

# CAPÍTULO 9

## Aplicaciones de la programación lineal en marketing, finanzas y administración de operaciones

---

### CONTENIDO

#### 9.1 APLICACIONES EN MARKETING

- Selección de medios de comunicación
- Investigación de mercados

#### 9.2 APLICACIONES FINANCIERAS

- Selección de portafolios
- Planeación financiera

#### 9.3 APLICACIONES EN ADMINISTRACIÓN DE OPERACIONES

- Una decisión de hacer o comprar
- Programación de la producción
- Asignación de la fuerza de trabajo
- Problemas de mezcla

La programación lineal ha demostrado ser uno de los enfoques cuantitativos más exitosos para la toma de decisiones; sus aplicaciones abarcan casi todas las industrias. Estas aplicaciones incluyen programación de la producción, selección de medios de comunicación, planeación financiera, elaboración del presupuesto de capital, transportación, diseño de sistemas de distribución, mezcla de productos, proceso de empleo y mezcla.

El artículo de MC en Acción, “Un modelo de planeación de marketing en Marathon Oil Company”, proporciona un ejemplo del uso de la programación lineal al mostrar cómo esta empresa utiliza un modelo de programación lineal a gran escala para resolver una amplia variedad de problemas de planeación. Además en el capítulo, otros artículos de MC en acción ilustran: cómo GE Capital utiliza la programación lineal para estructurar el arrendamiento de manera óptima; cómo Jeppesen Sanderson utiliza la programación lineal para la producción óptima de manuales de vuelo, y además, cómo Kellogg Company utiliza un modelo de programación lineal a gran escala para integrar la programación, distribución y planeación de inventarios.

En este capítulo se presenta una variedad de aplicaciones de las áreas de negocios tradicionales de marketing, finanzas y administración de operaciones. Se hace hincapié en el modelado, la solución por computadora y la interpretación de los resultados. Se desarrolló un modelo matemático para cada problema estudiado, y para la mayoría de las aplicaciones se presentan las soluciones obtenidas utilizando The Management Scientist. En el apéndice del capítulo se muestra el uso de Excel Solver al aplicarlo en la solución de un problema financiero.

## MC en ACCIÓN

### UN MODELO DE PLANEACIÓN DE MARKETING EN MARATHON OIL COMPANY\*

Marathon Oil Company tiene cuatro refinerías dentro de Estados Unidos, en las que operan 50 terminales de productos ligeros, que tienen demanda en más de 95 localidades. La División de Suministro y Transporte se enfrenta al problema de determinar cuál refinería debe abastecer a cuál terminal y, al mismo tiempo, determinar cuáles productos deben transportarse a través de oleoductos, barcazas o buques cisterna para minimizar los costos. Asimismo, se debe satisfacer la demanda del producto y no debe excederse la capacidad de cada refinería. Para ayudar a resolver este difícil problema, Marathon Oil elaboró un modelo de planeación de marketing.

Este modelo es de programación lineal a gran escala que toma en cuenta las ventas, no sólo en las terminales de productos de Marathon sino en todas las localidades de intercambio. Un contrato de intercambio es un acuerdo con otros fabricantes de productos petroleros que consiste en el intercambio o canje de los productos de Marathon por los suyos en diferentes localidades.

Todos los oleoductos, barcazas y buques cisterna dentro del área de marketing de Marathon también están representados en el modelo de programación lineal. El objetivo del modelo es minimizar el costo de cumplir con una estructura de demanda dada, tomando en cuenta el precio de ventas, las tarifas del oleoducto, los costos del contrato de intercambio, la demanda de productos, los costos de operación de la terminal, los costos de refinería y las compras de productos.

El modelo de planeación de marketing se utiliza para resolver una amplia variedad de problemas de planeación, y varían desde la evaluación de la economía de la mezcla de gasolina hasta el análisis de la economía de una nueva terminal o canal de distribución. Con ventas diarias de aproximadamente 10 millones de galones de producto ligero refinado, un ahorro incluso de una milésima de centavo por galón puede producir ahorros significativos a largo plazo. Al mismo tiempo, lo que pudiera parecer un ahorro en un área, como la refinería o el transporte, en realidad puede sumarse a los costos generales cuando los efectos se transmiten completamente a todo el sistema. El modelo de planeación de marketing permite un examen simultáneo de este efecto total.

\*Con base en información proporcionada por Robert W. Wemert de Marathon Oil Company, Findlay, Ohio.

## 9.1

## Aplicaciones en marketing

Las aplicaciones de la programación lineal en marketing son numerosas. En esta sección se estudian las aplicaciones en la selección de medios de comunicación y en la investigación de mercados.

## Selección de medios de comunicación

Las aplicaciones de selección de medios de comunicación por medio de la programación lineal están diseñadas para ayudar a los gerentes de marketing a asignar un presupuesto de publicidad fijo a varios medios de publicidad. Los medios potenciales incluyen periódicos, revistas, radio, televisión y correo directo. En estas aplicaciones, el objetivo es maximizar el alcance, la frecuencia y la calidad de la exposición. Las restricciones sobre la asignación permisible por lo general surgen durante la consideración de las políticas de la empresa, los requisitos contractuales y la disponibilidad de los medios. En la aplicación siguiente se ilustra cómo podría formularse y resolverse un problema de selección de medios utilizando un modelo de programación lineal.

Relax-and-Enjoy Lake Development Corporation desarrolla un fraccionamiento a la orilla de un lago de propiedad privada. El mercado primario para los lotes y casas a la orilla del lago incluye a todas las familias con ingresos medios y altos dentro de un radio aproximado de 100 millas alrededor del desarrollo. Relax-and-Enjoy contrató a la firma de publicidad Boone, Phillips, and Jackson (BP&J) para que diseñara la campaña promocional.

Después de considerar los medios posibles y el mercado que se cubrirá, BP&J recomendó que la publicidad del primer mes se restringiera a cinco medios. Al final del mes, la agencia reevaluará su estrategia con base en los resultados mensuales. BP&J reunió datos sobre el número de clientes potenciales contactados, el costo por publicidad, el número máximo de veces que cada medio está disponible y la calidad estimada de la exposición para cada uno de los cinco medios. La calidad estimada se mide en función de una unidad de calidad de la exposición, una medida del valor relativo de un anuncio en cada uno de los medios. Esta medida, según la experiencia de BP&J en el negocio de la publicidad, toma en cuenta factores como la demografía (edad, ingresos y educación de la audiencia alcanzada) de la audiencia, la imagen presentada y la calidad de la publicidad. La información recabada se presenta en la tabla 9.1.

Relax-and-Enjoy proporcionó a BP&J un presupuesto de publicidad de \$30,000 para la campaña del primer mes. Además, Relax-and-Enjoy impuso las restricciones siguientes a la manera en que BP&J puede asignar estos fondos: deben transmitirse por lo menos 10 comerciales por televisión, debe alcanzarse por lo menos a 50,000 clientes potenciales y no se puede gastar más de \$18,000 en los anuncios de televisión. ¿Qué plan de selección de medios debería recomendarse?

**TABLA 9.1** ALTERNATIVAS DE LOS MEDIOS DE PUBLICIDAD PARA RELAX-AND-ENJOY LAKE DEVELOPMENT CORPORATION

Medio	Número de clientes potenciales alcanzados	Costo por anuncio (\$)	Veces máximas disponibles por mes*	Unidades de calidad de la exposición
1. Televisión matutina (1 min), estación WKLA	1 000	1 500	15	65
2. Televisión vespertina (30 s), estación WKLA	2 000	3 000	10	90
3. Periódico (plana completa), <i>The Morning Journal</i>	1 500	400	25	40
4. Suplemento dominical del periódico (1/2 plana a color), <i>The Sunday Press</i>	2 500	1 000	4	60
5. Radio, noticiero de las 8:00 A.M. o de las 5:00 P.M. (30 s), estación KNOP	300	100	30	20

\*El número máximo de veces que el medio está disponible es ya sea el número máximo de veces que ocurre el medio de publicidad (por ejemplo, cuatro domingos por mes) o el número máximo de veces que BP&J recomienda usar ese medio.

En la sección 7.1 se proporcionan algunos lineamientos para modelar problemas de programación lineal. Tal vez quiera repasar la sección 7.1 antes de proseguir con las aplicaciones de la programación lineal en este capítulo.

La decisión a tomar es cuántas veces usamos cada medio. Comenzamos con la definición de las variables de decisión:

$DTV$  = número de veces que se usa la TV matutina

$ETV$  = número de veces que se usa la TV vespertina

$DN$  = número de veces que se usa el periódico diario

$SN$  = número de veces que se usa el suplemento dominical

$R$  = número de veces que se usa la radio

Los datos sobre calidad de la exposición de la tabla 9.1 muestran que cada anuncio de TV matutina ( $DTV$ ) se califica con una exposición de 65 unidades. Por tanto, un plan de publicidad con anuncios proporcionará un total de  $65DTV$  unidades de calidad de la exposición. Siguiendo con los datos de la tabla 9.1, encontramos que la TV vespertina ( $ETV$ ) se estimó en 90 unidades de calidad de la exposición; el periódico ( $DN$ ) en 40 unidades de calidad de exposición; el suplemento dominical ( $SN$ ) en 60 unidades de calidad de la exposición, y la radio ( $R$ ) se estimó en 20 unidades de calidad de la exposición. Con el objetivo de maximizar las unidades de calidad de la exposición para el plan general de selección de medios, la función objetivo se vuelve

$$\text{Max } 65DTV + 90ETV + 40DN + 60SN + 20R \quad \text{Calidad de la exposición}$$

Ahora formulamos las restricciones para el modelo a partir de la información proporcionada:

$$\begin{array}{rcll} DTV & & \leq & 15 \\ & ETV & \leq & 10 \\ & & DN & \leq 25 \\ & & & SN & \leq 4 \\ & & & & R & \leq 30 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{rcll} DTV & & \leq & 15 \\ & ETV & \leq & 10 \\ & & DN & \leq 25 \\ & & & SN & \leq 4 \\ & & & & R & \leq 30 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Disponibilidad} \\ \text{de los medios} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} 1500DTV + 3000ETV + 400DN + 1000SN + 100R & \leq & 30,000 & \text{Presupuesto} \\ DTV + ETV & \geq & 10 & \text{Televisión} \\ 1500DTV + 3000ETV & \leq & 18,000 & \text{Restricciones} \\ 1000DTV + 2000ETV + 1500DN + 2500SN + 300R & \geq & 50,000 & \text{Clientes alcanzados} \\ DTV, ETV, DN, SN, R & \geq & 0 & \end{array}$$

Se debe tener cuidado en asegurar que el modelo de programación lineal refleje de manera precisa el problema real. Siempre revise su formulación meticulosamente antes de intentar resolver el modelo.

El problema 1 proporciona práctica en la formulación de un modelo de selección de medios similar.

Los modelos más complejos de selección de medios pueden incluir consideraciones como la reducción del valor de la calidad de la exposición por el uso de medios repetidos, descuentos en el costo por el uso de medios repetidos, el traslape de la audiencia por los diferentes medios o las recomendaciones de tiempo para los anuncios.

La solución óptima para este modelo de programación lineal de cinco variables y nueve restricciones se muestra en la figura 9.1; en la tabla 9.2 se presenta un resumen.

La solución óptima requiere que los anuncios se distribuyan entre la TV matutina, el periódico, el suplemento dominical y la radio. El número máximo de unidades de calidad de la exposición es 2370, y la cantidad total de clientes alcanzada es 61 500. La columna de costos reducidos (Reduced Costs) de la figura 9.1 indica que el número de unidades de calidad de la exposición para la TV vespertina tendría que incrementarse como mínimo a 65, antes de que esta alternativa de medio aparezca en la solución óptima. Observe que la restricción del presupuesto (restricción 6) tiene un precio dual de 0.060; por tanto, un incremento de \$1.00 en el presupuesto de publicidad conducirá a un incremento de 0.06 en la calidad de la exposición. El precio dual de  $-25\,000$  para la restricción 7 indica que la reducción en 1 del número de comerciales de televisión 1 aumentará la calidad de la exposición del plan de publicidad 25 unidades. Por tanto, Relax-and-Enjoy debería considerar reducir el requisito de tener por lo menos 10 comerciales de televisión.

Una posible desventaja de este modelo es que, incluso si la medida de la calidad de la exposición no está sujeta a errores, no ofrece garantía de que la maximización de la calidad total de la exposición conducirá a una maximización de las utilidades o de las ventas (un sustituto común de las utilidades). Sin embargo, esta desventaja no parte de la programación lineal, sino del uso la calidad de la exposición como criterio. Si pudiéramos medir de forma directa el efecto de un anuncio sobre las utilidades, podríamos usar las utilidades totales como el objetivo a maximizar.

