固有写像とその周辺

いんてぐま（@integmath）

2021 年 12 月 6 日

概要

完全写像と固有写像の関係やそれぞれの性質，使われ方のいくつかを整理・紹介した．完全写像が偉い．

目次

1 準備

■ 記号

位相空間 X の開集合系を $\tau(X)$ で表わす．部分集合 $A \subset X$ に対して，A を含む X の開集合全体を $\tau(A, X)$ で表わす．点 $x \in X$ に対して，$\tau(\{x\}, X)$ を単に $\tau(x, X)$ と書く．位相空間 X の閉集合系を $\tau^c(X)$ で表わす．

1.1 小像

1.1.1 補題. 写像 $f\colon X \to Y$，および部分集合 $A \subset X$，$B \subset Y$ が与えられたとする．このとき，

$$f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$$

が成り立つ．

証明. 明らかに $f(A \cap f^{-1}(B)) \subset f(A) \cap B$ が成り立つ．また，$y \in f(A) \cap B$ とすると，$y \in f(A)$ より $a \in A$ であって $f(a) = y$ となるものが存在する．このとき，$f(a) = y \in B$ より $a \in f^{-1}(B)$，したがって $y = f(a) \in f(A \cap f^{-1}(B))$ が成り立つ． □

1.1.2 定義. 写像 $f\colon X \to Y$，および部分集合 $A \subset X$ が与えられたとする．このとき，$\{y \in Y \mid f^{-1}(y) \subset A\}$ を f による A の小像 (**small image**) といい，$f_\sharp(A)$ で表わす[1]．

1.1.3 補題. 写像 $f\colon X \to Y$，および部分集合 $A \subset X$ が与えられたとする．このとき，

$$f_\sharp(A) = Y \setminus f(X \setminus A)$$

が成り立つ[2]．

証明. 1.1.1 より，任意の $y \in Y$ に対して，

$$\begin{aligned} y \in f_\sharp(A) &\Leftrightarrow f^{-1}(y) \cap (X \setminus A) = \varnothing \\ &\Leftrightarrow \{y\} \cap f(X \setminus A) = \varnothing \end{aligned}$$

[1] *Encyclopedia of General Topology*, p.231.

[2] 定義のほうが直感的に意味がわかりやすい気がするが，このように言い換えておくと開集合や閉集合を扱うときに便利である（cf. 1.2.7）．

$$\Leftrightarrow y \in Y \smallsetminus f(X \smallsetminus A)$$

が成り立つ． □

1.1.4 命題． 写像 $f\colon X \to Y$，および部分集合 $A, A_1, A_2 \subset X$，$B \subset Y$，X の部分集合族 $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられたとする．このとき，

(i) $f_\sharp(\varnothing) = Y \smallsetminus f(X)$，$f_\sharp(X) = Y$ が成り立つ．

(ii) $f^{-1}(f_\sharp(A)) \subset A$ が成り立つ．とくに，f が全射ならば $f_\sharp(A) \subset f(A)$ が成り立つ．

(iii) $f^{-1}(B) \subset A$ であるためには，$B \subset f_\sharp(A)$ となることが必要かつ充分である．

(iv) $A_1 \subset A_2$ ならば，$f_\sharp(A_1) \subset f_\sharp(A_2)$ が成り立つ．

(v) $f_\sharp(\bigcap A_\lambda) = \bigcap f_\sharp(A_\lambda)$ が成り立つ．

(vi) $f_\sharp(\bigcup A_\lambda) \supset \bigcup f_\sharp(A_\lambda)$ が成り立つ．

証明． (i) 定義より明らか．

(ii) 定義より明らか．

(iii) 1.1.3 の証明と同様にできる．

(iv) 定義より明らか．

(v) 定義より明らか．（または，1.1.3 と De Morgan の法則よりしたがう．）

(vi) 同上． □

1.2 閉写像と開写像

主に閉写像の性質を，必要な範囲で述べる．

1.2.1 定義． 位相空間のあいだの写像 $f\colon X \to Y$ が与えられたとする．

- 任意の $C \in \tau^c(X)$ に対して $f(C) \in \tau^c(Y)$ が成り立つとき，f を閉写像（**closed map**）という．
- 任意の $U \in \tau(X)$ に対して $f(U) \in \tau(Y)$ が成り立つとき，f を開写像（**open map**）という．

1.2.2 命題． 位相空間のあいだの写像 $f\colon X \to Y$，$g\colon Y \to Z$ が与えられたとする．

(i) f, g が閉写像ならば，$g \circ f$ も閉写像である．

(ii) f が全射連続写像であって，$g \circ f$ が閉写像ならば，g は閉写像である．

(iii) g が単射連続写像であって，$g \circ f$ が閉写像ならば，f は閉写像である．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "gf"'] & & Y. \arrow[dl, "g"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

証明. (i) 明らか．

(ii) $F \in \tau^c(Y)$ とする．いま，f は連続なので $f^{-1}(F) \in \tau^c(X)$ となる．したがって，仮定より，$g(F) = (g \circ f)(f^{-1}(F)) \in \tau(Z)$ が成り立つ．

(iii) $C \in \tau^c(X)$ とする．仮定より $(g \circ f)(C) \in \tau^c(Z)$ であり，g は単射連続写像なので，$f(C) = g^{-1}((g \circ f)(C)) \in \tau^c(Y)$ が成り立つ． □

1.2.3 命題. 位相空間のあいだの写像 $f\colon X \to Y$ が与えられたとする．

(i) f が閉写像であるためには，任意の $A \subset X$ に対して $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$ が成り立つことが必要かつ充分である．

(ii) f が開写像であるためには，任意の $A \subset X$ に対して $f(\mathrm{int}(A)) \subset \mathrm{int}(f(A))$ が成り立つことが必要かつ充分である．

証明. (i) **（必要性）** 仮定より $f(A) \subset f(\overline{A}) \in \tau^c(Y)$ となるので，$\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$ を得る．

（充分性） $C \in \tau^c(X)$ とする．このとき，$C = \overline{C}$ より，

$$f(C) \subset \overline{f(C)} \subset f(\overline{C}) = f(C)$$

を得る．

(ii) **（必要性）** $f(\mathrm{int}(A)) \subset f(A)$ と開核の定義より，$f(\mathrm{int}(A)) \subset \mathrm{int}(f(A))$ を得る．

（充分性） $U \in \tau(X)$ とする．このとき，$U = \mathrm{int}(U)$ より，

$$f(U) = f(\mathrm{int}(U)) \subset \mathrm{int}(f(U)) \subset f(U)$$

を得る． □

1.2.4 命題. 閉写像（resp. 開写像）$f\colon X \to Y$ と閉集合（resp. 開集合）$A \subset X$ とが与えられたとする．このとき，制限写像 $f|A\colon A \to Y$ も閉写像（resp. 開写像）である．

証明. $B \in \tau^c(A)$ とする．仮定より $A \in \tau^c(X)$ であるから $B \in \tau^c(X)$ となる．よって，$(f|A)(B) = f(B) \in \tau^c(Y)$ が成り立つ．開写像の場合も同様. $\square$

1.2.5 命題. 閉写像（resp. 開写像）$f\colon X \to Y$，および部分集合 $B \subset Y$ が与えられたとする．このとき，$f^B := B|f|f^{-1}(B)\colon f^{-1}(B) \to B$ も閉写像（resp. 開写像）である．

証明. $C_{f^{-1}(B)} \in \tau^c(f^{-1}(B))$ とする．このとき，相対位相の定義より，$C \in \tau^c(X)$ であって，$C_{f^{-1}(B)} = C \cap f^{-1}(B)$ となるものが存在する．よって，1.1.1 より，

$$f^B(C_{f^{-1}(B)}) = f(C \cap f^{-1}(B)) = f(C) \cap B \in \tau^c(B)$$

が成り立つ．開写像の場合も同様. $\square$

逆に，つぎが成り立つ：

1.2.6 命題. 位相空間のあいだの写像 $f\colon X \to Y$，および Y の位相と整合的な被覆 $\mathcal{Y} = (Y_\mu)_{\mu \in M}$ が与えられたとする[3)]．このとき，各 $\mu \in M$ に対して $f^{Y_\mu}\colon f^{-1}(Y_\mu) \to Y_\mu$ が閉写像ならば，f も閉写像である．

証明. $C \in \tau^c(X)$ とする．このとき，各 $\mu \in M$ に対して，

$$f(C) \cap Y_\mu = f^{Y_\mu}(C \cap f^{-1}(Y_\mu)) \in \tau^c(Y_\mu)$$

が成り立つ．よって，$f(C) \in \tau^c(\mathcal{Y}) = \tau^c(Y)$ を得る． $\square$

1.2.7 命題. 位相空間のあいだの写像 $f\colon X \to Y$ が与えられたとする．

(i) f が閉写像であるためには，任意の $U \in \tau(X)$ に対して，$f_\sharp(U) \in \tau(Y)$ となることが必要かつ充分である．

