 定義. 集合 X と位相空間族 $((X_\lambda, \tau_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$，および写像族 $\mathfrak{f} = (f_\lambda\colon X \to X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられたとする．このとき，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda^{-1}(\tau_\lambda)$ によって生成される X の位相を，$\mathfrak{f}$ によって X に**誘導される位相**，あるいは単に（$\mathfrak{f}$ による）**誘導位相**といい，$\bigvee_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda^{-1}(\tau_\lambda)$ で表わす．

2.3.2 注意. 誘導位相の定義より，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して

$$f_\lambda\colon (X, \bigvee f_\lambda^{-1}(\tau_\lambda)) \xrightarrow{\mathrm{id}_X} (X, f_\lambda^{-1}(\tau_\lambda)) \xrightarrow{f_\lambda} (X_\lambda, \tau_\lambda)$$

は連続である．

2.3.3 定理 (誘導位相の普遍性)**.** 位相空間 $(Z, \tau(Z))$ と写像 $g\colon Z \to X$ とが与えられたとする．このとき，$g\colon (Z, \tau(Z)) \to (X, \bigvee f_\lambda^{-1}(\tau_\lambda))$ が連続であるためには，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $f_\lambda \circ g\colon (Z, \tau(Z)) \to (X_\lambda, \tau_\lambda)$ が連続であることが必要かつ充分である：

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f_\lambda g"'] & X \arrow[d, "f_\lambda"] \\
 & X_\lambda.
\end{tikzcd}$$

証明. 必要性は明らかなので充分性を示す．各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，仮定より $g\colon (Z, \tau(Z)) \to (X, f_\lambda^{-1}(\tau_\lambda))$ は連続である．よって，任意の $U \in \bigcup f_\lambda^{-1}(\tau_\lambda)$ に対して $g^{-1}(U) \in \tau(Z)$ が成り立つので結論を得る． □

2.3.4 系. 誘導位相 $\bigvee f_\lambda^{-1}(\tau_\lambda)$ は任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $f_\lambda\colon X \to X_\lambda$ が連続となるような X の位相のうち最も粗いものである．

証明. 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $f_\lambda\colon (X, \tau(X)) \to (X_\lambda, \tau_\lambda)$ が連続であるとする．このとき，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して 2.1.6 より $\tau(X) \supset f_\lambda^{-1}(\tau_\lambda)$ が成り立つ．よって，$\tau(X) \supset \bigcup f_\lambda^{-1}(\tau_\lambda)$ が成り立つので結論を得る． □

2.3.5 定理 (誘導位相の推移性)**.** 集合 X, 集合族 $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, 位相空間族 $((X_\lambda^\mu, \tau_\lambda^\mu))_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}$ と，写像族 $\mathfrak{f} = (f_\lambda\colon X \to X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$，$\mathfrak{f}_\lambda = (f_\lambda^\mu\colon X_\lambda \to X_\lambda^\mu)_{\mu\in M}, \lambda \in \Lambda,$ が与えられたとする．各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，X_λ に $\mathfrak{f}_\lambda$ による誘導位相 τ_λ を入れる．このとき，X の二つの位相，すなわち $\mathfrak{f}$ による誘導位相と $(f_\lambda^\mu \circ f_\lambda)_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}$ による誘導位相とは一致する．

証明. 任意の $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times M$ に対して，写像

$$(X, \bigvee f_\lambda^{-1}(\tau_\lambda)) \xrightarrow{f_\lambda} (X_\lambda, \tau_\lambda) \xrightarrow{f_\lambda^\mu} (X_\lambda^\mu, \tau_\lambda^\mu)$$

は連続写像の合成ゆえ連続であるから（2.3.2），$\bigvee f_\lambda^{-1}(\tau_\lambda) \supset \bigvee (f_\lambda^\mu \circ f_\lambda)^{-1}(\tau_\lambda^\mu)$ が成り立つ（2.3.4）．一方，任意の $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times M$ に対して，写像

$$f_\lambda^\mu \circ f_\lambda \colon (X, \bigvee_{(\lambda,\mu)} (f_\lambda^\mu \circ f_\lambda)^{-1}(\tau_\lambda^\mu)) \to (X_\lambda^\mu, \tau_\lambda^\mu)$$

は連続であるから，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して写像 $f_\lambda \colon (X, \bigvee (f_\lambda^\mu \circ f_\lambda)^{-1}(\tau_\lambda^\mu)) \to (X_\lambda, \tau_\lambda)$ は連続である（2.3.3）．よって，$\bigvee (f_\lambda^\mu \circ f_\lambda)^{-1}(\tau_\lambda^\mu) \supset \bigvee f_\lambda^{-1}(\tau_\lambda)$ を得る（2.3.4）． □

2.4 積位相

2.4.1 定義. 非空位相空間の非空族[1] $((X_\lambda, \tau_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ が与えられたとする．このとき，積集合 $\prod X_\lambda$ に対して，自然な射影からなる写像族 $(p_\lambda \colon \prod X_\lambda \to X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ によって $\prod X_\lambda$ に誘導される位相を**積位相（product topology）**といい，$(\prod X_\lambda, \bigvee p_\lambda^{-1}(\tau_\lambda))$ を $((X_\lambda, \tau_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ の**積空間（product space）**という．

2.4.2 命題. 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，自然な射影 $p_\lambda \colon (\prod X_\lambda, \bigvee p_\lambda^{-1}(\tau_\lambda)) \to (X_\lambda, \tau_\lambda)$ は開写像である．

証明. 開集合 $U_{\lambda_i} \in \tau_{\lambda_i}$，$i = 1, \ldots, n$，に対して，

$$p_\lambda(p_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \cdots \cap p_{\lambda_n}^{-1}(U_{\lambda_n})) = \begin{cases} X_\lambda & , \lambda \notin \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \\ U_{\lambda_i} & , \lambda = \lambda_i \end{cases}$$

が成り立つので結論を得る． □

積空間への写像の連続性は各“成分”の連続性で決まる：

2.4.3 定理 (積位相の普遍性)**.** 位相空間 $(Z, \tau(Z))$ と写像 $g \colon Z \to \prod X_\lambda$ とが与えられたとする．このとき，写像 $g \colon (Z, \tau(Z)) \to (\prod X_\lambda, \bigvee p_\lambda^{-1}(\tau_\lambda))$ が連続であるためには，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して写像 $p_\lambda \circ g \colon (Z, \tau(Z)) \to (X_\lambda, \tau_\lambda)$ が連続であることが必要かつ充分

[1] 以下，いちいち断らない．

である：

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "p_\lambda g"'] & \prod X_\lambda \arrow[d, "p_\lambda"] \\ & X_\lambda. \end{tikzcd}$$

□

2.4.4 補題. 集合 X と位相空間族 $((X_\lambda, \tau_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$，および写像族 $\mathfrak{f} = (f_\lambda \colon X \to X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられたとする．このとき，連続写像 $\Delta(\mathfrak{f}) \colon (X, \bigvee f_\lambda^{-1}(\tau_\lambda)) \to (\prod X_\lambda, \bigvee p_\lambda^{-1}(\tau_\lambda))$ であって，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $p_\lambda \circ \Delta(\mathfrak{f}) = f_\lambda$ をみたすものがただ一つ存在する：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "\Delta(\mathfrak{f})"] \arrow[dr, "f_\lambda"'] & \prod X_\lambda \arrow[d, "p_\lambda"] \\ & X_\lambda. \end{tikzcd}$$

さらに，写像族 $\mathfrak{f}$ による誘導位相と写像 $\Delta(\mathfrak{f})$ による誘導位相とは一致する．

証明. 写像 $\Delta(\mathfrak{f}) \colon X \to \prod X_\lambda$ を $x \mapsto (f_\lambda(x))_\lambda$ で定めればよい．（定めるしかない．）

さて，$X_1 = (X, \bigvee f_\lambda^{-1}(\tau_\lambda)), X_2 = (X, \Delta(\mathfrak{f})^{-1}(\bigvee p_\lambda^{-1}(\tau_\lambda)))$ とおく．まず，$\Delta(\mathfrak{f}) \colon X_1 \to (\prod X_\lambda, \bigvee p_\lambda^{-1}(\tau_\lambda))$ は連続なので，2.1.5 より $\mathrm{id}_X \colon X_1 \to X_2$ は連続である．また，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，写像 $f_\lambda \colon X_2 \to (X_\lambda, \tau_\lambda)$ は連続であるから（2.4.3），$\mathrm{id}_X \colon X_2 \to X_1$ は連続である（2.3.4）． □

2.4.5 定理 (積空間の普遍性)**.** 上の状況で，X に位相 $\tau(X)$ が与えられていて，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して写像 $f_\lambda \colon (X, \tau(X)) \to (X_\lambda, \tau_\lambda)$ が連続写像であるとき，

$$\Delta(\mathfrak{f}) \colon (X, \tau(X)) \xrightarrow{\mathrm{id}_X} (X, \bigvee f_\lambda^{-1}(\tau_\lambda)) \xrightarrow{\Delta(\mathfrak{f})} (\prod X_\lambda, \bigvee p_\lambda^{-1}(\tau_\lambda))$$

は連続である．

証明. 2.3.4 より $\mathrm{id}_X \colon (X, \tau(X)) \to (X, \bigvee f_\lambda^{-1}(\tau_\lambda))$ は連続であるから結論を得る． □

2.4.6 系. 連続写像族 $(f_\lambda \colon (X_\lambda, \tau(X_\lambda)) \to (Y_\lambda, \tau(Y_\lambda)))_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられたとする．このとき，連続写像 $\prod f_\lambda \colon (\prod X_\lambda, \bigvee p_{X_\lambda}^{-1}(\tau(X_\lambda))) \to (\prod Y_\lambda, \bigvee p_{Y_\lambda}^{-1}(\tau(Y_\lambda)))$ であって，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $p_{Y_\lambda} \circ \prod f_\lambda = f_\lambda \circ p_{X_\lambda}$ が成り立つものがただ一つ存在する：

$$\begin{tikzcd} \prod X_\lambda \arrow[r, dashed, "\prod f_\lambda"] \arrow[d, "p_{X_\lambda}"'] & \prod Y_\lambda \arrow[d, "p_{Y_\lambda}"] \\ X_\lambda \arrow[r, "f_\lambda"'] & Y_\lambda. \end{tikzcd}$$

証明. 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して写像 $f_\lambda \circ p_{X_\lambda}\colon (\prod X_\lambda, \bigvee p_{X_\lambda}^{-1}(\tau(X_\lambda))) \to (Y_\lambda, \tau(Y_\lambda))$ は連続なので，積空間の普遍性より結論を得る． $\square$

"相対位相の積位相" と "積位相の相対位相" とは一致する：

2.4.7 系. 位相空間族 $((X_\lambda, \tau_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$，およびその部分集合たち $A_\lambda \subset X_\lambda$，$\lambda \in \Lambda$，が与えられたとする．このとき，積集合 $\prod A_\lambda$ に対して，積空間 $(\prod X_\lambda, \bigvee p_\lambda^{-1}(\tau_\lambda))$ の部分空間としての相対位相と，部分空間族 $((A_\lambda, \tau_\lambda|A_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ の積空間としての積位相とは一致する．

証明. 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，包含写像 $i_\lambda\colon A_\lambda \to X_\lambda$ と射影 $q_\lambda\colon \prod A_\lambda \to A_\lambda$ は $p_\lambda \circ \prod i_\lambda = i_\lambda \circ q_\lambda\colon \prod A_\lambda \to X_\lambda$ をみたす (2.4.6)．このとき，写像族 $(i_\lambda \circ q_\lambda\colon \prod A_\lambda \to X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ による誘導位相は相対位相の積位相であり（2.3.5)，写像 $\Delta((p_\lambda \circ \prod i_\lambda\colon \prod A_\lambda \to X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) = \prod i_\lambda\colon \prod A_\lambda \subset \prod X_\lambda$ による誘導位相は積位相の相対位相である． $\square$

2.4.8 命題. 位相空間族 $((X_\lambda, \tau_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$，およびその部分集合たち $A_\lambda \subset X_\lambda$，$\lambda \in \Lambda$，が与えられたとする．このとき，つぎが成り立つ：

(i) $\overline{\prod A_\lambda} = \prod \overline{A_\lambda}$.

(ii) $\mathrm{int}(\prod A_\lambda) \subset \prod \mathrm{int}(A_\lambda)$.

後者について，さらに Λ が有限集合 $\{1, \dots, n\}$ のとき，$\mathrm{int}(\prod A_i) = \prod \mathrm{int}(A_i)$ が成り立つ．

証明. (i) ($\subset$) 各 p_λ の連続性から，$p_\lambda\left(\overline{\prod A_\lambda}\right) \subset \overline{p_\lambda(\prod A_\lambda)} = \overline{A_\lambda}$ を得る．

($\supset$) $x \in \prod \overline{A_\lambda}$ とする．このとき，任意の $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda$，および $U_{\lambda_i} \in \tau(X_{\lambda_i})$ であって $x \in U \coloneqq \bigcap p_{\lambda_i}^{-1}(U_{\lambda_i})$ となるものに対して，$p_{\lambda_i}(x) \in U_{\lambda_i} \cap \overline{A_{\lambda_i}}$ より，$U_{\lambda_i} \cap A_{\lambda_i} \neq \varnothing$ が成り立つ．したがって，$U \cap (\prod A_\lambda) \neq \varnothing$ が成り立つ．

(ii) 各 p_λ が開写像であることから (2.4.2)，$p_\lambda(\mathrm{int}(\prod A_\lambda)) \subset \mathrm{int}(p_\lambda(\prod A_\lambda)) = \mathrm{int}(A_\lambda)$ を得る．

さらに，Λ が有限集合 $\{1, \dots, n\}$ のとき，$\prod \mathrm{int}(A_i)$ は $\prod A_i$ に含まれる $\prod X_\lambda$ の開集合なので $\prod \mathrm{int}(A_i) \subset \mathrm{int}(\prod A_i)$ を得る． $\square$

2.4.9 命題. 連続写像族 $(f_\lambda\colon (X_\lambda, \tau(X_\lambda)) \to (Y_\lambda, \tau(Y_\lambda)))_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられたとする．このとき，各 f_λ が開写像であって，かつ有限個の $\lambda \in \Lambda$ を除いて f_λ が全射であるならば，

連続写像 $\prod f_\lambda\colon (\prod X_\lambda, \bigvee p_{X_\lambda}^{-1}(\tau(X_\lambda))) \to (\prod Y_\lambda, \bigvee p_{Y_\lambda}^{-1}(\tau(Y_\lambda)))$ は開写像である．

証明． 開集合 $U_{\lambda_i} \in \tau(X_{\lambda_i})$，$i = 1, \ldots, n$，と各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，

$$p_{Y_\lambda}((\prod f_\lambda)(p_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \cdots \cap p_{\lambda_n}^{-1}(U_{\lambda_n}))) = \begin{cases} f_\lambda(X_\lambda) & , \lambda \notin \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \\ f_{\lambda_i}(U_{\lambda_i}) & , \lambda = \lambda_i \end{cases}$$

が成り立つ．いま，仮定より有限個の λ を除いて $f_\lambda(X_\lambda) = Y_\lambda$ が成り立つので

$$(\prod f_\lambda)(p_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \cdots \cap p_{\lambda_n}^{-1}(U_{\lambda_n})) \in \bigvee p_{Y_\lambda}^{-1}(Y_\lambda)$$

を得る． □

2.4.10 定理 (積空間の結合性)．位相空間族 $((X_\lambda, \tau_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ と集合 Λ の分割 $(\Lambda_\mu)_{\mu\in M}$ とが与えられたとする．各 $\mu \in M$ に対して，位相空間族 $((X_\lambda, \tau_\lambda))_{\lambda\in\Lambda_\mu}$ の積空間 $(Y_\mu, \tau_\mu) := (\prod_{\lambda\in\Lambda_\mu} X_\lambda, \bigvee_{\lambda\in\Lambda_\mu} (p'_\lambda)^{-1}(\tau_\lambda))$ を考える．ただし，$p'_\lambda\colon Y_\mu \to X_\lambda$ は自然な射影である．このとき，積空間 $(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \bigvee_{\lambda\in\Lambda} p_\lambda^{-1}(\tau_\lambda))$ と $(\prod Y_\mu, \bigvee q_\mu^{-1}(\tau_\mu))$ とは同相である．

証明． 各 $\mu \in M$ と任意の $\lambda \in \Lambda_\mu$ とに対して，写像 $p_\lambda\colon (\prod X_\lambda, \bigvee p_\lambda^{-1}(\tau_\lambda)) \to (X_\lambda, \tau_\lambda)$ は連続なので，積空間の普遍性 (2.4.5) から，連続写像 $p^\mu\colon (\prod X_\lambda, \bigvee p_\lambda^{-1}(\tau_\lambda)) \to (Y_\mu, \tau_\mu)$ がただ一つ存在する：

$$\begin{tikzcd} \prod X_\lambda \arrow[r, dashed, "p^\mu"] \arrow[dr, "p_\lambda"'] & Y_\mu \arrow[d, "p'_\lambda"] \\ & X_\lambda. \end{tikzcd}$$

一方，各 $\mu \in M$ と任意の $\lambda \in \Lambda_\mu$ とに対して，合成写像 $p'_\lambda \circ q_\mu\colon (\prod Y_\mu, \bigvee q_\mu^{-1}(\tau_\mu)) \to (Y_\mu, \tau_\mu) \to (X_\lambda, \tau_\lambda)$ は連続である（2.3.2）．したがって，積空間の普遍性（2.4.5）より，連続写像

$$\begin{aligned} f&\colon (\prod X_\lambda, \bigvee p_\lambda^{-1}(\tau_\lambda)) \to (\prod Y_\mu, \bigvee q_\mu^{-1}(\tau_\mu)), \\ g&\colon (\prod Y_\mu, \bigvee q_\mu^{-1}(\tau_\mu)) \to (\prod X_\lambda, \bigvee p_\lambda^{-1}(\tau_\lambda)) \end{aligned}$$

が定まる：

$$\begin{tikzcd} \prod X_\lambda \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[dr, "p^\mu"'] & \prod Y_\mu \arrow[d, "q_\mu"] \\ & Y_\mu, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \prod Y_\mu \arrow[r, dashed, "g"] \arrow[dr, "p'_\lambda q_\mu"'] & \prod X_\lambda \arrow[d, "p_\lambda"] \\ & X_\lambda. \end{tikzcd}$$

このとき，任意の $\mu \in M$ と $\lambda \in \Lambda_\mu$ とに対して，

$$
\begin{aligned}
p_\lambda g f = p'_\lambda q_\mu f = p'_\lambda p^\mu = p_\lambda, \\
p'_\lambda q_\mu f g = p'_\lambda p^\mu g = p_\lambda g = p'_\lambda q_\mu
\end{aligned}
$$

が成り立つので，$gf = \mathrm{id}$，$fg = \mathrm{id}$ を得る（2.4.4）：

$$
\begin{tikzcd}
\prod X_\lambda \arrow[r, "gf"] \arrow[r, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "p_\lambda"'] & \prod X_\lambda \arrow[d, "p_\lambda"] \\
 & X_\lambda,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\prod Y_\mu \arrow[r, "fg"] \arrow[r, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "q_\mu"] \arrow[ddr, "p'_\lambda q_\mu"'] & \prod Y_\mu \arrow[d, "q_\mu"] \\
 & Y_\mu \arrow[d, "p'_\lambda"] \\
 & X_\lambda
\end{tikzcd}
$$

□

2.4.11 定理 (積空間の可換性)**.** 位相空間族 $((X_\lambda, \tau(X_\lambda)))_{\lambda\in\Lambda}$，$((Y_\mu, \tau(Y_\mu)))_{\mu\in M}$，および全単射 $\varphi\colon \Lambda \to M$ が与えられたとする．このとき，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，$(X_\lambda, \tau(X_\lambda))$ と $(Y_{\varphi(\lambda)}, \tau(Y_{\varphi(\lambda)}))$ とが同相ならば，$(\prod X_\lambda, \bigvee p_{X_\lambda}^{-1}(\tau(X_\lambda)))$ と $(\prod Y_\mu, \bigvee p_{Y_\mu}^{-1}(\tau(Y_\mu)))$ とは同相である．とくに，任意の全単射 $\psi\colon \Lambda \to \Lambda$ に対して $(\prod X_\lambda, \bigvee p_{X_\lambda}^{-1}(\tau(X_\lambda)))$ と $(\prod X_{\psi(\lambda)}, \bigvee p_{X_{\psi(\lambda)}}^{-1}(\tau_{X_{\psi(\lambda)}}))$ とは同相である．

証明. 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，$(X_\lambda, \tau(X_\lambda))$ と $(Y_{\varphi(\lambda)}, \tau(Y_{\varphi(\lambda)}))$ との同相を与える写像を f_λ とおく．このとき，積空間の普遍性（2.4.5）より，連続写像 $f\colon (\prod X_\lambda, \bigvee p_{X_\lambda}^{-1}(\tau(X_\lambda))) \to (\prod Y_\mu, \bigvee p_{Y_\mu}^{-1}(\tau(Y_\mu)))$ であって，任意の $\mu \in M$ に対して $p_{Y_\mu} \circ f = f_{\varphi^{-1}(\mu)} \circ p_{X_{\varphi^{-1}(\mu)}}$ をみたすものが存在する：

$$
\begin{tikzcd}
\prod X_\lambda \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[d, "p_{X_{\varphi^{-1}(\mu)}}"'] & \prod Y_\mu \arrow[d, "p_{Y_\mu}"] \\
X_{\varphi^{-1}(\mu)} \arrow[r, "f_{\varphi^{-1}(\mu)}"'] & Y_\mu.
\end{tikzcd}
$$

逆写像族 $(f_{\varphi^{-1}(\mu)}^{-1})_{\mu\in M}$ を用いることで f の逆写像が構成できる．

後半は $Y_\lambda := X_{\psi(\lambda)}$，$\varphi := \psi^{-1}$ を考えればよい． □

3　コドメインに余誘導される位相

3.1　写像によって余誘導される位相（等化位相）

3.1.1 定義. 集合 X と位相空間 $(Y, \tau(Y))$，および写像 $f\colon Y \to X$ が与えられたとする．このとき，

$$\tau(f) = \{U \subset X \mid f^{-1}(U) \in \tau(Y)\}$$

とおくと，これは X の位相を定める．この位相を（f による）**等化位相**（**identification topology**）という．

3.1.2 注意. 等化位相の定義からつぎがわかる：

- $f\colon (Y, \tau(Y)) \to (X, \tau(f))$ は連続である．
- f が全射でないとき，$X \smallsetminus f(Y)$ は離散位相を持つ．このゆえにか，等化位相を考えるときは f に全射性を課すことが多い．

3.1.3 補題. 集合 X と位相空間 $(Y, \tau(Y))$，および写像 $f\colon Y \to X$ が与えられたとする．このとき，$(\tau(f))^c = \tau^c(f) := \left\{C \subset X \mathrel{\Big|} f^{-1}(C) \in \tau^c(Y)\right\}$ が成り立つ．

証明. 任意の $C \subset X$ に対して，

$$f^{-1}(X \smallsetminus C) = Y \smallsetminus f^{-1}(C)$$

が成り立つことからわかる．　□

3.1.4 定理 (等化位相の普遍性)**.** 位相空間 $(Z, \tau(Z))$ と写像 $g\colon X \to Z$ とが与えられたとする．このとき，$g\colon (X, \tau(f)) \to (Z, \tau(Z))$ が連続であるためには，$g \circ f\colon (Y, \tau(Y)) \to (Z, \tau(Z))$ が連続であることが必要かつ充分である：

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "gf"] \arrow[d, "f"'] & Z. \\ X \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

証明. 必要性は明らかなので充分性を示す．$U \in \tau(Z)$ とする．このとき，

$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U) \in \tau(Y)$$

より，$g^{-1}(U) \in \tau(f)$ となる．よって，$g\colon (X, \tau(f)) \to (Z, \tau(Z))$ は連続である．　□

3.1.5 系. 等化位相 $\tau(f)$ は $f\colon Y \to X$ が連続となるような X の位相のうち最も細かい，すなわち最も開集合が多いものである．

証明. 写像 $f\colon (Y,\tau(Y)) \to (X,\tau(X))$ が連続であるとする．このとき，等化位相の普遍性（3.1.4）より $\mathrm{id}_X\colon (X,\tau(f)) \to (X,\tau(X))$ は連続，すなわち $\tau(f) \supset \tau(X)$ が成り立つ：

$$\begin{tikzcd}
(Y,\tau(Y)) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & (X,\tau(X)) \\
(X,\tau(f)) \arrow[ur, "\mathrm{id}_X"'] &
\end{tikzcd}$$

□

3.2 等化写像・等化空間

3.2.1 定義. 連続写像 $f\colon (Y,\tau(Y)) \to (X,\tau(X))$ に対して，$\tau(f) = \tau(X)$ が成り立つ，すなわち任意の $U \subset X$ に対して

$$U \in \tau(X) \Leftrightarrow f^{-1}(U) \in \tau(Y)$$

が成り立つとき f を**等化写像（identification map）**という．とくに f が全射であるとき，$(X,\tau(X))$ を（f による）**等化空間（identification space）**という．

3.2.2 注意. 写像 $f\colon (Y,\tau(Y)) \to (X,\tau(X))$ の連続性から $\tau(f) \supset \tau(X)$ は常に成り立つ（3.1.5）．

等化写像の定義，および等化位相の普遍性よりただちにつぎを得る：

3.2.3 系. 等化写像 $f\colon (Y,\tau(Y)) \to (X,\tau(X))$，ならびに位相空間 $(Z,\tau(Z))$ と写像 $g\colon X \to Z$ とが与えられたとする．このとき，$g\colon (X,\tau(X)) \to (Z,\tau(Z))$ が連続であるためには，$g \circ f\colon (Y,\tau(Y)) \to (Z,\tau(Z))$ が連続であることが必要かつ充分である． □

写像が等化写像であるための充分条件として，たとえばつぎの二つがある：

3.2.4 命題. 全射連続写像 $f\colon (Y,\tau(Y)) \to (X,\tau(X))$ が開写像，または閉写像ならば f は（全射）等化写像である．

証明. 写像 $f\colon (Y,\tau(Y)) \to (X,\tau(X))$ が開写像のとき，任意の $U \in \tau(f)$ に対して，$f^{-1}(U) \in \tau(Y)$ と f の全射性とから $U = f(f^{-1}(U)) \in \tau(X)$ が成り立つ．閉写像のときも同様． □

3.2.5 命題. 連続写像 $f\colon (Y, \tau(Y)) \to (X, \tau(X))$ に対して，連続写像 $s\colon (X, \tau(X)) \to (Y, \tau(Y))$ であって $f \circ s = \mathrm{id}_X$ となるものが存在するならば f は（全射）等化写像である．

証明. $U \in \tau(f)$ とする．このとき，$f^{-1}(U) \in \tau(Y)$ と $s\colon (X, \tau(X)) \to (Y, \tau(Y))$ の連続性とから

$$U = (f \circ s)^{-1}(U) = s^{-1}(f^{-1}(U)) \in \tau(X)$$

が成り立つ． □

3.2.6 定理 (等化空間の普遍性)**.** 全射等化写像 $f\colon (Y, \tau(Y)) \to (X, \tau(X))$ と連続写像 $g\colon (Y, \tau(Y)) \to (Z, \tau(Z))$ とが与えられたとする．このとき，任意の $y, y' \in Y$ に対して

$$f(y) = f(y') \Rightarrow g(y) = g(y')$$

が成り立つならば，連続写像 $\overline{g}\colon (X, \tau(X)) \to (Z, \tau(Z))$ であって $\overline{g} \circ f = g$ をみたすものがただ一つ存在する：

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Z. \\ X \arrow[ur, dashed, "\overline{g}"'] & \end{tikzcd}$$

証明. 写像 $\overline{g}\colon X \to Z$ を $f(y) \mapsto g(y)$ で定める．仮定より，$\overline{g}$ は well-defined であり，$\overline{g} \circ f = g$ が成り立つ．よって，等化位相の普遍性（3.1.4）より $\overline{g}\colon (X, \tau(f)) \to (Z, \tau(Z))$ は連続である．仮定より $\tau(f) = \tau(X)$ であるから結論を得る． □

3.2.7 命題. 上の状況で写像 $\overline{g}$ が開写像（resp. 閉写像）であるためには，任意の f 飽和開集合 $V \subset Y$（resp. f 飽和閉集合 $C \subset Y$）に対して $g(V) \in \tau(Z)$（resp. $g(C) \in \tau^c(Z)$）となることが必要かつ充分である[2]．

証明. 開写像性についてのみ示す．閉写像性についても同様である．

（必要性） 任意の f 飽和開集合 $V \subset Y$ に対して，等化位相の定義より $f(V) \in \tau(X)$ であるから，$g(V) = \overline{g}(f(V)) \in \tau(Z)$ が成り立つ．

（充分性） 任意の開集合 $U \subset X$ に対して，f の全射性より $V := f^{-1}(U) \in \tau(Y)$ は f 飽和開集合であるから $\overline{g}(U) = \overline{g}(f(V)) = g(V) \in \tau(Z)$ が成り立つ． □

---

[2] 写像 $f\colon Y \to X$ に対して，$A \subset Y$ が f **飽和**（f**-saturated**）$:\Leftrightarrow f^{-1}(f(A)) = A$.