**FIGURA 9.1** SOLUCIÓN DE THE MANAGEMENT SCIENTIST PARA EL PROBLEMA DE RELAX-AND-ENJOY LAKE DEVELOPMENT CORPORATION**WEB** archivo

Relax

Objective Function Value =			2370.000
Variable	Value	Reduced Costs	
DTV	10.000	0.000	
ETV	0.000	65.000	
DN	25.000	0.000	
SN	2.000	0.000	
R	30.000	0.000	
Constraint	Slack/Surplus	Dual Prices	
1	5.000	0.000	Disponibilidad de medios
2	10.000	0.000	
3	0.000	16.000	
4	2.000	0.000	Presupuesto
5	0.000	14.000	
6	0.000	0.060	Restricciones de la televisión
7	0.000	-25.000	
8	3000.000	0.000	Cobertura de audiencia
9	11500.003	0.000	

**TABLA 9.2** PLAN DE PUBLICIDAD PARA RELAX-AND-ENJOY LAKE DEVELOPMENT CORPORATION

Medio	Frecuencia	Presupuesto
TV matutina	10	\$15,000
Periódico diario	25	10,000
Suplemento dominical	2	2,000
Radio	30	3,000
		<u>\$30,000</u>
Unidades de calidad de la exposición = 2370		
Total de clientes alcanzado = 61,500		

**NOTAS Y COMENTARIOS**

1. El modelo de selección de medios requirió evaluaciones subjetivas de la calidad de la exposición para las alternativas de medios. Los gerentes de marketing pueden tener datos significativos referentes a la calidad de la exposición, pero los coeficientes finales usados en la función objetivo también pueden incluir consideraciones basadas principalmente en el juicio gerencial. El juicio es una manera aceptable de obtener datos de entrada para un modelo de programación lineal.
2. El modelo de selección de medios presentado en esta sección utiliza la calidad de la exposición como la función objetivo y coloca una restricción sobre el número de clientes alcanzado. Una formulación alterna de este problema sería utilizar el número de clientes alcanzado como la función objetivo y añadir una restricción que indique la calidad total de la exposición mínima requerida para el plan de medios.

## Investigación de mercados

Una organización realiza estudios de mercado para enterarse de algunas características, actitudes y preferencias de los consumidores. Las firmas de investigación de mercados que se especializan en proporcionar esta información con frecuencia hacen la investigación real para las organizaciones de los clientes. Los servicios típicos que ofrecen este tipo de empresas incluyen el diseño de estudios, la realización de encuestas de mercado, el análisis de los datos recabados y la entrega de informes donde se resumen los hallazgos y se incluyen recomendaciones para el cliente. En la fase de diseño de la investigación pueden establecerse metas o cuotas para el número y tipo de las personas que responderán la encuesta. El objetivo de la firma de investigación de mercados es realizar la encuesta de tal manera que satisfaga las necesidades del cliente a un costo mínimo.

Market Survey, Inc. (MSI) se especializa en evaluar la reacción de los clientes ante productos nuevos, servicios y campañas publicitarias. Un cliente solicitó la asistencia de MSI para averiguar la reacción del cliente a un producto para el hogar comercializado recientemente. Durante las reuniones con el cliente, MSI acordó realizar entrevistas personales de puerta en puerta para obtener respuestas de familias con y sin hijos. Además, MSI aceptó realizar entrevistas en la mañana y en la tarde. En específico, el contrato del cliente exigía que MSI realizara 1000 entrevistas bajo los siguientes lineamientos de cuotas:

1. Entrevistar por lo menos a 400 familias con hijos.
2. Entrevistar por lo menos a 400 familias sin hijos.
3. La cantidad total de familias entrevistadas durante la tarde debe ser igual a la cantidad de familias entrevistadas durante la mañana.
4. Por lo menos 40% de las entrevistas a familias con hijos debe realizarse durante la tarde.
5. Por lo menos 60% de las entrevistas a familias sin hijos debe realizarse durante la tarde.

Como las entrevistas a las familias con hijos requieren tiempo adicional por parte del entrevistador, y dado que se paga más a los entrevistadores vespertinos que a los matutinos, el costo varía según el tipo de entrevista. Con base en los estudios de investigación previos, las estimaciones de los costos de las entrevistas son las siguientes:

Familia	Costo de las entrevistas	
	Mañana	Tarde
Con hijos	\$20	\$25
Sin hijos	\$18	\$20

¿Cuál es el plan de entrevistas por familias y hora del día que cumplirá con los requisitos del contrato a un costo de entrevista mínimo?

Al formular el modelo de programación lineal para el problema de MSI, utilizamos la siguiente notación de las variables de decisión:

- $DC$  = número de entrevistas matutinas a familias con hijos  
 $EC$  = número de entrevistas vespertinas a familias con hijos  
 $DNC$  = número de entrevistas matutinas a familias sin hijos  
 $ENC$  = número de entrevistas vespertinas a familias sin hijos

Comenzamos la formulación del modelo de programación lineal utilizando los datos del costo por entrevista para desarrollar la función objetivo:

$$\text{Min } 20DC + 25EC + 18DNC + 20ENC$$

La restricción que requiere un total de 1000 entrevistas es

$$DC + EC + DNC + ENC = 1000$$

Las cinco especificaciones concernientes a los tipos de entrevistas son las siguientes:

- Familias con hijos:

$$DC + EC \geq 400$$

- Familias sin hijos:

$$DNC + ENC \geq 400$$

- Por lo menos el mismo número de entrevistas vespertinas que de entrevistas matutinas:

$$EC + ENC \geq DC + DNC$$

El formato usual para la formulación del modelo de programación lineal y los datos de entrada para la computadora coloca a todas las variables de decisión en el lado izquierdo de la desigualdad y a una constante (posiblemente cero) en el lado derecho. Por tanto, reescribimos esta restricción como

$$-DC + EC - DNC + ENC \geq 0$$

- Por lo menos 40% de las entrevistas a familias con hijos durante la tarde:

$$EC \geq 0.4(DC + EC) \quad \text{o} \quad -0.4DC + 0.6EC \geq 0$$

- Por lo menos 60% de las entrevistas a familias sin hijos durante la tarde:

$$ENC \geq 0.6(DNC + ENC) \quad \text{o} \quad -0.6DNC + 0.4ENC \geq 0$$

Cuando añadimos los requisitos de no negatividad, el modelo de programación lineal de cuatro variables y seis restricciones se vuelve

$$\text{Min} \quad 20DC + 25EC + 18DNC + 20ENC$$

s.a.

$$\begin{array}{rcll} DC + EC + DNC + ENC = 1000 & \text{Entrevistas totales} \\ DC + EC & \geq 400 & \text{Familias con hijos} \\ DNC + ENC & \geq 400 & \text{Familias sin hijos} \\ -DC + EC - DNC + ENC \geq 0 & \text{Entrevistas vespertinas} \\ -0.4DC + 0.6EC & \geq 0 & \text{Entrevistas vespertinas} \\ & & \text{a familias con hijos} \\ & -0.6DNC + 0.4ENC \geq 0 & \text{Entrevistas vespertinas} \\ & & \text{a familias sin hijos} \\ DNC, EC, DNC, ENC \geq 0 \end{array}$$

La solución óptima a este programa lineal se muestra en la figura 9.2 y revela que el costo mínimo de \$20,320 ocurre con el siguiente programa de entrevistas:

Familia	Número de entrevistas		Totales
	Mañana	Tarde	
Con hijos	240	160	400
Sin hijos	240	360	600
Totales	480	520	1000

**FIGURA 9.2** SOLUCIÓN DE THE MANAGEMENT SCIENTIST PARA EL PROBLEMA DE ESTUDIOS DE MERCADO

Objective Function Value =			20320.000
Variable	Value	Reduced Costs	
DC	240.000	0.000	
EC	160.000	0.000	
DNC	240.000	0.000	
ENC	360.000	0.000	
Constraint	Slack/Surplus	Dual Prices	
1	0.000	-19.200	
2	0.000	-2.800	
3	200.000	0.000	
4	40.000	0.000	
5	0.000	-5.000	
6	0.000	-2.000	

**WEB** archivo  
Market

Por consiguiente, se programarán 480 entrevistas durante la mañana y 520 durante la tarde. Se realizarán 400 entrevistas a familias con hijos y 600 a familias sin hijos.

La información tomada del análisis de sensibilidad de la figura 9.2 muestra un precio dual de  $-19.200$  para la restricción 1. En otras palabras, el valor de la solución óptima empeorará (el costo total de realizar las entrevistas aumentará) por  $\$19.20$  si el número de entrevistas aumenta de 1000 a 1001. Por tanto,  $\$19.20$  es el costo incremental de realizar entrevistas adicionales. También es el ahorro que podría obtenerse al reducir el número de entrevistas de 1000 a 999.

La variable de excedente para la restricción 3, con un valor de 200 000, muestra que se entrevistarán 200 familias sin hijos más de las requeridas. Asimismo, la variable de excedente para la restricción 4, con un valor de 40 000, muestra que el número de entrevistas vespertinas excede el número de entrevistas matutinas por 40. Los valores de cero para las variables de excedente en las restricciones 5 y 6 indican que las entrevistas vespertinas más costosas se realizan a un costo mínimo. De hecho, el precio dual de  $-5.000$  para la restricción 5 indica que si durante la tarde se entrevista a una familia (con hijos) más que el requisito mínimo, el costo total de la entrevista aumentará  $\$5.00$ . Del mismo modo, la restricción 6 muestra que el requisito de que se entreviste una familia (sin hijos) más durante la tarde aumenta los costos  $\$2.00$ .

## 9.2 Aplicaciones financieras

En finanzas, la programación lineal se aplica a situaciones problemáticas que involucran la elaboración de presupuestos de capital, decisiones de hacer o comprar, asignación de valores, selección de portafolios, planeación financiera y mucho más. En esta sección se describe un problema de selección de portafolios y otro que involucra el financiamiento de un programa de retiro anticipada.



## Selección de portafolios

Los problemas de selección de portafolios consisten en situaciones en las cuales un gerente financiero debe seleccionar inversiones específicas, por ejemplo, bonos y acciones, entre una variedad de alternativas de inversión. Los gerentes de fondos de inversión, cooperativas de ahorro y bancos con frecuencia se enfrentan a este tipo de problema. La función objetivo para los problemas de selección de portafolios implica, por lo general, la maximización del rendimiento esperado o la minimización del riesgo. Las restricciones a menudo toman la forma de restricciones sobre el tipo de inversiones permisibles, leyes estatales, políticas de la empresa, riesgo máximo permisible, etc. Los problemas de este tipo se han formulado y resuelto utilizando una variedad de técnicas de programación matemática. En esta sección se formula y resuelve un problema de selección de portafolios como un programa lineal.

Considere el caso de Welte Mutual Funds, Inc., con sede en la ciudad de Nueva York. Welte acaba de obtener \$100,000 al cambiar bonos industriales por efectivo y ahora busca otras oportunidades de inversión para estos fondos. Con base en las inversiones actuales de Welte, el analista financiero principal de la empresa recomienda que todas las nuevas inversiones se hagan en la industria petrolera, la industria siderúrgica o en bonos del gobierno. En específico, el analista identificó cinco oportunidades de inversión y proyectó sus tasas de inversión anuales. Las inversiones y tasas de inversión se muestran en la tabla 9.3.

La gerencia de Welte impuso los siguientes lineamientos de inversión:

1. Ninguna industria (petrolera o siderúrgica) debe recibir más de \$50,000.
2. Los bonos del gobierno deben constituir por lo menos 25% de las inversiones en la industria del acero.
3. La inversión en Pacific Oil, inversión de alto rendimiento pero con alto riesgo, no puede constituir más de 60% de la inversión total en la industria petrolera.

¿Qué recomendaciones de portafolio, es decir inversiones y montos, se deben hacer para los \$100,000 disponibles? Dado el objetivo de maximizar el rendimiento proyectado sujeto a las restricciones impuestas por el presupuesto y la gerencia, podemos responder a esta pregunta al formular y resolver un modelo de programación lineal del problema. La solución proporcionará recomendaciones de la inversión para la gerencia de Welte Mutual Funds.