(ii) f が開写像であるためには，任意の $C \in \tau^c(X)$ に対して，$f_\sharp(C) \in \tau^c(Y)$ となることが必要かつ充分である．

証明. (i) **（必要性）** 仮定と 1.1.3 よりしたがう．

（充分性） $C \in \tau^c(X)$ とする．$U = X \smallsetminus C \in \tau(X)$ とおくと，仮定より $f_\sharp(U) \in \tau(Y)$ を得る．ところで，$f_\sharp(U) = Y \smallsetminus f(X \smallsetminus U) = Y \smallsetminus f(C)$ であるから，$f(C) \in \tau^c(Y)$ を得る．

[3)] 整合位相については [9] を参照のこと．

(ii) (i) と同様. □

1.2.8 命題. 位相空間のあいだの写像 $f\colon X \to Y$ が与えられたとする．このとき，つぎは同値である：

(i) f は閉写像である．

(ii) 任意の $B \subset Y$，および $U \in \tau(f^{-1}(B), X)$ に対して，$V \in \tau(B, Y)$ であって $f^{-1}(V) \subset U$ となるものが存在する．

(iii) 任意の $y \in Y$, および $U \in \tau(f^{-1}(y), X)$ に対して, $V \in \tau(y, Y)$ であって $f^{-1}(V) \subset U$ となるものが存在する．

証明. (i) ⇒ (ii)　$V = f_\sharp(U)$ とおく．このとき，$f^{-1}(B) \subset U \in \tau(X)$ より，$B \subset V \in \tau(Y)$，および $f^{-1}(V) \subset U$ が成り立つ（1.1.4，1.2.7）．

(ii) ⇒ (iii)　明らか．

(iii) ⇒ (i)　$U \in \tau(X)$ とする．$f_\sharp(U) \in \tau(Y)$ を示せばよい (1.2.7)．そこで, $y \in f_\sharp(U)$, すなわち $f^{-1}(y) \subset U$ とすると，仮定より，$V \in \tau(y, Y)$ であって $f^{-1}(V) \subset U$ となるものが存在する．よって，$y \in V \subset f_\sharp(U)$ が成り立つ（1.1.4）． □

1.2.9 系. 位相空間 X，およびコンパクト空間 K が与えられたとする．このとき，射影 $p_X\colon X \times K \to X$ は閉写像である．

証明. $x \in X$ とし，$U \in \tau(p_X^{-1}(x), X \times K)$ とする．このとき，$\{x\} \times K = p_X^{-1}(x) \subset U$ と K のコンパクト性より，$V \in \tau(x, X)$ であって $p_X^{-1}(V) = V \times K \subset U$ となるものが存在することがわかる．よって，1.2.8 より，p_X は閉写像である． □

実は，この性質がコンパクト性を特徴づける（3.0.3）．

2　完全写像と固有写像

2.1　完全写像と固有写像

2.1.1 定義. 連続写像 $f\colon X \to Y$ が与えられたとする．

- f が閉写像であって，任意の $y \in Y$ に対して $f^{-1}(y) \subset X$ がコンパクトであるとき，f を完全写像（**perfect map**）という．

- 任意のコンパクト集合 $K \subset Y$ に対して $f^{-1}(K) \subset X$ がコンパクトであるとき，f を固有写像（**proper map**）という．

1.2.9 より，ただちにつぎを得る：

2.1.2 命題． 位相空間 X，およびコンパクト空間 K が与えられたとする．このとき，射影 $p_X\colon X \times K \to X$ は完全写像である． □

2.1.3 命題． 完全写像は固有写像である．

証明． $f\colon X \to Y$ を完全写像とする．$K \subset Y$ をコンパクトとし，$\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を $f^{-1}(K) \subset X$ の開被覆とする．各 $y \in K$ に対して $f^{-1}(y)$ はコンパクトなので，有限集合 $\Lambda(y) \subset \Lambda$ であって，$f^{-1}(y) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda(y)} U_\lambda$ となるものが存在する．そこで，$U(y) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda(y)} U_\lambda$ とおくと，f が閉写像であることから $V(y) \coloneqq f_\sharp(U(y)) \in \tau(y, Y)$ であり，さらに $f^{-1}(V(y)) \subset U(y)$ が成り立つ（1.2.7，1.1.4）．いま，$\{V(y) \mid y \in K\}$ は K の開被覆であるから，K のコンパクト性より，有限個の点 $y_1, \ldots, y_n \in K$ であって，$K \subset \bigcup_i V(y_i)$ となるものが存在する．このとき，$\Lambda' = \bigcup_i \Lambda(y_i) \subset \Lambda$ とおくと，これは有限集合であって，

$$f^{-1}(K) \subset \bigcup_i f^{-1}(V(y_i)) \subset \bigcup_i U(y_i) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda'} U_\lambda$$

が成り立つ．よって，$f^{-1}(K)$ はコンパクトである． □

2.1.4 定義． T_2 空間 X がそのコンパクト集合全体からなる被覆 $\mathcal{K}$ に関する整合位相を持つとき，すなわち任意の部分集合 $A \subset X$ に対して

$$A \in \tau(X) \Leftrightarrow \forall K \in \mathcal{K}, A \cap K \in \tau(K)$$

が成り立つとき，X を **k 空間**という[4]．

2.1.5 注意． X は T_2 でなくても，KC 空間，すなわち $\mathcal{K} \subset \tau^c(X)$ なる位相空間であればよい．（X の位相が $\mathcal{K}$ と整合的であるための必要条件．）

2.1.6 例． 局所コンパクト T_2 空間，ならびに第一可算 T_2 空間は k 空間である．

[4] 文献によって，k 空間といったり，コンパクト生成空間といったり，（弱）Hausdorff 性を課したり課さなかったりするので注意されたい．

証明. X を局所コンパクト T_2 空間とする．$A \in \tau(\mathcal{K})$ とし，$a \in A$ とする．このとき，X の局所コンパクト性より，コンパクト集合 $K \subset X$ であって，$a \in \mathrm{int}(K)$ となるものが存在する．一方，$A \cap K \in \tau(K)$ より，$U \in \tau(X)$ であって $A \cap K = U \cap K$ となるものが存在する．したがって，$a \in U \cap \mathrm{int}(K) \subset U \cap K \subset A$ を得る．よって，$A \in \tau(X)$ が成り立つ．

X を第一可算 T_2 空間とする．$A \in \tau^c(\mathcal{K})$ とし，$a \in \overline{A}$ とする．このとき，A の点列 $(a_n)_{n \geq 0}$ であって $\lim a_n = a$ となるものが存在する．そこで，$K = \{a_n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \cup \{a\}$ とおくと，これはコンパクト集合なので，仮定より $A \cap K \in \tau^c(K)$ となる．したがって，$a \in \mathrm{cl}_K(A \cap K) = A \cap K \subset A$ を得る．よって，$A = \overline{A} \in \tau^c(X)$ が成り立つ． □

2.1.7 系. （位相）多様体や距離空間は k 空間である． □

コドメインが k 空間ならば 2.1.3 の逆も成り立つ：

2.1.8 命題. 固有写像 $f\colon X \to Y$ が与えられたとする．このとき，Y が k 空間ならば，f は完全写像である．

証明. f が閉写像であることを示せばよい．そこで，$C \in \tau^c(X)$ とする．このとき，任意のコンパクト集合 $K \subset Y$ に対して，仮定より，$f^{-1}(K) \subset X$ はコンパクトであるから，$C \cap f^{-1}(K) \subset f^{-1}(K)$ はコンパクト集合の閉集合ゆえコンパクトである．したがって，f の連続性から，$f(C) \cap K = f(C \cap f^{-1}(K)) \subset Y$ はコンパクト，とくに閉集合であるから，$f(C) \cap K \in \tau^c(K)$ を得る．よって，$f(C) \in \tau^c(\mathcal{K}) = \tau^c(Y)$ を得る． □

2.2 完全写像の性質

■ 合成

2.2.1 命題. 連続写像 $f\colon X \to Y$，$g\colon Y \to Z$ が与えられたとする．

(i) f, g が完全写像ならば，$g \circ f$ も完全写像である．
(ii) f が全射であって，$g \circ f$ が完全写像ならば，g は完全写像である．
(iii) g が単射であって，$g \circ f$ が完全写像ならば，f は完全写像である．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "gf"'] & Y. \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