3.2.8 定理 (等化位相の推移性)**.** 連続写像 $f\colon (Y, \tau(Y)) \to (X, \tau(X))$，ならびに集合 Z と写像 $g\colon X \to Z$ とが与えられたとする．このとき，

(i) $\tau(g \circ f) \supset \tau(g)$ が成り立つ．

(ii) Z に位相 $\tau(Z)$ が定まっているとき，写像 $g\colon (X, \tau(X)) \to (Z, \tau(Z))$ が連続であって合成 $g \circ f\colon (Y, \tau(Y)) \to (Z, \tau(Z))$ が等化写像ならば，$g\colon (X, \tau(X)) \to (Z, \tau(Z))$ も等化写像である．

(iii) $f\colon (Y, \tau(Y)) \to (X, \tau(X))$ が等化写像であるとき，$g \circ f$ による等化位相と g による等化位相とは一致する．したがって Z に位相が定まっているとき，$g \circ f$ が等化写像であるためには，g が等化写像であることが必要かつ充分である．とくに，等化写像の合成は等化写像である：

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "gf"'] & & X. \arrow[dl, "g"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

証明. (i) 等化位相の定義から，任意の $U \subset Z$ に対して

$$\begin{aligned} U \in \tau(g \circ f) &\Leftrightarrow (g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \tau(Y) \\ &\Leftarrow g^{-1}(U) \in \tau(X) \\ &\Leftrightarrow U \in \tau(g) \end{aligned}$$

が成り立つ．

(ii) (i) と 3.2.2 より $\tau(Z) = \tau(g \circ f) \supset \tau(g) \supset \tau(Z)$ が成り立つ．

(iii) f が等化写像であることから，任意の $U \subset Z$ に対して

$$f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \tau(Y) \Rightarrow g^{-1}(U) \in \tau(f) = \tau(X)$$

が成り立つ．よって，$\tau(g \circ f) = \tau(g)$ となるので結論を得る． □

3.3 等化位相と相対位相

3.3.1 命題. 等化写像 $f\colon (Y, \tau(Y)) \to (X, \tau(X))$ と部分集合 $A \subset X$ とが与えられたとする．このとき，A の位相としてつぎの二つを考える：

- 相対位相 $\tau(X)|A$.

- 部分空間 $(f^{-1}(A), \tau(Y)|f^{-1}(A))$ からの写像 $f^A := A|f|f^{-1}(A) \colon f^{-1}(A) \to A$ による等化位相 $\tau(f^A)$.

これらに関して，$\tau(f^A) \supset \tau(X)|A$ が成り立つ．さらに，つぎのいずれかが成り立つとき，$\tau(f^A) \subset \tau(X)|A$ が成り立つ，すなわち $f^A \colon (f^{-1}(A), \tau(Y)|f^{-1}(A)) \to (A, \tau(X)|A)$ は等化写像である：

(i) $A \in \tau(X)$.
(ii) $A \in \tau^c(X)$.
(iii) f は全射開写像.
(iv) f は全射閉写像.

証明. まず，2.2.8 より写像 $f^A \colon (f^{-1}(A), \tau(Y)|f^{-1}(A)) \to (A, \tau(X)|A)$ は連続であるから，$\tau(f^A) \supset \tau(X)|A$ が成り立つ（3.1.5）.

(i) $U \in \tau(f^A)$ とする．このとき，

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(A) = (f^A)^{-1}(U) \in \tau(Y)|f^{-1}(A)$$

であり，仮定より $f^{-1}(A) \in \tau(Y)$ であるから $f^{-1}(U) \in \tau(Y)$ を得る（2.2.4）．よって，$U \in \tau(f) = \tau(X)$ となるので，$U = U \cap A \in \tau(X)|A$ が成り立つ．

(ii) (i) と同様.

(iii) 全射連続写像 $f^A \colon (f^{-1}(A), \tau(Y)|f^{-1}(A)) \to (A, \tau(X)|A)$ が開写像であることを示せばよい（3.2.4）．ところで，任意の $V \in \tau(Y)$ に対して，仮定より

$$f^A(V \cap f^{-1}(A)) = f(V) \cap A \in \tau(X)|A$$

が成り立つので結論を得る．

(iv) (iii) と同様にして f^A が閉写像であることがわかる． □

(iii)，(iv) の場合の証明から，ただちにつぎを得る：

3.3.2 命題. 写像 $f \colon (Y, \tau(Y)) \to (X, \tau(X))$ が開写像（resp. 閉写像）ならば，任意の部分集合 $A \subset X$ に対して，写像 $f^A \colon (f^{-1}(A), \tau(Y)|f^{-1}(A)) \to (A, \tau(X)|A)$ は開写像（resp. 閉写像）である． □

3.4　写像族によって余誘導される位相

3.4.1 定義. 集合 X と位相空間族 $((X_\lambda, \tau_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$，および写像族 $\mathfrak{f} = (f_\lambda \colon X_\lambda \to X)_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられたとする．このとき，$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \tau(f_\lambda)$ を（$\mathfrak{f}$ による）**等化位相**といい，$\tau(\mathfrak{f})$ で表わす．

3.4.2 注意. 等化位相の定義より，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して

$$f_\lambda \colon (X_\lambda, \tau_\lambda) \xrightarrow{f_\lambda} (X, \tau(f_\lambda)) \xrightarrow{\mathrm{id}_X} (X, \tau(\mathfrak{f}))$$

は連続である．

3.4.3 定理 (等化位相の普遍性)**.** 位相空間 $(Z, \tau(Z))$ と写像 $g \colon X \to Z$ とが与えられたとする．このとき，$g \colon (X, \tau(\mathfrak{f})) \to (Z, \tau(Z))$ が連続であるためには，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $g \circ f_\lambda \colon (X_\lambda, \tau_\lambda) \to (Z, \tau(Z))$ が連続であることが必要かつ充分である：

$$\begin{tikzcd} X_\lambda \arrow[r, "gf_\lambda"] \arrow[d, "f_\lambda"'] & Z \\ X \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

証明. 必要性は明らかなので充分性を示す．各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，仮定より $g \colon (X, \tau(f_\lambda)) \to (Z, \tau(Z))$ は連続である．よって，任意の $U \in \tau(Z)$ に対して $g^{-1}(U) \in \bigcap \tau(f_\lambda) = \tau(\mathfrak{f})$ が成り立つ． □

3.4.4 系. 等化位相 $\tau(\mathfrak{f})$ は任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $f_\lambda \colon X_\lambda \to X$ が連続となるような X の位相のうち最も細かいものである．

証明. 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $f_\lambda \colon (X_\lambda, \tau_\lambda) \to (X, \tau(X))$ が連続であるとする．このとき，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して 3.1.5 より $\tau(f_\lambda) \supset \tau(X)$ が成り立つ．よって，$\tau(\mathfrak{f}) \supset \tau(X)$ を得る． □

3.4.5 定理 (等化位相の推移性)**.** 集合 X, 集合族 $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, 位相空間族 $((X_\lambda^\mu, \tau_\lambda^\mu))_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}$ と，写像族 $\mathfrak{f} = (f_\lambda \colon X_\lambda \to X)_{\lambda\in\Lambda}$，$\mathfrak{f}_\lambda = (f_\lambda^\mu \colon X_\lambda^\mu \to X_\lambda)_{\mu\in M}, \lambda \in \Lambda$, が与えられたとする．各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，X_λ に $\mathfrak{f}_\lambda$ による等化位相 $\tau(\mathfrak{f}_\lambda)$ を入れる．このとき，X の二つの位相，すなわち $\mathfrak{f}$ による等化位相と $(f_\lambda \circ f_\lambda^\mu)_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}$ による等化位相とは一致する．

証明． 任意の $(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M$ に対して，写像

$$(X_\lambda^\mu,\tau_\lambda^\mu)\xrightarrow{f_\lambda^\mu}(X_\lambda,\tau(\mathfrak{f}_\lambda))\xrightarrow{f_\lambda}(X,\tau(\mathfrak{f}))$$

は連続写像の合成ゆえ連続であるから（3.4.2），$\tau((f_\lambda\circ f_\lambda^\mu)_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M})\supset\tau(\mathfrak{f})$ が成り立つ（3.4.4）．一方，任意の $(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M$ に対して，写像

$$f_\lambda\circ f_\lambda^\mu\colon(X_\lambda^\mu,\tau_\lambda^\mu)\to(X,\tau((f_\lambda\circ f_\lambda^\mu)_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}))$$

は連続であるから，各 $\lambda\in\Lambda$ に対して $f_\lambda\colon(X_\lambda,\tau(\mathfrak{f}_\lambda))\to(X,\tau((f_\lambda\circ f_\lambda^\mu)_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}))$ は連続である（3.4.3）．よって，$\tau(\mathfrak{f})\supset\tau((f_\lambda\circ f_\lambda^\mu)_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M})$ を得る（3.4.4）． □

3.4.6 注意． 一般に，等化位相と積位相は相性が良くない印象があり，何かしらの付加条件がないと一致しないことが多い（cf. 3.8 節）．

3.5 余積位相

3.5.1 定義． 位相空間族 $((X_\lambda,\tau_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられたとする．このとき，非交和 $\coprod X_\lambda$ に対して，自然な入射からなる写像族 $\mathfrak{i}=(i_\lambda\colon X_\lambda\to\coprod X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ による等化位相を**余積位相（coproduct topology）**といい，$(\coprod X_\lambda,\tau(\mathfrak{i}))$ を $((X_\lambda,\tau_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ の**余積空間（coproduct space）**，**直和空間**，**位相和**などという．

3.5.2 定理（余積位相の普遍性）**．** 位相空間 $(Z,\tau(Z))$ と写像 $g\colon\coprod X_\lambda\to Z$ とが与えられたとする．このとき，$g\colon(\coprod X_\lambda,\tau(\mathfrak{i}))\to(Z,\tau(Z))$ が連続であるためには，任意の $\lambda\in\Lambda$ に対して写像 $g\circ i_\lambda\colon(X_\lambda,\tau_\lambda)\to(Z,\tau(Z))$ が連続であることが必要かつ充分である：

$$\begin{tikzcd} X_\lambda \arrow[r, "gi_\lambda"] \arrow[d, "i_\lambda"'] & Z. \\ \coprod X_\lambda \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

□

3.5.3 補題． 集合 X と位相空間族 $((X_\lambda,\tau_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$，および写像族 $\mathfrak{f}=(f_\lambda\colon X_\lambda\to X)_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられたとする．このとき，連続写像 $\nabla(\mathfrak{f})\colon(\coprod X_\lambda,\tau(\mathfrak{i}))\to(X,\tau(\mathfrak{f}))$ であって，任意の $\lambda\in\Lambda$ に対して $\nabla(\mathfrak{f})\circ i_\lambda=f_\lambda$ をみたすものがただ一つ存在する：

$$\begin{tikzcd} X_\lambda \arrow[r, "f_\lambda"] \arrow[d, "i_\lambda"'] & X. \\ \coprod X_\lambda \arrow[ur, dashed, "\nabla(\mathfrak{f})"'] & \end{tikzcd}$$

さらに，写像族 $\mathfrak{f}$ による等化位相と写像 $\nabla(\mathfrak{f})$ による等化位相とは一致する．

証明． 写像 $\nabla(\mathfrak{f})\colon \coprod X_\lambda \to X$ を $(\lambda, x_\lambda) \mapsto f_\lambda(x_\lambda)$ で定めればよい．（定めるしかない．）

さて，$X_1 = (X, \tau(\mathfrak{f})), X_2 = (X, \tau(\nabla(\mathfrak{f})))$ とおく．まず，写像 $\nabla(\mathfrak{f})\colon (\coprod X_\lambda, \tau(\mathfrak{i})) \to X_1$ は連続なので，3.1.5 より $\mathrm{id}_X\colon X_2 \to X_1$ は連続である．また，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，写像 $f_\lambda\colon (X_\lambda, \tau_\lambda) \to X_2$ は連続なので（3.5.2），$\mathrm{id}_X\colon X_1 \to X_2$ は連続である（3.4.4）． □

3.5.4 定理 (余積空間の普遍性)．上の状況で，X に位相 $\tau(X)$ が与えられていて，各 $f_\lambda\colon (X_\lambda, \tau_\lambda) \to (X, \tau(X))$ が連続写像であるとき，

$$\nabla(\mathfrak{f})\colon (\coprod X_\lambda, \tau(\mathfrak{i})) \xrightarrow{\nabla(\mathfrak{f})} (X, \tau(\mathfrak{f})) \xrightarrow{\mathrm{id}_X} (X, \tau(X))$$

は連続である．

証明． 3.4.4 より $\mathrm{id}_X\colon (X, \tau(\mathfrak{f})) \to (X, \tau(X))$ は連続であるから結論を得る． □

3.5.5 系． 連続写像族 $(f_\lambda\colon (X_\lambda, \tau(X_\lambda)) \to (Y_\lambda, \tau(Y_\lambda)))_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられたとする．このとき，連続写像 $\coprod f_\lambda\colon (\coprod X_\lambda, \tau(\mathfrak{i}_X)) \to (\coprod Y_\lambda, \tau(\mathfrak{i}_Y))$ であって，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $\coprod f_\lambda \circ i_{X_\lambda} = i_{Y_\lambda} \circ f_\lambda$ が成り立つものがただ一つ存在する：

$$\begin{tikzcd} X_\lambda \arrow[r, "f_\lambda"] \arrow[d, "i_{X_\lambda}"'] & Y_\lambda \arrow[d, "i_{Y_\lambda}"] \\ \coprod X_\lambda \arrow[r, dashed, "\coprod f_\lambda"'] & \coprod Y_\lambda . \end{tikzcd}$$

証明． 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して写像 $i_{Y_\lambda} \circ f_\lambda\colon (X_\lambda, \tau(X_\lambda)) \to (\coprod Y_\lambda, \tau(\mathfrak{i}_Y))$ は連続なので，余積空間の普遍性より結論を得る． □

3.5.6 命題． 連続写像族 $(f_\lambda\colon (X_\lambda, \tau(X_\lambda)) \to (Y_\lambda, \tau(Y_\lambda)))_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられたとする．このとき，各 f_λ が等化写像ならば $\coprod f_\lambda\colon (\coprod X_\lambda, \tau(\mathfrak{i}_X)) \to (\coprod Y_\lambda, \tau(\mathfrak{i}_Y))$ も等化写像である．

証明． 3.5.3，3.2.8 より，

$$\begin{aligned} \tau(\coprod f_\lambda) &= \tau((i_{Y_\lambda} \circ f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) \\ &= \bigcap \tau(i_{Y_\lambda} \circ f_\lambda) \\ &= \bigcap \tau(i_{Y_\lambda}) \\ &= \tau(\mathfrak{i}_Y) \end{aligned}$$

が成り立つ． □

3.5.7 定理 (余積空間の結合性)．位相空間族 $((X_\lambda,\tau_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ と集合 Λ の分割 $(\Lambda_\mu)_{\mu\in M}$ とが与えられたとする．各 $\mu\in M$ に対して，位相空間族 $((X_\lambda,\tau_\lambda))_{\lambda\in\Lambda_\mu}$ の余積空間 $(Y_\mu,\tau_\mu) := (\coprod_{\lambda\in\Lambda_\mu} X_\lambda, \tau(\mathfrak{i}_\mu))$ を考える．ただし，$\mathfrak{i}_\mu := (i'_\lambda\colon X_\lambda\to Y_\mu)_{\lambda\in\Lambda_\mu}$ は自然な入射からなる族である．このとき，余積空間 $(\coprod X_\lambda, \tau(\mathfrak{i}))$ と $(\coprod Y_\mu, \tau(\mathfrak{j}))$ とは同相である．

証明． 各 $\mu\in M$ と任意の $\lambda\in\Lambda_\mu$ とに対して，合成写像 $j_\mu\circ i'_\lambda\colon (X_\lambda,\tau_\lambda)\to(Y_\mu,\tau_\mu)\to(\coprod Y_\mu,\tau(\mathfrak{j}))$ は連続である（3.4.2）．一方，各 $\mu\in M$ と任意の $\lambda\in\Lambda_\mu$ とに対して，写像 $i_\lambda\colon (X_\lambda,\tau_\lambda)\to(\coprod X_\lambda,\tau(\mathfrak{i}))$ は連続なので，余積空間の普遍性（3.5.4）から，連続写像 $i^\mu\colon (Y_\mu,\tau_\mu)\to(\coprod X_\lambda,\tau(\mathfrak{i}))$ がただ一つ存在する：

$$\begin{tikzcd} X_\lambda \arrow[r, "i_\lambda"] \arrow[d, "i'_\lambda"'] & \coprod X_\lambda. \\ Y_\mu \arrow[ur, dashed, "i^\mu"'] & \end{tikzcd}$$

したがって，余積空間の普遍性（3.5.4）より，連続写像

$$\begin{aligned} f&\colon (\coprod X_\lambda,\tau(\mathfrak{i}))\to(\coprod Y_\mu,\tau(\mathfrak{j})),\\ g&\colon (\coprod Y_\mu,\tau(\mathfrak{j}))\to(\coprod X_\lambda,\tau(\mathfrak{i})) \end{aligned}$$

が定まる：

$$\begin{tikzcd} X_\lambda \arrow[r, "j_\mu i'_\lambda"] \arrow[d, "i_\lambda"'] & \coprod Y_\mu, \\ \coprod X_\lambda \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y_\mu \arrow[r, "i^\mu"] \arrow[d, "j_\mu"'] & \coprod X_\lambda. \\ \coprod Y_\mu \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd}$$

このとき，任意の $\mu\in M$ と $\lambda\in\Lambda_\mu$ とに対して，

$$\begin{aligned} gfi_\lambda &= gj_\mu i'_\lambda = i^\mu i'_\lambda = i_\lambda,\\ fgj_\mu i'_\lambda &= fi^\mu i'_\lambda = fi_\lambda = j_\mu i'_\lambda \end{aligned}$$

が成り立つので，$gf = \mathrm{id}$，$fg = \mathrm{id}$ を得る（3.5.3）：

$$
\begin{tikzcd}
X_\lambda \arrow[r, "i_\lambda"] \arrow[d, "i_\lambda"'] & \coprod X_\lambda \\
\coprod X_\lambda \arrow[ur, "gf"'] \arrow[ur, bend right, "\mathrm{id}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X_\lambda \arrow[r, "j_\mu i'_\lambda"] \arrow[d, "i'_\lambda"'] & \coprod Y_\mu \\
Y_\mu \arrow[ur, "j_\mu"] \arrow[d, "j_\mu"'] & \\
\coprod Y_\mu \arrow[uur, "fg"'] \arrow[uur, bend right, "\mathrm{id}"'] &
\end{tikzcd}
$$

$\square$

3.5.8 定理 (余積空間の可換性)．位相空間族 $((X_\lambda, \tau(X_\lambda)))_{\lambda\in\Lambda}$，$((Y_\mu, \tau(Y_\mu)))_{\mu\in M}$，および全単射 $\varphi\colon \Lambda \to M$ が与えられたとする．このとき，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，$(X_\lambda, \tau(X_\lambda))$ と $(Y_{\varphi(\lambda)}, \tau(Y_{\varphi(\lambda)}))$ とが同相ならば，$(\coprod X_\lambda, \tau(\mathfrak{i}))$ と $(\coprod Y_\mu, \tau(\mathfrak{j}))$ とは同相である．とくに，任意の全単射 $\psi\colon \Lambda \to \Lambda$ に対して $(\coprod X_\lambda, \tau(\mathfrak{i}))$ と $(\coprod X_{\psi(\lambda)}, \tau(\mathfrak{i}_\psi))$ とは同相である．

証明． 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，$(X_\lambda, \tau(X_\lambda))$ と $(Y_{\varphi(\lambda)}, \tau(Y_{\varphi(\lambda)}))$ との同相を与える写像を f_λ とおく．このとき，余積空間の普遍性（3.5.4）より，連続写像 $f\colon (\coprod X_\lambda, \tau(\mathfrak{i})) \to (\coprod Y_\mu, \tau(\mathfrak{j}))$ であって，任意の $\mu \in M$ に対して $f \circ i_{\varphi^{-1}(\mu)} = j_\mu \circ f_{\varphi^{-1}(\mu)}$ をみたすものが存在する：

$$
\begin{tikzcd}
X_{\varphi^{-1}(\mu)} \arrow[r, "f_{\varphi^{-1}(\mu)}"] \arrow[d, "i_{\varphi^{-1}(\mu)}"'] & Y_\mu \arrow[d, "j_\mu"] \\
\coprod X_\lambda \arrow[r, dashed, "f"'] & \coprod Y_\mu .
\end{tikzcd}
$$

逆写像族 $(f^{-1}_{\varphi^{-1}(\mu)})_{\mu\in M}$ を用いることで f の逆写像が構成できる．

後半は $Y_\lambda := X_{\psi(\lambda)}$，$\varphi := \psi^{-1}$ を考えればよい． $\square$

3.6 整合位相[3)]

3.6.1 定義． 集合 X とその部分集合族 $\mathcal{X} = (X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ とが与えられたとする．さらに，各 X_λ には位相 τ_λ が定まっていて，つぎの条件を満たすとする：

(i) 任意の $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times \Lambda$ に対して，$\tau_\lambda | X_\lambda \cap X_\mu = \tau_\mu | X_\lambda \cap X_\mu$ が成り立つ．

(ii) (a) 任意の $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times \Lambda$ に対して，$X_\lambda \cap X_\mu \in \tau_\lambda \cap \tau_\mu$ が成り立つ．または，
(b) 任意の $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times \Lambda$ に対して，$X_\lambda \cap X_\mu \in \tau^c_\lambda \cap \tau^c_\mu$ が成り立つ．

---

3) 本節以降の内容については，小松・中岡・菅原 [5, 第 1 章，§3] も参考にした．

このとき，包含写像族 $\mathrm{j} = (j_\lambda \colon X_\lambda \to X)_{\lambda\in\Lambda}$ による等化位相，あるいは同じことだが（3.5.3），写像 $\nabla(\mathrm{j}) \colon \coprod X_\lambda \to X$ による等化位相を（部分集合族 $\mathcal{X}$ から定まる）X の**整合位相（coherent topology）**といい，$\tau(\mathcal{X})$ で表わす：

$$\begin{tikzcd} X_\lambda \arrow[r, "j_\lambda"] \arrow[d, "i_\lambda"'] & X. \\ \coprod X_\lambda \arrow[ur, "\nabla(\mathrm{j})"'] & \end{tikzcd}$$

3.6.2 注意. 整合位相の定義より，つぎがわかる：

- $U \in \tau(\mathcal{X}) \Leftrightarrow \forall\lambda \in \Lambda, U \cap X_\lambda \in \tau_\lambda$.
- $C \in \tau^c(\mathcal{X}) \Leftrightarrow \forall\lambda \in \Lambda, C \cap X_\lambda \in \tau_\lambda^c$.