Sea

$A$  = dólares invertidos en Atlantic Oil

$P$  = dólares invertidos en Pacific Oil

$M$  = dólares invertidos en Midwest Steel

$H$  = dólares invertidos en Huber Steel

$G$  = dólares invertidos en bonos del gobierno

Utilizando las tasas de rendimiento proyectadas mostradas en la tabla 9.3, escribimos la función objetivo para maximizar el rendimiento total para el portafolio como

$$\text{Max } 0.073A + 0.103P + 0.064M + 0.075H + 0.045G$$

**TABLA 9.3** OPORTUNIDADES DE INVERSIÓN PARA WELTE MUTUAL FUNDS

Inversión	Tasa de rendimiento proyectada (%)
Atlantic Oil	7.3
Pacific Oil	10.3
Midwest Steel	6.4
Huber Steel	7.5
Bonos del gobierno	4.5

La restricción que especifica la inversión de los \$100,000 disponibles es

$$A + P + M + H + G = 100,000$$

Los requisitos de que ni la industria petrolera ni la industria siderúrgica deben recibir más de \$50,000 son

$$A + P \leq 50,000$$

$$M + H \leq 50,000$$

El requisito de que los bonos del gobierno deben constituir por lo menos 25% de las inversiones en la industria siderúrgica se expresa como

$$G \geq 0.25(M + H) \quad \text{o} \quad -0.25M - 0.25H + G \geq 0$$

Por último, la restricción de que Pacific Oil no puede tener más de 60% de la inversión total en la industria petrolera es

$$P \leq 0.60(A + P) \quad \text{o} \quad -0.60A - 0.40P \leq 0$$

Al añadir las restricciones de no negatividad, se obtiene el modelo de programación lineal completo para el problema de inversión de Welte Mutual Funds:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 0.073A + 0.103P + 0.064M + 0.075H + 0.045G \\ \text{s.t.} & \\ & A + P + M + H + G = 100,000 \quad \text{Fondos disponibles} \\ & A + P \leq 50,000 \quad \text{Máximo de la industria petrolera} \\ & M + H \leq 50,000 \quad \text{Máximo de la industria siderúrgica} \\ & -0.25M - 0.25H + G \geq 0 \quad \text{Mínimo de bonos del gobierno} \\ & -0.6A + 0.4P \leq 0 \quad \text{Restricción de Pacific Oil} \\ & A, P, M, H, G \geq 0 \end{array}$$

La solución óptima a este programa lineal se señala en la figura 9.3. La tabla 9.4 muestra cómo se dividen los fondos entre los valores. Observe que la solución óptima indica que el portafolio debería diversificarse entre todas las oportunidades de inversión, excepto Midwest Steel. El rendimiento anual proyectado para este portafolio es \$8 000, que es un rendimiento global de 8%.

La solución óptima muestra que el precio dual para la restricción 3 es cero. La razón es que el máximo de la industria siderúrgica no es una restricción confinante; los incrementos en el límite de \$50,000 de la industria siderúrgica no mejorarán el valor de la solución óptima. De hecho, la variable de holgura para esta restricción muestra que la inversión actual en la industria siderúrgica es \$10,000 por debajo de este límite de \$50,000. Los precios duales para las otras restricciones son diferentes de cero, lo que indica que estas restricciones son confinantes.

El precio dual de 0.069 para la restricción 1 muestra que el valor de la solución óptima puede aumentar 0.069 si se asigna un dólar más a la inversión del portafolio. Si se pueden obtener más fondos a un costo menor que 6.9%, la gerencia debe considerar obtenerlos.

**FIGURA 9.3** SOLUCIÓN DE THE MANAGEMENT SCIENTIST PARA EL PROBLEMA DE WELTE MUTUAL FUNDS

**WEB** archivo  
Welte

Objective Function Value =			8000.000
Variable	Value	Reduced Costs	
A	20000.000	0.000	
P	30000.000	0.000	
M	0.000	0.011	
H	40000.000	0.000	
G	10000.000	0.000	
Constraint	Slack/Surplus	Dual Prices	
1	0.000	0.069	
2	0.000	0.022	
3	10000.000	0.000	
4	0.000	-0.024	
5	0.000	0.030	

**TABLA 9.4** SELECCIÓN DEL PORTAFOLIO ÓPTIMO PARA WELTE MUTUAL FUNDS

Inversión	Monto	Rendimiento anual esperado
Atlantic Oil	\$ 20,000	\$1 460
Pacific Oil	30,000	3 090
Huber Steel	40,000	3 000
Bonos del gobierno	10,000	450
Totales	\$100,000	\$8 000
Rendimiento anual esperado de \$8000		
Tasa de rendimiento general = 8%		

Sin embargo, si puede obtenerse un rendimiento que rebase 6.9% al invertir los fondos en otra parte (además de estos cinco valores), la gerencia debe cuestionarse la prudencia de invertir los \$100,000 completos en este portafolio.

Interpretaciones parecidas pueden darse a los otros precios duales. Observe que el precio dual para la restricción 4 es negativo en 0.024. Este resultado indica que si el valor en el lado derecho de la restricción aumenta una unidad, puede esperarse que el valor de la solución óptima empeore por 0.024. En términos del portafolio óptimo entonces, si Welte invierte un dólar más en los bonos del gobierno (más allá del requisito mínimo), el rendimiento total disminuirá \$0.024. Para entender por qué ocurre esta disminución, observe de nuevo a partir del precio dual para la restricción 1 que el rendimiento marginal sobre los fondos invertidos en el portafolio es 6.9% (el rendimiento medio es 8%). La tasa de rendimiento sobre los bonos del gobierno es 4.5%. Por tanto, el costo de invertir un dólar más

*El precio dual para la restricción de los fondos disponibles proporciona información sobre la tasa de rendimiento de los fondos de inversión adicionales.*

en los bonos del gobierno es la diferencia entre el rendimiento marginal sobre el portafolio y el rendimiento marginal sobre los bonos del gobierno:  $6.9\% - 4.5\% = 2.4\%$ .

Note que la solución óptima muestra que Midwest Steel no debería incluirse en el portafolio ( $M = 0$ ). El costo reducido asociado de 0.011 para  $M$  indica que el coeficiente de la función objetivo para Midwest Steel tendría que aumentar 0.011 antes de considerarla aconsejable como alternativa de inversión. Con un incremento como éste, el rendimiento de Midwest Steel sería  $0.064 + 0.011 = 0.075$ , volviendo esta inversión tan deseable como la alternativa de inversión de Huber Steel que se utiliza en la actualidad.

*Practique la formulación de una variación del problema de Welte al resolver el problema 9.*

Por último, una sencilla modificación al modelo de programación lineal de Welte permite determinar la fracción de los fondos disponibles invertidos en cada título. Es decir, se divide cada uno de los valores del lado derecho entre 100,000. Luego los valores óptimos para las variables darán la fracción de fondos que deben invertirse en cada título para un portafolio de cualquier tamaño.

## NOTAS Y COMENTARIOS

1. La solución óptima para el problema de Welte Mutual Funds indica que se deben invertir \$20,000 en las acciones de Atlantic Oil. Si Atlantic Oil vende a \$75 cada acción, tendríamos que comprar exactamente  $266\frac{2}{3}$  acciones para gastar exactamente \$20,000. La dificultad de comprar acciones fraccionarias puede manejarse al comprar el número entero más grande posible de acciones con los fondos asignados (por ejemplo, 266 acciones de Atlantic Oil). Este método garantiza que la restricción del presupuesto no se viole. Desde luego, este método introduce la posibilidad de que la solución ya no sea óptima, pero el peligro es mínimo si se trata de un número grande de valores. En casos donde el
- analista considera que las variables de decisión *deben* tener valores enteros, el problema debe formularse como un modelo de programación lineal entero. La programación lineal entera es el tema del capítulo 7.
2. La teoría financiera del portafolio hace hincapié en la obtención de un equilibrio apropiado entre riesgo y rendimiento. En el problema de Welte, se considera de manera explícita el rendimiento en la función objetivo. El riesgo se controla al elegir restricciones que aseguran la diversidad entre las acciones petroleras y siderúrgicas, y un equilibrio entre los bonos del gobierno y la inversión en la industria del acero.

## Planeación financiera

La programación lineal se ha utilizado para una variedad de aplicaciones de planeación financiera. El artículo de MC en Acción, “Estructuración óptima del arrendamiento en GE Capital”, describe cómo se utiliza la programación lineal para optimizar la estructura de un arrendamiento apalancado.

### MC en ACCIÓN

#### ESTRUCTURACIÓN ÓPTIMA DEL ARRENDAMIENTO EN GE CAPITAL\*

GE Capital es una subsidiaria de General Electric con ingresos por 70,000 millones de dólares. Como una de las compañías de servicios financieros más grandes y diversas de Estados Unidos, GE Capital gestiona arrendamientos en el mercado tanto en el ámbito nacional como en el internacional, incluyendo arrendamientos para telecomunicaciones, procesamiento de datos, construcción y flotillas de automóviles, camiones y aviones comerciales.

Para ayudar a asignar y programar los pagos por alquiler y deudas de un arrendamiento apalancado, los analistas de GE Capital elaboraron un modelo de optimización, que está disponible como un componente opcional del software de análisis de arrendamiento propiedad de la empresa.

Los arrendamientos apalancados están diseñados para proporcionar financiamiento para activos con una vida económica de por lo menos cinco años, lo cual requiere desembolsos de capital grandes. Un arrendamiento

\*Con base en C. J. Litty, “Optimal Lease Structuring at GE Capital”, *Interfaces* (mayo/junio de 1994): 34-45.

(continúa)

apalancado representa un acuerdo entre el arrendador (el propietario del activo), el arrendatario (el usuario del activo) y el acreedor que proporciona un préstamo sin aval de 50 a 80% del precio de compra del arrendador. En un préstamo sin aval, los arrendadores no pueden pedir al arrendatario el reembolso en caso de incumplimiento. Como arrendador en este tipo de acuerdos, GE Capital puede reclamar la propiedad y obtener beneficios fiscales como deducciones por depreciación e intereses. Estas deducciones por lo general producen pérdidas durante los primeros años del arrendamiento, lo cual reduce la obligación fiscal total. Aproximadamente 85% de todos los arrendamientos financieros en Estados Unidos son arrendamientos apalancados. En su forma más simple, la estructuración del arrendamiento apalancado puede formularse como un programa lineal. El programa lineal modela el flujo de efectivo después de impuestos para el arrendador, tomando en consideración los recibos de arrendamiento, los préstamos y los pagos

del préstamo, y el impuesto al ingreso. Las restricciones se formulan para asegurar la conformidad con los lineamientos fiscales y para permitir la personalización de los arrendamientos con el objeto de cumplir con los requisitos del arrendador y del arrendatario. La función objetivo puede introducirse de manera personalizada o al seleccionarla en una lista predefinida. El objetivo es minimizar el costo para el arrendatario, expresado como el valor presente neto de los pagos de renta, o maximizar el rendimiento después de impuestos del arrendador.

GE Capital desarrolló un enfoque de optimización que podría aplicarse a la estructuración de rentas de un solo inversionista. En un estudio con el departamento, en su mayor parte relacionado con estas transacciones, el enfoque de optimización produjo beneficios considerables. El enfoque ayudó a GE Capital a ganar algunas transacciones de un solo inversionista, que varían en tamaño de \$1 a 20 millones.

Hewlett Corporation estableció un programa de retiro anticipado como parte de su restructuración corporativa. Al cierre del periodo de inscripción voluntaria, 68 empleados habían elegido el retiro anticipado. Como resultado de estos retiros, la empresa incurrió en las obligaciones siguientes durante los ocho años subsecuentes:

Año	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>Requerimiento de efectivo</b>	430	210	222	231	240	195	225	255

Los requerimientos de efectivo (en miles de dólares) tienen fecha de vencimiento al principio de cada año.

El tesorero de la empresa debe determinar cuánto dinero debe reservarse en la actualidad para cumplir con las ocho obligaciones financieras anuales cuando venzan. El plan de financiamiento para el programa de retiro incluye inversiones en bonos del gobierno así como en cuentas de ahorro. Las inversiones en los bonos del gobierno se limitan a tres opciones:

Bono	Precio	Tasa (%)	Años para el vencimiento
1	\$1 150	8.875	5
2	1 000	5.500	6
3	1 350	11.750	7

Los bonos del gobierno tienen un valor nominal de \$1000, lo cual significa que, incluso con precios diferentes, cada bono paga \$1000 al vencimiento. Las tasas mostradas se basan en el valor nominal. Para propósitos de planeación, el tesorero asumió que cualquier fondo no invertido en bonos se colocará en ahorros y ganará intereses con una tasa anual de 4%.