証明. (i) 1.2.2，2.1.3 よりしたがう．

(ii) 1.2.2 より，g は閉写像である．また，任意の $z \in Z$ に対して，

$$g^{-1}(z) = f((g \circ f)^{-1}(z)) \subset Y$$

はコンパクトである．

(iii) 1.2.2 より，f は閉写像である．また，任意の $y \in Y$ に対して，

$$f^{-1}(y) = (g \circ f)^{-1}(g(y)) \subset X$$

はコンパクトである． □

■ 制限

2.2.2 命題. 完全写像 $f\colon X \to Y$ と閉集合 $A \subset X$ とが与えられたとする．このとき，制限写像 $f|A\colon A \to Y$ も完全写像である．

証明. 1.2.4 より $f|A$ は閉写像である．また，任意の $y \in Y$ に対して，$(f|A)^{-1}(y) = A \cap f^{-1}(y)$ はコンパクト集合 $f^{-1}(y)$ の閉集合ゆえコンパクトである． □

2.2.3 命題. 完全写像 $f\colon X \to Y$，および部分集合 $B \subset Y$ が与えられたとする．このとき，$f^B\colon f^{-1}(B) \to B$ も完全写像である．

証明. 1.2.5 より f^B は閉写像である．また，任意の $y \in B$ に対して，$(f^B)^{-1}(y) = f^{-1}(y)$ はコンパクトである． □

2.2.4 命題. 連続写像 $f\colon X \to Y$，および Y の位相と整合的な被覆 $\mathcal{Y} = (Y_\mu)_{\mu \in M}$ が与えられたとする．このとき，各 $\mu \in M$ に対して $f^{Y_\mu}\colon f^{-1}(Y_\mu) \to Y_\mu$ が完全写像ならば，f も完全写像である．

証明. 1.2.6 より f は閉写像である．また，任意の $y \in Y$ に対して，$\mu \in M$ であって $y \in Y_\mu$ となるものが存在するので，$f^{-1}(y) = (f^{Y_\mu})^{-1}(y)$ はコンパクトである． □

■ 積

2.2.5 命題． 連続写像族 $(f_\lambda\colon X_\lambda \to Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられたとする．また，各 X_λ は空でない T_1 空間とする．このとき，積写像 $f := \prod f_\lambda\colon \prod X_\lambda \to \prod Y_\lambda$ が完全写像であるためには，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して f_λ が完全写像であることが必要かつ充分である．

証明．（必要性） 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，$x_\lambda^0 \in X_\lambda$ を固定する．このとき，同相

$$X_\lambda \approx X'_\lambda := \left\{x \in \prod X_\lambda \;\middle|\; p_{X_{\lambda'}}(x) = x_{\lambda'}^0,\ \lambda' \in \Lambda \setminus \{\lambda\}\right\},$$
$$Y_\lambda \approx Y'_\lambda := \left\{y \in \prod Y_\lambda \;\middle|\; p_{Y_{\lambda'}}(y) = f_{\lambda'}(x_{\lambda'}^0),\ \lambda' \in \Lambda \setminus \{\lambda\}\right\}$$

が成り立つ．さらに，仮定より $X'_\lambda \in \tau^c(\prod X_\lambda)$ が成り立つ．よって，2.2.3，2.2.2 より，

$$f_\lambda\colon X_\lambda \approx X'_\lambda \xrightarrow{f^{Y'_\lambda}|X'_\lambda} Y'_\lambda \approx Y_\lambda$$

は完全写像である．

（充分性） 任意の $y = (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod Y_\lambda$ に対して，Tychonoff の定理より $f^{-1}(y) = \prod f_\lambda^{-1}(y_\lambda)$ はコンパクトである．あとは，f が閉写像であることを示せばよい．そこで，$y \in \prod Y_\lambda$ とし，$U \in \tau(f^{-1}(y), \prod X_\lambda)$ とする．このとき，Wallace の定理（[4, 3.2.10]）より，有限集合 $\Lambda_0 \subset \Lambda$ と開集合 $U_\lambda \in \tau(f_\lambda^{-1}(y_\lambda), X_\lambda)$ であって，$U_\lambda = X_\lambda$，$\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_0$，$\prod U_\lambda \subset U$ となるものが存在する．いま，各 f_λ，$\lambda \in \Lambda_0$，は閉写像なので，$V_\lambda \in \tau(y_\lambda, Y_\lambda)$ であって，$f_\lambda^{-1}(V_\lambda) \subset U_\lambda$ となるものが存在する（1.2.8）．残りの $\lambda \in \Lambda\setminus\Lambda_0$ に対して $V_\lambda = Y_\lambda$ とおけば，$V := \prod V_\lambda \in \tau(y, \prod Y_\lambda)$ であって，

$$f^{-1}(V) = \prod f_\lambda^{-1}(V_\lambda) \subset \prod U_\lambda \subset U$$

が成り立つ．よって，1.2.8 より，結論を得る． □

2.2.6 系． T_2 空間 X と連続写像族 $\mathfrak{f} = (f_\lambda\colon X \to Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられたとする．このとき，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して f_λ が完全写像ならば，$\Delta(\mathfrak{f})\colon X \to \prod Y_\lambda$ も完全写像である．

証明． いま X は T_2 空間なので，対角写像 $d\colon X \to \prod X$ に対して，$d(X)|d\colon X \to d(X)$ は閉部分空間への同相写像である．よって，$\Delta(\mathfrak{f}) = (\prod f_\lambda|d(X)) \circ d$ は完全写像である（2.2.5，2.2.2，2.2.1）． □

■ パラコンパクト性

2.2.7 補題. 位相空間 X の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が与えられたとする．このとき，$\mathcal{U}$ が局所有限開細分 $\mathcal{V} = \{V_\mu \mid \mu \in M\}$ を持つならば，$\mathcal{U}$ の局所有限開細分 $\mathcal{W} = \{W_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ であって，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $W_\lambda \subset U_\lambda$ となるものが存在する．

証明. 仮定より，写像 $\varphi\colon M \to \Lambda$ であって，任意の $\mu \in M$ に対して $V_\mu \subset U_{\varphi(\mu)}$ となるものが存在する．各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，

$$W_\lambda = \bigcup \{V_\mu \mid \varphi(\mu) = \lambda\}$$

とおく．このとき，$\mathcal{W} = \{W_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ とおくと，これは $\mathcal{U}$ の開細分であって，$W_\lambda \subset U_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$，をみたす．あとは $\mathcal{W}$ が局所有限であることを示せばよい．ところで，任意の部分集合 $A \subset X$ に対して，

$$\{\lambda \in \Lambda \mid A \cap W_\lambda \neq \varnothing\} \subset \varphi(\{\mu \in M \mid A \cap V_\mu \neq \varnothing\})$$

が成り立つので，$\mathcal{V}$ が局所有限であることから $\mathcal{W}$ が局所有限であることがしたがう． □

2.2.8 定理. $f\colon X \to Y$ を完全写像とする．このとき，Y がパラコンパクトならば，X もパラコンパクトである．

証明. $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を X の開被覆とする．2.1.3 の証明と同様にして，各 $y \in Y$ に対して，有限集合 $\Lambda(y) \subset \Lambda$ と $V(y) \in \tau(y, Y)$ であって，$f^{-1}(V(y)) \subset U(y) \coloneqq \bigcup_{\lambda \in \Lambda(y)} U_\lambda$ となるものが存在する．

Y はパラコンパクトなので，開被覆 $\{V(y) \mid y \in Y\}$ の局所有限開細分 $\{W(y) \mid y \in Y\}$ であって，各 $y \in Y$ に対して $W(y) \subset V(y)$ となるものが存在する（2.2.7）．$\Lambda' = \bigcup\{\{y\} \times \Lambda(y) \mid y \in Y\}$ とおく．各 $(y, \lambda) \in \Lambda'$ に対して $U(y, \lambda) = f^{-1}(W(y)) \cap U_\lambda$ とおくと，$\{U(y, \lambda) \mid (y, \lambda) \in \Lambda'\}$ は X の被覆である．実際，任意の $x \in X$ に対して，$y = f(x)$ とおくと $y' \in Y$ であって $y \in W(y')$ となるものが存在し，さらに，

$$x \in f^{-1}(W(y')) \subset f^{-1}(V(y')) \subset U(y')$$

となるから，$\lambda' \in \Lambda(y')$ であって，$x \in f^{-1}(W(y')) \cap U_{\lambda'} = U(y', \lambda')$ となるものが存在する．

開被覆 $\{U(y, \lambda) \mid (y, \lambda) \in \Lambda'\}$ は明らかに $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ の細分なので，あとはこれが局所有限であることを示せばよい．$x \in X$ とする．$\{W(y) \mid y \in Y\}$ が局所有限

であることから $W \in \tau(f(x), Y)$ であって，$\{y \in Y \mid W \cap W(y) \neq \varnothing\}$ が有限集合となるものが存在する．このとき，$f^{-1}(W) \in \tau(x, X)$ であり，各 $(y, \lambda) \in \Lambda'$ に対して，$f^{-1}(W) \cap U(y, \lambda) \subset f^{-1}(W \cap W(y))$ であるから，$\{(y, \lambda) \in \Lambda' \mid f^{-1}(W) \cap U(y, \lambda) \neq \varnothing\}$ は有限集合である． $\square$