後者は $(X \smallsetminus C) \cap X_\lambda = X_\lambda \smallsetminus (C \cap X_\lambda)$ からしたがう．

3.6.3 注意. 本稿でいう整合位相とはいわゆる "弱位相" のことであるが，等化位相として定まることからわかるように，決して "弱" くはない（3.4.4，3.6.6）．

条件 (i)，(ii) がなくても等化位相 $\tau(\nabla(\mathrm{j}))$ は定まるが，これら 2 条件があることにより整合位相の "整合している感" が出る：

3.6.4 命題. 位相空間 $(X, \tau(\mathcal{X}))$ の部分集合 $X_\lambda \subset X$ の相対位相は，もともとの位相 τ_λ と一致する．さらに，(a) の場合（resp. (b) の場合），各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $X_\lambda \in \tau(\mathcal{X})$（resp. $X_\lambda \in \tau^c(\mathcal{X})$）が成り立つ．とくに $\mathcal{X}$ が素（disjoint）な部分集合族のとき，各 X_λ は $(X, \tau(\mathcal{X}))$ の開集合かつ閉集合である．

証明. 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，包含写像 $j_\lambda \colon (X_\lambda, \tau_\lambda) \to (X, \tau(\mathcal{X}))$ は連続なので，2.1.6 より $\mathrm{id}_{X_\lambda} \colon (X_\lambda, \tau_\lambda) \to (X_\lambda, \tau(\mathcal{X})|X_\lambda)$ は連続である．

((a) の場合)　$U \in \tau_\lambda$ とする．このとき (i) より，任意の $\mu \in \Lambda$ に対して，

$$U \cap X_\mu = U \cap (X_\lambda \cap X_\mu) \in \tau_\lambda|X_\lambda \cap X_\mu = \tau_\mu|X_\lambda \cap X_\mu$$

となる．一方，$X_\lambda \cap X_\mu \in \tau_\mu$ であったから，$U \cap X_\mu \in \tau_\mu$ を得る (2.2.4)．したがって，$U \in \tau(\mathcal{X})$ となる；とくに $X_\lambda \in \tau(\mathcal{X})$ である．よって，$U = U \cap X_\lambda \in \tau(\mathcal{X})|X_\lambda$ を得る．

（(b) の場合）　$C \in \tau^c_\lambda$ とする．このとき (i) より，任意の $\mu \in \Lambda$ に対して，

$$C \cap X_\mu = C \cap (X_\lambda \cap X_\mu) \in \tau^c_\lambda | X_\lambda \cap X_\mu = \tau^c_\mu | X_\lambda \cap X_\mu$$

となる．一方，$X_\lambda \cap X_\mu \in \tau^c_\mu$ であったから，$C \cap X_\mu \in \tau^c_\mu$ を得る（2.2.4）．したがって，$C \in \tau^c(\mathcal{X})$ となる；とくに $X_\lambda \in \tau^c(\mathcal{X})$ である．よって，$C = C \cap X_\lambda \in \tau^c(\mathcal{X})|X_\lambda$ を得る．□

3.6.5 定義． 位相空間 $(X, \tau(X))$ とその被覆 $\mathcal{X} = (X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が与えられたとする．各 X_λ の位相として相対位相を考えたとき（整合位相が定義できて[4]，さらに）$\tau(X) = \tau(\mathcal{X})$ が成り立つならば，$\tau(X)$ は $\mathcal{X}$ と**整合的（coherent）**であるという．とくに $\Lambda = \mathbb{Z}$ であって $X_n \subset X_{n+1}$，$n \in \mathbb{Z}$，が成り立つとき，X を被覆 $\mathcal{X}$ の**帰納極限（inductive limit）**といい $X = \varinjlim X_n$ と表わす．

3.6.6 注意． 整合位相が定義できるとき，包含写像 $j_\lambda \colon (X_\lambda, \tau(X)|X_\lambda) \to (X, \tau(X))$ の連続性から，$\mathrm{id}_X \colon (X, \tau(\mathcal{X})) \to (X, \tau(X))$ の連続性がしたがう（3.4.4）．よって，一般に整合位相の方が開集合が多い．また，位相 $\tau(X)$ が被覆 $\mathcal{X}$ と整合的であるとき，$\mathcal{X}$ は X の開被覆，または閉被覆である（3.6.4）．

3.6.7 補題． 集合 X の被覆 $\mathcal{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ であって，各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して $X_n \subset X_{n+1}$ が成り立つものが与えられたとする．各 X_n に位相が定まっていて，さらに，つぎのいずれかが成り立つならば，X に整合位相 $\tau(\mathcal{X})$ が定まる：

- 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して，$X_n \in \tau(X_{n+1})$ が成り立つ．
- 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して，$X_n \in \tau^c(X_{n+1})$ が成り立つ．

証明． 2.2.4 よりしたがう．□

3.6.8 例． n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ を $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0)$ により $\mathbb{R}^{n+1}$ の閉部分空間とみなすと，集合 $\mathbb{R}^\infty := \bigcup \mathbb{R}^n$ には被覆 $(\mathbb{R}^n)_{n \geq 0}$ に関する整合位相が定まる．こうして得られる位相空間を**無限次元 Euclid 空間**という．

整合位相の定義よりただちにつぎを得る：

3.6.9 命題． 位相空間 $(X, \tau(X))$ の位相が 3.6.1 (ii) をみたす被覆 $\mathcal{X} = (X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ と整合

---

[4] 相対位相の推移性（2.2.2）より，条件 (i) は常に成り立つ．

的であるためには，3.6.1 の写像 $\nabla(\mathrm{j})\colon (\coprod X_\lambda, \tau(\mathrm{i})) \to (X, \tau(X))$ が等化写像であることが必要かつ充分である． $\square$

3.6.10 系． 位相空間 $(X, \tau(X))$ とその被覆 $\mathcal{X} = (X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$，$\mathcal{X}' = (X'_\mu)_{\mu\in M}$ であって 3.6.1 (ii) をみたすものが与えられたとする．さらに，$\mathcal{X}$ が $\mathcal{X}'$ の細分であるとする[5]．このとき，位相 $\tau(X)$ が $\mathcal{X}$ と整合的であるならば，$\tau(X)$ は $\mathcal{X}'$ とも整合的である．

証明． 仮定より，写像 $\varphi\colon \Lambda \to M$ であって，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $X_\lambda \subset X'_{\varphi(\lambda)}$ が成り立つものが存在する．このとき，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $f_\lambda = X'_{\varphi(\lambda)}|\mathrm{id}_X|X_\lambda\colon (X_\lambda, \tau(X)|X_\lambda) \to (X'_{\varphi(\lambda)}, \tau(X)|X'_{\varphi(\lambda)})$ とおくと，つぎの可換図式が存在する：

$$\begin{tikzcd}
\coprod X_\lambda \arrow[r, "\coprod f_\lambda"] \arrow[d, "\nabla(\mathrm{j})"'] & \coprod X'_{\varphi(\lambda)} \arrow[r, "\subset"] & \coprod X'_\mu \arrow[d, "\nabla(\mathrm{j}')"] \\
X \arrow[rr, "\mathrm{id}_X"'] & & X.
\end{tikzcd}$$

いま，$\nabla(\mathrm{j})$ は等化写像であるから，3.2.8 より $\nabla(\mathrm{j}')$ は等化写像である． $\square$

整合位相が与えられているとき，写像の連続性は部分ごとの連続性に帰着できる：

3.6.11 命題． 位相空間 $(X, \tau(X))$ の位相が被覆 $\mathcal{X} = (X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と整合的であるとする．また，位相空間 $(Z, \tau(Z))$ と写像 $g\colon X \to Z$ とが与えられたとする．このとき，写像 $g\colon (X, \tau(X)) \to (Z, \tau(Z))$ が連続であるためには，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $g|X_\lambda = g \circ j_\lambda\colon (X_\lambda, \tau(X)|X_\lambda) \to (Z, \tau(Z))$ が連続であることが必要かつ充分である．

証明． つぎの可換図式が存在する：

$$\begin{tikzcd}
X_\lambda \arrow[r, "gj_\lambda"] \arrow[d, "i_\lambda"'] \arrow[dd, bend right=60, "j_\lambda"'] & Z. \\
\coprod X_\lambda \arrow[ur] \arrow[d, "\nabla(\mathrm{j})"'] & \\
X \arrow[uur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

よって，3.1.4，3.5.2 より結論を得る． $\square$

[5] このとき，$\mathcal{X} \prec \mathcal{X}'$ と書く．

3.6.12 系． 位相空間 $(X,\tau(X))$，$(Y,\tau(Y))$，および $\tau(X)$ と整合的な被覆 $\mathcal{X}=(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$，全射連続写像 $f\colon(X,\tau(X))\to(Y,\tau(Y))$ が与えられたとする．このとき，つぎが成り立つ：

(i) f が等化写像であって，Y の被覆 $f(\mathcal{X}):=(f(X_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ が開被覆，または閉被覆であれば，$\tau(Y)$ は $f(\mathcal{X})$ と整合的である．

(ii) Y の位相が被覆 $f(\mathcal{X})$ と整合的であり，さらに各 $\lambda\in\Lambda$ に対して連続写像

$$f_\lambda := f(X_\lambda)|f|X_\lambda\colon (X_\lambda,\tau(X)|X_\lambda)\to(f(X_\lambda),\tau(Y)|f(X_\lambda))$$

が等化写像ならば，f も等化写像である．

証明． まず，つぎの可換図式が存在することに注意する：

$$\begin{tikzcd}
\coprod X_\lambda \arrow[r, "\coprod f_\lambda"] \arrow[d, "\nabla(\mathrm{j}_X)"'] & \coprod f(X_\lambda) \arrow[d, "\nabla(\mathrm{j}_Y)"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y.
\end{tikzcd}$$

また，等化写像の合成は等化写像であった（3.2.8）．

(i) 仮定より $\nabla(\mathrm{j}_Y)\circ(\coprod f_\lambda)=f\circ\nabla(\mathrm{j}_X)$ は等化写像なので，3.2.8 より $\nabla(\mathrm{j}_Y)$ は等化写像である．

(ii) 仮定と 3.5.6 より $\coprod f_\lambda$ は等化写像なので，$f\circ\nabla(\mathrm{j}_X)=\nabla(\mathrm{j}_Y)\circ(\coprod f_\lambda)$ は等化写像である．よって 3.2.8 より f は等化写像である． □

局所的な連続写像を貼り合わせて大域的な連続写像を得ることもできる：

3.6.13 命題． 位相空間 $(X,\tau(X))$ の位相が被覆 $\mathcal{X}=(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と整合的であるとする．各 $\lambda\in\Lambda$ に対して，位相空間 $(Z,\tau(Z))$ への連続写像 $g_\lambda\colon(X_\lambda,\tau_\lambda)\to(Z,\tau(Z))$ が与えられていて，任意の $(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\Lambda$ について $g_\lambda|X_\lambda\cap X_\mu=g_\mu|X_\lambda\cap X_\mu$ が成り立つとする．このとき，連続写像 $g\colon(X,\tau(X))\to(Z,\tau(Z))$ であって，各 $\lambda\in\Lambda$ に対して $g|X_\lambda=g_\lambda$ が成り立つものがただ一つ存在する．

証明． 写像族 $\mathfrak{g}=(g_\lambda\colon X_\lambda\to Z)_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，余積空間の普遍性（3.5.4）より，連続写像 $\nabla(\mathfrak{g})\colon(\coprod X_\lambda,\tau(\mathfrak{i}))\to(Z,\tau(Z))$ であって，任意の $\lambda\in\Lambda$ について $\nabla(\mathfrak{g})\circ i_\lambda=g_\lambda$ が

成り立つものがただ一つ存在する：

$$
\begin{tikzcd}
X_\lambda \arrow[r, "g_\lambda"] \arrow[d, "i_\lambda"'] & Z. \\
\coprod X_\lambda \arrow[ur, dashed, "\nabla(\mathfrak{g})"'] &
\end{tikzcd}
$$

仮定より，任意の $\xi, \xi' \in \coprod X_\lambda$ に対して，

$$\nabla(\mathfrak{j})(\xi) = \nabla(\mathfrak{j})(\xi') \Rightarrow \nabla(\mathfrak{g})(\xi) = \nabla(\mathfrak{g})(\xi')$$

が成り立つので，連続写像 $g\colon (X, \tau(X)) \to (Z, \tau(Z))$ であって，$g \circ \nabla(\mathfrak{j}) = \nabla(\mathfrak{g})$ となるものがただ一つ存在する（3.2.6）：

$$
\begin{tikzcd}
\coprod X_\lambda \arrow[r, "\nabla(\mathfrak{g})"] \arrow[d, "\nabla(\mathfrak{j})"'] & Z. \\
X \arrow[ur, dashed, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

□

位相 $\tau(X)$ が被覆 $\mathcal{X}$ と整合的ならば，$\mathcal{X}$ は開被覆，または閉被覆である必要があった（3.6.6）．逆に，つぎのような被覆は位相と整合的である：

3.6.14 定理． 位相空間 $(X, \tau(X))$ の被覆 $\mathcal{X} = (X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が以下のいずれかをみたすならば，$\tau(X)$ は $\mathcal{X}$ と整合的である．

(i) 開被覆である．

(ii) $\mathcal{X}$ は閉被覆であって，$\mathrm{int}(\mathcal{X}) \coloneqq (\mathrm{int}(X_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ は X の被覆である．

(iii) 局所有限な閉被覆である[6]．

証明． いずれの場合にも整合位相 $\tau(\mathcal{X})$ が定まることは明らかである．さらに，$\tau(\mathcal{X}) \supset \tau(X)$，および $\tau^c(\mathcal{X}) \supset \tau^c(X)$ が成り立つことに注意する（3.6.6）．

(i) $U \in \tau(\mathcal{X})$ とする．このとき，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $U \cap X_\lambda \in \tau(X_\lambda) \subset \tau(X)$ が成り立つので，$U = \bigcup U \cap X_\lambda \in \tau(X)$ を得る．

(ii) (i) と 3.6.10 より結論を得る．

[6] 位相空間 $(X, \tau(X))$ の被覆 $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が**局所有限（locally finite）**$:\Leftrightarrow \forall x \in X,\ \exists U \in \tau(x, X) : \{\lambda \in \Lambda \mid U \cap X_\lambda \neq \varnothing\}$ は有限集合．

(iii) $C \in \tau^c(\mathcal{X})$ とする．このとき，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $C \cap X_\lambda \in \tau^c(X_\lambda) \subset \tau^c(X)$ であるから，$(C \cap X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は局所有限な閉集合族である．よって，$C = \bigcup C \cap X_\lambda \in \tau^c(X)$ を得る． $\square$

3.7 整合位相と部分空間

3.7.1 補題. 位相空間族 $((X_\lambda, \tau_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$，およびその部分集合たち $A_\lambda \subset X_\lambda$，$\lambda \in \Lambda$，が与えられたとする．このとき，$\coprod A_\lambda \in \tau(\mathfrak{i}) \cup \tau^c(\mathfrak{i})$，すなわち

- 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $A_\lambda \in \tau(X_\lambda)$ である．
- 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $A_\lambda \in \tau^c(X_\lambda)$ である．

のいずれかが成り立つならば，非交和 $\coprod A_\lambda$ の，余積空間 $(\coprod X_\lambda, \tau(\mathfrak{i}))$ の部分空間としての相対位相と，部分空間族 $((A_\lambda, \tau_\lambda|A_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ の余積空間としての余積位相とは一致する．

証明. 仮定より，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して，自然な入射 $j_\lambda \coloneqq (i_\lambda)_{A_\lambda} \colon (A_\lambda, \tau_\lambda|A_\lambda) \to (\coprod A_\lambda, \tau(\mathfrak{i})|\coprod A_\lambda)$ は等化写像である（3.3.1）．したがって，$\tau(j_\lambda) = \tau(\mathfrak{i})|\coprod A_\lambda$ が成り立つ．よって，$\tau(\mathfrak{j}) = \bigcap \tau(j_\lambda) = \tau(\mathfrak{i})|\coprod A_\lambda$ となり結論を得る． $\square$

3.7.2 定理. 位相空間 $(X, \tau(X))$，その位相と整合的な被覆 $\mathcal{X} = (X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$，および部分集合 $A \subset X$ が与えられたとする．このとき，$A \in \tau(X) \cup \tau^c(X)$ ならば，相対位相 $\tau(X)|A$ は被覆 $\mathcal{X}|A \coloneqq (X_\lambda \cap A)_{\lambda \in \Lambda}$ と整合的である．とくに，$X = \varinjlim X_n$ ならば $A = \varinjlim (X_n \cap A)$ が成り立つ．

証明. 包含写像 $A|j_\lambda|X_\lambda \cap A$，および自然な入射 $\coprod(X_\lambda \cap A)|i_\lambda|X_\lambda \cap A$ をそれぞれ $\jmath_\lambda$，$\imath_\lambda$ とおく．仮定より，$\nabla(\mathfrak{j}) \colon (\coprod X_\lambda, \tau(\mathfrak{i})) \to (X, \tau(X))$ は等化写像であり，また $\coprod(X_\lambda \cap A)$ の位相に関して $\tau(\mathfrak{i})|\coprod(X_\lambda \cap A) = \tau((\imath_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ が成り立つ（3.7.1）．さらに，3.3.1 より，$\nabla(\mathfrak{j})_A \colon (\coprod(X_\lambda \cap A), \tau(\mathfrak{i})|\coprod(X_\lambda \cap A)) \to (A, \tau(X)|A)$ は等化写像である．よって，つぎの図式の可換性と 3.6.9 から結論を得る：

$$
\begin{tikzcd}
X_\lambda \cap A \arrow[r, "\jmath_\lambda"] \arrow[d, "\imath_\lambda"'] & A. \\
\coprod(X_\lambda \cap A) \arrow[ur, "\nabla(\mathfrak{j})_A"'] &
\end{tikzcd}
$$

$\square$

3.8 整合位相と積空間

はじめに，等化写像の積が等化写像になるための充分条件のいくつかをまとめておく．つぎの定理が鍵になる：

3.8.1 定理 ([5, 第 1 章, 定理 1.4])．全射等化写像 $f_i\colon (X_i, \tau(X_i)) \to (Y_i, \tau(Y_i))$, $i = 1, 2$, が与えられたとする．このとき，f_1 がつぎの条件 (3.8.2) を満たすならば，積写像

$$f \coloneqq f_1 \times f_2\colon (X_1 \times X_2, \tau(X_1 \times X_2)) \to (Y_1 \times Y_2, \tau(Y_1 \times Y_2))$$

は全射等化写像である．ただし，$\tau(X_1 \times X_2)$，$\tau(Y_1 \times Y_2)$ は積位相である：

(3.8.2) 任意の f_1飽和開集合 $U_1 \in \tau(X_1)$ とその点 $x_1 \in U_1$に対して，相対コンパクト f_1飽和開集合 $V_1 \in \tau(x_1, X_1)$ であって，$\overline{V_1} \subset U_1$を満たすものが存在する．

証明． $B \in \tau(f)$ とし，$A = f^{-1}(B) \in \tau(X_1 \times X_2)$ とおく．$B \in \tau(Y_1 \times Y_2)$ となることを示せばよい．そこで，$(y_1, y_2) \in B$ とし，$(x_1, x_2) \in f^{-1}(y_1, y_2) \subset A$ をとる．このとき，

$$U_1 = \{\xi_1 \in X_1 \mid (\xi_1, x_2) \in A\}$$

とおくと，$A \in \tau(X_1 \times X_2)$ より $U_1 \in \tau(X_1)$ となることがわかる．また，$U_1 \times \{x_2\} = (X_1 \times \{x_2\}) \cap A$ が成り立つ．

(U_1 は f_1 飽和集合である)　任意の $\xi_1 \in f_1^{-1}(f_1(U_1))$ に対して，$\xi_1' \in U_1$ であって $f_1(\xi_1) = f_1(\xi_1')$ となるものが存在する．このとき，$(\xi_1', x_2) \in A$ より $f(\xi_1, x_2) = f(\xi_1', x_2) \in f(A) = B$ が成り立つので $(\xi_1, x_2) \in f^{-1}(B) = A$ を得る．よって，$(\xi_1, x_2) \in (X_1 \times \{x_2\}) \cap A = U_1 \times \{x_2\}$，すなわち $\xi_1 \in U_1$ が成り立つ．

したがって，仮定より，相対コンパクト f_1 飽和開集合 $V_1 \in \tau(x_1, X_1)$ であって $\overline{V_1} \subset U_1$ となるものが存在する．いま f_1 は等化写像なので，$f_1(V_1) \in \tau(Y_1)$ である．そこで，

$$U_2 = \{\xi_2 \in X_2 \mid \overline{V_1} \times \{\xi_2\} \subset A\}$$

とおくと，$(x_1, x_2) \in V_1 \times U_2 \subset A$ より $(y_1, y_2) \in f_1(V_1) \times f_2(U_2) \subset B$ が成り立つ．あとは $f_2(U_2) \in \tau(Y_2)$ を示せばよい．

($U_2 \in \tau(X_2)$ である)　任意の $\xi_2 \in U_2$ に対して，$\overline{V_1} \times \{\xi_2\} \subset A \in \tau(X_1 \times X_2)$ であるから $\overline{V_1}$ のコンパクト性より $V_2 \in \tau(\xi_2, X_2)$ であって $\overline{V_1} \times V_2 \subset A$ となるものが存在することがわかる．したがって，$V_2 \subset U_2$ が成り立つ．

（U_2 は f_2 飽和集合である）　$f_2^{-1}(f_2(U_2)) \subset U_2$ を示せばよいが，

$$\begin{aligned}\overline{V_1} \times f_2^{-1}(f_2(U_2)) &\subset f_1^{-1}(f_1(\overline{V_1})) \times f_2^{-1}(f_2(U_2)) \\ &= f^{-1}(f(\overline{V_1} \times U_2)) \\ &\subset f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(B) = A\end{aligned}$$

となるので，U_2 の定義より結論を得る．

いま f_2 は等化写像であったから，$f_2(U_2) \in \tau(Y_2)$ となる．　□

3.8.3 系． コンパクト空間 X_1 から T_2 空間 Y_1 への全射連続写像 $f_1\colon (X_1, \tau(X_1)) \to (Y_1, \tau(Y_1))$ と全射等化写像 $f_2\colon (X_2, \tau(X_2)) \to (Y_2, \tau(Y_2))$ との積は等化写像である．

証明． 仮定より f_1 は全射閉写像，したがって等化写像であるから（3.2.4），あとは (3.8.2) が成り立つことを示せばよい．まず，$Y_1 = f_1(X_1)$ はコンパクト T_2 空間であることに注意する（1.0.1）．さて，f_1 飽和開集合 $U_1 \in \tau(X_1)$ とその点 $x_1 \in U_1$ をとる．このとき，$f_1(U_1) \in \tau(f_1(x_1), Y_1)$ であるから，$W_1 \in \tau(f_1(x_1), Y_1)$ であって $\overline{W_1} \subset f_1(U_1)$ となるものが存在する（1.0.1）．そこで $V_1 = f_1^{-1}(W_1) \in \tau(x_1, X_1)$ とおくと，f_1 の全射性より V_1 は f_1 飽和開集合であり，さらに

$$\overline{V_1} = \overline{f_1^{-1}(W_1)} \subset f_1^{-1}(\overline{W_1}) \subset f_1^{-1}(f_1(U_1)) = U_1$$

が成り立つ．いま X_1 はコンパクトであるからその閉集合 $\overline{V_1}$ はコンパクトであり，よって結論を得る．　□

3.8.4 系． 全射等化写像 $f\colon (X, \tau(X)) \to (Y, \tau(Y))$ と局所コンパクト T_2 空間 $(Z, \tau(Z))$ が与えられたとする．このとき，f と id_Z との積は等化写像である．

証明． 仮定より，id_Z に対して (3.8.2) が成り立つことがわかる．　□

3.8.5 系． 全射等化写像 $f_i\colon (X_i, \tau(X_i)) \to (Y_i, \tau(Y_i))$，$i = 1, 2$，が与えられたとする．このとき，$X_1$ と Y_2 が局所コンパクト T_2 空間ならば f_1 と f_2 との積は等化写像である．

証明． $f_1 \times f_2 = (f_1 \times \mathrm{id}_{Y_2}) \circ (\mathrm{id}_{X_1} \times f_2)\colon X_1 \times X_2 \to X_1 \times Y_2 \to Y_1 \times Y_2$ が成り立つので，3.8.4，3.2.8 より結論を得る．　□

3.8.6 定理． 位相空間 $(X, \tau(X))$，$(Y, \tau(Y))$，ならびにそれぞれの位相と整合的な被覆 $\mathcal{X} = (X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$，$\mathcal{Y} = (Y_\mu)_{\mu \in M}$ が与えられたとする．また，$\mathcal{X}$，$\mathcal{Y}$ はともに開被覆（resp.