Las variables de decisión se definen como sigue:

$F$  = dólares totales requeridos para cumplir con la obligación de ocho años del plan de retiro

$B_1$  = unidades del bono 1 compradas al principio del año 1

$B_2$  = unidades del bono 2 compradas al principio del año 1

$B_3$  = unidades del bono 3 compradas al principio del año 1

$S$  = monto colocado en ahorros al principio del año  $i$  para  $i = 1, \dots, 8$

La función objetivo es minimizar los dólares totales necesarios para cumplir con la obligación de ocho años del plan de retiro, o

$$\text{Min } F$$

Una característica fundamental de este tipo de problema de planeación financiera es que una restricción debe formularse para cada año del horizonte de planeación. En general, cada restricción toma la forma:

$$\left( \text{Fondos disponibles} \right) - \left( \text{Fondos invertidos en bonos} \right) = \left( \text{Obligación de efectivo} \right)$$

al principio del año                      y en una cuenta de ahorros                      para el año actual

Los fondos disponibles al principio del año 1 están dados por  $F$ . Con un precio actual de \$1150 para el bono 1 y las inversiones expresadas en miles de dólares, la inversión total para  $B_1$  unidades del bono 1 sería  $1.15B_1$ . Del mismo modo, la inversión total en los bonos 2 y 3 sería  $1B_2$  y  $1.35B_3$ , respectivamente. La inversión en ahorros para el año 1 es  $S_1$ . Utilizando estos resultados y la obligación del primer año de 430, obtenemos la restricción para el año 1:

$$F - 1.15B_1 - 1B_2 - 1.35B_3 - S_1 = 430 \quad \text{Año 1}$$

Las inversiones en bonos pueden ocurrir sólo en este primer año, y los bonos se mantendrán hasta su vencimiento.

Los fondos disponibles al principio del año 2 incluyen los rendimientos sobre la inversión de 8.875% en el valor nominal del bono 1, 5.5% en el valor nominal del bono 2, 11.75% en el valor nominal del bono 3 y 4% en ahorros. El nuevo monto a invertirse en ahorros para el año 2 es  $S_2$ . Con una obligación de 210, la restricción para el año 2 es

$$0.08875B_1 + 0.055B_2 + 0.1175B_3 + 1.04S_1 - S_2 = 210 \quad \text{Año 2}$$

Asimismo, las restricciones para los años 3 a 8 son

$$0.08875B_1 + 0.055B_2 + 0.1175B_3 + 1.04S_2 - S_3 = 222 \quad \text{Año 3}$$

$$0.08875B_1 + 0.055B_2 + 0.1175B_3 + 1.04S_3 - S_4 = 231 \quad \text{Año 4}$$

$$0.08875B_1 + 0.055B_2 + 0.1175B_3 + 1.04S_4 - S_5 = 240 \quad \text{Año 5}$$

$$1.08875B_1 + 0.055B_2 + 0.1175B_3 + 1.04S_5 - S_6 = 195 \quad \text{Año 6}$$

$$1.055B_2 + 0.1175B_3 + 1.04S_6 - S_7 = 225 \quad \text{Año 7}$$

$$1.1175B_3 + 1.04S_7 - S_8 = 255 \quad \text{Año 8}$$

Note que la restricción para el año 6 muestra que los fondos disponibles del bono 1 son  $1.08875B_1$ . El coeficiente de  $1.08875$  refleja el hecho de que el bono 1 vence al final del año 5. Como resultado, el valor nominal más el interés del bono 1 durante el año 5 están disponibles al principio del año 6. Además, debido a que el bono 1 vence en el año 5 y se vuelve disponible para usarlo al principio del año 6, la variable  $B_1$  no aparece en las restricciones para los años 7 y 8. Observe que la interpretación es parecida para el bono 2, el cual vence al final del año 6 y tiene su valor nominal más el interés disponible al principio del año 7. Asimismo, el bono 3 vence al final del año 7 y tiene su valor nominal más el interés disponible al principio del año 8.

Por último, advierta que aparece una variable  $S_8$  en la restricción para el año 8. La obligación del fondo de retiro se completará al principio del año 8, así que anticipamos que  $S_8$  será cero y no se pondrán fondos en cuentas de ahorros. Sin embargo, la formulación incluye  $S_8$  en el evento de que el ingreso del bono más el interés de los ahorros en el año 7 exceda el requisito de efectivo de 255 para el año 8. Por tanto,  $S_8$  es una variable de excedente que muestra cualquier fondo remanente que pueda existir después de que se ha cumplido con los requerimientos de efectivo del año 8.

*No consideramos inversiones futuras en bonos debido a que el precio futuro de los bonos depende de las tasas de interés y no puede conocerse por adelantado.*

**FIGURA 9.4** SOLUCIÓN DE THE MANAGEMENT SCIENTIST PARA EL PROBLEMA DE REQUERIMIENTOS DE EFECTIVO DE HEWLITT CORPORATION

**WEB** archivo  
Hewlitt

Objective Function Value =			1728.79385
Variable	Value	Reduced Costs	
F	1728.79385	0.00000	
B1	144.98815	0.00000	
B2	187.85585	0.00000	
B3	228.18792	0.00000	
S1	636.14794	0.00000	
S2	501.60571	0.00000	
S3	349.68179	0.00000	
S4	182.68091	0.00000	
S5	0.00000	0.06403	
S6	0.00000	0.01261	
S7	0.00000	0.02132	
S8	0.00000	0.67084	
Constraint	Slack/Surplus	Dual Prices	
1	0.00000	-1.00000	
2	0.00000	-0.96154	
3	0.00000	-0.92456	
4	0.00000	-0.88900	
5	0.00000	-0.85480	
5	0.00000	-0.76036	
7	0.00000	-0.71899	
8	0.00000	-0.67084	

La solución óptima a este programa lineal de 12 variables y 8 restricciones se muestra en la figura 9.4. Con un valor de la función objetivo de 1728.79385, la inversión total requerida para cumplir con la obligación de ocho años del plan de retiro es \$1 728 794. Utilizando los precios actuales de \$1 150, \$1 000 y \$1 350 para cada uno de los bonos, respectivamente, podemos resumir las inversiones iniciales en los tres bonos como sigue:

Bono	Unidades compradas	Monto de la inversión
1	$B_1 = 144.988$	$\$1\,150(144.988) = \$166,736$
2	$B_2 = 187.856$	$\$1\,000(187.856) = \$187,856$
3	$B_3 = 228.188$	$\$1\,350(228.188) = \$308,054$

La solución también muestra que \$636,148 (vea  $S_1$ ) se colocará en ahorros al principio del primer año. Al empezar con \$1,728,794, la empresa puede hacer las inversiones en bonos y ahorros especificadas y sobrarle lo suficiente para cumplir con el requerimiento de efectivo de cinco años de \$430,000, del programa de retiro.

La solución óptima de la figura 9.4 muestra que las variables de decisión  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  y  $S_4$  son mayores que cero, lo que indica que se requieren inversiones en ahorros en cada uno de los primeros cuatro años. Sin embargo, el interés de los bonos más los ingresos por el



*En este enfoque, el precio dual puede considerarse como el negativo del valor presente de cada dólar en el requerimiento de efectivo. Por ejemplo, cada dólar que debe pagarse en el año 8 tiene un valor presente de \$0.67084.*

vencimiento de los mismos serán suficientes para cubrir los requerimientos de efectivo del programa de retiro en los años 5 a 8.

Los precios duales tienen una interpretación interesante en esta aplicación. Cada valor del lado derecho corresponde al pago que debe hacerse en ese año. Observe que los precios duales son negativos, lo que significa que sería benéfico reducir el pago en cualquier año, debido a que los fondos totales requeridos para la obligación del programa de retiro serían menos. Además, observe que los precios duales muestran que las reducciones son más benéficas en los primeros años, con beneficios decrecientes en años subsecuentes. Como resultado, Hewlitt se beneficiaría al reducir los requerimientos de efectivo en los primeros años incluso si tuviera que hacer pagos en efectivo equivalentemente mayores en años posteriores.

## NOTAS Y COMENTARIOS

1. La solución óptima para el problema de Hewlitt Corporation muestra números fraccionarios de los bonos del gobierno en 144.988, 187.856 y 228.188 unidades, respectivamente. No obstante, las unidades de bonos fraccionarios por lo general no están disponibles. Si fuéramos conservadores y redondeáramos a 145, 188 y 229 unidades, respectivamente, los fondos totales requeridos para la obligación del programa de retiro serían aproximadamente de \$1 254 más que los fondos totales indicados por la función objetivo. Debido a la magnitud de los fondos involucrados, el redondeo tal vez proporcionaría una solución factible. Si se requiriera una solución de enteros óptima, tendrían que utilizarse los métodos de la programación lineal entera que se cubren en el capítulo 7.
2. Suponemos de manera implícita que el interés de los bonos del gobierno se paga anualmente. Las inversiones como los bonos de la tesorería en realidad proporcionan pagos de intereses cada seis meses. En estos casos, el modelo puede reformularse con periodos de seis meses, con interés o pagos en efectivo que ocurren en ese periodo.

### 9.3

## Aplicaciones en administración de operaciones

Las aplicaciones de la programación lineal desarrolladas para la administración de la producción y de las operaciones incluyen la programación, el proceso de empleo, el control de inventarios y la planeación de la capacidad. En esta sección se describen ejemplos con decisiones de hacer o comprar, programación de la producción y asignaciones de la fuerza de trabajo.

### Una decisión de hacer o comprar

Ilustramos el uso de un modelo de programación lineal para determinar cuánto de cada una de varias partes componentes debe fabricar una empresa y cuánto debe comprar a un proveedor externo. Una decisión de este tipo se conoce como decisión de hacer o comprar.

Janders Company fabrica varios productos para negocios e ingeniería. En la actualidad Janders se prepara para introducir dos calculadoras nuevas: una para el mercado de negocios, llamada Financial Manager, y otra para el mercado de ingeniería que lleva el nombre de Technician. Cada calculadora tiene tres componentes: una base, un cartucho electrónico y una carátula o cubierta. La misma base se utiliza para ambas calculadoras, pero los cartuchos y las cubiertas son diferentes. La empresa puede fabricar todos los componentes o comprarlos a proveedores externos. Los costos de manufactura y los precios de compra para los componentes se resumen en la tabla 9.5.

Los pronosticadores de la empresa señalan que se necesitarán 3 000 calculadoras Financial Manager y 2 000 calculadoras Technician. Sin embargo, la capacidad de manufactura es limitada. La empresa cuenta con 200 horas de tiempo de manufactura normal y 50 horas extra que se pueden programar para las calculadoras. Las horas extra implican una



prima al costo adicional de \$9 la hora. La tabla 9.6 muestra los tiempos de manufactura (en minutos) para los componentes.

**TABLA 9.5** COSTOS DE MANUFACTURA Y PRECIOS DE COMPRA PARA LOS COMPONENTES DE LA CALCULADORA DE JANDERS

Componente	Costo por unidad	
	Tiempo de manufactura (tiempo regular)	Compra
Base	\$0.50	\$0.60
Cartucho de la Financial	\$3.75	\$4.00
Cartucho de la Technician	\$3.30	\$3.90
Cubierta de la Financial	\$0.60	\$0.65
Cubierta de la Technician	\$0.75	\$0.78

**TABLA 9.6** TIEMPOS DE MANUFACTURA EN MINUTOS POR UNIDAD PARA LOS COMPONENTES DE LA CALCULADORA JANDERS

Componente	Tiempo de manufactura
Base	1.0
Cartucho de la Financial	3.0
Cartucho de la Technician	2.5
Cubierta de la Financial	1.0
Cubierta de la Technician	1.5

El problema para Janders es determinar cuántas unidades de cada componente fabricar y cuántas comprar. Las variables de decisión se definen como sigue:

$BM$  = cantidad de bases fabricadas

$BP$  = cantidad de bases compradas

$FCM$  = cantidad de cartuchos de la Financial fabricados

$FCP$  = cantidad de cartuchos de la Financial comprados

$TCM$  = cantidad de cartuchos de la Technician fabricados

$TCP$  = cantidad de cartuchos de la Technician comprados

$FTM$  = cantidad de cubiertas de la Financial fabricadas

$FTP$  = cantidad de cubiertas de la Financial compradas

$TTM$  = cantidad de cubiertas de la Technician fabricadas

$TTP$  = cantidad de cubiertas de la Technician compradas

Se necesita una variable de decisión adicional para determinar las horas extra que deben programarse:

$OT$  = número de horas extra que deben programarse

La función objetivo es minimizar el costo total, incluidos los costos de manufactura, los costos de compra y los costos de horas extra. Utilizando los datos de costo por unidad de la tabla 9.5 y la tarifa del costo de la prima por horas extra de \$9 por hora, escribimos la función objetivo como

$$\begin{aligned} \text{Min } & 0.5BM + 0.6BP + 3.75FCM + 4FCP + 3.3TCM + 3.9TCP + 0.6FTM \\ & + 0.65FTP + 0.75TTM + 0.78TTP + 9OT \end{aligned}$$