2.2.9 系． X がパラコンパクト，K がコンパクトならば，$X \times K$ はパラコンパクトである．

証明． 2.1.2 より $p_X \colon X \times K \to X$ は完全写像であるから，2.2.8 より結論を得る． $\square$

2.3 完全写像の像・逆像

結果だけ述べる．

2.3.1 定理． 全射完全写像 $f \colon X \to Y$ が与えられたとする．

- X が距離化可能ならば，Y も距離化可能である（[3, XI.5.2]）．
- X が第二可算公理をみたすならば，Y も第二可算公理をみたす（[3, XI.5.2]）．
- X が局所コンパクトならば，Y も局所コンパクトである（[3, XI.6.6]）．
- X が T_i 空間，$i = 2, 3, 4, 5, 6$，ならば，Y も T_i 空間である（[4, 3.7.20]）．
- X が k 空間ならば，Y も k 空間である（[4, p.187]）．
- X がパラコンパクトならば，Y もパラコンパクトである（[4, 5.1.33]）． $\square$

2.3.2 定理． 完全写像 $f \colon X \to Y$ が与えられたとする．

- Y がパラコンパクトならば，X もパラコンパクトである（2.2.8，[3, XI.5.3]）．
- Y がコンパクトならば，X もコンパクトである（2.1.3，[3, XI.5.3]）．
- Y が Lindelöf 空間ならば，X も Lindelöf 空間である（[3, XI.5.3]）．
- Y が可算コンパクトならば，X も可算コンパクトである（[3, XI.5.3]）．
- Y が局所コンパクトならば，X も局所コンパクトである（[3, XI.6.6]）．
- Y が正則空間ならば，X も正則空間である（[4, 3.7.23]）．
- Y が k 空間ならば，X も k 空間である（[4, 3.7.25]）． $\square$

2.4 固有写像の性質

■ 合成

2.4.1 命題. 連続写像 $f\colon X \to Y$，$g\colon Y \to Z$ が与えられたとする．

(i) f, g が固有写像ならば，$g \circ f$ も固有写像である．

(ii) f が全射であって，$g \circ f$ が固有写像ならば，g は固有写像である．

(iii) g が単射であって，$g \circ f$ が固有写像ならば，f は固有写像である．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "gf"'] & & Y. \arrow[dl, "g"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

証明. (i) 任意のコンパクト集合 $K \subset Z$ に対して，$(g \circ f)^{-1}(K) = f^{-1}(g^{-1}(K)) \subset X$ はコンパクトである．

(ii) 任意のコンパクト集合 $K \subset Z$ に対して，$g^{-1}(K) = f((g \circ f)^{-1}(K)) \subset Y$ はコンパクトである．

(iii) 任意のコンパクト集合 $K \subset Y$ に対して，$f^{-1}(K) = (g \circ f)^{-1}(g(K)) \subset X$ はコンパクトである． □

■ 制限

2.4.2 命題. 固有写像 $f\colon X \to Y$ と閉集合 $A \subset X$ とが与えられたとする．このとき，制限写像 $f|A\colon A \to Y$ も固有写像である．

証明. 任意のコンパクト集合 $K \subset Y$ に対して，$(f|A)^{-1}(K) = A \cap f^{-1}(K)$ はコンパクト空間 $f^{-1}(K)$ の閉集合ゆえコンパクトである． □

2.4.3 命題. 固有写像 $f\colon X \to Y$，および部分集合 $B \subset Y$ が与えられたとする．このとき，$f^B\colon f^{-1}(B) \to B$ も固有写像である．

証明. 任意のコンパクト集合 $K \subset B$ に対して，$(f^B)^{-1}(K) = f^{-1}(K) \subset f^{-1}(B)$ はコンパクトである． □

2.4.4 補題. コンパクト空間 K が与えられたとする．

(i) K が T_2 空間のとき，

(a) 任意の $C \in \tau^c(K)$，および $U \in \tau(C, K)$ に対して，$V \in \tau(C, K)$ であって $\overline{V} \subset U$ となるものが存在する．

(b) 任意の有限開被覆 $\{U_1, \ldots, U_n\}$ に対して，閉集合 $F_i \subset K$ であって，$F_i \subset U_i$，$K = \bigcup F_i$ となるものが存在する．

(ii) K の任意の局所有限被覆 $\mathcal{C}$ は有限被覆である．

証明． (i) (a) 各 $x \in C$ に対して，$x \in U \in \tau(K)$ より，$V(x) \in \tau(x, K)$ であって $\overline{V(x)} \subset U$ となるものが存在する．このとき，$\{V(x) \mid x \in C\}$ はコンパクト集合 C の開被覆なので，有限部分被覆 $\{V(x_i) \mid i = 1, \ldots, n\}$ をもつ．そこで，$V = \bigcup V(x_i)$ とおくと，$C \subset V \subset \overline{V} \subset U$ が成り立つ．

(b) $C_1 = K \setminus (U_2 \cup \cdots \cup U_n) \in \tau^c(K)$ とおくと，$C_1 \subset U_1$ より，$V_1 \in \tau(C_1, K)$ であって $\overline{V_1} \subset U_1$ となるものが存在する．そこで，$F_1 = \overline{V_1}$ とおく．つづいて，$C_2 = K \setminus (V_1 \cup U_3 \cup \cdots \cup U_n) \in \tau^c(K)$ とおくと，$V_2 \in \tau(C_2, K)$ であって，$\overline{V_2} \subset U_2$ となるものが存在する．そこで，$F_2 = \overline{V_2}$ とおく．以下，これを繰り返すと，K の閉集合 $F_1, \ldots, F_n$ であって，$F_i \subset U_i$，$K = \bigcup V_i \subset \bigcup F_i \subset \bigcup U_i = K$ となるものを得る．

(ii) 任意の $x \in K$ に対して $U(x) \in \tau(x, K)$ であって，$\{C \in \mathcal{C} \mid U(x) \cap C \neq \varnothing\}$ が有限集合となるものが存在する．いま，K はコンパクトなので，開被覆 $\{U(x) \mid x \in K\}$ は有限部分被覆をもつ．したがって，$\{C \in \mathcal{C} \mid K \cap C \neq \varnothing\}$ は有限集合，とくに $\mathcal{C}$ は有限集合である．$\square$

2.4.5 命題． 連続写像 $f\colon X \to Y$ と Y の被覆 $\mathcal{Y} = \{Y_\mu \mid \mu \in M\}$ とが与えられたとする．さらに，つぎのいずれかが成り立つとする：

(i) Y は T_2 空間であって，$\mathcal{Y}$ は開被覆である．

(ii) $\mathcal{Y}$ は局所有限閉被覆である．

このとき，各 $\mu \in M$ に対して $f^{Y_\mu}\colon f^{-1}(Y_\mu) \to Y_\mu$ が固有写像ならば，f も固有写像である．

証明． (i) $K \subset Y$ をコンパクト集合とする．このとき，有限集合 $M_0 \subset M$ であって，$K = \bigcup_{\mu \in M_0} (Y_\mu \cap K)$ となるものが存在する．したがって，2.4.4 より，閉集合 $F_\mu \in \tau^c(K)$，$\mu \in M_0$，であって，$F_\mu \subset Y_\mu \cap K$，$K = \bigcup F_\mu$ となるものが存在す

る．いま，仮定より $f^{Y_\mu}\colon f^{-1}(Y_\mu)\to Y_\mu$ は固有写像だから，$(f^{Y_\mu})^{-1}(F_\mu)$ はコンパクトである．よって，$f^{-1}(K)=\bigcup(f^{Y_\mu})^{-1}(F_\mu)$ はコンパクト集合の有限合併ゆえコンパクトである．

(ii) $K\subset Y$ をコンパクト集合とする．このとき，2.4.4 より，K の局所有限閉被覆 $\{Y_\mu\cap K\mid \mu\in M\}$ は有限被覆である．各 $\mu\in M$ に対して，$Y_\mu\cap K$ はコンパクト空間 K の閉集合ゆえコンパクトであるから，$(f^{Y_\mu})^{-1}(Y_\mu\cap K)$ はコンパクトである．よって，$f^{-1}(K)=\bigcup(f^{Y_\mu})^{-1}(Y_\mu\cap K)$ はコンパクト集合の有限合併ゆえコンパクトである． □

■ 積

2.4.6 命題． 連続写像族 $(f_\lambda\colon X_\lambda\to Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられたとする．また，各 X_λ は空でない T_1 空間，各 Y_λ は T_2 空間とする．このとき，積写像 $f\coloneqq\prod f_\lambda\colon \prod X_\lambda\to\prod Y_\lambda$ が固有写像であるためには，任意の $\lambda\in\Lambda$ に対して f_λ が固有写像であることが必要かつ充分である．