閉被覆）であるとする．このとき，積集合 $X \times Y$ 上に定まる二つの位相，すなわち積位相 $\tau(X \times Y)$ と被覆 $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} := (X_\lambda \times Y_\mu)_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}$ による整合位相に関して，以下のいずれかが成り立てば $\tau(X \times Y) = \tau(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ が成り立つ：

(i) $\mathrm{int}(\mathcal{X})$，$\mathrm{int}(\mathcal{Y})$ はそれぞれ X，Y の被覆である．

(ii) $\mathcal{X}$，$\mathcal{Y}$ はともに局所有限閉被覆である．

(iii) Y は T_2 空間で，$\mathcal{Y}$ は局所有限コンパクト被覆である．

(iv) Y は局所コンパクト T_2 空間で，$\mathcal{Y} = (Y)$ である．

証明． (i) 任意の $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times M$ に対して $\mathrm{int}(X_\lambda \times Y_\mu) = \mathrm{int}(X_\lambda) \times \mathrm{int}(Y_\mu)$ が成り立つので，3.6.14，3.6.10 より結論を得る．

(ii) $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ は $X \times Y$ の局所有限閉被覆なので，3.6.14 より結論を得る．

(iii) 仮定より $\mathcal{Y}$ はとくに局所有限閉被覆であるから $\tau(Y)$ と整合的であることに注意する（3.6.14）．つぎの可換図式が存在する：

$$\begin{array}{ccc}
(\coprod X_\lambda) \times (\coprod Y_\mu) & \xleftarrow{\approx} & \coprod (X_\lambda \times Y_\mu) \\
{\scriptstyle \nabla(\mathrm{j}_X)\times\nabla(\mathrm{j}_Y)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \nabla(\mathrm{j}_X\times\mathrm{j}_Y)} \\
X \times Y & \xrightarrow[\mathrm{id}]{} & X \times Y.
\end{array}$$

仮定より $\nabla(\mathrm{j}_X)$，$\nabla(\mathrm{j}_Y)$ はともに全射等化写像であるから，$\nabla(\mathrm{j}_Y)$ が (3.8.2) を満たすことを示せばよい（3.2.8）．そこで $\nabla(\mathrm{j}_Y)$ 飽和開集合 $U \in \tau(\coprod Y_\mu)$ とその点 $\eta \in U$ をとる．$y = \nabla(\mathrm{j}_Y)(\eta)$ とおくと $\nabla(\mathrm{j}_Y)(U) \in \tau(y, Y)$ であるから，$(Y_\mu)_{\mu\in M}$ が局所有限であることと併せて，$W \in \tau(y, Y)$ であって，

$$W \subset \nabla(\mathrm{j}_Y)(U),\ M_y := \{\mu \in M \mid W \cap Y_\mu \neq \varnothing\} \text{ は有限集合}$$

となるものが存在する．さて，$K = \bigcup\{Y_\mu \mid \mu \in M_y\}$ とおくと，K はコンパクト T_2 空間であって $y \in W \subset K$ であるから，$W' \in \tau(y, Y)$ であって $\mathrm{cl}_K(W' \cap K) \subset W$ となるものが存在する．ここで $V' = W' \cap W \in \tau(y, Y)$ とおくと

$$\overline{V'} \subset \overline{W' \cap K} \cap K = \mathrm{cl}_K(W' \cap K) \subset W$$

が成り立つ．そこで，$V = \nabla(\mathrm{j}_Y)^{-1}(V') \in \tau(\eta, \coprod Y_\mu)$ とおくと，これは $\nabla(\mathrm{j}_Y)$ 飽和開集合であり，

$$\overline{V} = \overline{\nabla(\mathrm{j}_Y)^{-1}(V')} \subset \nabla(\mathrm{j}_Y)^{-1}(\overline{V'}) \subset \nabla(\mathrm{j}_Y)^{-1}(W) \subset U$$

が成り立つ．あとは $\overline{V} \subset \coprod Y_\mu$ がコンパクトであることを示せばよい．ところで，任意の $\mu \in M$ に対して，

$$\begin{aligned}\overline{V} \cap i_{Y_\mu}(Y_\mu) \neq \varnothing &\Rightarrow \nabla(\mathrm{j}_Y)^{-1}(\overline{V'}) \cap i_{Y_\mu}(Y_\mu) \neq \varnothing \\ &\Rightarrow \overline{V'} \cap \nabla(\mathrm{j}_Y)(i_{Y_\mu}(Y_\mu)) = \overline{V'} \cap Y_\mu \neq \varnothing \\ &\Rightarrow W \cap Y_\mu \neq \varnothing\end{aligned}$$

が成り立つので，$\overline{V} \subset \coprod_{\mu \in M_y} Y_\mu$ となる．よって，$\overline{V}$ はコンパクト空間の閉集合ゆえコンパクトである．

(iv) つぎの可換図式が存在する．

$$\begin{tikzcd} (\coprod X_\lambda) \times Y \arrow[d, "\nabla(\mathrm{j}_X)\times \mathrm{id}_Y"'] & \coprod (X_\lambda \times Y) \arrow[l, "\approx"'] \arrow[d, "\nabla(\mathrm{j}_X \times \mathrm{id}_Y)"] \\ X \times Y \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & X \times Y. \end{tikzcd}$$

仮定より $\nabla(\mathrm{j}_X)$ は全射等化写像であるから，3.8.4，3.2.8 より結論を得る． □

4 商空間

以下，考えている位相が明らかなときは適宜省略する．

4.1 商位相

4.1.1 定義． 位相空間 $(X, \tau(X))$ 上の同値関係 R が与えられたとする．このとき，標準射影 $q_R\colon X \to X/R$ による等化位相 $\tau(q_R)$ を（R による）商位相（**quotient topology**）といい，$(X/R, \tau(q_R))$ を（R による）商空間（**quotient space**）という．また，$q_R\colon (X, \tau(X)) \to (X/R, \tau(q_R))$ を商写像（**quotient map**）という．

等化空間の普遍性（3.2.6）より，ただちにつぎを得る：

4.1.2 定理 (商空間の普遍性)**.** 位相空間 Y と連続写像 $f\colon X \to Y$ とが与えられたとする．このとき，任意の $x, x' \in X$ に対して

$$(x, x') \in R \Rightarrow f(x) = f(x')$$

が成り立つならば，連続写像 $\overline{f}\colon X/R \to Y$ であって $\overline{f} \circ q_R = f$ をみたすものがただひとつ存在する：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q_R"'] & Y. \\ X/R \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$ □

4.1.3 注意. 定義より，商写像は全射等化写像である．逆に，全射等化写像はつぎの意味で商写像である：全射等化写像 $f\colon X \to Y$ が与えられたとする．このとき，X 上の同値関係 $R(f)$ を

$$(x, x') \in R(f) \Leftrightarrow f(x) = f(x')$$

で定める．まず，4.1.2 より，連続全単射 $\overline{f}\colon X/R(f) \to Y$ が存在することがわかる：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & Y. \\ X/R(f) \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

一方，f は等化写像なので，$\overline{f}^{-1} \circ f = q$ の連続性から $\overline{f}^{-1}$ の連続性がしたがう（3.2.3）．よって，$\overline{f}\colon X/R(f) \to Y$ は同相写像である．

全射連続開写像（resp. 閉写像）は等化写像であったから（3.2.4），ただちにつぎを得る：

4.1.4 系. 全射連続開写像（resp. 閉写像）$f\colon X \to Y$ に対して，写像 $\overline{f}\colon X/R(f) \to Y$ は同相写像である． □

商空間の普遍性（4.1.2）より，つぎが成り立つ：

4.1.5 命題. 連続写像 $f\colon X \to Y$，および同値関係 $R \subset X \times X$，$S \subset Y \times Y$ が与えられたとする．このとき，任意の $x, x' \in X$ に対して

$$(x, x') \in R \Rightarrow (f(x), f(x')) \in S$$

が成り立つならば，連続写像 $\overline{f}\colon X/R \to Y/S$ であって $\overline{f} \circ q_R = q_S \circ f$ をみたすものがただ一つ存在する：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q_R"'] & Y \arrow[d, "q_S"] \\ X/R \arrow[r, dashed, "\overline{f}"'] & Y/S. \end{tikzcd}$$ □

4.1.6 系 (商空間の推移性)**.** 位相空間 X とその上の同値関係 $R, S \subset X \times X$ が与えられたとする．このとき，$R \subset S$ が成り立つならば，X/R 上の同値関係 S/R であって，同相 $(X/R)/(S/R) \approx X/S$ が成り立つものがただ一つ存在する．

証明. 仮定より，連続写像 $\overline{\mathrm{id}_X}\colon X/R \to X/S$ が存在する（4.1.5）：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\mathrm{id}_X} & X \\ {\scriptstyle q_R}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q_S} \\ X/R & \underset{\overline{\mathrm{id}_X}}{\dashrightarrow} & X/S. \end{array}$$

いま，$\overline{\mathrm{id}_X} \circ q_R = q_S$ は全射等化写像であるから $\overline{\mathrm{id}_X}$ も全射等化写像である（3.2.8）．そこで，$S/R = R(\overline{\mathrm{id}_X})$ とおくと，4.1.3 より，同相 $(X/R)/(S/R) \approx X/S$ を得る． □

4.1.7 命題. 位相空間 X 上の同値関係 R と部分集合 $A \subset X/R$ とが与えられたとする．このとき，$A \in \tau(X/R) \cup \tau^c(X/R)$，あるいは $q\colon X \to X/R$ が開写像または閉写像ならば，$q^{-1}(A)$ 上の同値関係

$$R|q^{-1}(A) \coloneqq R \cap (q^{-1}(A) \times q^{-1}(A))$$

による商空間 $q^{-1}(A)/(R|q^{-1}(A))$ と A とは同相である．

証明. 仮定より $q^A\colon q^{-1}(A) \to A$ は全射等化写像であるから（3.3.1），$q^{-1}(A)/R(q^A)$ と A とは同相である（4.1.3）．ところで，任意の $x, x' \in q^{-1}(A)$ に対して

$$(x, x') \in R(q^A) \Leftrightarrow (x, x') \in R|q^{-1}(A)$$

が成り立つので結論を得る． □

4.2 部分集合を一点につぶして得られる空間

4.2.1 定義. 集合 X 上の関係 $R_0 \subset X \times X$ に対して，$R_1 = \Delta_X \cup R_0 \cup R_0^{-1}$ とおく．このとき，$R \coloneqq \bigcup_{n\geq 1} R_1^n$，すなわち

$$(x, x') \in R \Leftrightarrow \exists (x_i)_{0\leq i\leq n} : x_0 = x, x_n = x', (x_{i-1}, x_i) \in R_1, 1 \leq i \leq n,$$

で定まる集合 $R \subset X \times X$ を R_0 **によって生成される同値関係**という．ただし，$\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$ である．

4.2.2 補題. 位相空間 X に対して $X/\Delta_X \approx X$ が成り立つ.

証明. $R(\mathrm{id}_X) = \Delta_X$ なので,4.1.3 より結論を得る. □

4.2.3 定義. 位相空間 X と部分集合 $A \subset X$ とが与えられたとする.このとき,$A \times A$ によって生成される同値関係 $R(A) \coloneqq \Delta_X \cup (A \times A) \subset X \times X$ による商空間を,A **を一点につぶして得られる空間**といい X/A で表わす.

4.2.4 命題. 商写像 $q\colon X \to X/A$ に対してつぎが成り立つ:

(i) $A \in \tau(X)$ ならば q は開写像である.
(ii) $A \in \tau^c(X)$ ならば q は閉写像である.

証明. 任意の部分集合 $B \subset X$ に対して,

$$q^{-1}(q(B)) = \begin{cases} A \cup B & , A \cap B \neq \varnothing \\ B & , A \cap B = \varnothing \end{cases}$$

が成り立つので結論を得る. □

4.2.5 命題. $A \in \tau(X) \cup \tau^c(X)$ のとき,制限写像

$$((X/A) \smallsetminus q(A))|q|(X \smallsetminus A)\colon X \smallsetminus A \to (X/A) \smallsetminus q(A)$$

は同相写像である.

証明. 仮定より,q は開写像,または閉写像であり(4.2.4),さらに $q^{-1}((X/A) \smallsetminus q(A)) = X \smallsetminus A$ が成り立つので,4.2.2,4.1.7 より結論を得る. □

4.2.6 命題. コンパクト T_2 空間 X に対して,その閉集合 $A \subset X$ を一点につぶして得られる空間はまたコンパクト T_2 空間である.

証明. 商写像を $q\colon X \to X/A$ とおき,$q(x) \neq q(y)$ とする.$x, y \notin A$ のときは,T_2 空間 $X \smallsetminus A$ における交わらない開近傍の q による像が $q(x), q(y)$ の交わらない開近傍を与える(4.2.5).そこで,$x \notin A$,$y \in A$ とする.このとき,$X \smallsetminus A \in \tau(x, X)$ であるから,$V \in \tau(x, X)$ であって $\overline{V} \subset X \smallsetminus A$ となるものが存在する(1.0.1).したがって,$q(V) \in \tau(q(x), X/A)$,$q(X \smallsetminus \overline{V}) \in \tau(q(y), X/A)$ が交わらない開近傍を与える. □

4.2.7 例. n 次元球体 D^n の境界 S^{n-1} を一点につぶして得られる空間は n 次元球面

$S^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ に同相である．実際，連続写像 $D^n \to S^n\,; x \mapsto (2\sqrt{1-\|x\|^2}x, 2\|x\|^2 - 1)$[7) はコンパクト空間 D^n/S^{n-1} から T_2 空間 S^n への全単射連続写像を誘導する．さらに，4.2.5 より，同相 $D^n \setminus S^{n-1} \approx S^n \setminus \{(0,\ldots,0,1)\}$ が成り立つ．

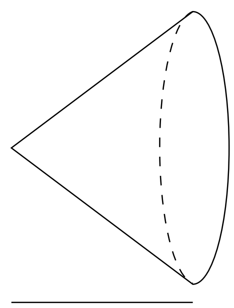
4.3 代数トポロジーでよく見る例

■ 錐

4.3.1 定義． 位相空間 X に対して，単位閉区間 $I := [0,1]$ との積空間 $I \times X$ 上の関係

$$(0,x) \sim (0,x'),\ \ x, x' \in X$$

によって生成される同値関係による商空間，すなわち部分集合 $\{0\} \times X$ を一点につぶして得られる空間 $(I \times X)/(\{0\} \times X)$ を X **の錐（cone）**といい，CX で表わす．



4.3.2 命題． 商写像を $q\colon I \times X \to CX\,; (t,x) \mapsto [t,x]$ とする．このとき，X は CX の閉部分空間 $q(\{1\} \times X) = \{[1,x] \mid x \in X\}$ と同相である．この同相により $X \subset CX$ とみなす．

証明． まず，$q^{-1}(q(\{1\} \times X)) = \{1\} \times X \in \tau^c(I \times X)$ であるから，$q(\{1\} \times X) \in \tau^c(CX)$ である．また，$R(\{0\} \times X)|(\{1\} \times X) = \Delta_{\{1\} \times X}$ であるから，4.2.2，4.1.7 より

$$X \approx \{1\} \times X \approx (\{1\} \times X)/\Delta_{\{1\} \times X} \approx q(\{1\} \times X)$$

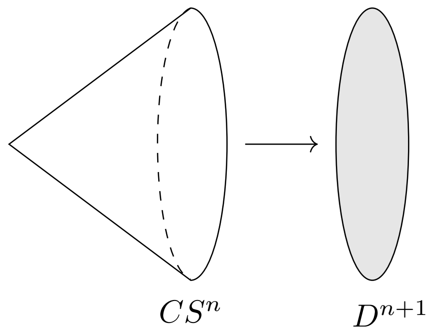
を得る． □

4.1.5 より，ただちにつぎを得る：

[7) 同相 $\mathrm{int}(D^n) \to \mathbb{R}^n\,; x \mapsto x/\sqrt{1-\|x\|^2}$（逆写像は $y \mapsto y/\sqrt{1+\|y\|^2}$ で与えられる．）と立体射影の逆写像 $\mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{(0,\ldots,0,1)\}$ との合成写像を境界 $S^{n-1} \subset D^n$ まで拡張した写像に他ならない．

4.3.3 命題. 連続写像 $f\colon X \to Y$ は，連続写像 $Cf\colon CX \to CY$; $[t, x] \mapsto [t, f(x)]$ を誘導する．これを f の錐という． □

4.3.4 例. n 次元球面 S^n の錐は D^{n+1} に同相である．実際，連続写像 $I \times S^n \to D^{n+1}$; $(t, x) \mapsto tx$ はコンパクト空間 CS^n から T_2 空間 D^{n+1} への全単射連続写像を誘導する．

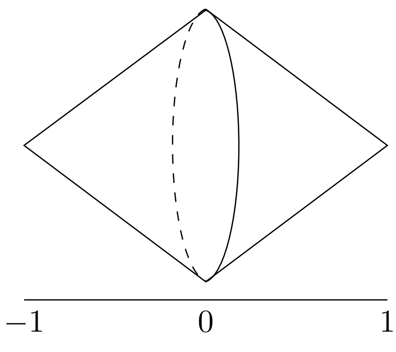


■ 懸垂

4.3.5 定義. 位相空間 X と閉区間 $J := [-1, +1]$ との積空間 $J \times X$ 上の関係

$$(-1, x) \sim (-1, x'),\ (1, x) \sim (1, x'),\ x, x' \in X$$

によって生成される同値関係による商空間を X の懸垂（**suspension**）といい，SX で表わす．



4.3.6 命題. 位相空間 X の懸垂 SX に関してつぎが成り立つ：

(i) 同相 $SX \approx CX/X$ が成り立つ．

(ii) 錐 CX は SX の閉部分空間 $\{[t, x] \in SX \mid t \leq 0\}$ と同相である．

証明. (i) 連続写像 $f\colon I \times X \to J \times X$; $(t, x) \mapsto (2t - 1, x)$ は，連続写像 $\overline{f}\colon CX/X \to SX$ を誘導する（4.1.5）．同様にして，f の逆写像が $\overline{f}$ の逆写像を誘導する．

(ii) 4.3.2 と同様にして示せる． □

4.3.7 命題． 連続写像 $f\colon X \to Y$ は，連続写像 $Sf\colon SX \to SY\,;\,[t,x] \mapsto [t,f(x)]$ を誘導する．これを f の**懸垂**という． □

4.3.8 例． n 次元球面 S^n の懸垂は S^{n+1} に同相である．実際，連続写像 $J \times S^n \to S^{n+1}\,;$ $(t,x) \mapsto (t,\sqrt{1-t^2}x)$ はコンパクト空間 SS^n から T_2 空間 S^{n+1} への全単射連続写像を誘導する．

4.3.9 例． $n+1$ 次元球体 D^{n+1} の境界 S^n を一点につぶして得られる空間は $n+1$ 次元球面 S^{n+1} に同相である．実際，$D^{n+1}/S^n \approx CS^n/S^n \approx SS^n \approx S^{n+1}$ が成り立つ（cf. 4.2.7）．

■ 結

4.3.10 定義． 位相空間 X, Y に対して，$X \times I \times Y$ 上の関係

$$(x,0,y) \sim (x,0,y'),\ (x,1,y) \sim (x',1,y),\ x,x' \in X,\ y,y' \in Y$$

により生成される同値関係による商空間を X と Y との**結**（**join**）といい，$X * Y$ で表わす．

4.3.11 命題． 位相空間 X, Y に対して，$X * Y \approx Y * X$ が成り立つ．

証明． 同相写像 $X \times I \times Y \to Y \times I \times X\,;(x,t,y) \mapsto (y,1-t,x)$ が同相写像 $X*Y \to Y*X$ を誘導する（4.1.5）． □

4.3.12 命題． 位相空間 X に対して，$D^0 = \{0\}$ と X との結は錐 CX に同相である．また，$S^0 = \{1,-1\}$ と X との結は懸垂 SX に同相である．

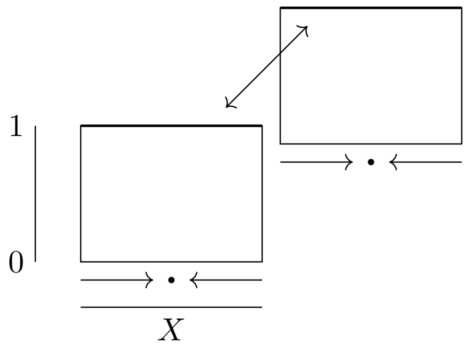
証明． 同相

$$D^0 \times I \times X \to I \times X;\ (0,t,x) \mapsto (t,x)$$

が，同相 $D^0 * X \approx CX$ を誘導する（4.1.5）．また，連続写像

$$S^0 \times I \times X \to J \times X;\ (s,t,x) \mapsto \begin{cases} (t-1,x) & ,s=-1 \\ (1-t,x) & ,s=1 \end{cases}$$

が，同相 $S^0 * X \approx SX$ を誘導する（cf. 4.5.8）．



$\square$

結の構成はつぎのように一般化できる：

4.3.13 定義． 位相空間 $X_1, \dots, X_n$ に対して，$X_1 \times \cdots X_n \times \Delta^{n-1}$ 上の関係

$$\begin{aligned}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n, (t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_n))& \\ \sim (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, \dots, x_n, (t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_n))&\end{aligned}$$

によって生成される同値関係による商空間を $X_1, \dots, X_n$ の結 (**join**) といい，$X_1 * \cdots * X_n$ で表わす．また，$(x_1, \dots, x_n, (t_1, \dots, t_n))$ の同値類を $t_1x_1 \oplus \cdots \oplus t_nx_n$ と書く．ただし，$\Delta^{n-1} = \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid t_i \geq 0, \sum t_i = 1\}$ である．

4.3.14 注意． 4.3.13 の意味での $X * Y$ は 4.3.10 の意味での $Y * X$ になることに注意[8]．

4.3.15 命題． 連続写像族 $(f_i \colon X_i \to Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ は連続写像

$$\begin{aligned}f_1 * \cdots * f_n \colon X_1 \oplus \cdots \oplus X_n \to Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_n,& \\ t_1x_1 \oplus \cdots \oplus t_nx_n \mapsto t_1f_1(x_1) \oplus \cdots \oplus t_nf_n(x_n)&\end{aligned}$$

を誘導する．

証明． 連続写像 $f_1 \times \cdots \times f_n \times \mathrm{id}_{\Delta^{n-1}}$ に対して，4.1.5 を適用すればよい． $\square$

結 $X_1 * \cdots * X_n$ に対して，等化位相の普遍性（3.1.4）よりつぎの写像たちはいずれも連続である：

- $T_i \colon X_1 * \cdots * X_n \to I$; $t_1x_1 \oplus \cdots \oplus t_nx_n \mapsto t_i$,

[8] 下手に直すとどこかでなにかがずれそうなので，とりあえずこのままにしておく．

- $\xi_i\colon T_i^{-1}(]0,1]) \to X_i;\ t_1x_1 \oplus \cdots \oplus t_nx_n \mapsto x_i$.

そこで，“集合”$X_1 * \cdots * X_n$ に写像族 $(T_1,\dots,T_n,\xi_1,\dots,\xi_n)$ による誘導位相を与えたものを考え，それを $X_1 \circ \cdots \circ X_n$ で表わす[9)]．以下，$X_1 * \cdots * X_n$ を “等化結”，$X_1 \circ \cdots \circ X_n$ を “誘導結” と呼ぶことにする．位相の定め方から $\mathrm{id}\colon X_1 * \cdots * X_n \to X_1 \circ \cdots \circ X_n$ は連続である．

4.3.16 命題. 誘導結について，つぎが成り立つ：

$$(X_1 \circ \cdots \circ X_m) \circ (X_{m+1} \circ \cdots \circ X_n) \approx X_1 \circ \cdots \circ X_n,\ 1 \le m < n.$$

証明. $X' = X_1 \circ \cdots \circ X_m$, $X'' = X_{m+1} \circ \cdots \circ X_n$ とおく．写像 $f\colon X' \circ X'' \to X_1 \circ \cdots \circ X_n$ をつぎで定める：

$$\begin{aligned} x = r(t_1x_1 \oplus \cdots \oplus t_mx_m) \oplus s(t_{m+1}x_{m+1} \oplus \cdots \oplus t_nx_n) \\ \mapsto rt_1x_1 \oplus \cdots \oplus rt_mx_m \oplus st_{m+1}x_{m+1} \oplus \cdots \oplus st_nx_n. \end{aligned}$$

このとき，各 $i \in \{1,\dots,n\}$ に対して，

$$\begin{aligned} T_i \circ f(x) &= \begin{cases} rt_i & ,1 \le i \le m \\ st_i & ,m < i \le n \end{cases} \\ &= \begin{cases} T_{X'}(x)T'_i \circ \xi_{X'}(x) & ,1 \le i \le m \\ T_{X''}(x)T''_i \circ \xi_{X''}(x) & ,m < i \le n \end{cases} \\ \xi_i \circ f(x) &= x_i \\ &= \begin{cases} \xi'_i \circ \xi_{X'}(x) & ,1 \le i \le m \\ \xi''_i \circ \xi_{X''}(x) & ,m < i \le n \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つので，f は連続である（2.3.3）．また，写像 $g\colon X_1 \circ \cdots \circ X_n \to X' \circ X''$ をつぎで定める：

$$x = t_1x_1 \oplus \cdots t_nx_n \mapsto r(t'_1x_1 \oplus \cdots \oplus t'_mx_m) \oplus s(t''_{m+1}x_{m+1} \oplus \cdots \oplus t''_nx_n).$$

ただし，

$$\begin{aligned} r = t_1 + \cdots + t_m,\ s = t_{m+1} + \cdots + t_n, \\ t'_i = \begin{cases} t_i/r & ,r \ne 0 \\ 0 & ,r = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

[9)] Milnor が普遍束の構成で使ったもの.

$$t_i'' = \begin{cases} t_i/s & ,s \neq 0 \\ 0 & ,s = 0 \end{cases}$$

とおく．このとき，

$$\begin{aligned} T_{X'} \circ g(x) &= r = T_1(x) + \cdots T_m(x) \\ T_{X''} \circ g(x) &= s = T_{m+1}(x) + \cdots + T_n(x) \end{aligned}$$

が成り立つ．さらに，各 $i \in \{1, \ldots, m\}$ に対して，

$$\begin{aligned} T_i' \circ \xi_{X'} \circ g(x) &= T_i'(t_1' x_1 + \cdots + t_m' x_m) \\ &= t_i' \\ &= \frac{T_i(x)}{T_1(x) + \cdots + T_m(x)} \\ \xi_i' \circ \xi_{X'} \circ g(x) &= \xi_i'(t_1' x_1 + \cdots t_m' x_m) \\ &= x_i \\ &= \xi_i(x) \end{aligned}$$

は連続なので，$\xi_{X'} \circ g$ は連続である．（$\xi_{X'}$ の定義域に注意.）同様にして，$\xi_{X''} \circ g$ も連続である．よって，g は連続である．明らかに $f \circ g = \mathrm{id}$，$g \circ f = \mathrm{id}$ が成り立つ． □

4.3.17 系. 誘導結について，同相 $X_1 \circ (X_2 \circ X_3) \approx (X_1 \circ X_2) \circ X_3$ が成り立つ． □

4.3.18 注意. 上の同相は

$$t_1 x_1 \oplus s(t_2 x_2 \oplus t_3 x_3) \mapsto (t_1 + s t_2) \left(\frac{t_1}{t_1 + s t_2} x_1 \oplus \frac{s t_2}{t_1 + s t_2} x_2 \right) \oplus s t_3 x_3$$

で与えられる．

4.3.19 補題. X, Y がコンパクト空間ならば等化結 $X * Y$ もコンパクト空間である． □

4.3.20 命題. X, Y が T_2 空間ならば誘導結 $X \circ Y$ も T_2 空間である．

証明. $s_1 x_1 \oplus t_1 y_1 \neq s_2 x_2 \oplus t_2 y_2$ とする．このとき，$s_1 + t_1 = 1 = s_2 + t_2$ に注意すると，

- $s_1 \neq s_2$
- $t_1 \neq t_2$
- $s_1 = s_2 \neq 0$ かつ $x_1 \neq x_2$
- $t_1 = t_2 \neq 0$ かつ $y_1 \neq y_2$

のいずれかが成り立つことがわかる．したがって，各写像

- $T_X\colon X\circ Y\to I;\ sx\oplus ty\mapsto s$
- $T_Y\colon X\circ Y\to I;\ sx\oplus ty\mapsto t$
- $\xi_X\colon T_X^{-1}(]0,1])\to X;\ sx\oplus ty\mapsto x$
- $\xi_Y\colon T_Y^{-1}(]0,1])\to Y;\ sx\oplus ty\mapsto y$

の連続性，および I,X,Y の T_2 性から結論を得る． □

4.3.21 系． $X_1,\ldots,X_n$ がコンパクト T_2 空間ならば，同相 $\mathrm{id}\colon X_1*\cdots*X_n\approx X_1\circ\cdots\circ X_n$ が成り立つ． □