Las primeras cinco restricciones especifican el número de cada componente necesario para satisfacer la demanda de 3 000 calculadoras Financial Manager y 2 000 calculadoras Technician. Se necesita un total de 5 000 componentes para base, con la cantidad de los otros componentes dependiendo de la demanda de la calculadora particular. Las cinco restricciones de la demanda son

$$\begin{aligned}
 BM + BP &= 5\,000 && \text{Bases} \\
 FCM + FCP &= 3\,000 && \text{Cartuchos de la Financial} \\
 TCM + TCP &= 2\,000 && \text{Cartuchos de la Technician} \\
 FTM + FTP &= 3\,000 && \text{Cubiertas de la Financial} \\
 TTM + TTP &= 2\,000 && \text{Cubiertas de la Technician}
 \end{aligned}$$

Se necesitan dos restricciones para garantizar que las capacidades de manufactura para el tiempo regular y las horas extra no se excedan. La primera restricción limita la capacidad de tiempo extra a 50 horas, o

$$OT \leq 50$$

La segunda restricción establece que el tiempo de manufactura total requerido para todos los componentes debe ser menor o igual que la capacidad de manufactura total, incluido el tiempo normal más el tiempo extra. Los tiempos de manufactura para los componentes se expresan en minutos, así que establecemos la restricción de la capacidad de manufactura total en minutos, con las 200 horas de capacidad de tiempo normal volviéndose  $60(200) = 12\,000$  minutos. Las horas extra reales requeridas son desconocidas en este punto, así que escribimos estas horas como  $60OT$  minutos. Al usar los tiempos de manufactura de la tabla 9.6 se obtiene

$$BM + 3FCM + 2.5TCM + FTM + 1.5TTM \leq 12\,000 + 60OT$$

Mover la variable de decisión para las horas extra al lado izquierdo de la restricción proporciona la restricción de la capacidad de manufactura:

$$BM + 3FCM + 2.5TCM + FTM + 1.5TTM - 60OT \leq 12\,000$$

La formulación completa del problema de hacer o comprar de Janders con todas las variables de decisión mayores o iguales que cero es

$$\text{Min } 0.5BM + 0.6BP + 3.75FCM + 4FCP + 3.3TCM + 3.9TCP + 0.6FTM + 0.65FTP + 0.75TTM + 0.78TTP + 9OT$$

s.a.

$$\begin{array}{llll}
 BM & & - & BP = 5\,000 \quad \text{Bases} \\
 & FCM & - & FCP = 3\,000 \quad \text{Cartuchos de la Financial} \\
 & & TCM & - & TCP = 2\,000 \quad \text{Cartuchos de la Technician} \\
 & & & FTM & - & FTP = 3\,000 \quad \text{Cubiertas de la Financial} \\
 & & & & TTM & - & TTP = 2\,000 \quad \text{Cubiertas de la Technician} \\
 & & & & & OT \leq 50 \quad \text{Horas extra} \\
 BM + 3FCM + 2.5TCM + FTM + 1.5TTM - 60OT & \leq & 12\,000 & \text{Capacidad de manufactura}
 \end{array}$$

La solución óptima a este programa lineal de 11 variables y 7 restricciones se muestra en la figura 9.5. La solución óptima indica que deben fabricarse 5 000 bases ( $BM$ ), 667 cartuchos de la Financial Manager ( $FCM$ ) y 2 000 cartuchos de la Technician ( $TCM$ ), y deben comprarse los 2 333 cartuchos de la Financial Manager ( $FCP$ ) restantes, todas las cubiertas de la Financial Manager ( $FTP$ ) y todas las cubiertas de la Technician ( $TTP$ ). No es necesario recurrir a horas extra de manufactura, y el costo total asociado con el plan de hacer o comprar óptimo es \$24,443.33.

**FIGURA 9.5** SOLUCIÓN DE MANAGEMENT SCIENTIST PARA EL PROBLEMA DE HACER O COMPRAR DE JANDERS

**WEB** archivo  
Janders

Objective Function Value = 24443.333

Variable	Value	Reduced Costs
BM	5000.000	0.000
BP	0.000	0.017
FCM	666.667	0.000
FCP	2333.333	0.000
TCM	2000.000	0.000
TCP	0.000	0.392
FTM	0.000	0.033
FTP	3000.000	0.000
TTM	0.000	0.095
TTP	2000.00	0.000
OT	0.000	4.000

Constraint	Slack/Surplus	Dual Prices
1	0.000	-0.583
2	0.000	-4.000
3	0.000	-3.508
4	0.000	-0.650
5	0.000	-0.780
6	50.000	0.000
7	0.000	0.083

#### OBJECTIVE COEFFICIENT RANGES

Variable	Lower Limit	Current Value	Upper Limit
BM	No Lower Limit	0.500	0.517
BP	0.583	0.600	No Upper Limit
FCM	3.700	3.750	3.850
FCP	3.900	4.000	4.050
TCM	No Lower Limit	3.300	3.692
TCP	3.508	3.900	No Upper Limit
FTM	0.567	0.600	No Upper Limit
FTP	No Lower Limit	0.650	0.683
TTM	0.655	0.750	No Upper Limit
TTP	No Lower Limit	0.780	0.875
OT	5.000	9.000	No Upper Limit

#### RIGHT HAND SIDE RANGES

Constraint	Lower Limit	Current Value	Upper Limit
1	0.000	5000.000	7000.000
2	666.667	3000.000	No Upper Limit
3	0.000	2000.000	2800.000
4	0.000	3000.000	No Upper Limit
5	0.000	2000.000	No Upper Limit
6	0.000	50.000	No Upper Limit
7	10000.000	12000.000	19000.000

*Las mismas unidades de medida deben utilizarse tanto para el lado izquierdo como para el lado derecho de la restricción. En este caso se usan los minutos.*

El análisis de sensibilidad proporciona alguna información adicional sobre la capacidad de tiempo extra sin usar. La columna de costos reducidos (Reduced Costs) muestra que la prima por horas extra (*OT*) disminuye \$4 por hora antes de que deba considerarse producir en horas extra. Es decir, si la prima de horas extra es  $\$9 - \$4 = \$5$  o menos, tal vez Janders quiera reemplazar algunos de los componentes comprados con componentes fabricados en horas extra.

El precio dual para la restricción 7 de la capacidad de manufactura es 0.083. Este precio indica que una hora adicional de capacidad de manufactura vale \$0.083 por minuto o  $(\$0.083)(60) = \$5$  por hora. El rango del lado derecho para la restricción 7 muestra que esta conclusión es válida hasta que la cantidad de tiempo normal aumente a 19,000 minutos, o 316.7 horas.

El análisis de sensibilidad también indica que un cambio en los precios asignados por los proveedores externos puede afectar a la solución óptima. Por ejemplo, el rango del coeficiente objetivo para *PB* es 0.583 hasta un valor sin límite superior. Si el precio de compra para las bases permanece en \$0.583 o más, la cantidad de bases compradas (*BP*) seguirá siendo cero. Sin embargo, si el precio de compra disminuye por debajo de \$0.583, Janders debe comenzar a comprar en vez de fabricar el componente de la base. Se pueden formular conclusiones parecidas del análisis de sensibilidad sobre los rangos del precio de compra para los demás componentes.

## NOTAS Y COMENTARIOS

La interpretación adecuada del **precio dual** para la capacidad de manufactura (restricción 7) en el problema de Janders, es que una hora adicional de capacidad de manufactura vale  $(\$0.083)(60) = \$5$ . Por tanto, la empresa debería estar dispuesta a pagar una prima de \$5 por hora por encima del costo

del tiempo normal por hora actual, lo cual ya se incluyó en el costo de manufactura del producto. De ahí que si el costo del tiempo normal sea \$18 por hora, Janders debe estar dispuesto a pagar hasta  $\$18 + \$5 = \$23$  por hora para obtener capacidad mano de obra adicional.

## Programación de la producción

Una de las aplicaciones más importantes de la programación lineal es la planeación de múltiples periodos como la programación de la producción. La solución a un problema de programación de la producción permite al gerente establecer un programa eficiente de producción de bajo costo para uno o más productos durante varios periodos (semanas o meses). En esencia, esto puede considerarse como un problema de mezcla de productos para cada uno de varios periodos en el futuro. El gerente debe determinar los niveles de producción que permitan a la empresa cumplir con los requerimientos de la demanda, dadas las limitaciones sobre la producción de la capacidad, la capacidad de mano de obra, el espacio de almacenamiento, al tiempo que se minimizan los costos totales de producción.

Una ventaja de utilizar la programación lineal para los problemas de producción es que son recurrentes, es decir, debe establecerse un programa de producción para el mes actual, luego uno nuevo para el mes siguiente, otro para el mes que le sigue, etc. Cuando estudie el problema cada mes, el gerente de producción encontrará que, aun cuando la demanda de los productos ha cambiado, los tiempos de producción, las capacidades de producción, las limitaciones de espacio de almacenamiento, etc., permanecen más o menos constantes. Por tanto, el gerente de producción básicamente está resolviendo el mismo problema manejado en meses anteriores, y con frecuencia puede aplicarse un modelo de programación lineal general para el procedimiento de programación de la producción. Una vez que se formula el modelo, el gerente puede sencillamente suministrar los datos, es decir, la demanda, las capacidades, etc., para el periodo de producción dado y utilizar el modelo de programación lineal repetidamente para desarrollar el programa de producción. El artículo de MC en Acción, "Optimización de la producción de los manuales de vuelo en Jeppesen Sanderson, Inc.", describe cómo se utiliza la programación lineal para minimizar el costo de producir revisiones semanales de los manuales de vuelo.

**OPTIMIZACIÓN DE LA PRODUCCIÓN DE MANUALES DE VUELO EN JEPPESEN SANDERSON, INC.\***

Jeppesen Sanderson, Inc. fabrica y distribuye manuales de vuelo que contienen información de seguridad a más de 300,000 pilotos y 4000 líneas aéreas. Cada semana Jeppesen envía por correo entre 5 y 30 millones de páginas de revisiones de las cartas de navegación a 200,000 clientes en todo el mundo y recibe aproximadamente 1500 pedidos nuevos cada semana. A finales de la década de 1990, su servicio al cliente se deterioró, ya que sus sistemas de producción y soporte existentes no lograron mantener este nivel de actividad. Para cumplir con los objetivos de servicio, Jeppesen optó por herramientas de apoyo a las decisiones basadas en la optimización para la planeación de la producción.

\*Con base en E. Katok, W. Tarantino y R. Tiedman, "Improving Performance and Flexibility at Jeppesen: The World's Leading Aviation-Information Company", *Interfaces* (enero/febrero de 2001): 7-29.

Jeppesen elaboró un programa lineal a gran escala llamado Scheduler para minimizar el costo de producir revisiones semanales. Las restricciones del modelo incluían restricciones de capacidad y varias reglas internas de la empresa. El modelo tiene 250,000 variables y 40,000-50,000 restricciones. Inmediatamente después de introducir el modelo, Jeppesen estableció un nuevo registro para el número de semanas consecutivas con el 100% de revisiones a tiempo. El programador disminuyó la impuntualidad de las revisiones de aproximadamente 9% a 3% y mejoró drásticamente la satisfacción del cliente. Aún más importante resulta que Scheduler proporcionó un modelo del sistema de producción para que Jeppesen usara el análisis económico estratégico. En general, el uso de las técnicas de optimización en Jeppesen dio como resultado reducciones en los costos de casi 10% y un incremento de 24% en las utilidades.

Considere el caso de la empresa Bollinger Electronics, la cual fabrica dos componentes electrónicos diferentes para un fabricante importante de motores de avión. Cada trimestre, el fabricante notifica a la oficina de ventas de Bollinger sus requerimientos mensuales de componentes para cada uno de los tres meses siguientes. Estos requerimientos para los componentes pueden variar de manera considerable, dependiendo del tipo de motor que el fabricante produzca. El orden mostrado en la tabla 9.7 se acaba de recibir para el siguiente periodo de tres meses.

Después de que se procesa el pedido, se envía un comunicado de demanda al departamento de control de producción, el cual debe entonces desarrollar un plan de producción de tres meses para los componentes. Al llegar al programa deseado, el gerente de producción querrá identificar lo siguiente:

1. Costo de producción total
2. Costo de manejo de inventario
3. Costo del cambio en el nivel de producción

En el resto de esta sección, mostramos cómo formular un modelo de programación lineal del proceso de producción e inventario para que Bollinger Electronics minimice el costo total.