証明．（必要性） 2.2.5 の必要性の証明と同様にして，2.4.3，2.4.2 より，

$$f_\lambda\colon X_\lambda\approx X'_\lambda\xrightarrow{f^{Y'_\lambda}|X'_\lambda}Y'_\lambda\approx Y_\lambda$$

が固有写像であることがわかる．

（充分性） $K\subset\prod Y_\lambda$ をコンパクト集合とする．各 $\lambda\in\Lambda$ に対して，$K_\lambda=p_{Y_\lambda}(K)\subset Y_\lambda$ とおくと，これはコンパクト集合なので，仮定より $f_\lambda^{-1}(K_\lambda)\subset X_\lambda$ はコンパクトである．したがって，Tychonoff の定理より $\prod f_\lambda^{-1}(K_\lambda)$ はコンパクトである．一方，$K\subset\prod Y_\lambda$ は T_2 空間のコンパクト集合ゆえ閉集合なので，f の連続性より $f^{-1}(K)\subset\prod f_\lambda^{-1}(K_\lambda)$ はコンパクト空間の閉集合，とくにコンパクトである． □

2.4.7 系． T_2 空間のあいだの連続写像族 $\mathfrak{f}=(f_\lambda\colon X\to Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられたとする．このとき，各 f_λ が固有写像ならば，$\Delta(\mathfrak{f})\colon X\to\prod Y_\lambda$ も固有写像である．

証明． いま X は T_2 空間なので，対角写像 $d\colon X\to\prod X$ に対して，$d(X)|d\colon X\to d(X)$ は閉部分空間への同相写像である．よって，$\Delta(\mathfrak{f})=(\prod f_\lambda|d(X))\circ d$ は固有写像である (2.4.6，2.4.2，2.4.1)． □

■ 一点コンパクト化

2.4.8 命題. コンパクトでない局所コンパクト T_2 空間のあいだの連続写像 $f\colon X \to Y$ が与えられたとし，それぞれの一点コンパクト化のあいだの写像 $f^+\colon X^+ \to Y^+$ を

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in X \\ \infty_Y & , x = \infty_X \end{cases}$$

で定める．このとき，f^+ が連続であるためには，f が固有写像であることが必要かつ充分である．

証明. 任意のコンパクト集合 $K \subset Y$ に対して，

$$(f^+)^{-1}((Y \smallsetminus K) \cup \{\infty_Y\}) = (X \smallsetminus f^{-1}(K)) \cup \{\infty_X\}$$

が成り立つので，$(f^+)^{-1}((Y \smallsetminus K) \cup \{\infty_Y\}) \in \tau(X^+)$ となるためには，$f^{-1}(K) \subset X$ がコンパクトであることが必要かつ充分である． □

3 Bourbaki 固有写像

3.0.1 定義 ([1, §I.10])**.** 連続写像 $f\colon X \to Y$ が与えられたとする．任意の位相空間 Z に対して，$f \times \mathrm{id}_Z\colon X \times Z \to Y \times Z$ が閉写像となるとき，f を **Bourbaki 固有写像**（**proper map in the sense of Bourbaki**），または**普遍閉写像**（**universally closed map**）という．

3.0.2 補題. Bourbaki 固有写像 $f\colon X \to Y$ は閉写像である．

証明. Z として一点集合 $\{*\}$ をとればよい． □

1.2.9 の逆が成り立つ：

3.0.3 補題 ([7, Lemma 5.17.3])**.** 位相空間 K があたえられたとする．このとき，$K \to \{*\}$ が Bourbaki 固有写像ならば，すなわち任意の位相空間 Z に対して $p_Z\colon Z \times K \to Z$ が閉写像ならば，K はコンパクトである．

証明. K がコンパクトでないと仮定する．このとき，K の開被覆 $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ であって，有限部分被覆を持たないものが存在する．とくに Λ は有限集合ではない．Λ の非空

有限部分集合全体を $\mathcal{F}$ とおき，$Z = \{\Lambda\} \cup \mathcal{F}$ とおく．また，各 $\Lambda' \in \mathcal{F}$ に対して，

$$U_{\Lambda'} = \{\Lambda'' \subset \Lambda \mid \Lambda' \subset \Lambda'' \in Z\}$$

とおく．さらに，$\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(Z)$ を

$$\mathcal{B} = \mathcal{P}(\mathcal{F}) \cup \{U_{\Lambda'} \mid \Lambda' \in \mathcal{F}\}$$

で定める．

（$\mathcal{B}$ を開基とする Z の位相が定まる）　$U_1, U_2 \in \mathcal{B}$，$z \in U_1 \cap U_2$ とする．$z \in \mathcal{F}$ のとき，$\{z\} \in \mathcal{B}$ であり，$z \in \{z\} \subset U_1 \cap U_2$ が成り立つ．$z = \Lambda$ のとき，$\Lambda_i \in \mathcal{F}$ であって $U_i = U_{\Lambda_i}$ となるものが存在する．そこで，$\Lambda' = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \in \mathcal{F}$ とおくと，$z \in U_{\Lambda'} \subset U_1 \cap U_2$ が成り立つ．

さて，$C = \left\{(\Lambda', x) \in Z \times K \;\middle|\; x \in K \setminus \bigcup_{\lambda' \in \Lambda'} U_{\lambda'}\right\}$ とおく．

（$C \subset Z \times K$ は閉集合である）　$(\Lambda', x) \in (Z \times K) \setminus C$ とする．このとき，$\lambda' \in \Lambda'$ であって $x \in U_{\lambda'}$ となるものが存在する．すると，任意の $(\Lambda'', x'') \in U_{\{\lambda'\}} \times U_{\lambda'}$ に対して，$x'' \in U_{\lambda'} \subset \bigcup_{\lambda'' \in \Lambda''} U_{\lambda''}$ が成り立つので，

$$U_{\{\lambda'\}} \times U_{\lambda'} \in \tau((\Lambda', x), Z \times X),$$
$$U_{\{\lambda'\}} \times U_{\lambda'} \subset (Z \times K) \setminus C$$

を得る．

ところで，$p_Z(C) = Z \setminus \{\Lambda\} \subset Z$ は閉集合ではない．　□

3.0.4 補題． Bourbaki 固有写像 $f\colon X \to Y$，および部分集合 $B \subset Y$ が与えられたとする．このとき，$f^B\colon f^{-1}(B) \to B$ も Bourbaki 固有写像である．

証明． 任意の位相空間 Z に対して，$f^B \times \mathrm{id}_Z = (f \times \mathrm{id}_Z)^{B \times Z}$ が成り立つので，仮定と 1.2.5 より結論を得る．　□

3.0.5 定理． 連続写像 $f\colon X \to Y$ が Bourbaki 固有写像であるためには，f が完全写像であることが必要かつ充分である．

証明． （必要性）　3.0.2 より，f は閉写像である．また，任意の $y \in Y$ に対して，3.0.4 より $f^{\{y\}}\colon f^{-1}(y) \to \{y\}$ は Bourbaki 固有写像であるから，$f^{-1}(y)$ はコンパクトである（3.0.3）．

（充分性） Z を位相空間とする．$(y,z)\in Y\times Z$ とし，$U\in\tau((f\times\mathrm{id}_Z)^{-1}(y,z),X\times Z)$ とする．いま，$f^{-1}(y)\subset Y$ はコンパクトなので，$U'\in\tau(f^{-1}(y),X)$，$W\in\tau(z,Z)$ であって，$U'\times W\subset U$ となるものが存在する．すると，f が閉写像であることから，$V\in\tau(y,Y)$ であって，$f^{-1}(V)\subset U'$ となるものが存在することがわかる（1.2.8）．したがって，$(f\times\mathrm{id}_Z)^{-1}(V\times W)=f^{-1}(V)\times W\subset U'\times W\subset U$ となる．よって，f は閉写像である（1.2.8）． □

以上より，Bourbaki 固有写像とは完全写像に他ならないことがわかった．

4 応用

4.1 ファイバー束のパラコンパクト性について

積空間（積束！）について成り立つことが，ファイバー束でも成り立つ（cf. 2.2.9）．

4.1.1 補題． ファイバー束 (E,π,B,F) が与えられたとする．このとき，ファイバー F がコンパクトであるためには，射影 π が完全写像であることが必要かつ充分である[5)]．

証明． （必要性） ファイバー束の定義より，各 $b\in B$ に対して，$U(b)\in\tau(b,B)$ と同相写像 $\varphi_b\colon\pi^{-1}(U(b))\to U(b)\times F$ であって，

$$\pi^{U(b)}=p_{U(b)}\circ\varphi_b\colon\pi^{-1}(U(b))\approx U(b)\times F\to U(b)$$

となるものが存在する．仮定より，$\pi^{U(b)}$ は閉写像である（1.2.9）．また，$\{U(b)\mid b\in B\}$ は B の開被覆であるから，$\pi\colon E\to B$ は閉写像である（1.2.6）．さらに，F のコンパクト性より，任意の $b\in B$ に対して $\pi^{-1}(b)\approx F$ はコンパクトであることがわかる．よって，π は完全写像である．

（充分性） $b\in B$ とする．一点集合 $\{b\}\subset B$ はコンパクトなので，$F\approx\pi^{-1}(b)$ はコンパクトである． □

4.1.2 系． B を T_1 空間とする．このとき，E がコンパクトであるためには，B,F がコンパクトであることが必要かつ充分である[6)]．

---

5) [6, Problems 10-19 (c)] の “proper map” を “perfect map” に変更した．
6) [6, Problems 10-19 (d)].