4.3.22 注意． このページによると，各 X_i が局所コンパクト T_2 で充分らしい．（ちゃんとは読んでいない．）

4.3.23 系． コンパクト T_2 空間の等化結について，同相 $X_1*(X_2*X_3)\approx(X_1*X_2)*X_3$ が成り立つ． □

4.3.24 例． 同相 $S^m*S^n\approx S^{m+n+1}$ が成り立つ．実際，m に関する数学的帰納法と 4.3.8，4.3.12 より，

$$\begin{aligned}
S^m*S^n &\approx (SS^{m-1})*S^n\\
&\approx (S^0*S^{m-1})*S^n\\
&\approx S^0*(S^{m-1}*S^n)\\
&\approx S^0*S^{m+n}\\
&\approx SS^{m+n}\\
&\approx S^{m+n+1}
\end{aligned}$$

を得る．

4.4 接着空間

4.4.1 定義． 位相空間 X，Y，および部分集合 $A\subset Y$ と連続写像 $f\colon A\to X$ とが与えられたとする．このとき，余積空間 $X\amalg Y$ 上の関係 $i_X(f(a))\sim i_Y(a)$，$a\in A$，で生成される同値関係による商空間を，f **によって** X **に** Y **を接着した空間**，あるいは単に（f による）**接着空間（attaching space）**といい，$X\amalg_f Y$ で表わす．また，f を接着写像

(**attaching map**)という．

4.4.2 定理 (接着空間の普遍性)**.** 位相空間 Z と連続写像 $\varphi\colon X \to Z$，$\psi\colon Y \to Z$ が与えられたとする．このとき，任意の $a \in A$ に対して $\varphi(f(a)) = \psi(a)$ が成り立つならば，連続写像 $\varphi \amalg_f \psi\colon X \amalg_f Y \to Z$ であって，つぎの図式を可換にするものがただ一つ存在する：

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "j_Y"] \arrow[ddr, bend left, "\psi"] & \\
X \arrow[r, "j_X"] \arrow[drr, bend right, "\varphi"'] & X \amalg_f Y \arrow[dr, dashed, "\varphi \amalg_f \psi"'] & \\
 & & Z
\end{tikzcd}
$$

ただし，$j_X = q_f \circ i_X$，$j_Y = q_f \circ i_Y$ は余積空間への自然な入射と商写像との合成である．

証明． 余積空間の普遍性 (3.5.4) より，連続写像 $\varphi \amalg \psi\colon X \amalg Y \to Z$ であって $(\varphi \amalg \psi) \circ i_X = \varphi$，$(\varphi \amalg \psi) \circ i_Y = \psi$ をみたすものがただ一つ存在する：

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i_X"'] & Z, \\
X \amalg Y \arrow[ur, dashed, "\varphi\amalg\psi"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "i_Y"'] & Z. \\
X \amalg Y \arrow[ur, dashed, "\varphi\amalg\psi"']
\end{tikzcd}
$$

仮定より，任意の $a \in A$ に対して

$$(\varphi \amalg \psi) \circ i_X(f(a)) = \varphi(f(a)) = \psi(a) = (\varphi \amalg \psi) \circ i_Y(a)$$

が成り立つ．したがって，商空間の普遍性（4.1.2）より，連続写像 $\varphi \amalg_f \psi\colon X \amalg_f Y \to Z$ であって $(\varphi \amalg_f \psi) \circ q_f = \varphi \amalg \psi$ をみたすものがただ一つ存在する：

$$
\begin{tikzcd}
X \amalg Y \arrow[r, "\varphi\amalg\psi"] \arrow[d, "q_f"'] & Z. \\
X \amalg_f Y \arrow[ur, dashed, "\varphi\amalg_f\psi"']
\end{tikzcd}
$$

□

4.4.3 注意． 一般の連続写像 $f\colon Z \to X$，$g\colon Z \to Y$ に対しても同様の構成ができ，位相空間の圏における押し出し（pushout）を与える．

4.4.4 例． 位相空間 X の部分集合 $A \subset X$ に対して，定値写像 $c\colon A \to \{*\}$ によって一点集合 $\{*\}$ に X を接着した空間は X/A に他ならない，すなわち同相 $\{*\} \amalg_c X \approx X/A$ が

成り立つ．実際，接着空間 $\{*\} \amalg_c X$ がみたす普遍性は，商空間 X/A がみたすべき普遍性に他ならない．とくに，$X/\varnothing = \{*\} \amalg X$ と解釈できる：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "c"'] & X \arrow[d] \\ \{*\} \arrow[r] & \{*\} \amalg_c X. \end{tikzcd}$$

以下，接着空間を考えるときは $A \in \tau^c(Y)$ を仮定する．

4.4.5 命題. 部分集合 $C \subset X \amalg Y$ であって $i_Y^{-1}(C) \in \tau^c(Y)$ となるものが与えられたとする．このとき，$q_f(C) \in \tau^c(X \amalg_f Y)$ となるためには，$i_X^{-1}(C) \cup f(i_Y^{-1}(C) \cap A) \in \tau^c(X)$ となることが必要かつ充分である．

証明. まず，$D \coloneqq q_f^{-1}(q_f(C)) \subset X \amalg Y$ に対してつぎが成り立つことに注意する：

$$\begin{aligned} i_X^{-1}(D) &= i_X^{-1}(C) \cup f(i_Y^{-1}(C) \cap A), \\ i_Y^{-1}(D) &= i_Y^{-1}(C) \cup (i_Y^{-1}(D) \cap A). \end{aligned} \tag{4.4.6}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "i"] \arrow[dd, "f"'] & & Y \arrow[dl, "i_Y"'] \arrow[dd, "j_Y"] \\ & X \amalg Y \arrow[dr, "q_f"] & \\ X \arrow[ur, "i_X"] \arrow[rr, "j_X"'] & & X \amalg_f Y. \end{tikzcd}$$

したがって，$i_Y^{-1}(D) \cap A = i^{-1}(i_Y^{-1}(D)) = f^{-1}(i_X^{-1}(D))$ に注意すると，$i_Y^{-1}(C) \in \tau^c(Y)$ であるとき，

$$\begin{aligned} q_f(C) \in \tau^c(X \amalg_f Y) &\Leftrightarrow D \in \tau^c(X \amalg Y) \\ &\Leftrightarrow i_X^{-1}(D) \in \tau^c(X) \text{ かつ } i_Y^{-1}(D) \in \tau^c(Y) \\ &\Leftrightarrow i_X^{-1}(D) \in \tau^c(X) \end{aligned}$$

が成り立つことがわかる． □

4.4.7 定理. 接着空間 $X \amalg_f Y$ に対してつぎが成り立つ：

(i) $q_X \coloneqq j_X(X)|q_f|i_X(X) \colon i_X(X) \to j_X(X)$ は閉集合への同相写像である．

(ii) $q_{Y \smallsetminus A} \coloneqq j_Y(Y \smallsetminus A)|q_f|i_Y(Y \smallsetminus A) \colon i_Y(Y \smallsetminus A) \to j_Y(Y \smallsetminus A)$ は開集合への同相写像である．

(iii) $X \amalg_f Y = j_X(X) \cup j_Y(Y \setminus A)$，$j_X(X) \cap j_Y(Y \setminus A) = \varnothing$ が成り立つ．

証明． (i) 写像 q_X は全単射連続写像であるから（2.2.8），$q_f|i_X(X)$ が閉写像であることを示せばよい．そこで $C \in \tau^c(i_X(X))$ とすると，$i_Y^{-1}(C) = \varnothing \in \tau^c(Y)$ であることから，$q_f(C) \in \tau^c(X \amalg_f Y)$ が成り立つ（4.4.5）．

(ii) 写像 $q_{Y\setminus A}$ は全単射連続写像であるから（2.2.8），$q_f|i_Y(Y \setminus A)$ が開写像であることを示せばよい．そこで $U \in \tau(i_Y(Y \setminus A)) \subset \tau(X \amalg Y)$ とすると，$q_f^{-1}(q_f(U)) = U$ より，$q_f(U) \in \tau(X \amalg_f Y)$ が成り立つ．

(iii) 同値関係の定義から明らか． □

4.4.8 命題． 閉集合 $X_1 \subset X$，$Y_1 \subset Y$ であって $f(Y_1 \cap A) \subset X_1$ となるものが与えられたとする．このとき，$f_1 := X_1|f|Y_1 \cap A\colon Y_1 \cap A \to X_1$ を接着写像とする接着空間 $X_1 \amalg_{f_1} Y_1$ が定まるが，これは $X \amalg_f Y$ の閉集合と同相である．

証明． 余積空間の普遍性（3.5.5）によって包含写像から定まる写像 $X_1 \amalg Y_1 \to X \amalg Y$ を $\imath$ とおく．このとき，商空間の普遍性（4.1.2）より，単射連続写像 $g\colon X_1 \amalg_{f_1} Y_1 \to X \amalg_f Y$ であって $g \circ q_{f_1} = q_f \circ \imath$ をみたすものがただ一つ存在する：

$$\begin{tikzcd}
X_1 \amalg Y_1 \arrow[r, "\imath"] \arrow[d, "q_{f_1}"'] & X \amalg Y \arrow[r, "q_f"] & X \amalg_f Y. \\
X_1 \amalg_{f_1} Y_1 \arrow[urr, dashed, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

あとは g が閉写像であること，すなわち任意の q_{f_1} 飽和閉集合 $C_1 \subset X_1 \amalg Y_1$ に対して，$q_f \circ \imath(C_1) \in \tau^c(X \amalg_f Y)$ となることを示せばよい（3.2.7）．いま，$i_{Y_1}^{-1}(C_1) \in \tau^c(Y_1)$，および $q_{f_1}(C_1) \in \tau^c(X_1 \amalg_{f_1} Y_1)$ が成り立つから，4.4.5 より $i_{X_1}^{-1}(C_1) \cup f_1(i_{Y_1}^{-1}(C_1) \cap A) \in \tau^c(X_1)$ が成り立つ．ところで，

$$\begin{gathered}
i_Y^{-1}(\imath(C_1)) = i_{Y_1}^{-1}(C_1) \in \tau^c(Y_1) \subset \tau^c(Y), \\
i_X^{-1}(\imath(C_1)) \cup f(i_Y^{-1}(\imath(C_1)) \cap A) = i_{X_1}^{-1}(C_1) \cup f_1(i_{Y_1}^{-1}(C_1) \cap A) \in \tau^c(X_1) \subset \tau^c(X)
\end{gathered}$$

が成り立つから，ふたたび 4.4.5 より，$q_f(\imath(C_1)) \in \tau^c(X \amalg_f Y)$ を得る． □

4.4.4 の場合に適用するとつぎを得る：

4.4.9 系． 位相空間 X とその閉集合 A, X_1 が与えられたとする．このとき，包含写像 $X_1 \subset X$ は，$X_1/(X_1 \cap A)$ から X/A の閉集合への同相写像を誘導する． □

開集合に関してはつぎが成り立つ：

4.4.10 命題. 開集合 $U \in \tau(X)$，$V \in \tau(Y)$ が $f^{-1}(U) = V \cap A$ をみたすとする．このとき，$q_f(U \amalg V) \in \tau(X \amalg_f Y)$ が成り立つ．

証明. $U \amalg V \in \tau(X \amalg Y)$ であるから，これが q_f 飽和開集合であることを示せばよい．ところで，(4.4.6) より，

$$\begin{aligned}
i_X^{-1}(q_f^{-1}q_f(U \amalg V)) &= i_X^{-1}(U \amalg V) \cup f(i_Y^{-1}(U \amalg V) \cap A) \\
&= U \cup f(V \cap A) \\
&= U, \\
i_Y^{-1}(q_f^{-1}q_f(U \amalg V)) &= i_Y^{-1}(U \amalg V) \cup i_Y^{-1}(q_f^{-1}q_f(U \amalg V) \cap A) \\
&= V \cup f^{-1}(i_X^{-1}(q_f^{-1}q_f(U \amalg V))) \\
&= V \cup f^{-1}(U) \\
&= V
\end{aligned}$$

が成り立つので，

$$\begin{aligned}
q_f^{-1}(q_f(U \amalg V)) &= i_X(i_X^{-1}(q_f^{-1}q_f(U \amalg V))) \cup i_Y(i_Y^{-1}(q_f^{-1}q_f(U \amalg V))) \\
&= i_X(U) \cup i_Y(V) \\
&= U \amalg V
\end{aligned}$$

を得る． □

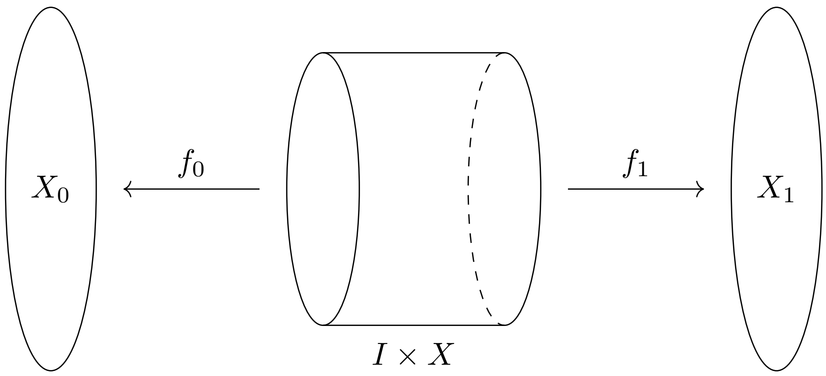
4.5 代数トポロジーでよく見る例：再考

4.3 節で見た例はいずれも接着空間（と同相）である．

4.5.1 定義. 位相空間 X, X_0, X_1，および連続写像 $f_0 \colon X \to X_0$，$f_1 \colon X \to X_1$ が与えられたとする．このとき，$f_0 \amalg f_1 \colon \{0,1\} \times X = X \amalg X \to X_0 \amalg X_1$ によって $X_0 \amalg X_1$ に $I \times X$ を接着した空間を**複写像柱（double mapping cylinder）**といい，$\mathcal{Z}(X_0 \xleftarrow{f_0} X \xrightarrow{f_1} X_1)$ で表わす：

$$\begin{tikzcd}
\{0,1\} \times X \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "f_0 \amalg f_1"'] & I \times X \arrow[d] \\
X_0 \amalg X_1 \arrow[r] & (X_0 \amalg X_1) \amalg_{f_0 \amalg f_1} (I \times X).
\end{tikzcd}$$

とくに，X_0, X_1，および $X \approx \{1/2\} \times X$ は $\mathcal{Z}(X_0 \xleftarrow{f_0} X \xrightarrow{f_1} X_1)$ の閉部分空間と同相である（4.4.7）．



複写像柱の特別な場合として：

4.5.2 定義． 連続写像 $f\colon X \to Y$ に対して，

- 複写像柱 $\mathcal{Z}(X \xleftarrow{\mathrm{id}_X} X \xrightarrow{f} Y)$ を f の**写像柱**（**mapping cylinder**）といい，$\mathcal{Z}(f)$ で表わす．
- 複写像柱 $\mathcal{Z}(\{*\} \leftarrow X \xrightarrow{f} Y)$ を f の**写像錐**（**mapping cone**）といい，$\mathcal{C}(f)$ で表わす．

4.5.3 例． 写像錐 $\mathcal{C}(f)$ は $\mathcal{Z}(f)/X$ に他ならない．

4.5.4 注意． つぎの可換図式が与えられたとする：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "h"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y'. \end{tikzcd}$$

このとき，連続写像 $\mathcal{Z}(g,h)\colon \mathcal{Z}(f) \to \mathcal{Z}(f')$，$\mathcal{C}(g,h)\colon \mathcal{C}(f) \to \mathcal{C}(f')$ が定まる．実際，つ

ぎの図式を考えると，接着空間の普遍性（4.4.2）より所期の写像を得る：

$$\begin{tikzcd}
\{0,1\} \times X \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_X \amalg f"'] & I \times X \arrow[r, "\mathrm{id}_I \times g"] \arrow[d, "j_2"] & I \times X' \arrow[dd, "j_2'"] \\
X \amalg Y \arrow[r, "j_1"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_X \amalg h"'] & \mathcal{Z}(f) \arrow[dr, dashed, "\mathcal{Z}(g,h)"'] & \\
X \amalg Y' \arrow[rr, "j_1'"'] & & \mathcal{Z}(f').
\end{tikzcd}$$

写像錐の場合も同様.

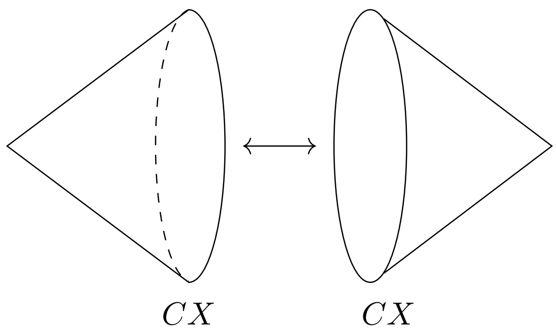
4.5.5 例. X の錐 CX とは，写像錐 $\mathcal{C}(\mathrm{id}_X)$ に他ならない.

4.5.6 例. X の懸垂 SX とは，写像錐 $\mathcal{C}(X \to \{*\})$ に他ならない.

4.5.7 命題. 閉部分空間 $A \subset X$ に対して，錐 CA（resp. 懸垂 SA）は CX（resp. SX）の閉部分空間と同相である.

証明. $\{0,1\} \times A \in \tau^c(I \times X)$，$\{*\} \amalg A \in \tau^c(\{*\} \amalg X)$，$(c \amalg \mathrm{id}_X)(\{0,1\} \times A) = \{*\} \amalg A$ であるから，4.4.8 より結論を得る．懸垂についても同様. □

4.5.8 命題. 連続写像 $f\colon X \subset CX \xrightarrow{\mathrm{id}} CX$ により CX に CX を接着した空間は懸垂 SX に同相である：$SX \approx CX \amalg_f CX$.



証明. 二つの錐を区別するため “左側” を CX_-，“右側” を CX_+ とおく：

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "f"'] & CX_+ \arrow[d] \\
CX_- \arrow[r] & CX_- \amalg_f CX_+.
\end{tikzcd}$$

連続写像 $i_\pm\colon I \times X \to J \times X$ を $i_\pm(t,x) = (\pm(1-t),x)$ で定めると，連続写像 $j_\pm\colon CX_\pm \to SX$ が誘導される．さらに，$j_- \circ f([1,x]) = [0,x] = j_+([1,x])$ が成り立つから，連続写像 $\Phi\colon CX_- \amalg_f CX_+ \to SX$ が定まる（4.4.2）：

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "f"'] & CX_+ \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "j_+"] & \\
CX_- \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "j_-"'] & CX_- \amalg_f CX_+ \arrow[dr, dashed, "\Phi"] & \\
 & & SX.
\end{tikzcd}$$

連続写像 $[-1,0] \times X \to CX_-$; $(t,x) \mapsto [1+t,x]$ と $CX_- \to CX_- \amalg_f CX_+$ との合成写像，および $[0,1] \times X \to CX_+$; $(t,x) \mapsto (1-t,x)$ と $CX_+ \to CX_- \amalg_f CX_+$ との合成写像は，$\{0\} \times X$ 上で貼りあって連続写像 $\psi\colon J \times X \to CX_- \amalg_f CX_+$ を定める（3.6.13）．さらに，ψ は連続写像 $\Psi\colon SX \to CX_- \amalg_f CX_+$ を誘導する（4.1.2）．このとき，明らかに $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$，$\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$ が成り立つ． $\square$

4.5.9 例． X と Y との結 $X * Y$ とは，複写像柱 $\mathcal{Z}(X \xleftarrow{p_X} X \times Y \xrightarrow{p_Y} Y)$ に他ならない．とくに，$X = X * \varnothing$，$\varnothing * Y = Y$ と解釈できる．

4.5.10 命題． 閉集合 $A \subset X$，$B \subset Y$ に対して，$A * B$ は $X * Y$ の閉部分空間と同相である．

証明． $\{0,1\} \times A \times B \in \tau^c(I \times X \times Y)$，$A \amalg B \in \tau^c(X \amalg Y)$，$(p_X \amalg p_Y)(\{0,1\} \times A \times B) = A \amalg B$ であるから，4.4.8 より結論を得る． $\square$

4.6 代数トポロジーでよく見る例：基点つき空間

“基点つき空間” での例もいくつか見ておこう．

4.6.1 定義． 位相空間 X とその点 $x_0 \in X$ との組 (X, x_0) を基点つき空間（**pointed space**）という．

4.6.2 注意． 基点つき空間とは，一点集合 $\{*\}$ からの連続写像 $\{*\} \to X$ が指定された空間に他ならない．

■ 被約錐・被約懸垂

4.6.3 定義. 基点つき空間 (X, x_0) に対して，商空間

$$\widetilde{C}X := (I \times X)/(I \times \{x_0\} \cup \{0\} \times X),\ \Sigma X := (J \times X)/(J \times \{x_0\} \cup \{-1, 1\} \times X)$$

を，それぞれ**被約錐（reduced cone）**，**被約懸垂（reduced suspension）**という．

4.6.4 注意. 被約錐（resp. 被約懸垂）は錐（resp. 懸垂）において，その部分空間 $C\{x_0\}$（resp. $S\{x_0\}$）を一点につぶして得られる空間に他ならない（4.1.6）．したがって，

$$\widetilde{C}X/X = (I \times X)/(I \times \{x_0\} \cup \{0, 1\} \times X) \approx SX/S\{x_0\} \approx \Sigma X$$

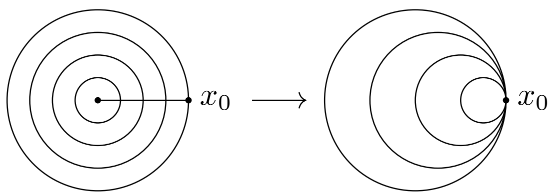
が成り立つ．

4.6.5 命題. 基点つき空間のあいだの連続写像 $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ は連続写像

$$\widetilde{C}f\colon \widetilde{C}X \to \widetilde{C}Y,\ \Sigma f\colon \Sigma X \to \Sigma Y$$

を誘導する． □

4.6.6 例. n 次元球面 S^n の被約錐は D^{n+1} に同相である（cf. 4.3.4）．実際，S^n の基点を x_0 としたとき，連続写像 $CS^n \to D^{n+1}$; $[t, x] \mapsto tx + (1-t)x_0$ はコンパクト空間 $\widetilde{C}S^n \approx CS^n/C\{x_0\}$ から T_2 空間 D^{n+1} への全単射連続写像を誘導する．



CS^n（を "左" から見た図）　　D^{n+1}

4.6.7 例. n 次元球面 S^n の被約懸垂は S^{n+1} に同相である（cf. 4.3.8）．実際，連続写像

$$J \times S^n \to S^{n+1};\ (t, x) \mapsto \begin{cases} \left((1+t)x - tx_0, -\sqrt{1 - \|(1+t)x - tx_0\|^2}\right) & ,t \leq 0 \\ \left((1-t)x + tx_0, \sqrt{1 - \|(1-t)x + tx_0\|^2}\right) & ,t \geq 0 \end{cases}$$

はコンパクト空間 ΣS^n から T_2 空間 S^{n+1} への全単射連続写像を誘導する．

4.6.8 命題. 基点つき空間 (X, x_0) に対して，同相 $\widetilde{C}\Sigma X \approx \Sigma\widetilde{C}X$ が成り立つ．

証明. 単位閉区間 I はコンパクト T_2 なので，合成写像 $q\colon I \times J \times X \to I \times \Sigma X \to \widetilde{C}\Sigma X$ は全射商写像である．同様に，$q'\colon J \times I \times X \to J \times \widetilde{C}X \to \Sigma\widetilde{C}X$ も全射等化写像である．さらに，$R(q)$，$R(q')$ はそれぞれ $(I\times J\times\{x_0\})\cup(\{0\}\times J\times X)\cup(I\times\{-1,1\}\times X)$，$(J \times I \times \{x_0\}) \cup (\{-1,1\} \times I \times X) \cup (J \times \{0\} \times X)$ を一点につぶす同値関係を定める．よって，同相 $I \times J \times X \to J \times I \times X$; $(s,t,x) \mapsto (t,s,x)$ が同相 $\widetilde{C}\Sigma X \approx \Sigma\widetilde{C}X$ を誘導する． □

■ wedge 和・smash 積

4.6.9 定義. 基点つき空間 (X, x_0)，(Y, y_0) に対して，

$$X \vee Y \coloneqq (X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y) \subset X \times Y$$

を X と Y との **wedge 和**という．$X \vee Y$ は (x_0, y_0) を基点とする基点つき空間とみなす．

4.6.10 注意. Wedge 和 $X \vee Y$ とは $X \leftarrow \{*\} \to Y$ の pushout に他ならない：

$$\begin{array}{ccc} \{*\} & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & X \vee Y. \end{array}$$

4.6.11 定義. 基点つき空間 (X, x_0)，(Y, y_0) に対して，

$$X \wedge Y \coloneqq (X \times Y)/(X \vee Y)$$

を X と Y との **smash 積**という．$X \wedge Y$ は $(X \vee Y)/(X \vee Y)$ を基点とする基点つき空間とみなす．

4.6.12 例. 位相空間 X の被約錐 $\widetilde{C}X$ とは，単位閉区間 I との smash 積 $I \wedge X$ に他ならない．同様に，被約懸垂 ΣX とは，単位円周 S^1 との smash 積 $S^1 \wedge X$ に他ならない．ただし，I の基点としては 0 を，$S^1 \approx J/\{-1,1\}$ の基点としては $\{-1,1\}/\{-1,1\}$ をとる．実際，

- $I \wedge X = (I \times X)/(I \times \{x_0\} \cup \{0\} \times X) = \widetilde{C}X$,
- $S^1 \wedge X \approx (J \times X)/(J \times \{x_0\} \cup \{-1,1\} \times X) = \Sigma X$ (4.1.6)

が成り立つ．

4.6.13 定義. 3 個以上の基点つき空間 $(X_1, x_1^0), \dots, (X_n, x_n^0)$ に対しては，それらの wedge 和，および smash 積がつぎのように定義される：

- $X_1 \vee \cdots \vee X_n = \bigcup \{x_1^0\} \times \cdots \times \{x_{i-1}^0\} \times X_i \times \{x_{i+1}^0\} \times \cdots \times \{x_n^0\}$.
- $X_1 \wedge \cdots \wedge X_n = (X_1 \times \cdots \times X_n)/(\bigcup X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times \{x_i^0\} \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n)$.