**TABLA 9.7** PROGRAMA DE DEMANDA DE TRES MESES PARA BOLLINGER ELECTRONICS COMPANY

Componente	Abril	Mayo	Junio
322A	1000	3 000	5 000
802B	1000	500	3 000

Para elaborar el modelo, sea  $x_{jm}$  el volumen de producción en unidades para el producto  $i$  en el mes  $m$ . Aquí  $i = 1, 2$  y  $m = 1, 2, 3$ ;  $i = 1$  se refiere al componente 322A,  $i = 2$  se refiere al componente 802B,  $m = 1$  se refiere a abril,  $m = 2$  se refiere a mayo y  $m = 3$  se refiere a junio. El propósito del doble dígito es proporcionar una notación más descriptiva. Sencillamente podríamos usar  $x_6$  para representar la cantidad de unidades del producto 2 en el mes 3, pero  $x_{23}$  es más descriptivo, pues identifica de forma directa el producto y mes representados por la variable.

Si el componente 322A cuesta \$20 por unidad producida y el 802B cuesta \$10 por unidad producida, la parte del costo de producción total de la función objetivo es

$$\text{Costo de producción total} = 20x_{11} + 20x_{12} + 20x_{13} + 10x_{21} + 10x_{22} + 10x_{23}$$

Como el costo de producción por unidad es el mismo cada mes, no necesitamos incluir los costos de producción en la función objetivo; es decir, sin importar el programa de producción seleccionado, el costo de producción total permanecerá igual. En otras palabras, los costos de producción no son relevantes para la decisión de programación de la producción que estamos considerando. En casos donde se espera que el costo de producción por unidad cambie cada mes, los costos de producción variables mensuales por unidad deben incluirse en la función objetivo. La solución para el problema de Bollinger Electronics será la misma sin importar si se incluyen o no estos costos; por consiguiente, los incluimos de modo que el valor de la función objetivo de la programación lineal incluya todos los costos asociados con el problema.

Para incorporar los costos de mantenimiento de inventario relevantes en el modelo, sea  $s_{im}$  el nivel de inventario para el producto  $i$  al final del mes  $m$ . Bollinger determinó que los costos de mantenimiento de inventario mensuales son 1.5% del costo del producto; es decir,  $(0.015)(\$20) = \$0.30$  por unidad para el componente 322A y  $(0.015)(\$10) = \$0.15$  por unidad para el componente 802B. Una suposición común hecha al utilizar el método de la programación lineal para programar la producción es que los inventarios finales mensuales son una aproximación aceptable de los niveles de inventario promedio a lo largo del mes. Al hacer esta suposición, escribimos la porción del costo de mantener el inventario de la función objetivo como

$$\begin{aligned} \text{Costo de mantenimiento de inventario} &= 0.30s_{11} + 0.30s_{12} + 0.30s_{13} \\ &\quad + 0.15s_{21} + 0.15s_{22} + 0.15s_{23} \end{aligned}$$

Para incorporar los costos de las fluctuaciones en los niveles de producción de un mes a otro, debemos definir dos variables adicionales:

$$\begin{aligned} I_m &= \text{incremento en el nivel de producción total necesario durante el mes } m \\ D_m &= \text{disminución en el nivel de producción total necesario durante el mes } m \end{aligned}$$

Después de estimar los efectos de los despidos de empleados, rotaciones, los costos de capacitación para la reasignación, y otros costos asociados con los niveles de producción fluctuantes, Bollinger estima que el costo asociado con el incremento en el nivel de producción para cualquier mes es \$0.50 por incremento unitario. Un costo similar asociado con la disminución del nivel de producción para cualquier mes es \$0.20 por unidad. Por tanto, escribimos la tercera porción de la función objetivo como

$$\begin{aligned} \text{Costos del cambio en el nivel de producción} &= 0.50I_1 + 0.50I_2 + 0.50I_3 \\ &\quad + 0.20D_1 + 0.20D_2 + 0.20D_3 \end{aligned}$$

Observe que el costo asociado con los cambios en el nivel de producción es una función del cambio en la cantidad total de unidades producidas en el mes  $m$  comparado con la cantidad total de unidades producidas en el mes  $m = 1$ . En otras aplicaciones de programación de la producción, las fluctuaciones en el nivel de producción podrían medirse en términos de las horas máquina o las horas requeridas en función de la cantidad total de unidades producidas.

Al combinar los tres costos, la función objetivo completa se vuelve

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & 20x_{11} + 20x_{12} + 20x_{13} + 10x_{21} + 10x_{22} + 10x_{23} + 0.30s_{11} \\ & + 0.30s_{12} + 0.30s_{13} + 0.15s_{21} + 0.15s_{22} + 0.15s_{23} + 0.50I_1 \\ & + 0.50I_2 + 0.50I_3 + 0.20D_1 + 0.20D_2 + 0.20D_3 \end{aligned}$$

Ahora considere las restricciones. Primero debemos garantizar que el programa cumple con la demanda del cliente. Dado que las unidades embarcadas pueden provenir de la producción del mes actual o del inventario acumulado de los meses anteriores, el requerimiento de la demanda toma la forma

$$\begin{pmatrix} \text{Inventario} \\ \text{final} \\ \text{del mes} \\ \text{anterior} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Producción} \\ \text{actual} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Inventario} \\ \text{final} \\ \text{de este} \\ \text{mes} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Demanda} \\ \text{de este mes} \end{pmatrix}$$

Suponga que los inventarios al principio del periodo de programación de tres meses fueron 500 unidades para el componente 322A y 200 unidades para el componente 802B. La demanda para ambos productos en el primer mes (abril) fue de 100 unidades, así que las restricciones para cumplir con la demanda en el primer mes se vuelven

$$\begin{aligned} 500 + x_{11} - s_{11} &= 1000 \\ 200 + x_{21} - s_{21} &= 1000 \end{aligned}$$

Al mover las constantes al lado derecho se obtiene

$$\begin{aligned} x_{11} - s_{11} &= 500 \\ x_{21} - s_{21} &= 800 \end{aligned}$$

Del mismo modo, necesitamos restricciones de la demanda para ambos productos en el segundo y tercer mes. Las escribimos como sigue:

#### Mes 2

$$\begin{aligned} s_{11} + x_{12} - s_{12} &= 3000 \\ s_{21} + x_{22} - s_{22} &= 500 \end{aligned}$$

#### Mes 3

$$\begin{aligned} s_{12} + x_{13} - s_{13} &= 5000 \\ s_{22} + x_{23} - s_{23} &= 3000 \end{aligned}$$

Si la empresa especifica un nivel de inventario mínimo al final del periodo de tres meses de por lo menos 400 unidades del componente 322A y 200 unidades del componente 802B, podemos añadir las restricciones

$$\begin{aligned} s_{13} &\geq 400 \\ s_{23} &\geq 200 \end{aligned}$$

Suponga que la tabla 9.8 contiene información adicional sobre la capacidad de máquina, de mano de obra y de almacenamiento. Los requerimientos de la máquina, la mano de obra y el espacio de almacenamiento se proporcionan en la tabla 9.9. Para reflejar estas limitaciones son necesarias las restricciones siguientes:

#### Capacidad de la máquina

$$\begin{aligned} 0.10x_{11} + 0.08x_{21} &\leq 400 && \text{Mes 1} \\ 0.10x_{12} + 0.08x_{22} &\leq 500 && \text{Mes 2} \\ 0.10x_{13} + 0.08x_{23} &\leq 600 && \text{Mes 3} \end{aligned}$$

**TABLA 9.8** CAPACIDADES DE MÁQUINA, MANO DE OBRA Y ALMACENAMIENTO PARA BOLLINGER ELECTRONICS

Mes	Capacidad de máquina (horas)	Capacidad de mano de obra (horas)	Capacidad de almacenamiento (pies cuadrados)
Abril	400	300	10,000
Mayo	500	300	10,000
Junio	600	300	10,000

**TABLA 9.9** REQUERIMIENTOS DE MÁQUINA, MANO DE OBRA Y ALMACENAMIENTO PARA LOS COMPONENTES 322A Y 802B

Componente	Máquina (horas/unidad)	Mano de obra (horas/unidad)	Almacenamiento (pies cuadrados/unidad)
322A	0.10	0.05	2
802B	0.08	0.07	3

**Capacidad de la mano de obra**

$$0.05x_{11} + 0.07x_{21} \leq 300 \quad \text{Mes 1}$$

$$0.05x_{12} + 0.07x_{22} \leq 300 \quad \text{Mes 2}$$

$$0.05x_{13} + 0.07x_{23} \leq 300 \quad \text{Mes 3}$$

**Capacidad de almacenamiento**

$$2s_{11} + 3s_{21} \leq 10,000 \quad \text{Mes 1}$$

$$2s_{12} + 3s_{22} \leq 10,000 \quad \text{Mes 2}$$

$$2s_{13} + 3s_{23} \leq 10,000 \quad \text{Mes 3}$$

Un conjunto final de restricciones debe añadirse para garantizar que  $I_m$  y  $D_m$  reflejen el incremento o la disminución en el nivel de producción total para el mes  $m$ . Suponga que los niveles de producción para marzo, el mes anterior al inicio del periodo actual de programación de la producción, han sido 1500 unidades del componente 322A y 1000 unidades del componente 802B para un nivel de producción total de  $1500 + 1000 = 2500$  unidades. Podemos encontrar la cantidad del cambio en la producción de la relación para abril

$$\text{Producción de abril} - \text{Producción de marzo} = \text{Cambio}$$

Al utilizar las variables de producción de abril,  $x_{11}$  y  $x_{21}$ , y la producción de marzo de 2500 unidades se obtiene

$$(x_{11} + x_{21}) - 2500 = \text{Cambio}$$

Observe que el cambio puede ser positivo o negativo. Un cambio positivo refleja un incremento en el nivel de producción total, y un cambio negativo refleja una disminución en el nivel de producción total. Podemos utilizar el incremento en la producción para abril,  $I_1$ ,



y la disminución en la producción para abril,  $D_1$ , a fin de especificar la restricción para el cambio en la producción total para abril:

$$(x_{11} + x_{21}) - 2500 = I_1 - D_1$$

Desde luego, no podemos tener un incremento y una disminución en la producción durante el mismo periodo de un mes; por tanto, ya sea,  $I_1$  o  $D_1$  serán cero. Si abril requiere 3 000 unidades de producción,  $I_1 = 500$  y  $D_1 = 0$ . Si abril requiere 2200 unidades de producción,  $I_1 = 0$  y  $D_1 = 300$ . Este enfoque de denotar el cambio en el nivel de producción como la diferencia entre dos variables no negativas,  $I_1$  y  $D_1$ , permite cambios tanto positivos como negativos en el nivel de producción total. Si se ha utilizado sólo una variable (por ejemplo,  $c_m$ ) para representar el cambio en el nivel de producción, sólo serían posibles los cambios positivos debido al requisito de no negatividad.

Utilizando el mismo enfoque en mayo y junio (restando siempre la producción total del mes anterior a la producción total del mes actual), se obtienen las restricciones para el segundo y tercer mes del periodo de programación de la producción:

$$(x_{12} + x_{22}) - (x_{11} + x_{21}) = I_2 - D_2$$

$$(x_{13} + x_{23}) - (x_{12} + x_{22}) = I_3 - D_3$$

Al colocar las variables en el lado izquierdo y las constantes en el lado derecho, se obtiene el conjunto completo de lo que comúnmente se conoce como restricciones de suavización de la producción:

$$\begin{array}{rcl} x_{11} + x_{21} & & - I_1 + D_1 = 2500 \\ -x_{11} - x_{21} + x_{12} + x_{22} & & - I_2 + D_2 = 0 \\ -x_{12} - x_{22} + x_{13} + x_{23} - I_3 + D_3 = 0 \end{array}$$

El problema de programación de tres meses y dos productos, inicialmente pequeño, ahora se ha convertido en un problema de programación lineal de 18 variables y 20 restricciones. Note que en este problema nos preocupa sólo un tipo de proceso de máquina, un tipo de mano de obra y un tipo de área de almacenamiento. Los problemas actuales de programación de la producción involucran varios tipos de máquinas, diversos grados de mano de obra o varias áreas de almacenamiento, que requieren programas lineales a gran escala. Por ejemplo, un problema que involucra 100 productos durante un periodo de 12 meses tiene más de 1000 variables y restricciones.

La figura 9.6 muestra la solución óptima para el problema de programación de la producción de Bollinger Electronics. La tabla 9.10 contiene una porción del informe gerencial basado en la solución óptima.

Considere la variación mensual del programa de producción y de inventario mostrado en la tabla 9.10. Recuerde que el costo de inventario para el componente 802B es un medio del costo de inventario para el componente 322A. Por consiguiente, como podría esperarse, el componente 802B se produce de forma intensiva en el primer mes (abril) y luego se mantiene en inventario para la demanda que ocurrirá en los meses futuros. El componente 322A tiende a fabricarse cuando se necesita y sólo se mantienen en inventario cantidades pequeñas.