証明. （必要性）　$B = \pi(E)$ はコンパクトである．$b \in B$ とすると，$F \approx \pi^{-1}(b) \subset E$ はコンパクト空間の閉集合ゆえコンパクトである．

（充分性）　F がコンパクトゆえ π は完全写像，とくに固有写像である（4.1.1，2.1.3）．したがって，B のコンパクト性から，$E = \pi^{-1}(B)$ がコンパクトであることがわかる． □

4.1.3 命題. B がパラコンパクト，F がコンパクトならば，E はパラコンパクトである[7)]．

証明. F がコンパクトなので π は完全写像である（4.1.1）．よって，2.2.8 より結論を得る． □

4.2　群の固有な作用と軌道空間の T_2 性について

位相群 G による T_2 空間 X への連続作用 $\theta\colon G \times X \to X$; $(g, x) \mapsto g \cdot x$ が与えられたとする．まず，用語・記号を整理しよう：

- 各 $x \in X$ に対して，その**軌道**を $G \cdot x$ で，**固定部分群**を G_x で表わす．
- 任意の $x \in X$ に対して $G_x = \{e\}$ となるとき，θ を**自由な作用**という．
- 部分集合 $A, B \subset X$ に対して，

$$G_{A,B} = \{g \in G \mid (g \cdot A) \cap B \neq \varnothing\}$$

  とおく．また，$G_{A,A}$ を単に G_A で表わす．$G_{\{x\}}$ は x の固定部分群に他ならない．
- 写像 $\check{\theta}\colon G \times X \to X \times X$ を $(g, x) \mapsto (g \cdot x, x)$ で定める．
- 作用から定まる X 上の同値関係を $R \subset X \times X$ とおく：

$$(x', x) \in R \Leftrightarrow \exists g \in G : x' = g \cdot x.$$

  したがって，R は $\check{\theta}(G \times X)$ に他ならない．
- 商空間 X/R を**軌道空間**といい，X/G で表わす．また，商写像を $q\colon X \to X/G$ とおく．

4.2.1 補題. つぎが成り立つ：

(i) 商写像 $q\colon X \to X/G$ は開写像である．

[7)] 中岡稔『位相幾何学』p.184，にさらっと書かれていてびっくりしたやつ．

(ii) 軌道空間 X/G が T_2 空間であるためには，$R \subset X \times X$ が閉集合であることが必要かつ充分である．

証明． (i) 任意の開集合 $U \subset X$ に対して，$q^{-1}(q(U)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot U \in \tau(X)$ となるので，$q(U) \in \tau(X/G)$ を得る．

(ii) まず，$(X/G) \times (X/G)$ の対角集合を Δ とおくと，$R = (q \times q)^{-1}(\Delta)$ が成り立つことに注意する．

（必要性） 仮定より $\Delta \in \tau^c((X/G) \times (X/G))$ であるから，$q \times q$ の連続性より $R \in \tau^c(X \times X)$ を得る．

（充分性） 開写像の積 $q \times q$ は開写像であるから，1.2.7，1.1.4 より，

$$\Delta = (q \times q)_\sharp(R) \in \tau^c((X/G) \times (X/G))$$

を得る． □

4.2.2 補題． つぎが成り立つ：

(i) 任意の部分集合 $A, B \subset X$ に対して，

$$G_{A,B} = p_G(\check{\theta}^{-1}(B \times A)) = p_G(\theta^{-1}(B) \cap (G \times A))$$

が成り立つ．

(ii) $K \subset X$ がコンパクト，$C \subset X$ が閉集合ならば，$G_{K,C} \subset G$ は閉集合である．とくに，任意のコンパクト集合 $K \subset X$ に対して，$G_K \subset G$ は閉集合である．

証明． (i) 任意の $g \in G$ に対して，

$$\begin{aligned} g \in G_{A,B} &\Leftrightarrow (g \cdot A) \cap B \neq \varnothing \\ &\Leftrightarrow \exists a \in A : (g, a) \in \check{\theta}^{-1}(B \times A) \\ &\Leftrightarrow g \in p_G(\check{\theta}^{-1}(B \times A)) \end{aligned}$$

が成り立つ．また，明らかに $\check{\theta}^{-1}(B \times A) = \theta^{-1}(B) \cap (G \times A)$ が成り立つ．

(ii) 仮定より $\theta^{-1}(C) \in \tau^c(G \times X)$ なので，$\theta^{-1}(C) \cap (G \times K) \in \tau^c(G \times K)$ を得る．いま，K はコンパクトなので，$p_G\colon G \times K \to G$ は閉写像である（1.2.9）．よって，$G_{K,C} = p_G(\theta^{-1}(C) \cap (G \times K)) \subset G$ は閉集合である． □

4.2.3 命題． つぎは同値である：

(i) 写像 $\check{\theta}\colon G\times X\to X\times X$ は固有写像である．

(ii) 任意のコンパクト集合 $K, L\subset X$ に対して，$G_{K,L}\subset G$ はコンパクトである．

(iii) 任意のコンパクト集合 $K\subset X$ に対して，$G_K\subset G$ はコンパクトである．

証明． (i) ⇒ (ii)　$L\times K\subset X\times X$ はコンパクトなので，仮定より $\check{\theta}^{-1}(L\times K)\subset G\times X$ はコンパクトである．したがって，$G_{K,L}=p_G(\check{\theta}^{-1}(L\times K))\subset G$ はコンパクトである（4.2.2）．

(ii) ⇒ (iii)　明らか．

(iii) ⇒ (i)　$p_i\colon X\times X\to X$ を第 i 成分への射影とする．$L\subset X\times X$ をコンパクト集合とする．いま，$X\times X$ は T_2 空間なので，とくに $L\in\tau^c(X\times X)$ である．このとき，$K=p_1(L)\cup p_2(L)\subset X$ とおくと，K はコンパクトであり，$L\subset K\times K$ より $\check{\theta}^{-1}(L)\subset\check{\theta}^{-1}(K\times K)$ が成り立つ．また，4.2.2 より，$\check{\theta}^{-1}(K\times K)\subset G_K\times K$ が成り立つ．よって，$\check{\theta}^{-1}(L)\subset G_K\times K$ はコンパクト空間の閉集合ゆえコンパクトである．□

4.2.4 定義． 群作用 $\theta\colon G\times X\to X$ が 4.2.3 の同値な条件を満たすとき，θ を**固有な作用**（**proper action**）という．

4.2.5 命題． 位相群 G の T_2 空間 X への固有な作用 $\theta\colon G\times X\to X$ が与えられたとする．このとき，任意の $x\in X$ に対して，$\theta(\cdot,x)\colon G\to X$；$g\mapsto g\cdot x$ は固有写像である．とくに，固定部分群 $G_x\subset G$ はコンパクトである．さらに，X が k 空間ならば，閉集合への同相 $G/G_x\approx G\cdot x$ が成り立つ．

証明． 写像 $\theta(\cdot,x)$ は固有写像 $\check{\theta}^{X\times\{x\}}\colon G\times\{x\}\to X\times\{x\}$ と同一視できる（2.4.3）．したがって，$G_x=\theta(\cdot,x)^{-1}(x)$ はコンパクトである．また，$\theta(\cdot,x)\colon G\to X$ は単射固有写像 $G/G_x\to X$ を誘導する（2.4.1）：

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\theta(\cdot,x)"] \arrow[d] & X. \\ G/G_x \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

X が k 空間ならば，誘導された写像は完全写像（2.1.8），とくに閉写像なので，閉集合への同相 $G/G_x\approx G\cdot x$ が成り立つ．□

4.2.2 より，ただちにつぎを得る：

4.2.6 命題. G がコンパクト群，とくに有限群ならば，T_2 空間 X への任意の連続作用は固有な作用である． □

4.2.7 命題. 局所コンパクト T_2 空間 X への固有な作用 $\theta\colon G \times X \to X$ による軌道空間 X/G は局所コンパクト T_2 空間である．