4.6.14 注意. 明らかに smash 積は添字の入れ替えに関して不変である，すなわち任意の置換 $\sigma\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ に対して同相 $X_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge X_{\sigma(n)} \approx X_1 \wedge \cdots \wedge X_n$ が成り立つ．

4.6.15 命題. 基点つき空間のあいだの連続写像 $f_i\colon (X_i, x_i^0) \to (Y_i, y_i^0)$，$i = 1, \dots, n$，は連続写像

$$f_1 \wedge \cdots \wedge f_n\colon X_1 \wedge \cdots \wedge X_n \to Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_n$$

を誘導する．

証明. 積写像 $f_1 \times \cdots \times f_n$ は各 $X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times \{x_i^0\} \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n$ を $Y_1 \times \cdots \times Y_{i-1} \times \{y_i^0\} \times Y_{i+1} \times \cdots \times Y_n$ にうつす．よって，4.1.5 より結論を得る． □

4.6.16 命題. 基点つき空間対 $(X, A; x_0)$，および基点つき空間 (Y, y_0) が与えられたとする．さらに，$\{x_0\}, A \in \tau^c(X)$，$\{y_0\} \in \tau^c(Y)$ を仮定する．このとき，つぎが成り立つ：

(i) 包含写像 $i\colon A \to X$ に対して，$(i \wedge \mathrm{id}_Y)(A \wedge Y)|i \wedge \mathrm{id}_Y\colon A \wedge Y \to (i \wedge \mathrm{id}_Y)(A \wedge Y)$ は閉集合への同相写像である．

(ii) 商写像を $q\colon X \to X/A$ とおく．このとき，X がコンパクト T_2 空間，もしくは Y が局所コンパクト T_2 空間ならば，同相 $(X \wedge Y)/(A \wedge Y) \approx (X/A) \wedge Y$ が成り立つ．

証明. (i) 仮定より $X \vee Y \in \tau^c(X \times Y)$，$A \times Y \in \tau^c(X \times Y)$ であるから，4.4.9 より結論を得る．

(ii) 写像 $q \times \mathrm{id}_Y$ は $X \vee Y$ を $(X/A) \vee Y$ にうつすので，連続写像 $q \wedge \mathrm{id}_Y\colon X \wedge Y \to (X/A) \wedge Y$ を誘導する．さらに，仮定より，$q \times \mathrm{id}_Y\colon X \times Y \to (X/A) \times Y$ は全射

等化写像であるから（1.0.1，3.8.3，3.8.4），$q \wedge \mathrm{id}_Y$ も全射等化写像である（3.2.8）：

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "q \times \mathrm{id}_Y"] \arrow[d] & (X/A) \times Y \arrow[d] \\ X \wedge Y \arrow[r, dashed, "q \wedge \mathrm{id}_Y"'] & (X/A) \wedge Y. \end{tikzcd}$$

したがって，同相 $(X \wedge Y)/R(q \wedge \mathrm{id}_Y) \approx (X/A) \wedge Y$ が成り立つ（4.1.3）．ところで，$R(q \wedge \mathrm{id}_Y)$ は $(A \wedge Y) \times (A \wedge Y)$ によって生成される同値関係に他ならない．よって，同相 $(X \wedge Y)/(A \wedge Y) \approx (X/A) \wedge Y$ が成り立つ．□

4.6.17 命題． 基点つき空間 $(X, x_0), (Y, y_0), (Z, z_0)$ が与えられたとする．このとき，X, Z がともに（局所）コンパクト T_2 空間ならば，同相 $X \wedge Y \wedge Z \approx X \wedge (Y \wedge Z) \approx (X \wedge Y) \wedge Z$ が成り立つ．

証明． 仮定より，$X \times (Y \times Z) \to X \times (Y \wedge Z) \to X \wedge (Y \wedge Z)$，および $(X \times Y) \times Z \to (X \wedge Y) \times Z \to (X \wedge Y) \wedge Z$ はともに等化写像である（3.8.3，3.8.4）．いずれの等化写像も $(\{x_0\} \times Y \times Z) \cup (X \times \{y_0\} \times Z) \cup (X \times Y \times \{z_0\})$ を一点につぶす同値関係を定めるので，恒等写像がそれぞれの同相を誘導する：

$$\begin{tikzcd} X \times Y \times Z \arrow[r, leftrightarrow, "\mathrm{id}"] \arrow[d] & X \times (Y \times Z) \arrow[r, leftrightarrow, "\mathrm{id}"] \arrow[d] & (X \times Y) \times Z \arrow[d] \\ X \wedge Y \wedge Z \arrow[r, leftrightarrow, dashed] & X \wedge (Y \wedge Z) \arrow[r, leftrightarrow, dashed] & (X \wedge Y) \wedge Z. \end{tikzcd}$$

□

4.6.18 命題． 基点つき空間 $(X, x_0), (Y, y_0)$ が与えられたとする．このとき，X（resp. Y）がコンパクト T_2 空間であるか，あるいは X, Y がともに局所コンパクト T_2 空間であるならば，同相 $\Sigma X \wedge Y \approx X \wedge \Sigma Y \approx \Sigma(X \wedge Y)$ が成り立つ．

証明． $\Sigma X \wedge Y \approx \Sigma(X \wedge Y)$ のみ示せばよい（4.6.14）．まず，$J = [-1, 1]$ はコンパクト T_2 空間なので，$J \times (X \times Y) \to J \times (X \wedge Y) \to \Sigma(X \wedge Y)$ は等化写像であることに注意する（3.8.3）．X がコンパクト T_2 空間のとき，$J \times X \to \Sigma X$ はコンパクト空間から T_2 空間への全射連続写像なので（1.0.1），$(J \times X) \times Y \to \Sigma X \times Y \to \Sigma X \wedge Y$ も等化写像である．また，Y が（局所）コンパクト T_2 空間のときもこの写像が等化写像であることがわかる．さらに，いずれの等化写像も $(\{-1, 1\} \times X \times Y) \cup (J \times \{x_0\} \times Y) \cup (J \times X \times \{y_0\})$ を

一点につぶす同値関係を定めるので，恒等写像が同相 $\Sigma X\wedge Y\approx\Sigma(X\wedge Y)$ を誘導する：

$$\begin{tikzcd}
(J\times X)\times Y \arrow[r, leftrightarrow, "\mathrm{id}"] \arrow[d] & J\times(X\times Y) \arrow[d] \\
\Sigma X\wedge Y \arrow[r, leftrightarrow, dashed] & \Sigma(X\wedge Y).
\end{tikzcd}$$

□

4.6.19 例. 同相 $S^m\wedge S^n\approx S^{m+n}$ が成り立つ．実際，m に関する数学的帰納法と 4.6.7, 4.6.18 より，

$$S^m\wedge S^n\approx\Sigma S^{m-1}\wedge S^n\approx\Sigma(S^{m-1}\wedge S^n)\approx\Sigma S^{m+n-1}\approx S^{m+n}$$

を得る．

■ 被約複写像柱

4.6.20 定義. 基点つき空間 $(X,x),(X_0,x_0),(X_1,x_1)$，および連続写像 $f_i\colon(X,x)\to(X_i,x_i)$ が与えられたとする．このとき，$f_0\amalg f_1\colon(\{0,1\}\times X)/(\{0,1\}\times\{x\})\to X_0\amalg X_1$ によって $X_0\amalg X_1$ に $(I\times X)/(I\times\{x\})$ を接着した空間を**被約複写像柱（reduced double mapping cylinder）**といい，$\widetilde{\mathcal{Z}}(X_0\xleftarrow{f_0}X\xrightarrow{f_1}X_1)$ で表わす．とくに，

- $\widetilde{\mathcal{Z}}(X\xleftarrow{\mathrm{id}_X}X\xrightarrow{f}Y)$ を f の**被約写像柱**といい，$\widetilde{\mathcal{Z}}(f)$ で表わす．
- $\widetilde{\mathcal{Z}}(\{*\}\leftarrow X\xrightarrow{f}Y)$ を f の**被約写像錐**といい，$\widetilde{\mathcal{C}}(f)$ で表わす．

4.6.21 例. 被約錐 $\widetilde{C}X$，被約懸垂 ΣX とは，それぞれ $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_X)$，$\widetilde{\mathcal{C}}(X\to\{*\})$ に他ならない．

4.6.22 命題. 基点つき空間のあいだの連続写像 $f\colon(X,x_0)\to(Y,y_0)$ に対して，同相 $\widetilde{\mathcal{C}}(\Sigma f)\approx\Sigma(\widetilde{\mathcal{C}}(f))$ が成り立つ．

証明. 被約写像錐 $\widetilde{\mathcal{C}}(f)$ は $f\colon X\to Y$ による接着空間なので，左の可換図式が存在し，したがって右の可換図式が誘導される：

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "f"'] & \widetilde{C}X \arrow[d, "j_{\widetilde{C}X}"] \\
Y \arrow[r, "j_Y"'] & \widetilde{\mathcal{C}}(f),
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Sigma X \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\Sigma f"'] & \Sigma\widetilde{C}X \arrow[d, "\Sigma j_{\widetilde{C}X}"] \\
\Sigma Y \arrow[r, "\Sigma j_Y"'] & \Sigma(\widetilde{\mathcal{C}}(f)).
\end{tikzcd}$$

よって，接着空間 $\widetilde{\mathcal{C}}(\Sigma f)$ の普遍性より，つぎの図式を可換にする連続写像 $\Phi\colon\widetilde{\mathcal{C}}(\Sigma f)\to$

$\Sigma(\widetilde{\mathcal{C}}(f))$ が存在する（4.6.8，4.4.2）：

$$\begin{tikzcd}
\Sigma X \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\Sigma f"'] & \widetilde{C}\Sigma X \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "j_{\widetilde{C}\Sigma X}"] & \Sigma\widetilde{C}X \arrow[dd, "\Sigma j_{\widetilde{C}X}"] \\
\Sigma Y \arrow[r, "j_{\Sigma Y}"] \arrow[drr, bend right, "\Sigma j_Y"'] & \widetilde{\mathcal{C}}(\Sigma f) \arrow[dr, dashed, "\Phi"] & \\
& & \Sigma(\widetilde{\mathcal{C}}(f)).
\end{tikzcd}$$

逆に，写像 $\Psi\colon \Sigma(\widetilde{\mathcal{C}}(f)) \to \widetilde{\mathcal{C}}(\Sigma f)$ をつぎで定める：

$$\Psi([t,\xi]) = \begin{cases} j_{\Sigma Y}([t,y]) & ,\xi = j_Y(y) \\ j_{\widetilde{C}\Sigma X}([s,[t,x]]) & ,\xi = j_{\widetilde{C}X}([s,x]). \end{cases}$$

このとき，連続写像 $\Psi'\colon J \times (Y \amalg \widetilde{C}X) \to \widetilde{\mathcal{C}}(\Sigma f)$ を

$$\begin{gathered} (t,y) \mapsto j_{\Sigma Y}([t,y]), \\ (t,[s,x]) \mapsto j_{\widetilde{C}\Sigma X}([s,[t,x]]) \end{gathered}$$

で定めると，つぎの可換図式を得る：

$$\begin{tikzcd}
J \times (Y \amalg \widetilde{C}X) \arrow[r, "\Psi'"] \arrow[d] & \widetilde{\mathcal{C}}(\Sigma f). \\
J \times \widetilde{\mathcal{C}}(f) \arrow[d] & \\
\Sigma(\widetilde{\mathcal{C}}(f)) \arrow[uur, "\Psi"'] &
\end{tikzcd}$$

J はコンパクト T_2 空間なので，左側の写像は等化写像である（3.8.3，3.2.8）．よって，Ψ は連続である（3.1.4）．また，明らかに $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$，$\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$ が成り立つ．□

5　CW 複体[10)]

接着空間の重要な例として CW 複体がある[11)]．

10) 本節の内容については，Dold [2, §V.2,V.3]，小松・中岡・菅原 [5, 第 2 章，§ 1] を参考にした．

11) 5.5 節を参照のこと．

5.1 胞体複体と CW 複体

5.1.1 定義. T_2 空間 X の被覆 $\mathcal{E} = (e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ であって，つぎを満たすものが与えられたとする：

(i) 任意の $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ に対して，$\lambda \neq \lambda'$ ならば $e_\lambda \cap e_{\lambda'} = \varnothing$ が成り立つ．

(ii) 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して，非負整数 $d(\lambda) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ であって同相 $e_\lambda \approx \mathbb{R}^{d(\lambda)}$ が成り立つものが存在する[12)]；整数 $d(\lambda)$ を e_λ の**次元**という．各非負整数 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，$d(\lambda) = n$ なる e_λ を **n 胞体**（**n-cell**）といい，e^n_λ とも書く．また，

$$X^n := \bigcup\{e_\lambda \mid d(\lambda) \leq n\}$$

を X の **n 骨格**（**n-skelton**）という．（便宜上 $X^{-1} = \varnothing$ とおく．）

(iii) 各 n 胞体 $e = e_\lambda = e^n_\lambda$ に対して，連続写像

$$\Phi_e = \Phi_\lambda = \Phi^n_\lambda \colon (D^n, S^{n-1}) \to (X^{n-1} \cup e^n_\lambda, X^{n-1})$$

であって，同相 $e^n_\lambda|\Phi^n_\lambda|(D^n \setminus S^{n-1}) \colon D^n \setminus S^{n-1} \approx e^n_\lambda$ が成り立つものが存在する；このとき，写像 Φ_λ を e_λ の**特性写像**（**characteristic map**）という．また，連続写像

$$\varphi_e = \varphi_\lambda = \varphi^n_\lambda := X^{n-1}|\Phi^n_\lambda|S^{n-1} \colon S^{n-1} \to X^{n-1}$$

を e_λ の**接着写像**という．

このとき，組 $(X, \mathcal{E})$，または単に X を**胞体複体**（**cell complex**）といい，被覆 $\mathcal{E}$ を X の**胞体分割**という．また，$\dim(X) := \inf\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid X^n = X\} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ を X の**次元**という．添字集合 Λ が有限集合であるとき**有限（胞体）複体**という．

胞体複体 $(X, \mathcal{E})$ がさらにつぎを満たすとき **CW 複体**（**CW-complex**）といい，$\mathcal{E}$ を X の **CW 分割**という：

(iv) （**閉包有限性**（**Closure finiteness**））任意の胞体 e に対して，有限集合 $\Lambda' \subset \Lambda$ であって $\overline{e} \subset \bigcup\{e_{\lambda'} \mid \lambda' \in \Lambda'\}$ が成り立つものが存在する．

(v) （**"弱位相"**（**Weak topology**））X の位相は閉被覆 $\overline{\mathcal{E}} := (\overline{e_\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$ と整合的である．

12) "次元の不変性" [2, IV.2.3] により，このような整数は一意的に定まる．

5.1.2 注意.

- 有限胞体複体は CW 複体である．
- 有限複体は有限次元だが，被覆 $\mathcal{E} = (\{x\})_{x\in X}$ を考えるとわかるように，有限次元複体が有限複体であるとは限らない．

胞体複体だが CW 複体でない例として，たとえばつぎがある：

5.1.3 例. 単位円盤 $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ のつぎの胞体分割 $\mathcal{E}$ を考える：

（0 胞体） $e^0_x = \{x\}$，$x \in D^2$.

このとき，$\mathcal{E}$ は閉包有限性を満たすが，$\mathrm{int}(D^2) \in \tau^c(\overline{\mathcal{E}}) \setminus \tau^c(D^2)$ が成り立つので，D^2 の位相は閉被覆 $\overline{\mathcal{E}}$ と整合的でない．

5.1.4 例. 単位円盤 $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ のつぎの胞体分割 $\mathcal{E}$ を考える：

（0 胞体） $e^0_x = \{x\}$，$x \in S^1$.
（2 胞体） $e^2 = \mathrm{int}(D^2)$.

このとき，D^2 の位相は閉被覆 $\overline{\mathcal{E}}$ と整合的だが，$\overline{e^2} = e^2 \cup \bigcup_x e^0_x$ となるので，$\mathcal{E}$ は閉包有限性を満たさない．

5.1.5 定義. 胞体複体 $(X, \mathcal{E} = (e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ が与えられたとする．部分集合 $\Lambda' \subset \Lambda$ に対して，$\mathcal{E}' \coloneqq (e_{\lambda'})_{\lambda'\in\Lambda'}$ が部分空間 $X' \coloneqq \bigcup_{\lambda'} e_{\lambda'}$ の胞体分割を与えているとき $(X', \mathcal{E}')$，または単に X' を胞体複体 $(X, \mathcal{E})$ の**部分複体**という．**部分 CW 複体**についても同様に定義する．

5.1.6 補題. 胞体複体の任意の n 胞体 e とその特性写像 Φ_e とに対して $\Phi_e(D^n) = \overline{e}$ が成り立つ．とくに $\overline{e}$ はコンパクトである．

証明. 特性写像の連続性より $\Phi_e(D^n) = \Phi_e(\overline{D^n \setminus S^{n-1}}) \subset \overline{\Phi_e(D^n \setminus S^{n-1})} = \overline{e}$ が成り立つ．いま，X は T_2 空間であるから，そのコンパクト集合 $\Phi_e(D^n) \subset X$ は閉集合である．よって，$\overline{e} \subset \overline{\Phi_e(D^n)} = \Phi_e(D^n)$ を得る． □

5.1.7 命題. 胞体複体 $(X, (e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ が与えられたとする．

(i) 任意の部分複体 $(X', (e_{\lambda'})_{\lambda'\in\Lambda'})$ に対して，つぎが成り立つ：

$$\forall\lambda \in \Lambda,\ e_\lambda \cap X' \neq \varnothing \Rightarrow \overline{e_\lambda} \subset X'. \tag{5.1.8}$$

(ii) 部分空間 $X' \subset X$ に対して (5.1.8) が成り立つとする．このとき，

$$\Lambda' = \{\lambda \in \Lambda \mid e_\lambda \cap X' \neq \varnothing\}$$

とおくと，$X' = \bigcup_{\lambda' \in \Lambda'} e_{\lambda'}$ となり，さらに $(X', (e_{\lambda'})_{\lambda' \in \Lambda'})$ は部分複体である．

証明． (i) $e_\lambda \cap X' \neq \varnothing$ とする．X は胞体複体なので 5.1.1 (i) より $e_\lambda \subset X'$ を得る．したがって，$\lambda \in \Lambda'$ であるから，胞体複体 X' の胞体としての e_λ の特性写像を Φ_λ とすると $\overline{e_\lambda} = \Phi_\lambda(D^{d(\lambda)}) \subset X'$ が成り立つ（5.1.6）．

(ii) $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が X の被覆であることから前半は明らか．各 $\lambda' \in \Lambda'$ に対して，X の胞体としての $e_{\lambda'}$ の特性写像 $\Phi_{\lambda'}$ は $\Phi_{\lambda'}(D^{d(\lambda')}) = \overline{e_{\lambda'}} \subset \overline{X'} = X'$ を満たす（5.1.6）．よって，$((X')^{d(\lambda')-1} \cup e_{\lambda'}, (X')^{d(\lambda')-1})|\Phi_{\lambda'}$ が X' の胞体としての $e_{\lambda'}$ の特性写像を与える． □

5.1.9 系． 胞体複体 $(X, (e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ が与えられたとする．

(i) 各 n 骨格は X の部分複体である．

(ii) 部分複体の族 $\mathcal{X} = (X_\mu)_{\mu \in M}$ に対して，$\bigcup \mathcal{X}$，$\bigcap \mathcal{X}$ はともに X の部分複体である．

証明． (i) $e_\lambda \cap X^n \neq \varnothing$ とする．このとき，$e_\lambda \subset X^n$ となるので，5.1.6 より

$$\overline{e_\lambda} = \Phi_\lambda(D^{d(\lambda)}) \subset X^{n-1} \cup e_\lambda \subset X^n$$

が成り立つ．よって，5.1.7 より X^n は部分複体である．

(ii) $e_\lambda \cap \bigcup \mathcal{X} \neq \varnothing$ とする．このとき，$\mu \in M$ であって $e_\lambda \cap X_\mu \neq \varnothing$ となるものが存在する．いま X_μ は部分複体であるから (5.1.8) より $\overline{e_\lambda} \subset X_\mu \subset \bigcup \mathcal{X}$ を得る．よって，5.1.7 より $\bigcup \mathcal{X}$ は部分複体である．

(iii) $e_\lambda \cap \bigcap \mathcal{X} \neq \varnothing$ とする．このとき，任意の $\mu \in M$ に対して $e_\lambda \cap X_\mu \neq \varnothing$ となるから，(5.1.8) より $\overline{e_\lambda} \subset \bigcap \mathcal{X}$ が成り立つ．よって，5.1.7 より $\bigcap \mathcal{X}$ は部分複体である． □

5.1.10 系． 胞体複体 $(X, (e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ と部分集合 $\Lambda' \subset \Lambda$ が与えられたとし，$X' = \bigcup_{\lambda'} e_{\lambda'}$ とおく．このときつぎが成り立つ：

(i) $X' \in \tau^c(X)$ ならば $(X', (e_{\lambda'})_{\lambda' \in \Lambda'})$ は部分複体である．

(ii) $(X', (e_{\lambda'})_{\lambda' \in \Lambda'})$ が有限部分複体ならば X' はコンパクト，とくに閉集合である．

証明. (i) 5.1.7 よりしたがう．

(ii) 各 $\lambda' \in \Lambda'$ に対して，5.1.6 より $\overline{e_{\lambda'}} = \Phi_{\lambda'}(D^{d(\lambda')}) \subset X'$ が成り立つ．よって，$X' = \bigcup \overline{e_{\lambda'}} \subset X$ は T_2 空間のコンパクト集合である． □

5.2 CW 複体と整合位相

CW 複体の被覆としてつぎが考えられる：

- すべてのコンパクト部分集合からなる被覆 $\mathcal{K}$.
- すべての有限部分複体からなる被覆 $\mathcal{F}$（5.2.2）.
- すべての n 骨格からなる被覆 $\mathcal{S}$.

CW 複体の位相はこれらの被覆と整合的であることを見ていく．

5.2.1 命題. 閉包有限性を満たす胞体複体 $(X, \mathcal{E})$ に対して，$\overline{\mathcal{E}}$ は被覆 $\mathcal{K}$，$\mathcal{S}$ のそれぞれの細分である．

証明. X の胞体 e をとる．

- 5.1.6 より $\overline{e}$ はコンパクトである．したがって，$\overline{\mathcal{E}} \prec \mathcal{K}$ が成り立つ．
- 閉包有限性より，有限集合 $\Lambda' \subset \Lambda$ であって，$\overline{e} \subset \bigcup \{e_{\lambda'} \mid \lambda' \in \Lambda'\}$ となるものが存在する．そこで，$n = \max\{d(\lambda') \mid \lambda' \in \Lambda'\}$ とおくと，$\overline{e} \subset X^n$ となる．したがって，$\overline{\mathcal{E}} \prec \mathcal{S}$ が成り立つ． □

5.2.2 命題. 閉包有限性を満たす胞体複体 $(X, \mathcal{E})$ が与えられたとする．このとき，X の任意の胞体 e に対して，有限部分複体 X' であって $\overline{e} \subset X'$ となるものが存在する．とくに $\mathcal{F}$ は X の被覆であり，$\overline{\mathcal{E}} \prec \mathcal{F}$ が成り立つ．

証明. 胞体 e の次元 n に関する数学的帰納法で示す．$n = 0$ のときは明らかなので，$n > 0$ とする．特性写像の定義と 5.1.6 とから $\overline{e} \setminus e \subset X^{n-1}$ がわかる．したがって，閉包有限性から，次元が n 未満の胞体 $e_{\lambda_1}, \ldots, e_{\lambda_m}$ であって $\overline{e} \setminus e \subset e_{\lambda_1} \cup \cdots \cup e_{\lambda_m}$ となるものが存在する．このとき，仮定より各 $i \in \{1, \ldots, m\}$ に対して有限部分複体 X_i であって $\overline{e_{\lambda_i}} \subset X_i$ となるものが存在する．よって，$\overline{e} \subset e \cup X_1 \cup \cdots \cup X_m$ であり，5.1.10 より

$$\begin{aligned}\overline{e \cup X_1 \cup \cdots \cup X_m} &= \overline{e} \cup \overline{X_1} \cup \cdots \cup \overline{X_m} \\ &= \overline{e} \cup X_1 \cup \cdots \cup X_m\end{aligned}$$

$$\subset e \cup X_1 \cup \cdots \cup X_m$$

となるので，ふたたび 5.1.10 より $e \cup X_1 \cup \cdots \cup X_m$ は有限部分複体である． □

5.2.3 系． 閉包有限性を満たす胞体複体 $(X, \mathcal{E})$ が与えられたとする．このとき，X の位相が $\overline{\mathcal{E}}$ と整合的であるためには，X の位相が $\mathcal{F}$ と整合的であることが必要かつ充分である．

証明．（必要性） 5.2.2 より $\overline{\mathcal{E}} \prec \mathcal{F}$ であるから 3.6.10 より $\tau(X) = \tau(\mathcal{F})$ を得る．

（充分性） $A \in \tau^c(\overline{\mathcal{E}})$ とする．このとき，$A \in \tau^c(X) = \tau^c(\mathcal{F})$ を示せばよい（3.6.6）．$X' = \bigcup e_{\lambda'} \in \mathcal{F}$ とする．5.1.10 より $X' = \bigcup \overline{e_{\lambda'}}$ となるから $A \cap X' = \bigcup A \cap \overline{e_{\lambda'}}$ を得る．各 λ' に対して $\tau^c(\overline{e_{\lambda'}}) \subset \tau^c(X)$ であるから（2.2.4），X' が有限複体であることと併せて，$A \cap X' \in \tau^c(X)$ が成り立つことがわかる．よって，$A \cap X' = (A \cap X') \cap X' \in \tau^c(X)|X'$ が成り立つので，結論を得る． □

以上を合わせてつぎを得る：

5.2.4 定理． CW 複体 $(X, \mathcal{E})$ の位相は被覆 $\mathcal{K}$，$\mathcal{F}$，$\mathcal{S}$ のそれぞれと整合的である．

証明． 5.2.1，5.2.2，および 3.6.10 より結論を得る． □

CW 複体 $(X, \mathcal{E})$ の被覆 $\mathcal{K}$，$\mathcal{F}$，$\mathcal{S}$ の間の関係を調べておこう．まず，明らかに $\mathcal{F}$ は $\mathcal{S}$ の細分である．実は，$\mathcal{K}$ は $\mathcal{F}$ の細分であることがわかる：

5.2.5 命題． 任意のコンパクト集合 $K \subset X$ に対して，X の有限部分複体 X' であって $K \subset X'$ となるものが存在する．とくに，コンパクト CW 複体は有限複体である．

証明． $\Lambda_K = \{\lambda \in \Lambda \mid e_\lambda \cap K \neq \varnothing\}$ とおく．各 $\lambda \in \Lambda_K$ に対して点 $x_\lambda \in e_\lambda \cap K$ をとり $A = \{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda_K\}$ とおく．