Los costos de aumentar y disminuir el volumen de producción total tienden a suavizar las variaciones mensuales. De hecho, el programa de costo mínimo exige un incremento de 500 unidades en la producción total de abril y un incremento de 2 200 unidades en la producción total de mayo. El nivel de producción de mayo de 5 200 unidades se mantiene luego durante junio.

La sección del uso de maquinaria del informe muestra una amplia capacidad instalada de maquinaria en los tres meses. Sin embargo, la capacidad de mano de obra se utiliza por completo (holgura = 0 para la restricción 13 de la figura 9.6) en mayo. El precio dual muestra que una hora adicional de capacidad de mano de obra en mayo mejorará el valor de la solución óptima (costo más bajo) en aproximadamente \$1.11.

*El problema 19 consiste en la aplicación de la programación de producción con restricciones de suavización de mano de obra.*

*Los modelos de programación lineal para la programación de la producción con frecuencia son muy grandes. Se necesitan miles de variables de decisión y restricciones cuando el problema involucra varios productos, máquinas y periodos. La colección de datos para los problemas a gran escala puede consumir más tiempo que la formulación del modelo o la generación de la solución por computadora.*

**FIGURA 9.6** SOLUCIÓN DE THE MANAGEMENT SCIENTIST PARA EL PROBLEMA DE BOLLINGER ELECTRONICS

Objective Function Value = 225295.000

Variable	Value	Reduced Costs
-----	-----	-----
X11	500.000	0.000
X12	3200.000	0.000
X13	5200.000	0.000
X21	2500.000	0.000
X22	2000.000	0.000
X23	0.000	0.128
S11	0.000	0.172
S12	200.000	0.000
S13	400.000	0.000
S21	1700.000	0.000
S22	3200.000	0.000
S23	200.000	0.000
I1	500.000	0.000
I2	2200.000	0.000
I3	0.000	0.072
D1	0.000	0.700
D2	0.000	0.700
D3	0.000	0.628

Constraint	Slack/Surplus	Dual Prices
-----	-----	-----
1	0.000	-20.000
2	0.000	-10.000
3	0.000	-20.128
4	0.000	-10.150
5	0.000	-20.428
6	0.000	-10.300
7	0.000	-20.728
8	0.000	-10.450
9	150.000	0.000
10	20.000	0.000
11	80.000	0.000
12	100.000	0.000
13	0.000	1.111
14	40.000	0.000
15	4900.000	0.000
16	0.000	0.000
17	8600.000	0.000
18	0.000	0.500
19	0.000	0.500
20	0.000	0.428

**TABLA 9.10** INFORMACIÓN DEL PROGRAMA DE PRODUCCIÓN DE COSTO MÍNIMO PARA EL PROBLEMA DE BOLLINGER ELECTRONICS

Actividad	Abril	Mayo	Junio
Producción			
Componente 322A	500	3 200	5 200
Componente 802B	<u>2 500</u>	<u>2 000</u>	<u>0</u>
Totales	3 000	5 200	5 200
Inventario final			
Componente 322A	0	200	400
Componente 802B	1 700	3 200	200
Uso de máquina			
Horas programadas	250	480	520
Horas de capacidad de holgura	150	20	80
Uso de mano de obra			
Horas programadas	200	300	260
Horas de capacidad de holgura	100	0	40
Uso de almacenamiento			
Almacenamiento programado	5 100	10 000	1 400
Capacidad de holgura	4 900	0	8 600
Costo total de producción, inventario y suavización de la producción = \$225 295			

Un modelo de programación lineal de un sistema de producción de tres meses y dos productos puede proporcionar información valiosa para identificar un programa de producción de costo mínimo. En sistemas de producción más grandes, donde el número de variables y restricciones es considerable para rastrearlas de forma manual, los modelos de programación lineal pueden proporcionar una ventaja significativa en la elaboración de programas de producción que ahorran costos. El artículo de MC en Acción, “Optimización de la producción, el inventario y la distribución en Kellogg Company”, ilustra el uso de un programa lineal multiperiodo a gran escala para planear la producción y la distribución.

### Asignación de la fuerza de trabajo

Los problemas de asignación de la fuerza de trabajo con frecuencia ocurren cuando los gerentes de producción deben tomar decisiones que involucren requerimientos de proceso de empleo para un periodo de planeación dado. Las asignaciones de la fuerza de trabajo a menudo tienen cierta flexibilidad, y por lo menos parte del personal puede asignarse a más de un departamento o centro de trabajo. Tal es el caso cuando los empleados tienen capacidades cruzadas y pueden dedicarse a dos o más tareas, por ejemplo, cuando el personal de ventas puede transferirse a otras tiendas. En la aplicación siguiente se muestra cómo se utiliza la programación lineal para determinar no sólo una mezcla de productos óptima, sino también una asignación de la fuerza de trabajo óptima.

McCormick Manufacturing Company fabrica dos productos con contribuciones a las utilidades por unidad de \$10 y \$9, respectivamente. Los requerimientos de mano de obra por unidad producida y las horas totales de mano de obra disponibles del personal asignado a cada uno de los cuatro departamentos se muestran en la tabla 9.11. Suponiendo que el número de horas disponibles en cada departamento es fijo, podemos formular el problema de McCormick como un programa lineal de mezcla de productos estándar con las siguientes variables de decisión:

$$P_1 = \text{unidades del producto 1}$$

$$P_2 = \text{unidades del producto 2}$$

**MC en ACCIÓN**
**OPTIMIZACIÓN DE LA PRODUCCIÓN, EL INVENTARIO Y LA DISTRIBUCIÓN EN KELLOGG COMPANY.\***

Kellogg Company es el productor de cereal más grande del mundo y líder en la producción de alimentos de preparación rápida, como las barras de cereal Pop-Tarts y Nutri-Grain de Kellogg. Kellogg produce más de 40 cereales diferentes en plantas de 19 países, en seis continentes; comercializa sus productos en más de 160 países y emplea más de 15 600 personas en su organización en todo el mundo. Tan sólo en el negocio del cereal coordina la producción de alrededor de 80 productos, utilizando aproximadamente 90 líneas de producción y 180 líneas de empaque.

Kellogg tiene una larga historia de uso de la programación lineal para la planeación de la producción y la distribución. El sistema de planeación de Kellogg (KPS)

es un programa lineal multiperiodo a gran escala. La versión operativa de KPS toma decisiones de producción, inventario y distribución semanalmente. El principal objetivo del sistema es minimizar el costo total de cumplir con la demanda estimada; las restricciones involucran capacidades de la línea de procesamiento, capacidades de la línea de empaque y satisfacer los requerimientos del inventario de seguridad.

Una versión táctica de KPS ayuda a establecer los presupuestos de la planta y a tomar decisiones de expansión de la capacidad y de consolidación mensualmente. La versión táctica se utilizó hace poco para guiar una consolidación de la capacidad de producción que dio como resultado ahorros proyectados de \$35 a \$40 millones por año. Debido al éxito que Kellogg ha tenido utilizando KPS en sus operaciones en Norteamérica, la ahora empresa introduce KPS en América Latina, y estudia el desarrollo global de este modelo.

\*Con base en G. Elrown, J. Keegan, B. Vigus y K. Wood, "The Kellogg Company Optimizes Production, Inventory, and Distribution", *Interfaces* (noviembre/diciembre de 2001): 1-15.

El programa lineal es

$$\begin{aligned}
 &\text{Max} \quad 10P_1 + 9P_2 \\
 &\text{s.a.} \quad \\
 &\quad 0.65P_1 + 0.95P_2 \leq 6500 \\
 &\quad 0.45P_1 + 0.85P_2 \leq 6000 \\
 &\quad 1.00P_1 + 0.70P_2 \leq 7000 \\
 &\quad 0.15P_1 + 0.30P_2 \leq 1400 \\
 &\quad P_1, P_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

La solución óptima al modelo de programación lineal se muestra en la figura 9.7. Después de redondear, requiere 5 744 unidades del producto 1, 1795 del 2, y utilidades totales de \$73,590. Con esta solución óptima, los departamentos 3 y 4 operan a su capacidad; los

**TABLA 9.11** HORAS DE MANO DE OBRA POR UNIDAD POR DEPARTAMENTO Y HORAS TOTALES DISPONIBLES PARA MCCORMICK MANUFACTURING COMPANY

Departamento	Horas de mano de obra por unidad		Horas totales disponibles
	Producto 1	Producto 2	
1	0.65	0.95	6 500
2	0.45	0.85	6 000
3	1.00	0.70	7 000
4	0.15	0.30	1 400

**FIGURA 9.7** SOLUCIÓN DE THE MANAGEMENT SCIENTIST PARA EL PROBLEMA DE MCCORMICK MANUFACTURING COMPANY SIN EMPLEADOS

**WEB** archivo  
McCormick

Objective Function Value =			73589.744
Variable	Value	Reduced Costs	
P1	5743.590	0.000	
P2	1794.872	0.000	
Constraint	Slack/Surplus	Dual Prices	
1	1061.538	0.000	
2	1889.744	0.000	
3	0.000	8.462	
4	0.000	10.256	

departamentos 1 y 2 tienen una holgura de aproximadamente 1062 y 1890 horas, respectivamente. Podríamos anticipar que la mezcla de productos cambiaría y que las utilidades totales aumentarían si la asignación de los empleados podría revisarse de modo que la holgura, o las horas sin usar, en los departamentos 1 y 2 podrían transferirse a los departamentos que actualmente trabajan a toda su capacidad. Sin embargo, el gerente de producción puede no estar seguro de cómo debe reasignarse el personal entre los cuatro departamentos. Ampliemos el modelo de programación lineal para incluir variables de decisión que ayudarán a determinar la asignación de la fuerza de trabajo óptima además de la mezcla de productos que maximiza las utilidades.

Suponga que McCormick tiene un programa de capacitación interdisciplinario que permite transferir a algunos empleados entre departamentos. Al aprovechar las habilidades cruzadas, un número limitado de empleados y horas de mano de obra, puede transferirse de un departamento a otro. Por ejemplo, suponga que la capacitación cruzada permite transferencias como se aprecia en la tabla 9.12. La fila 1 de esta tabla muestra que algunos empleados asignados al departamento 1 tienen habilidades cruzadas que les permiten transferirlos al departamento 2 o 3. La columna de la derecha muestra que, para el periodo de planeación de la producción actual, se puede transferir un máximo de 400 horas del departamento 1. Capacidades y habilidades de transferencia cruzada similares se muestran para los departamentos 2, 3 y 4.

**TABLA 9.12** INFORMACIÓN DE HABILIDADES Y CAPACIDADES CRUZADAS

Del departamento	Transferencias cruzadas permitidas al departamento				Horas máximas transferibles
	1	2	3	4	
1	—	Sí	Sí	—	400
2	—	—	Sí	Sí	800
3	—	—	—	Sí	100
4	Sí	Sí	—	—	200

Cuando las asignaciones de la fuerza de trabajo son flexibles, no sabemos automáticamente cuántas horas de mano de obra deben asignarse o transferirse de cada departamento. Debemos añadir variables de decisión al modelo de programación lineal para representar estos cambios.