証明. 仮定より，$\check{\theta}\colon G \times X \to X \times X$ は局所コンパクト T_2 空間 $X \times X$ への固有写像なので完全写像である（2.1.6，2.1.8）．とくに $\check{\theta}$ は閉写像なので，$R = \check{\theta}(G \times X) \subset X \times X$ は閉集合である．よって，4.2.1 より，X/G は T_2 空間である．

また，任意の $x \in X$ に対して，$K \subset X$ をそのコンパクト近傍とすると，$q(K) \subset X/G$ はコンパクトであり，$q(x) \in q(\mathrm{int}(K)) \subset \mathrm{int}(q(K))$ が成り立つ（4.2.1，1.2.3）．よって，X/G は局所コンパクトである． □

4.2.8 注意. 軌道空間 X/G の局所コンパクト性の証明には作用が固有であることを用いていないことに注意されたい．

4.2.9 系. コンパクト群 G による局所コンパクト T_2 空間 X への作用に対して，その軌道空間 X/G は局所コンパクト T_2 空間である． □

つぎが知られている：

4.2.10 定理 ([6, Theorem 21.10])**.** Lie 群による多様体への自由かつ固有な C^∞ 作用による商空間は，商写像が沈め込みとなるような多様体構造をただひとつ持つ． □

■ 補足

4.2.11 命題. 作用を定める写像 $\theta\colon G \times X \to X$ が固有写像ならば，θ は固有な作用である，すなわち $\check{\theta}\colon G \times X \to X \times X$ は固有写像である．

証明. $K \subset X$ をコンパクト集合とする．いま，X は T_2 空間なので，$K \subset X$ は閉集合，したがって $G \times K \in \tau^c(G \times X)$ を得る．このとき，$\check{\theta}^{-1}(K \times K) = (G \times K) \cap \theta^{-1}(K)$ はコンパクト空間 $\theta^{-1}(K)$ の閉集合ゆえコンパクトなので，$G_K = p_G(\check{\theta}^{-1}(K \times K)) \subset G$ はコンパクトである． □

逆は，成り立つとは限らない：

4.2.12 例. $G := \mathbb{R}$ による $X := \mathbb{R}$ への作用 $\theta\colon G\times X\to X$ を $(g,x)\mapsto g+x$ で定める．

（$\check{\theta}$ は固有写像である） $K\subset X$ をコンパクト集合とする．K は有界なので，実数 $a<b$ であって $K\subset[a,b]$ となるものが存在する．このとき，任意の $g\in G$ に対して，

$$|g|>b-a \Rightarrow (g\cdot K)\cap K\subset[g+a,g+b]\cap[a,b]=\varnothing$$

が成り立つので，$G_K\subset[a-b,b-a]$ を得る．したがって，$G_K\subset G$ は有界閉集合ゆえコンパクトである（4.2.2）．よって，4.2.3 より結論を得る．

（θ は固有写像でない） コンパクト集合 $\{0\}\subset X$ に対して，$\theta^{-1}(0)=\{(-r,r)\mid r\in\mathbb{R}\}$ はコンパクトでない．

4.3 コンパクト群の作用と完全写像

G がコンパクト群の場合，関係する写像がことごとく完全写像になってくれてうれしい（cf. 2.3 節）．

4.3.1 命題. コンパクト群 G による T_2 空間 X への作用 $\theta\colon G\times X\to X$ が与えられたとする．このとき，つぎが成り立つ：

(i) $\theta\colon G\times X\to X$ は完全写像である．
(ii) $\check{\theta}\colon G\times X\to X\times X$ は完全写像である．
(iii) 任意の $x\in X$ に対して，$\theta(\cdot,x)\colon G\to X$ は完全写像である．
(iv) 商写像 $q\colon X\to X/G$ は完全写像である．

証明. (i) θ は同相写像 $G\times X\to G\times X\,;(g,x)\mapsto(g,g\cdot x)$ と完全写像 $p_X\colon G\times X\to X$ との合成写像であるから，とくに完全写像である（2.1.2，2.2.1）．

(ii) $\check{\theta}=\Delta(\theta,p_X)$ よりしたがう（2.2.6）．

(iii) $\theta(\cdot,x)$ は完全写像 $\check{\theta}^{X\times\{x\}}\colon G\times\{x\}\to X\times\{x\}$ と同一視できる（2.2.3）．

(iv) 4.2.5 の証明と同様にして，任意の $x\in X$ に対して $q^{-1}(q(x))=G\cdot x\approx G/G_x$ が成り立つことがわかる．したがって，任意の $y\in X/G$ に対して $q^{-1}(y)\subset X$ はコンパクトである．あとは q が閉写像であることを示せばよい．ところで，(i) より θ は閉写像なので，任意の $C\in\tau^c(X)$ に対して，

$$q^{-1}(q(C))=\bigcup_{g\in G}g\cdot C=\theta(G\times C)\in\tau^c(X)$$

が成り立つ． □

写像 θ が完全写像であることの証明には G のコンパクト性しか用いていないことに注意すると，つぎがわかる：

4.3.2 系． 位相群 G による X への作用が与えられたとする．このとき，任意のコンパクト集合 $K \subset G$ と閉集合 $C \subset X$ とに対して，$K \cdot C \subset X$ は閉集合である． □

4.4 “固有不連続作用”，あるいは離散群の固有な作用について[8)]

> I sincerely hope the term properly discontinuous will eventually die out.
>
> Jack Lee

G が離散群の場合に，局所コンパクト T_2 空間への作用が（自由かつ）固有であるための必要充分条件を与える．

4.4.1 命題． 位相群 G による T_2 空間 X への作用 $\theta\colon G \times X \to X$ が与えられたとする．商写像を $q\colon X \to X/G$ とおく．つぎの条件を考える：

(a) 任意の $x, y \in X$ に対して，$U \in \tau(x, X), V \in \tau(y, X)$ であって，$G_{U,V}$ が有限集合となるものが存在する．
(b) 軌道空間 X/G は T_2 空間である．
(c) 任意の $x, y \in X$，$q(x) \neq q(y)$，に対して，$U \in \tau(x, X), V \in \tau(y, X)$ であって，$G_{U,V} = \varnothing$ となるものが存在する．
(d) 任意のコンパクト集合 $K \subset X$ に対して，G_K は有限集合である．とくに，θ は固有な作用である．
(e) 任意の $x \in X$ に対して，$U \in \tau(x, X)$ であって G_U が有限集合となるものが存在する．
(f) 任意の $x \in X$ に対して，$U \in \tau(x, X)$ であって
   - $\forall g \in G_x$，$g \cdot U = U$,

8) 本節の内容は主に [2] に依る．

- $\forall g \in G \setminus G_x$, $(g \cdot U) \cap U = \varnothing$

となるものが存在する．とくに，$G_U = G_x$ が成り立つ．

このとき，つぎが成り立つ：

- (a) $\Rightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c).
- (a) $\Rightarrow$ (d).
- 局所コンパクト T_2 空間への作用が (d) を満たすならば，(a) が成り立つ．
- (a) $\Rightarrow$ (e) $\Rightarrow$ (f).
- (e) を満たす作用による軌道空間が T_2 ならば，(a) が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
 & \text{(a)} \arrow[d] \arrow[dr] & & \text{(a)} \arrow[d] \\
\text{(c)} \arrow[r, leftrightarrow] & \text{(b)} & \text{(d)}, \arrow[ul, dashed, bend right, "X\colon \mathrm{loc.\,cpt.}"'] & \text{(e)} \arrow[u, dashed, bend right, "X/G\colon T_2"'] \arrow[d] \\
 & & & \text{(f)}.
\end{tikzcd}$$

証明． (a) $\Rightarrow$ (b)　$x, y \in X$，$q(x) \neq q(y)$，とする．(a) と X の T_2 性より，$U' \in \tau(x, X)$，$V' \in \tau(y, X)$ であって $U' \cap V' = \varnothing$ かつ $G_{U', V'}$ が有限集合となるものが存在する．そこで，$G_{U', V'} = \{g_1, \ldots, g_n\}$ とおく．各 $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して，$g_i \cdot x \neq y$ となるので，$U_i \in \tau(x, U')$，$V_i \in \tau(y, V')$ であって $(g_i \cdot U_i) \cap V_i = \varnothing$ となるものが存在する．このとき，$U = \bigcap U_i \in \tau(x, X)$，$V = \bigcap V_i \in \tau(y, X)$ とおくと，任意の $g \in G$ に対して $(g \cdot U) \cap V = \varnothing$ が成り立つ．よって，$q(U) \in \tau(q(x), X/G)$，$q(V) \in \tau(q(y), X/G)$，$q(U) \cap q(V) = \varnothing$ を得る．