（A は有限集合である） $B \subset A$ とする．このとき，X の任意の胞体 e に対して $B \cap \overline{e} \in \tau^c(\overline{e})$ となる：実際，5.2.2 より，有限部分複体 X' であって $\overline{e} \subset X'$ となるものが存在するので，$B \cap \overline{e} \subset B \cap X'$ となるが，A の定義より後者は有限集合である．したがって，$B \in \tau^c(\overline{\mathcal{E}}) = \tau^c(X)$ となる．とくに A は離散集合である．一方，$A = A \cap K \subset K$ はコンパクト集合の閉集合ゆえコンパクトなので，結局 A は有限集合である．

よって，Λ_K は有限集合であるから，$K \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda_K} e_\lambda$ と 5.2.2，5.1.9 より結論を得る． □

5.3 部分 CW 複体

5.1.10 はつぎのように一般化される：

5.3.1 定理. CW 複体 $(X, \mathcal{E} = (e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ と部分集合 $\Lambda' \subset \Lambda$ とが与えられたとする．$\mathcal{E}' = (e_{\lambda'})_{\lambda' \in \Lambda'}$，$X' = \bigcup_{\lambda' \in \Lambda'} e_{\lambda'}$ とおく．このとき，つぎは同値である：

(i) $(X', \mathcal{E}')$ は部分 CW 複体である．

(ii) $(X', \mathcal{E}')$ は部分複体である．

(iii) $X' \in \tau^c(X)$ である．

(iv) 任意の $\lambda' \in \Lambda'$ に対して $\overline{e_{\lambda'}} \subset X'$ が成り立つ．

証明. (i) ⇒ (ii)　明らか．

(ii) ⇒ (iii)　$X' \in \tau^c(\mathcal{F})$ を示せばよい（5.2.4）．$Y \in \mathcal{F}$ とする．このとき，$X' \cap Y$ は有限部分複体ゆえ $X' \cap Y \in \tau^c(X)$ となるので（5.1.10），$X' \cap Y \in \tau^c(Y)$ を得る．したがって，$X' \in \tau^c(\mathcal{F})$ が成り立つ（3.6.2）．

(iii) ⇒ (iv)　明らか．

(iv) ⇒ (i)　5.1.7 より $(X', \mathcal{E}')$ は部分複体である．また，$(X, \mathcal{E})$ の閉包有限性と仮定から $(X', \mathcal{E}')$ の閉包有限性がしたがう．さらに，仮定より $\overline{\mathcal{E}'}$ は X' の閉被覆であるから整合位相が定義でき，ゆえに $\tau^c(\overline{\mathcal{E}'}) \supset \tau^c(X')$ が成り立つ（3.6.6）．あとは $\tau^c(\overline{\mathcal{E}'}) \subset \tau^c(X')$ が成り立つことを示せばよい．そこで，$A \in \tau^c(\overline{\mathcal{E}'})$ とする．より強く，$A \in \tau^c(X) = \tau^c(\mathcal{F})$ となることを示す．（$\Rightarrow A = A \cap X' \in \tau^c(X)|X'$.）

$Y \in \mathcal{F}$ とする．このとき，有限集合 $\Lambda'' \subset \Lambda'$ であって $X' \cap Y = \bigcup_{\lambda'' \in \Lambda''} e_{\lambda''}$ となるものが存在する（5.1.9）．仮定と 5.1.10 とから各 $\lambda'' \in \Lambda''$ に対して $\overline{e_{\lambda''}} \subset X' \cap Y$ が成り立つ．したがって，$A \cap \overline{e_{\lambda''}} \in \tau^c(\overline{e_{\lambda''}}) \subset \tau^c(X)$ となることに注意すると，

$$A \cap Y = A \cap (X' \cap Y) = A \cap \left(\bigcup_{\lambda'' \in \Lambda''} \overline{e_{\lambda''}} \right) = \bigcup_{\lambda'' \in \Lambda''} A \cap \overline{e_{\lambda''}} \in \tau^c(Y)$$

が成り立つ．よって，$A \in \tau^c(\mathcal{F})$ を得る．

以上により，$(X', \mathcal{E}')$ は部分 CW 複体である． □

5.1.9 より，ただちにつぎを得る：

5.3.2 系. CW 複体 X の各 n 骨格は X の部分 CW 複体である．また，部分 CW 複体の族 $\mathcal{X}$ に対して，$\bigcup\mathcal{X}$，$\bigcap\mathcal{X}$ はともに X の部分 CW 複体である． □

5.3.3 系. CW 複体 $(X,(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ が与えられたとする．$\Lambda_n=\{\lambda\in\Lambda \mid d(\lambda)=n\}$ とおく．このとき，任意の部分集合 $\Lambda'\subset\Lambda_n$ に対して $X':=X^{n-1}\cup\bigcup_{\lambda'\in\Lambda'}e_{\lambda'}$ は X の部分 CW 複体である．とくに，各 n 胞体は n 骨格 X^n の開集合である．

証明. 各 $n-1$ 胞体 e に対して $\overline{e}=\Phi_e(D^{n-1})\subset X^{n-2}\cup e\subset X^{n-1}\subset X'$ が成り立つ．また，各 $\lambda'\in\Lambda'$ に対して $\overline{e_{\lambda'}}=\Phi_{\lambda'}(D^n)\subset X^{n-1}\cup e_{\lambda'}\subset X'$ が成り立つ．よって，5.3.1 より結論を得る．

さて，n 胞体 e_λ に対して，$\Lambda':=\Lambda_n\smallsetminus\{\lambda\}$ を考えると，前段より $X'\in\tau^c(X)$ であるから（5.3.1），$X^n\smallsetminus e_\lambda=X'=X'\cap X^n\in\tau^c(X)|X^n$ を得る． □

5.3.4 系. n 次元 CW 複体の n 胞体は開集合である． □

5.3.5 注意. 一般に，CW 複体の胞体は開集合であるとは限らない．

5.4 胞体複体はいつ CW 複体になるか

まず，5.2.3 よりつぎがわかる：

5.4.1 定理. 胞体複体 X がその有限部分複体の増大列 $(X_k)_{k\geq 0}$ の帰納極限であるとする．このとき，X は CW 複体である．

証明. 被覆 $(X_k)_{k\geq 0}$ は明らかに $\mathcal{F}$ の細分であるから，X の位相は $\mathcal{F}$ と整合的である（3.6.10）．あとは X が閉包有限性を持つことを示せばよい（5.2.3）．X の胞体 e をとり，$x\in e$ とする．このとき，$k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ であって $x\in X_k$ となるものが存在する．すると $x\in e\cap X_k\neq\varnothing$ となるので，$\overline{e}\subset X_k$ が成り立ち（5.1.7），よって結論を得る． □

5.4.2 定義. 胞体複体 $(X,\mathcal{E}=(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ の任意の点 $x\in X$ に対して，有限集合 $\Lambda'\subset\Lambda$ であって $x\in\operatorname{int}(\bigcup_{\lambda'}e_{\lambda'})$ が成り立つものが存在するとき，$(X,\mathcal{E})$ は**局所有限**（**locally finite**）であるという．

5.4.3 補題. 胞体複体 $(X,\mathcal{E}=(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ が与えられたとする．

(i) $(X,\mathcal{E})$ が局所有限ならば，$\overline{\mathcal{E}}$ は局所有限閉被覆である．

(ii) $(X,\mathcal{E})$ が閉包有限であるとき，$\overline{\mathcal{E}}$ が局所有限閉被覆ならば $(X,\mathcal{E})$ は局所有限である．

証明． (i) $x\in X$ とする．仮定より，有限集合 $\Lambda'\subset\Lambda$ であって $x\in\mathrm{int}(\bigcup e_{\lambda'})$ となるものが存在する．さて，$\lambda\in\Lambda\setminus\Lambda'$ のとき $e_\lambda\cap\bigcup e_{\lambda'}=\varnothing$ ゆえ，$\overline{e_\lambda}\cap\mathrm{int}(\bigcup e_{\lambda'})=\varnothing$ を得る．したがって，$\mathrm{int}(\bigcup e_{\lambda'})\in\tau(x,X)$ に対して $\{\lambda\in\Lambda\mid\overline{e_\lambda}\cap\mathrm{int}(\bigcup e_{\lambda'})\neq\varnothing\}\subset\Lambda'$ は有限集合である．

(ii) $x\in X$ とする．仮定より，$U\in\tau(x,X)$ であって $\{\lambda\in\Lambda\mid\overline{e_\lambda}\cap U\neq\varnothing\}$ が有限集合となるものが存在する．この集合を $\{\lambda_1,\dots,\lambda_m\}$ とおくと，各 $i\in\{1,\dots,m\}$ に対して，閉包有限性より，有限集合 Λ_i であって $\overline{e_{\lambda_i}}\subset\bigcup\{e_\lambda\mid\lambda\in\Lambda_i\}$ となるものが存在する．したがって，$\Lambda':=\bigcup\Lambda_i$ は有限集合であり，$x\in U\subset\bigcup\{e_{\lambda'}\mid\lambda'\in\Lambda'\}$，とくに $x\in\mathrm{int}(\bigcup e_{\lambda'})$ が成り立つ． □

5.4.4 定理． 局所有限胞体複体 $(X,\mathcal{E})$ は CW 複体である．

証明． 仮定より $\overline{\mathcal{E}}$ は局所有限閉被覆であるから X の位相は $\overline{\mathcal{E}}$ と整合的である（3.6.14）．あとは，$(X,\mathcal{E})$ が閉包有限であることを示せばよい．X の胞体 e をとる．仮定より，各 $x\in\overline{e}$ に対して有限集合 $\Lambda_x\subset\Lambda$ であって $x\in U_x:=\mathrm{int}(\bigcup\{e_\lambda\mid\lambda\in\Lambda_x\})$ となるものが存在する．いま $\overline{e}$ はコンパクトであるので（5.1.6），その開被覆 $(U_x)_{x\in\overline{e}}$ は有限部分被覆 $(U_{x_i})_{1\leq i\leq m}$ を持つ．そこで $\Lambda'=\bigcup\Lambda_{x_i}$ とおくと，これは有限集合であり，

$$\overline{e}\subset\bigcup U_{x_i}\subset\bigcup e_{\lambda'}$$

が成り立つ． □

5.4.5 定理． CW 複体 $(X,(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ と胞体複体 $(Y,(e'_\mu)_{\mu\in M})$，および全射等化写像 $f\colon X\to Y$ が与えられたとする．このとき，任意の $\lambda\in\Lambda$ に対して，Y の有限部分複体 Y' であって $f(\overline{e_\lambda})\subset Y'$ となるものが存在するならば，Y は CW 複体である．

証明． $\mu\in M$ とし，$y\in e'_\mu$ をとる．f の全射性と CW 複体の定義から，$x\in X$，$\lambda\in\Lambda$ であって $y=f(x)$，$x\in e_\lambda$ となるものが存在する．仮定より，Y の有限部分複体 Y' であって $f(\overline{e_\lambda})\subset Y'$ となるものが存在する．このとき，$y\in e'_\mu\cap Y'\neq\varnothing$ となるので $\overline{e'_\mu}\subset Y'$ が成り立つ（5.1.7）．したがって，$(Y,(e'_\mu)_{\mu\in M})$ は閉包有限性を持つ．あとは，Y の位相がその有限部分複体全体のなす被覆と整合的であることを示せばよいが（5.2.3），それは 3.6.12，3.6.10 よりしたがう． □

5.5 接着空間としての CW 複体

CW 複体の定義（5.1.1）における “接着写像” の名称がここで正当化される．

CW 複体 $(X,(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ が与えられたとする．各 $\lambda\in\Lambda$ に対して，特性写像 Φ_λ を固定する．また，$\Lambda_n=\{\lambda\in\Lambda\mid d(\lambda)=n\}$，$\Lambda_{\le n}=\bigcup_{i\le n}\Lambda_i$ とおく．このとき，写像族 $(\Phi_\lambda\colon D^{d(\lambda)}\to X)_{\lambda\in\Lambda}$，および $(\Phi_\lambda\colon D^{d(\lambda)}\to X^n)_{\lambda\in\Lambda_{\le n}}$ に対して，余積空間の普遍性（3.5.4）より，連続写像 $\Phi\colon\coprod_{\lambda\in\Lambda}D^{d(\lambda)}\to X$，$\Phi^n\colon\coprod_{\lambda\in\Lambda_{\le n}}D^{d(\lambda)}\to X^n$ が定まる：

$$
\begin{tikzcd}
D^{d(\lambda)} \arrow[r, "\Phi_\lambda"] \arrow[d, "i_\lambda"'] & X, \\
\coprod_{\lambda\in\Lambda} D^{d(\lambda)} \arrow[ur, dashed, "\Phi"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
D^{d(\lambda)} \arrow[r, "\Phi_\lambda"] \arrow[d, "i_\lambda"'] & X^n. \\
\coprod_{\lambda\in\Lambda_{\le n}} D^{d(\lambda)} \arrow[ur, dashed, "\Phi^n"'] &
\end{tikzcd}
$$

明らかに $\Phi^n=X^n|\Phi|(\coprod_{\lambda\in\Lambda_{\le n}}D^{d(\lambda)})$ が成り立つ．また，包含写像 $X^{n-1}\to X^n$ と連続写像 $\Phi_\lambda\colon D^{d(\lambda)}\to X^n$，$\lambda\in\Lambda_n$，たちから連続写像 $\Phi^{(n)}\colon X^{n-1}\amalg\coprod_{\lambda\in\Lambda_n}D^n\to X^n$ が定まる．これらの写像に関してつぎが成り立つ：

5.5.1 命題. 写像 Φ，および各 $n\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ に対して，写像 Φ^n，$\Phi^{(n)}$ は全射等化写像である．

証明. 全射性は明らかなので，それぞれが等化写像であることを示す．

（Φ は等化写像である） 　各 $\lambda\in\Lambda$ に対して，5.1.6 より

$$(\overline{e_\lambda}|\Phi|i_\lambda(D^{d(\lambda)}))\circ(i_\lambda(D^{d(\lambda)})|i_\lambda)=\overline{e_\lambda}|\Phi_\lambda\colon D^{d(\lambda)}\to\overline{e_\lambda}$$

が成り立つ．この右辺は全射連続閉写像，とくに等化写像であるから（3.2.4），写像 $\overline{e_\lambda}|\Phi|i_\lambda(D^{d(\lambda)})$ は等化写像である（3.2.8）．いま，$\coprod D^{d(\lambda)}$，X の位相はそれぞれ被覆 $(i_\lambda(D^{d(\lambda)}))_{\lambda\in\Lambda}$，$(\overline{e_\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$ と整合的であるから，3.6.12 より結論を得る．

（Φ^n は等化写像である） 　$\{\overline{e_\lambda}\cap X^n\mid\lambda\in\Lambda\}=\{\overline{e_\lambda}\mid\lambda\in\Lambda_{\le n}\}$ が成り立つ（5.1.7）．したがって，5.3.1 より $X^n\in\tau^c(X)$ となることに注意すると，X^n の位相は被覆 $(\overline{e_\lambda})_{\lambda\in\Lambda_{\le n}}$ と整合的であることがわかる（3.7.2）．あとは上と同様．

（$\Phi^{(n)}$ は等化写像である） 　余積空間の結合性（3.5.7）より同相

$$(\textstyle\coprod_{\lambda\in\Lambda_{\le n-1}}D^{d(\lambda)})\amalg(\coprod_{\lambda\in\Lambda_n}D^n)\approx\coprod_{\lambda\in\Lambda_{\le n}}D^{d(\lambda)}$$

が存在することに注意すると，つぎの可換図式を得る：

$$\begin{CD}
(\coprod_{\lambda\in\Lambda_{\leq n-1}} D^{d(\lambda)}) \amalg (\coprod_{\lambda\in\Lambda_n} D^n) @>{\Phi^{n-1}\coprod \mathrm{id}}>> X^{n-1} \amalg (\coprod_{\lambda\in\Lambda_n} D^n)\\
@V{\approx}VV @VV{\Phi^{(n)}}V\\
\coprod_{\lambda\in\Lambda_{\leq n}} D^{d(\lambda)} @>>{\Phi^n}> X^n.
\end{CD}$$

前段より Φ^n は等化写像であるから，$\Phi^{(n)}$ は等化写像である（3.2.8）. □

5.5.2 系. CW 複体 X の n 骨格 X^n は，接着写像によって $n-1$ 骨格 X^{n-1} に球体 D^n を接着した空間に同相である.

証明. 5.5.1，4.1.3 より同相

$$(X^{n-1} \amalg (\coprod_{\lambda\in\Lambda_n} D^n))/R(\Phi^{(n)}) \approx X^n$$

が成り立つ．ここで，n 胞体 e_λ，$\lambda \in \Lambda_n$，の接着写像たちが誘導する写像を

$$\varphi_n = \nabla((\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_n})\colon \coprod_{\lambda\in\Lambda_n} S^{n-1} \to X^{n-1}$$

とおくと， 関係 $i_{X^{n-1}}(\varphi_n(z)) \sim i_{\coprod D^n}(z)$，$z \in \coprod_{\lambda\in\Lambda_n} S^{n-1}$，によって生成される同値関係は明らかに $R(\Phi^{(n)})$ と一致する．よって，結論を得る：

$$\begin{CD}
\coprod_{\lambda\in\Lambda_n} S^{n-1} @>{\subset}>> \coprod_{\lambda\in\Lambda_n} D^n\\
@V{\varphi_n}VV @VVV\\
X^{n-1} @>>> X^{n-1} \amalg_{\varphi_n} (\coprod_{\lambda\in\Lambda_n} D^n).
\end{CD}$$

□

逆に，離散空間 X^0 に順に球体を接着していくことで CW 複体が得られることを見よう.

5.5.3 命題. 次元が n 未満の CW 複体 $(X', (e'_{\lambda'})_{\lambda'\in\Lambda'})$ と写像族 $(\varphi_\lambda\colon S^{n-1} \to X')_{\lambda\in\Lambda_n}$ とが与えられたとする．写像 $\varphi_n := \nabla((\varphi_\lambda)_\lambda)$ によって X' に $\coprod_{\lambda\in\Lambda_n} D^n$ を接着した空間を X とおき，商写像を $\Phi\colon X' \amalg (\coprod_{\lambda\in\Lambda_n} D^n) \to X$ とする．このとき，

$$\begin{cases} e_{\lambda'} = \Phi(i_{X'}(e'_{\lambda'})) & ,\lambda' \in \Lambda' \\ e_\lambda = \Phi(i_\lambda(\mathrm{int}(D^n))) & ,\lambda \in \Lambda_n \end{cases}$$

とおくと，$(X, (e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda'\cup\Lambda_n})$ は次元 n 以下の CW 複体で，その $n-1$ 骨格は X' と同相になる：

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "i_{X'}"] \arrow[dr, "j_{X'}"'] & X' \amalg \coprod D^n \arrow[d, "\Phi"'] & \coprod D^n \arrow[l, "i_{\coprod D^n}"'] \arrow[dl, "j_{\coprod D^n}"] & D^n. \arrow[l] \arrow[ll, bend right, "i_\lambda"'] \\
& X & &
\end{tikzcd}$$

証明. 定義（5.1.1）の条件をひとつずつ確かめる：

（X は T_2 空間である）　$x, y \in X$，$x \neq y$，とする．

（$x, y \in j_{\coprod \mathrm{int}(D^n)}$ のとき）　4.4.7 より $j_{\coprod D^n}(\coprod \mathrm{int}(D^n)) \in \tau(X)$ であるから，これらは X の開集合で分離できる．

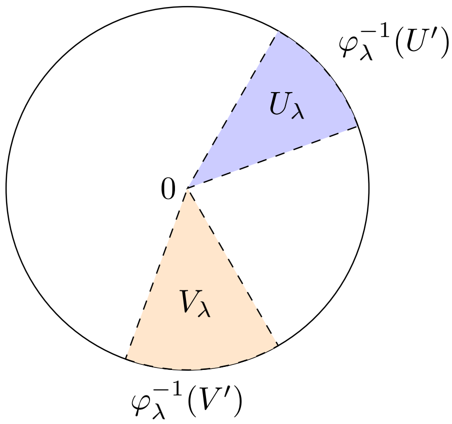
（$x, y \in j_{X'}(X')$ のとき）　$x = j_{X'}(x'), y = j_{X'}(y') \in j_{X'}(X')$，$x', y' \in X'$，とする．いま X' は T_2 空間なので，$U' \in \tau(x', X')$，$V' \in \tau(y', X')$ であって $U' \cap V' = \varnothing$ となるものが存在する．各 $\lambda \in \Lambda_n$ に対して，$\varphi_\lambda^{-1}(U'), \varphi_\lambda^{-1}(V') \in \tau(S^{n-1})$，$\varphi_\lambda^{-1}(U') \cap \varphi_\lambda^{-1}(V') = \varnothing$，となる．そこで，$U_\lambda, V_\lambda \subset D^n$ を

$$U_\lambda = \{z \in D^n \smallsetminus \{0\} \mid z/\|z\| \in \varphi_\lambda^{-1}(U')\},$$
$$V_\lambda = \{z \in D^n \smallsetminus \{0\} \mid z/\|z\| \in \varphi_\lambda^{-1}(V')\},$$

で定めると，これらは D^n の開集合であって[13)]

$$\varphi_\lambda^{-1}(U') = U_\lambda \cap S^{n-1},\ \varphi_\lambda^{-1}(V') = V_\lambda \cap S^{n-1},\ U_\lambda \cap V_\lambda = \varnothing$$

が成り立つ．



13) $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1}$; $z \mapsto z/\|z\|$ は連続であるから，$U_\lambda = f^{-1}(\varphi_\lambda^{-1}(U')) \cap D^n \in \tau(D^n)$ が成り立つ．V_λ についても同様．

さて，$U = U' \amalg \coprod U_\lambda$，$V = V' \amalg \coprod V_\lambda$ とおくと，これらは $X' \amalg \coprod D^n$ の開集合であって，$i_{X'}(x') \in U$，$i_{X'}(y') \in V$，$U \cap V = \varnothing$ を満たすので，

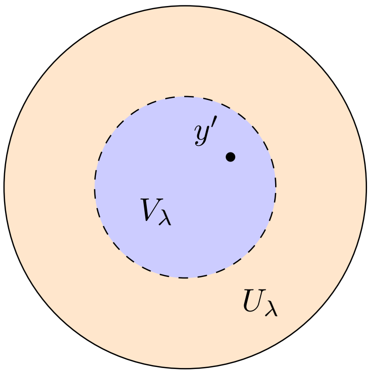
$$x = j_{X'}(x') \in \Phi(U),\ y = j_{X'}(y') \in \Phi(V),\ \Phi(U) \cap \Phi(V) = \varnothing$$

が成り立つ．また，$\varphi_n^{-1}(U') = (\coprod U_\lambda) \cap (\coprod S^{n-1})$ が成り立つので，4.4.10 より $\Phi(U) \in \tau(X)$ を得る．$\Phi(V) \in \tau(X)$ も同様にしてわかる．

（$x \in j_{X'}(X')$，$y \in j_{\coprod D^n}(\coprod \mathrm{int}(D^n))$ のとき） $y = j_{\coprod D^n}(\lambda', y')$，$(\lambda', y') \in \coprod \mathrm{int}(D^n)$，とする．各 $\lambda \in \Lambda_n$ に対して，

$$U_\lambda = \{z \in D^n \mid \|z\| > (1 + \|y'\|)/2\},$$
$$V_\lambda = \{z \in D^n \mid \|z\| < (1 + \|y'\|)/2\},$$

とおく．さらに，$U = X' \amalg \coprod U_\lambda$，$V = \coprod V_\lambda$ とおくと，これらは $X' \amalg \coprod D^n$ の開集合であって，$x \in \Phi(U)$，$y \in \Phi(V)$，$\Phi(U) \cap \Phi(V) = \varnothing$ を満たす．また，$\varphi_n^{-1}(X') = \coprod S^{n-1} = (\coprod U_\lambda) \cap (\coprod S^{n-1})$，$\varphi_n^{-1}(\varnothing) = (\coprod V_\lambda) \cap (\coprod S^{n-1})$ となるから，$\Phi(U), \Phi(V) \in \tau(X)$ が成り立つ（4.4.10）．



（$(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda' \cup \Lambda_n}$ は X の素な被覆である） 被覆であることは明らか．また，各 e_λ の定義と 4.4.7 から，互いに交わらないこともわかる．

（胞体・特性写像） （$\lambda' \in \Lambda'$ のとき） 4.4.7 より $e_{\lambda'} \approx e'_{\lambda'} \approx \mathbb{R}^{d(\lambda')}$ が成り立つ．また，$e'_{\lambda'}$ の特性写像を $\Phi'_{\lambda'}$ とすると，合成写像

$$D^{d(\lambda')} \xrightarrow{\Phi'_{\lambda'}} (X')^{d(\lambda')-1} \cup e'_{\lambda'} \subset X' \xrightarrow{i_{X'}} X' \amalg \coprod D^n \xrightarrow{\Phi} X$$

は $e_{\lambda'}$ の特性写像を与える．

（$\lambda \in \Lambda_n$ のとき） 4.4.7 より $e_\lambda \approx \mathrm{int}(D^n) \approx \mathbb{R}^n$ が成り立つ．また，合成写像 $\Phi \circ i_\lambda \colon D^n \to X$ が e_λ の特性写像を与える．

(C)　$\lambda \in \Lambda' \cup \Lambda_n$ とする．$\lambda \in \Lambda'$ のときは明らか．$\lambda \in \Lambda_n$ のとき，5.1.6，および同値関係の定義より，

$$\begin{aligned}\overline{e_\lambda} &= \Phi(i_\lambda(D^n)) = \Phi(i_\lambda(\mathrm{int}(D^n)) \cup i_\lambda(S^{n-1})) \\ &= \Phi(i_\lambda(\mathrm{int}(D^n))) \cup \Phi(i_\lambda(S^{n-1})) \\ &= e_\lambda \cup \Phi(i_{X'}(\varphi_\lambda(S^{n-1})))\end{aligned}$$

が成り立つ．いま，$\varphi_\lambda(S^{n-1}) \subset X'$ はコンパクトなので，X' の有限部分複体 X'' であって $\varphi_\lambda(S^{n-1}) \subset X''$ となるものが存在する（5.2.5）．したがって，有限集合 $\Lambda'' \subset \Lambda' \cup \Lambda_n$ であって $\overline{e_\lambda} \subset \bigcup\{e_{\lambda''} \mid \lambda'' \in \Lambda''\}$ となるものが存在する．