(b) $\Leftrightarrow$ (c)　q が開写像であること（4.2.1），および任意の部分集合 $A, B \subset X$ に対して $G_{A,B} = \varnothing \Leftrightarrow q(A) \cap q(B) = \varnothing$ が成り立つことからしたがう．

(a) $\Rightarrow$ (d)　$K \subset X$ をコンパクト集合とし，$x \in K$ とする．任意の $y \in K$ に対して，仮定より $U_y \in \tau(x, X)$，$V(y) \in \tau(y, X)$ であって，$G_{U_y, V(y)}$ が有限集合となるものが存在する．$\{V(y) \mid y \in K\}$ はコンパクト集合 K の開被覆なので，有限個の点 $y_1, \ldots, y_n \in K$ であって $K \subset \bigcup V(y_i)$ となるものが存在する．そこで，$U(x) = \bigcap U_{y_i} \in \tau(x, X)$ とおく．このとき，任意の $g \in G$ に対して，

$$(g \cdot U(x)) \cap K \subset \bigcup_i (g \cdot U(x)) \cap V(y_i) \subset \bigcup_i (g \cdot U_{y_i}) \cap V(y_i)$$

が成り立つので，$G_{U(x),K} \subset \bigcup_i G_{U_{y_i},V(y_i)}$ を得る．したがって，$G_{U(x),K}$ は有限集合である．いま $\{U(x) \mid x \in K\}$ は K の開被覆であるから，有限個の点 $x_1, \ldots, x_m \in K$ であって $K \subset \bigcup U(x_j)$ となるものが存在する．このとき，任意の $g \in G$ に対して，

$$(g \cdot K) \cap K \subset \bigcup_j (g \cdot U(x_j)) \cap K$$

が成り立つので，$G_K \subset \bigcup_j G_{U(x_j),K}$ を得る．したがって，G_K は有限集合である．

X が局所コンパクト T_2 のとき，(d) $\Rightarrow$ (a)　$x, y \in X$ とする．仮定より，相対コンパクト開近傍 $U \in \tau(x, X)$，$V \in \tau(y, X)$ が存在する．このとき，$K = \overline{U} \cup \overline{V}$ とおくと，これはコンパクトなので，$G_{U,V} \subset G_K$ より結論を得る．

(a) $\Rightarrow$ (e)　明らか．

(e) $\Rightarrow$ (f)　$x \in X$ とする．仮定より，$W \in \tau(x, X)$ であって G_W が有限集合となるものが存在する．$G_x \subset G_W$ ゆえ，とくに固定部分群 G_x は有限集合である．$G_W \setminus G_x = \{g_1, \ldots, g_n\}$ とおく．各 $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して $g_i \cdot x \neq x$ となるから，$W_i, W_i' \in \tau(x, X)$ であって $(g_i \cdot W_i) \cap W_i' = \varnothing$ となるものが存在する．そこで，$V = W \cap \bigcap W_i \cap \bigcap W_i' \in \tau(x, X)$ とおく．すると，任意の $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して，$(g_i \cdot V) \cap V \subset (g_i \cdot W_i) \cap W_i' = \varnothing$ となることに注意する．このとき，$U = \bigcap_{g \in G_x} g \cdot V \in \tau(x, X)$ とおくと，これが (f) の条件を満たすことを示す．

- $U \subset e \cdot V = V$ より，任意の $g \in G_W \setminus G_x$ に対して $(g \cdot U) \cap U \subset (g \cdot V) \cap V = \varnothing$ が成り立つ．
- $U \subset V \subset W$ より，任意の $g \in G \setminus G_W$ に対して $(g \cdot U) \cap U \subset (g \cdot W) \cap W = \varnothing$ が成り立つ．

したがって，任意の $g \in G \setminus G_x = (G \setminus G_W) \cup (G_W \setminus G_x)$ に対して $(g \cdot U) \cap U = \varnothing$ が成り立つ．また，任意の $h \in G_x$ に対して，$G_x \to G_x\,;\, g \mapsto hg$ は全単射なので，$h \cdot U = \bigcap_{g \in G_x} hg \cdot V = U$ が成り立つ．

(e), (b) $\Rightarrow$ (a)　$x, y \in X$ とする．(b) $\Leftrightarrow$ (c) より，$q(x) = q(y)$，すなわち $g_0 \in G$ であって $g_0 \cdot x = y$ となるものが存在するとしてよい．仮定より $U \in \tau(x, X)$ であって G_U が有限集合となるものが存在する．$V = g_0 \cdot U \in \tau(y, X)$ とおく．このとき，任意の $g \in G$ に対して，$(g \cdot U) \cap V = g_0((g_0^{-1} g \cdot U) \cap U)$ より，

$$\begin{aligned} g \in G_{U,V} &\Leftrightarrow (g \cdot U) \cap V \neq \varnothing \\ &\Leftrightarrow (g_0^{-1} g \cdot U) \cap U \neq \varnothing \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow g_0^{-1}g \in G_U$$
$$\Leftrightarrow g \in g_0 G_U$$

が成り立つので，$G_{U,V} = g_0 G_U$ は有限集合である． □

4.4.2 補題． 位相群 G による T_2 空間 X への作用が条件

(g) 任意の $x \in X$ に対して，$U \in \tau(x, X)$ であって $G_U = \{e\}$ となるものが存在する．

を満たすためには，作用が自由であって，さらに (f) を満たすことが必要かつ充分である．

証明．（必要性） $\{e\} \subset G_x \subset G_U = \{e\}$ より，作用は自由である．また，このとき明らかに (f) が成り立つ．

（充分性） 明らか． □

4.4.3 命題． 位相群 G による T_2 空間 X への作用が (g) を満たすならば，商写像 $q\colon X \to X/G$ は被覆写像である．

証明． $x \in X$ とする．仮定より，$U \in \tau(x, X)$ であって $G_U = \{e\}$ となるものが存在する．$V = q(U) \in \tau(q(x), X/G)$ とおく．このとき，$q^{-1}(V) = \bigcup_{g \in G} g \cdot U$ は互いに交わらない開集合であり，各 $g \in G$ に対して，$V|q|g \cdot U \colon g \cdot U \to V$ は全単射連続開写像ゆえ同相写像である（1.2.5，1.2.4）． □

4.4.4 注意． J. M. Lee は [5, 6] において，(g) を満たす作用を（固有不連続作用ではなく）被覆空間作用（**covering space action**）と呼ぶことを提案している．

4.4.5 命題（[6, Lemma 21.11]）**．** 離散群 G による局所コンパクト T_2 空間 X への作用が自由かつ固有であるためには，作用が (c)，(g) を満たすことが必要かつ充分である．

証明． G が離散群なので作用が固有であることと (d) が成り立つこととは同値である（4.2.3）．また，X が局所コンパクトなので，(a) が成り立つことと (d) が成り立つこととは同値である（4.4.1）．

（必要性） 作用が固有であることから (a)，とくに (c)，(f) が成り立つ（4.4.1）．したがって，作用が自由であることと併せて (g) が成り立つ（4.4.2）．

（充分性） 4.4.2 より，作用は自由である．また，(g) より，とくに (e) が成り立つので，(c) と併せて (a) が成り立つ（4.4.1）． □

4.2.7 と併せて，ただちにつぎを得る：

4.4.6 系． 離散群 G による局所コンパクト T_2 空間 X への作用が自由かつ固有ならば，商写像 $q\colon X \to X/G$ は局所コンパクト T_2 空間への被覆写像である． □

■ おまけ：各文献における “properly discontinuous action” の定義

G や X に対する条件はそれぞれの文献にあたってほしい．

（S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry I*） (c)，(f)，各点の固定部分群は有限集合．

（A. Mukherjee, *Differential Topology*） (c)，(g).

（E. H. Spanier, *Algebraic Topology*） (g).

（R. M. Switzer, *Algebraic Topology*） (c)，(g).

（W. Thurston, *The Geometry and Topology of Three Manifolds*） (d).

（服部晶夫，『位相幾何学』） (g).

（森田茂之，『微分形式の幾何学』） (d).

参考文献

[1] N. Bourbaki, *General Topology, Chapters 1–4*, Springer, 1989.

[2] S. Deo, K. Varadarajan, *Discrete Groups and Discontinuous Actions*, Rocky Mountain J. Math. **27** (1997), 559–583.

[3] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., 1966.

[4] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag, 1989.

[5] J. M. Lee, *Introduction to Topological Manifolds*, Springer, 2011.

[6] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds, 2nd. ed.*, Springer, 2013.

[7] https://stacks.math.columbia.edu.

[8] R. Schultz, *Proper Maps and Universally Closed Maps*, https://math.ucr.edu/~res/math205A/proper.pdf.

[9] いんてぐま，*New Spaces from Old*.