(W)　X' は CW 複体なので，合成写像

$$\coprod \overline{e'_{\lambda'}} \amalg \coprod D^n \xrightarrow{\nabla(\mathrm{j}_{X'})\amalg\mathrm{id}} X' \amalg \coprod D^n \xrightarrow{\Phi} X$$

は全射等化写像である（3.5.6，3.2.8）．各 $\lambda \in \Lambda_n$ に対して $\overline{e_\lambda} = \Phi(i_\lambda(D^n))$ であったから（5.1.6），X の位相は閉被覆 $(\overline{e_\lambda})_{\lambda \in \Lambda' \cup \Lambda_n}$ と整合的である（3.6.12）．

よって，$(X, (e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda' \cup \Lambda_n})$ は CW 複体である．明らかに $\dim(X) = n$ である．また，$\coprod S^{n-1} \in \tau^c(\coprod D^n)$ であるから，4.4.7 より，

$$X^{n-1} = \bigcup_{\lambda' \in \Lambda'} e_{\lambda'} = \Phi(i_{X'}(X')) \approx i_{X'}(X') \approx X'$$

が成り立つ． □

5.5.4 定理． 集合 X の被覆 $\mathcal{S} = (X^n)_{n \geq -1}$ がつぎを満たすとする：

- $\varnothing = X^{-1} \subsetneq X^0 \subset X^1 \subset \cdots \subset X^{n-1} \subset X^n \subset \cdots$.
- 各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，X^n は X^{n-1} に球体 $\coprod_{\lambda \in \Lambda_n} D^n$ を 5.5.3 の要領で接着した空間（に同相）である．($\Lambda_n = \varnothing$ の場合もありうる．)

このとき，被覆 $\mathcal{S}$ に関する整合位相が定まり，位相空間 $(X, \tau(\mathcal{S}))$ は各 X^n をその n 骨格とするような CW 複体である．

証明． 仮定と 5.5.3 より，離散集合 X^0 は 0 次元 CW 複体であり，以下帰納的に，各 X^n は次元が n 以下の CW 複体であることがわかる．ゆえに X^{n-1} は X^n の部分複体であるから（5.5.3，5.1.9），とくに $X^{n-1} \in \tau^c(X^n)$ を得る（5.3.1）．したがって，被覆 $\mathcal{S}$ に関する整合位相が定まる（3.6.7）．

例によって，CW 複体の定義をひとつずつ確認していく：

（X は T_2 空間である） $x, y \in X$, $x \neq y$, とする．$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ であって $x, y \in X^n \setminus X^{n-1}$ となるものが存在する．5.5.3 より X^n は T_2 空間なので，$U_n \in \tau(x, X^n)$，$V_n \in \tau(y, X^n)$ であって $U_n \cap V_n = \varnothing$ となるものが存在する．5.5.3 における T_2 性の証明より，各 $m > n$ に対して帰納的に $U_m \in \tau(x, X^m)$，$V_m \in \tau(y, X^m)$ であって

$$U_m \cap X^{m-1} = U_{m-1},\ V_m \cap X^{m-1} = V_{m-1},\ U_m \cap V_m = \varnothing$$

となるものが構成できる．そこで，$U = \bigcup_{m \geq n} U_m$，$V = \bigcup_{m \geq n} V_m$ とおく．このとき，任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$U \cap X^k = \begin{cases} U_k \in \tau(X^k) & , k \geq n \\ U_n \cap X^k \in \tau(X^n)|X^k = \tau(X^k) & , k \leq n \end{cases}$$

が成り立つので $U \in \tau(x, X)$ を得る．同様にして $V \in \tau(y, X)$ も成り立つ．また，明らかに $U \cap V = \varnothing$ が成り立つ．

（胞体・特性写像） $\Lambda = \bigcup \Lambda_n$ とおく．各 $\lambda \in \Lambda_n$ に対して，$X^n \supset e_\lambda \approx \mathbb{R}^n$ であり，

$$D^n \to X^{n-1} \cup e_\lambda \subset X^n \subset X$$

が e_λ の特性写像を与える．明らかに $\mathcal{E} := (e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は X の素な被覆である．

（C） 各 $(X^n, (e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_n})$ が閉包有限性をみたすので，$(X, (e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ も閉包有限性をみたす．

（W） いま，各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して全射等化写像 $\nabla(\mathrm{j}_n) \colon \coprod_{\lambda \in \Lambda_n} \overline{e_\lambda} \to X^n$ が存在するので（3.6.9），つぎの合成写像も全射等化写像である（3.5.7，3.5.6）：

$$\coprod_{\lambda \in \Lambda} \overline{e_\lambda} \approx \coprod_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \left(\coprod_{\lambda \in \Lambda_n} \overline{e_\lambda} \right) \xrightarrow{\coprod \nabla(\mathrm{j}_n)} \coprod_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} X^n \to X.$$

よって，X の位相は被覆 $\overline{\mathcal{E}}$ と整合的である（3.6.9）．

以上より，$(X, (e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ は CW 複体である．また，明らかに X^n は X の n 骨格である． □

5.6 CW 複体の積

まず，胞体複体の積について観察しよう．つぎの補題から始める：

5.6.1 補題. 任意の非負整数 $m,n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，同相写像

$$(D^{m+n},S^{m+n-1})\approx(D^m,S^{m-1})\times(D^n,S^{n-1})$$

が存在する．

証明. $\mathbb{R}^{m+n}=\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ 上のつぎのノルムを考える：

$$\begin{aligned}\|z\|_{m+n}&=\sqrt{(z_1)^2+\cdots+(z_{m+n})^2},\ z\in\mathbb{R}^{m+n},\\ \|(x,y)\|_\infty&=\max\{\|x\|_m,\|y\|_n\},\ (x,y)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

このとき，

$$\begin{aligned}D^{m+n}&=\{z\in\mathbb{R}^{m+n}\mid\|z\|_{m+n}\leq 1\},\\ S^{m+n-1}&=\{z\in\mathbb{R}^{m+n}\mid\|z\|_{m+n}=1\},\\ D^m\times D^n&=\{(x,y)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\mid\|(x,y)\|_\infty\leq 1\},\\ (D^m\times S^{n-1})\cup(S^{m-1}\times D^n)&=\{(x,y)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\mid\|(x,y)\|_\infty=1\}\end{aligned}$$

と書ける．写像 $f\colon D^{m+n}\to D^m\times D^n$，$g\colon D^m\times D^n\to D^{m+n}$ をつぎで定める：

$$f(z)=\begin{cases}\frac{\|z\|_{m+n}}{\|(x,y)\|_\infty}(x,y) & ,z=(x,y)\neq 0\\ 0 & ,z=0,\end{cases}$$

$$g(x,y)=\begin{cases}\frac{\|(x,y)\|_\infty}{\|z\|_{m+n}}z & ,(x,y)=z\neq 0\\ 0 & ,(x,y)=0.\end{cases}$$

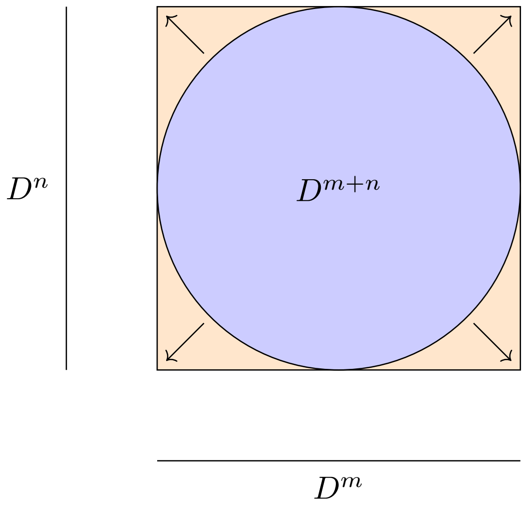
どちらも $\mathbb{R}^{m+n}\smallsetminus\{0\}=(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n)\smallsetminus\{(0,0)\}$ 上では連続函数の積ゆえ連続なので，それぞれの 0 での連続性を確かめればよい．ところで，$\|f(z)-f(0)\|_\infty=\|z\|_{m+n}$，$\|g(x,y)-g(0,0)\|_{m+n}=\|(x,y)\|_\infty$ であるから 0 でも連続である．さらに，

$$\begin{aligned}g(f(z))&=\begin{cases}\frac{\|f(z)\|_\infty}{\|f(z)\|_{m+n}}f(z) & ,z\neq 0\\ 0 & ,z=0\end{cases}\\ &=\begin{cases}\|z\|_{m+n}\frac{\|z\|_\infty}{\|z\|_{m+n}^2}\frac{\|z\|_{m+n}}{\|z\|_\infty}z & ,z\neq 0\\ 0 & ,z=0\end{cases}\\ &=z\end{aligned}$$

が成り立つ．同様に $f\circ g=\mathrm{id}$ も成り立つ．したがって，$f\colon D^{m+n}\approx D^m\times D^n$ を得る．また，明らかに

$$((D^m\times S^{n-1})\cup(S^{n-1}\times D^n))|f|S^{m+n-1}\colon S^{m+n-1}\approx(D^m\times S^{n-1})\cup(S^{n-1}\times D^n)$$

が成り立つ．



□

5.6.2 命題． 胞体複体 $(X, \mathcal{E} = (e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$，$(Y, \mathcal{E}' = (e'_\mu)_{\mu \in M})$ が与えられたとする．このとき，積空間 $X \times Y$ は $\mathcal{E} \times \mathcal{E}' := (e_\lambda \times e'_\mu)_{(\lambda,\mu) \in \Lambda \times M}$ による胞体分割を持つ，すなわち $(X \times Y, \mathcal{E} \times \mathcal{E}')$ は胞体複体である．これを $(X, \mathcal{E})$ と $(Y, \mathcal{E}')$ との**積複体**という．

証明． X，Y は T_2 空間なので $X \times Y$ も T_2 空間である．また，明らかに $\mathcal{E} \times \mathcal{E}'$ は $X \times Y$ の素な被覆である．さて，各 $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times M$ に対して，

$$e_\lambda \times e'_\mu \approx \mathbb{R}^{d(\lambda)} \times \mathbb{R}^{d(\mu)} = \mathbb{R}^{d(\lambda)+d(\mu)}$$

が成り立つ．さらに，Φ_λ，Φ'_μ をそれぞれの特性写像とすると，合成写像 $i \circ (\Phi_\lambda \times \Phi_\mu) \circ f$ が $e_\lambda \times e'_\mu$ の特性写像を与える．ただし，f は 5.6.1 の同相写像，i は

$$(X^{d(\lambda)-1} \cup e_\lambda, X^{d(\lambda)-1}) \times (Y^{d(\mu)-1} \cup e'_\mu, Y^{d(\mu)-1})$$

から

$$((X \times Y)^{d(\lambda)+d(\mu)-1} \cup (e_\lambda \times e'_\mu), (X \times Y)^{d(\lambda)+d(\mu)-1})$$

への包含写像である． □

5.6.3 命題． 閉包保存性を持つ胞体複体の積複体はまた閉包保存性を持つ．

証明． 積複体の胞体の定義から明らか． □

5.6.4 定理． CW 複体 $(X, \mathcal{E} = (e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$，$(Y, \mathcal{E}' = (e'_\mu)_{\mu \in M})$ が与えられたとする．このとき，$(Y, \mathcal{E}')$ が局所有限ならば，積複体は CW 複体になる．

証明． $X \times Y$ の位相が閉被覆 $\overline{\mathcal{E} \times \mathcal{E}'} = (\overline{e_\lambda} \times \overline{e'_\mu})_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}$ と整合的であることを示せばよい．ところで，いま Y は T_2 空間であり，さらに仮定と 5.4.3，5.1.6 より $\overline{\mathcal{E}'}$ は局所有限コンパクト被覆であるから，3.8.6 より結論を得る． □

単位閉区間 $I = [0,1]$ は $\{0\}, \{1\}$ を 0 胞体，$]0,1[$ を 1 胞体とする CW 分割を持つ．よって，ただちにつぎを得る：

5.6.5 系． 任意の CW 複体 X に対して，$X \times I$ はまた CW 複体である． □

5.7 CW 複体の商

つぎを認めることにする：

5.7.1 命題 ([2, V.2.11])．CW 複体は正規空間，とくに正則空間である． □

また，4.2.6 の証明と全く同様にしてつぎがわかる：

5.7.2 命題． 正則空間 X に対して，その閉集合 $A \subset X$ を一点につぶして得られる空間 X/A は T_2 空間である． □

5.7.3 定理． CW 複体 $(X, (e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ とその部分 CW 複体 $(X', (e_{\lambda'})_{\lambda'\in\Lambda'})$ とが与えられたとする．このとき，商空間 X/X' はつぎの CW 分割を持つ．ただし，商写像を $q\colon X \to X/X'$ とおく：

$$\begin{cases} e''_{\Lambda'} = q(X') & \\ e''_\lambda = q(e_\lambda) & ,\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'. \end{cases}$$

証明． 定義をひとつずつ確認していく：

(X/X' は T_2 空間である) 5.7.1，5.3.1，5.7.2 よりしたがう．

(胞体・特性写像) $e''_{\Lambda'}$ は明らかに 0 胞体である．また，各 $\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'$ に対して，e_λ の特性写像を Φ_λ とすると，4.2.5 より，合成写像 $q \circ \Phi_\lambda$ が e''_λ の特性写像を与えることがわかる．明らかに $(e''_\lambda)_{\lambda\in(\Lambda\setminus\Lambda')\cup\{\Lambda'\}}$ は X/X' の素な被覆である．

(C) 明らか．

(W) 商写像 q の連続性より，各 $\lambda \in \Lambda\setminus\Lambda'$ に対して，連続写像 $q_\lambda := \overline{e''_\lambda}|q|\overline{e_\lambda}\colon \overline{e_\lambda} \to \overline{e''_\lambda}$ が定まる．また，連続写像 $q_{\Lambda'}\colon \coprod_{\lambda'\in\Lambda'} \overline{e_{\lambda'}} \to e''_{\Lambda'}$ が定まる（3.5.4）．したがって，

つぎの可換図式を得る：

$$\begin{CD}
\coprod \overline{e_\lambda} @>{\coprod q_\lambda}>> \coprod_{\lambda\in(\Lambda\smallsetminus\Lambda')\cup\{\Lambda'\}} \overline{e''_\lambda}\\
@V{\nabla(\mathrm{j})}VV @VV{\nabla(\mathrm{j}'')}V\\
X @>>{q}> X/X'.
\end{CD}$$

いま，$q\circ\nabla(\mathrm{j})$ は等化写像なので，3.2.8 より，$\nabla(\mathrm{j}'')$ は等化写像である． □

5.6.5 と併せてつぎを得る：

5.7.4 系． CW 複体に対して，その（被約）錐，（被約）懸垂はまた CW 複体である．ただし，基点は 0 胞体であるとする． □

5.6.4 と併せてつぎを得る：

5.7.5 系． CW 複体 X と局所有限 CW 複体 Y とに対して，その smash 積 $X\wedge Y$ はまた CW 複体である．ただし，基点は 0 胞体であるとする． □

5.8 CW 複体の例

有限胞体複体は CW 複体であったことを思い出そう．

■ 単位球体

5.8.1 例． 単位円盤 $D^2\subset\mathbb{R}^2$ のつぎの CW 分割を持つ（cf. 5.1.3，5.1.4）：

（0 胞体）　$e^0=(0,1)$.

（1 胞体）　$e^1=S^1\smallsetminus e^0$.

（2 胞体）　$e^2=\mathrm{int}(D^2)$.

5.8.2 例． 同様にして $D^n\subset\mathbb{R}^n$ の CW 分割が得られる：

（0 胞体）　$e^0=(0,\cdots,0,1)$.

（$n-1$ 胞体）　$e^{n-1}=S^{n-1}\smallsetminus e^0$.

（n 胞体）　$e^n=\mathrm{int}(D^n)$.

特性写像 $\Phi_{e^{n-1}}\colon(D^{n-1},S^{n-2})\to(e^0\cup e^{n-1},e^0)$ は 4.2.7 の写像で与えられる．

■ 単位球面

5.8.3 例. n 次元球面 S^n はつぎの CW 分割を持つ：

（0 胞体）　$e^0 = (0, \cdots, 0, 1)$.

（n 胞体）　$e^n = S^n \smallsetminus e^0$.

特性写像 $\Phi_{e^n} \colon (D^n, S^{n-1}) \to (e^0 \cup e^n, e^0)$ は 4.2.7 の写像で与えられる．

5.8.4 例. n 次元球面 S^n はつぎの CW 分割を持つ：

（0 胞体）　$e^0_+ = (1, 0, \ldots, 0)$，$e^0_- = (-1, 0, \ldots, 0)$.

（1 胞体）　$e^1_+ = \{(x_0, x_1, 0, \ldots, 0) \mid x_1 > 0\}$，$e^1_- = \{(x_0, x_1, 0, \ldots, 0) \mid x_1 < 0\}$.

　$\vdots$

（k 胞体）　$e^k_+ = \{(x_0, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) \mid x_k > 0\}, e^k_- = \{(x_0, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) \mid x_k < 0\}$

　$\vdots$

（n 胞体）　$e^n_+ = \{(x_0, \ldots, x_n) \mid x_n > 0\}$，$e^n_- = \{(x_0, \ldots, x_n) \mid x_n < 0\}$.

特性写像は

$$\Phi^k_\pm \colon D^k \to X^{k-1} \cup e^k_\pm;\ (x_0, \ldots, x_{k-1}) \mapsto \left(x_0, \ldots, x_{k-1}, \pm\sqrt{1 - \sum (x_i)^2}, 0, \ldots, 0\right)$$

で与えられる．この CW 分割に関して，S^n の k 骨格は S^k に同相である．

5.8.5 例. 無限次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^\infty$（3.6.8）の部分集合 S^∞ をつぎで定める：

$$S^\infty = \left\{ x \in \mathbb{R}^\infty \;\middle|\; \sum |x_i|^2 = 1 \right\}.$$

このとき，各 n に対して $\mathbb{R}^n \cap S^\infty = S^n \in \tau^c(\mathbb{R}^n)$ が成り立つので，$S^\infty \in \tau^c(\mathbb{R}^\infty)$ を得る．したがって，$S^\infty = \varinjlim S^n$ が成り立つ（3.7.2）．よって，胞体複体 $(S^\infty, (e^n_\pm)_{n \geq 0})$ はその有限部分複体の増大列 $(S^n)_{n \geq 0}$ の帰納極限であるから CW 複体である（5.4.1）．

■ 実射影空間

　$\mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ 上の同値関係 $\sim$ をつぎで定める：

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} : tx = y.$$

この同値関係による商空間を**実射影空間（real projective space）**といい，$\mathbb{R}P^n$ で表わす．また，$x=(x_0,\dots,x_n)$ の同値類を $[x]=[x_0,\dots,x_n]$ と書く．一方，$S^n\subset\mathbb{R}^n$ への $O(1)=\{\pm 1\}$ の作用を $t\cdot x=tx$ で定める．このとき，包含写像 $S^n\subset\mathbb{R}^{n+1}\smallsetminus\{0\}$，および連続写像 $\mathbb{R}^{n+1}\smallsetminus\{0\}\to S^n\,;\,x\mapsto x/\|x\|$ が誘導する写像により同相 $S^n/O(1)\approx\mathbb{R}P^n$ が成り立つ：

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "\subset"] \arrow[d] & \mathbb{R}^{n+1}\smallsetminus\{0\} \arrow[r] \arrow[d] & S^n \arrow[d] \\ S^n/O(1) \arrow[r, dashed] & \mathbb{R}P^n \arrow[r, dashed] & S^n/O(1). \end{tikzcd}$$

とくに，$\mathbb{R}P^n$ はコンパクト T_2 空間である（[4, 4.2.9]）．各 $k\in\{0,\dots,n\}$ に対して，自然な包含 $\mathbb{R}^{k+1}\subset\mathbb{R}^{n+1}$ が誘導する，コンパクト空間 $\mathbb{R}P^k$ から T_2 空間 $\mathbb{R}P^n$ への単射連続写像により，$\mathbb{R}P^k$ を $\mathbb{R}P^n$ の閉部分空間とみなす（1.0.1，2.2.9）．すなわち，

$$\mathbb{R}P^k=\{[x_0,\dots,x_n]\in\mathbb{R}P^n\mid x_{k+1}=\cdots=x_n=0\}$$

である．さて，各 $k\in\{0,\dots,n\}$ に対して，

$$e^k=\mathbb{R}P^k\smallsetminus\left\{[x]\in\mathbb{R}P^k\;\middle|\;x_k=0\right\}=\left\{[x]\in\mathbb{R}P^k\;\middle|\;x_k\neq 0\right\}$$

とおく．このとき，$(e^k)_{0\le k\le n}$ は $\mathbb{R}P^n$ の素な被覆であり，同相 $e^k\approx\mathbb{R}^k\,;\,[x]\mapsto(x_0/x_k,\dots,x_{k-1}/x_k)$ が成り立つ．さらに，

$$D^k\to\mathbb{R}P^n;\ x=(x_0,\dots,x_{k-1})\mapsto\left[x_0,\dots,x_{k-1},\sqrt{1-\|x\|^2},0,\dots,0\right]$$

が e^k の特性写像を与える（cf. 4.2.7）．よって，$(e^k)_{0\le k\le n}$ が $\mathbb{R}P^n$ の CW 分割を与える：

$$\mathbb{R}P^n=e^0\cup e^1\cup\cdots\cup e^n.$$

この CW 分割に関して，$\mathbb{R}P^n$ の k 骨格は $\mathbb{R}P^k$ に同相である．増大列 $(\mathbb{R}P^n)_{n\ge 0}$ の帰納極限を**無限次元実射影空間**といい，$\mathbb{R}P^\infty$ で表わす．

5.8.6 注意． たとえば，$\mathbb{R}P^2=e^0\cup e^1\cup e^2$ は $\mathbb{R}^2\approx e^2$ に "無限遠直線"$\mathbb{R}P^1\approx e^0\cup e^1$ を付け加えて得られる，などと言われることもある．

■ 複素射影空間

$\mathbb{R}$ を $\mathbb{C}$ に，$O(1)$ を $U(1)$ に置き換えることで，同様にして**複素射影空間（complex projective space）**$\mathbb{C}P^n$ が定まり，つぎの CW 分割が得られる：

$$\mathbb{C}P^n=e^0\cup e^2\cup\cdots\cup e^{2n}.$$

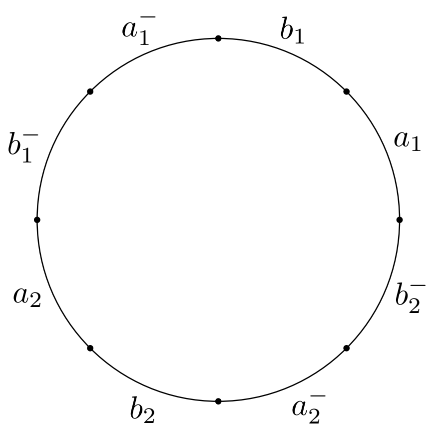
やはり，$\mathbb{C}P^k \approx e^0 \cup \cdots \cup e^{2k}$ が成り立つ．

■ 閉曲面

よく知られているように，$g \geq 0$ に対して，$4g$ 角形の辺をしかるべき方法で同一視することで向きづけ可能閉曲面 Σ_g が得られる．Σ_g がひとつの 0 胞体，$2g$ 個の 1 胞体，ひとつの 2 胞体からなる CW 分割を持つことを示そう．

単位円周 S^1 を $4g$ 等分し，各閉弧を順に $a_1, b_1, a_1^-, b_1^-, a_2, b_2, \ldots, a_g^-, b_g^-$ とおく：

$$\begin{aligned}
a_i &= \left\{ e^{\sqrt{-1}\theta} \;\middle|\; (4i-4)\frac{2\pi}{4g} \leq \theta \leq (4i-3)\frac{2\pi}{4g} \right\}, \\
b_i &= \left\{ e^{\sqrt{-1}\theta} \;\middle|\; (4i-3)\frac{2\pi}{4g} \leq \theta \leq (4i-2)\frac{2\pi}{4g} \right\}, \\
a_i^- &= \left\{ e^{\sqrt{-1}\theta} \;\middle|\; (4i-2)\frac{2\pi}{4g} \leq \theta \leq (4i-1)\frac{2\pi}{4g} \right\}, \\
b_i^- &= \left\{ e^{\sqrt{-1}\theta} \;\middle|\; (4i-1)\frac{2\pi}{4g} \leq \theta \leq 4i\frac{2\pi}{4g} \right\}.
\end{aligned}$$



$g = 2$ のとき．

さらに，各 $i \in \{1, \ldots, g\}$ に対して，a_i と a_i^-，b_i と b_i^- を "逆向き" に同一視する：

$$\begin{aligned}
a_i \ni e^{\sqrt{-1}\theta} &\sim \exp\left(\sqrt{-1}\left((8i-5)\frac{2\pi}{4g} - \theta\right)\right) \in a_i^-, \\
b_i \ni e^{\sqrt{-1}\theta} &\sim \exp\left(\sqrt{-1}\left((8i-3)\frac{2\pi}{4g} - \theta\right)\right) \in b_i^-.
\end{aligned}$$

この同値関係から得られる商空間は $2g$ 個の S^1 の wedge 和 $\bigvee_{2g} S^1$ に他ならない．商写

像を $f\colon S^1 \to \bigvee_{2g} S^1$ とおく．このとき，全射等化写像

$$S^1 \amalg D^2 \xrightarrow{f \amalg \mathrm{id}} \left(\bigvee_{2g} S^1\right) \amalg D^2 \xrightarrow{q_f} \left(\bigvee_{2g} S^1\right) \amalg_f D^2$$

の定める同値関係を観察することで，f による接着空間 $(\bigvee_{2g} S^1) \amalg_f D^2$ が Σ_g に他ならないことがわかる．明らかに，$\bigvee_{2g} S^1$ はひとつの 0 胞体，$2g$ 個の 1 胞体からなる CW 分割を持つので，5.5.3 より，Σ_g に対する所期の CW 分割が得られた．

■ レンズ空間

[2, V.3.11.3]，または [5, p.88]．

■ 古典群

横田一郎，『群と位相』，pp.141–168，または [5, p.88]．

■ Grassmann 多様体

J. W. Milnor, J. D. Stasheff, *Characteristic Classes*, §6，または [5, 第 2 章，§2]．

参考文献

[1] T-D. Bradley, T. Bryson, J. Terilla, *Topology: A Categorical Approach*, MIT Press, 2020.

[2] A. Dold, *Lectures on Algebraic Topology*, Springer, 1980.

[3] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., 1966.

[4] いんてぐま，「固有写像とその周辺」．

[5] 小松醇郎，中岡稔，菅原正博，『位相幾何学 I』，岩波書店，1967.