$b_i$  = las horas de mano de obra asignadas al departamento  $i$  para  $i = 1, 2, 3$  y  $4$

$t_{ij}$  = las horas de mano de obra transferidas del departamento  $i$  al departamento  $j$

*Los lados derechos se tratan ahora como variables de decisión.*

Con la adición de las variables de decisión  $b_1, b_2, b_3$  y  $b_4$ , escribimos las restricciones de capacidad para los cuatro departamentos como sigue:

$$0.65P_1 + 0.95P_2 \leq b_1$$

$$0.45P_1 + 0.85P_2 \leq b_2$$

$$1.00P_1 + 0.70P_2 \leq b_3$$

$$0.15P_1 + 0.30P_2 \leq b_4$$

Como  $b_1, b_2, b_3$  y  $b_4$  ahora son variables de decisión, seguimos la práctica estándar de colocar estas variables en el lado izquierdo de las desigualdades, y las primeras cuatro restricciones del modelo de programación lineal se vuelven

$$0.65P_1 + 0.95P_2 - b_1 \leq 0$$

$$0.45P_1 + 0.85P_2 - b_2 \leq 0$$

$$1.00P_1 + 0.70P_2 - b_3 \leq 0$$

$$0.15P_1 + 0.30P_2 - b_4 \leq 0$$

Las horas de mano de obra asignadas en última instancia a cada departamento deben determinarse por medio de una serie de ecuaciones para equilibrar la mano de obra, o restricciones, que incluyen el número de horas asignadas inicialmente a cada departamento, más el número de horas transferidas hacia el departamento, menos el número de horas transferidas hacia fuera del departamento. Utilizando el departamento 1 como ejemplo, determinamos la asignación de la fuerza de trabajo como sigue:

$$b_1 = \left( \begin{array}{c} \text{Horas} \\ \text{iniciales en el} \\ \text{departamento 1} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{Horas} \\ \text{transferidas al} \\ \text{departamento 1} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \text{Horas} \\ \text{transferidas del} \\ \text{departamento 1} \end{array} \right)$$

La tabla 9.11 muestra 6500 horas asignadas inicialmente al departamento 1. Utilizamos las variables de decisión de transferencia  $t_{i1}$  para denotar las transferencias hacia el departamento 1 y  $t_{1j}$  para indicar las transferencias desde el departamento 1. La tabla 9.12 muestra que las capacidades de capacitación cruzada que involucran al departamento 1 están restringidas a transferencias desde el departamento 4 (variable  $t_{41}$ ) y a transferencias, ya sea al departamento 2 o al 3 (variables  $t_{12}$  y  $t_{13}$ ). Por tanto, podemos expresar la asignación de la fuerza de trabajo total para el departamento 1 como

$$b_1 = 6500 + t_{41} - t_{12} - t_{13}$$

Al mover las variables de decisión para las transferencias de empleados al lado izquierdo, tenemos la ecuación de equilibrio de la mano de obra, o restricción

$$b_1 - t_{41} + t_{12} + t_{13} = 6500$$

Esta forma de restricción se necesitará para cada uno de los cuatro departamentos. Por tanto, las siguientes restricciones de equilibrio de la mano de obra para los departamentos 2, 3 y 4 se añadirán al modelo:

$$b_2 - t_{12} - t_{42} + t_{23} + t_{24} = 6000$$

$$b_2 - t_{13} - t_{23} + t_{34} = 7000$$

$$b_4 - t_{24} - t_{34} + t_{41} + t_{42} = 1400$$

Las variaciones en el modelo de asignación de empleados podrían utilizarse en situaciones como la asignación de recursos de materias primas para los productos, la asignación de tiempo de máquina a los productos y la asignación del tiempo de la fuerza de ventas a tiendas o regiones de ventas.

Por último, la tabla 9.12 muestra que el número de horas que puede transferirse desde cada departamento está limitado, lo que indica que una restricción de la capacidad de transferencia debe añadirse a cada uno de los cuatro departamentos. Las restricciones adicionales son

$$t_{12} + t_{13} \leq 400$$

$$t_{23} + t_{24} \leq 800$$

$$t_{34} \leq 100$$

$$t_{41} + t_{42} \leq 200$$

El modelo de programación lineal completo tiene dos variables de decisión de productos ( $P_1$  y  $P_2$ ), cuatro variables de asignación de la fuerza de trabajo a los departamentos ( $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  y  $b_4$ ), siete variables de transferencia ( $t_{12}$ ,  $t_{13}$ ,  $t_{23}$ ,  $t_{24}$ ,  $t_{34}$ ,  $t_{41}$  y  $t_{42}$ ) y 12 restricciones. La figura 9.8 muestra la solución óptima para este programa lineal.

**FIGURA 9.8** SOLUCIÓN DE THE MANAGEMENT SCIENTIST PARA EL PROBLEMA DE MCCORMICK MANUFACTURING COMPANY

Objective Function Value =			84011.299
Variable	Value	Reduced Costs	
P1	6824.859	0.000	
P2	1751.412	0.000	
B1	6100.000	0.000	
B2	5200.000	0.000	
B3	8050.847	0.000	
B4	1549.153	0.000	
T12	0.000	8.249	
T13	400.000	0.000	
T23	650.847	0.000	
T24	149.153	0.000	
T34	0.000	0.000	
T41	0.000	7.458	
T42	0.000	8.249	
Constraint	Slack/Surplus	Dual Prices	
1	0.000	0.791	
2	640.113	0.000	
3	0.000	8.249	
4	0.000	8.249	
5	0.000	0.791	
6	0.000	0.000	
7	0.000	8.249	
8	0.000	8.249	
9	0.000	7.458	
10	0.000	8.249	
11	100.000	0.000	
12	200.000	0.000	

**WEB** archivo

**McCormickMod**

Las utilidades de McCormick pueden aumentar en  $\$84,011 - \$73,590 = \$10,421$  al aprovechar la capacitación cruzada y las transferencias de empleados. La mezcla de productos óptima de 6 825 unidades del producto 1 y 1 751 unidades del producto 2 puede lograrse si  $t_{13} = 400$  horas se transfieren del departamento 1 al departamento 3;  $t_{23} = 651$  horas se transfieren del departamento 2 al 3, y  $t_{24} = 149$  horas se transfieren del departamento 2 al 4, lo que da como resultado que las asignaciones de la fuerza de trabajo para los departamentos 1-4 proporcionen 6 100, 5 200, 8 051 y 1 549 horas, respectivamente.

Si un gerente tiene la flexibilidad de asignar personal a diferentes departamentos, entonces se tendrá como resultado un menor tiempo de inactividad de los empleados, una mejor utilización de los empleados y mayores utilidades. El modelo de programación lineal en esta sección asigna de forma automática los empleados y las horas de mano de obra a los departamentos de la manera más rentable.

## Problemas de mezcla

Los problemas de mezcla surgen siempre que debemos decidir cómo mezclar dos o más fuentes para producir uno o más productos. En estas situaciones, los recursos contienen uno o más ingredientes esenciales que deben mezclarse en los productos finales que contendrán porcentajes específicos de cada uno. En la mayoría de estas aplicaciones, por tanto, la gerencia debe decidir cuánto de cada recurso comprar para satisfacer las especificaciones del producto y las demandas del mismo a un costo mínimo.

Los problemas de mezcla ocurren con frecuencia en la industria del petróleo (por ejemplo, la mezcla de petróleo crudo para producir gasolinas de diferentes octanajes), la industria química (por ejemplo, la mezcla de productos químicos para producir fertilizantes y herbicidas) y la industria alimenticia (por ejemplo, la mezcla de ingredientes para producir bebidas refrescantes y sopas). En esta sección ilustramos cómo aplicar la programación lineal a un problema de mezcla en la industria petrolera.

La compañía petrolera Grand Strand produce gasolina regular y premium para estaciones de servicio independientes en el sureste de Estados Unidos. La refinería de Grand Strand fabrica los productos de gasolina al mezclar tres componentes de petróleo. Las gasolinas se venden a diferentes precios, y los componentes de petróleo tienen distintos costos. La empresa quiere determinar cómo mezclar o combinar los tres componentes en los dos productos de gasolina y maximizar las utilidades.

Los datos disponibles muestran que la gasolina regular se puede vender a \$2.90 por galón y la premium a \$3.00 por galón. Para el periodo de planeación de la producción actual, Grand Strand puede obtener los tres componentes de petróleo al costo por galón y en las cantidades mostradas en la tabla 9.13.

Las especificaciones de producto para las gasolinas regular y premium restringen la cantidad de cada componente que se puede usar en cada producto de gasolina. La tabla 9.14 lista las especificaciones de producto. Los compromisos actuales con los distribuidores requieren que Grand Strand produzca por lo menos 10,000 galones de gasolina regular.

**TABLA 9.13** COSTO Y SUMINISTRO DE PETRÓLEO PARA EL PROBLEMA DE MEZCLA DE GRAND STRAND

Componente de petróleo	Costo/Galón	Máximo disponible
1	\$2.50	5,000 galones
2	\$2.60	10,000 galones
3	\$2.84	10,000 galones



**TABLA 9.14** ESPECIFICACIONES DE LOS PRODUCTOS PARA EL PROBLEMA DE MEZCLA DE GRAND STRAND

Producto	Especificaciones
Gasolina regular	Máximo 30% del componente 1 Por lo menos 40% del componente 2 Máximo 20% del componente 3
Gasolina premium	Por lo menos 25% del componente 1 Máximo 45% del componente 2 Por lo menos 30% del componente 3

El problema de mezcla de Grand Strand es determinar cuántos galones de cada componente deben usarse en la mezcla de gasolina regular y cuántos en la mezcla de gasolina premium. La solución de mezcla óptima debe maximizar las utilidades de la empresa, sujetas a las restricciones sobre los suministros de petróleo disponibles que aparecen en la tabla 9.13, las especificaciones de producto mostradas en la tabla 9.14 y los 10,000 galones requeridos de gasolina regular.

Definimos las variables de decisión como

$$x_{ij} = \text{galones del componente } i \text{ usado en la gasolina } j, \\ \text{donde } i = 1, 2 \text{ o } 3 \text{ para los componentes } 1, 2 \text{ o } 3, \\ \text{y } j = r \text{ si es regular, o } j = p \text{ si es premium}$$

Las seis variables de decisión son

$$\begin{aligned} x_{1r} &= \text{galones del componente 1 en la gasolina regular} \\ x_{2r} &= \text{galones del componente 2 en la gasolina regular} \\ x_{3r} &= \text{galones del componente 3 en la gasolina regular} \\ x_{1p} &= \text{galones del componente 1 en la gasolina premium} \\ x_{2p} &= \text{galones del componente 2 en la gasolina premium} \\ x_{3p} &= \text{galones del componente 3 en la gasolina premium} \end{aligned}$$

El número total de galones de cada tipo de gasolina producida es la suma del número de galones producidos usando cada uno de los tres componentes de petróleo.

#### Total de galones producidos

$$\begin{aligned} \text{Gasolina regular} &= x_{1r} + x_{2r} + x_{3r} \\ \text{Gasolina premium} &= x_{1p} + x_{2p} + x_{3p} \end{aligned}$$

Los galones totales de cada componente de petróleo se calculan de un modo similar.

#### Uso total del componente de petróleo

$$\begin{aligned} \text{Componente 1} &= x_{1r} + x_{1p} \\ \text{Componente 2} &= x_{2r} + x_{2p} \\ \text{Componente 3} &= x_{3r} + x_{3p} \end{aligned}$$

Desarrollamos la función objetivo de la maximización de la contribución a las utilidades al identificar la diferencia entre los ingresos totales de ambas gasolinas y el costo total de los tres componentes de petróleo. Al multiplicar el precio de \$2.90 por galón por los galones totales de gasolina regular, el precio de \$3.00 por galón por los galones totales de gasolina premium, y las cifras del costo por galón del componente que aparecen en la tabla 9.13 por los galones totales de cada componente empleado, se obtiene la función objetivo:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & 2.90(x_{1r} + x_{2r} + x_{3r}) + 3.00(x_{1p} + x_{2p} + x_{3p}) \\ & - 2.50(x_{1r} + x_{1p}) - 2.60(x_{2r} + x_{2p}) - 2.84(x_{3r} + x_{3p}) \end{aligned}$$

Cuando combinamos los términos, la función objetivo se vuelve

$$\text{Max} \quad 0.40x_{1r} + 0.30x_{2r} + 0.06x_{3r} + 0.50x_{1p} + 0.40x_{2p} + 0.16x_{3p}$$

Las limitaciones sobre la disponibilidad de los tres componentes de petróleo son

$$\begin{aligned} x_{1r} + x_{1p} &\leq 5,000 && \text{Componente 1} \\ x_{2r} + x_{2p} &\leq 10,000 && \text{Componente 2} \\ x_{3r} + x_{3p} &\leq 10,000 && \text{Componente 3} \end{aligned}$$

Ahora se requieren seis restricciones para cumplir con las especificaciones de los productos establecidas en la tabla 9.14. La primera especificación establece que el componente 1 puede constituir no más de 30% de los galones totales de gasolina regular producidos. Es decir

$$x_{1r} \leq 0.30(x_{1r} + x_{2r} + x_{3r})$$

Al rescribir esta restricción con las variables en el lado izquierdo y una constante en el lado derecho se obtiene

$$0.70x_{1r} - 0.30x_{2r} - 0.30x_{3r} \leq 0$$

La segunda especificación de producto listada en la tabla 9.14 se vuelve

$$x_{2r} \geq 0.40(x_{1r} + x_{2r} + x_{3r})$$

y por tanto

$$-0.40x_{1r} + 0.60x_{2r} - 0.40x_{3r} \geq 0$$

De manera similar, escribimos las cuatro especificaciones de mezcla restantes listadas en la tabla 9.14 como

$$\begin{aligned} -0.20x_{1r} - 0.20x_{2r} + 0.80x_{3r} &\leq 0 \\ +0.75x_{1r} - 0.25x_{2p} - 0.25x_{3p} &\geq 0 \\ -0.45x_{1p} + 0.55x_{2p} - 0.45x_{3p} &\leq 0 \\ -0.30x_{1p} - 0.30x_{2p} + 0.70x_{3p} &\geq 0 \end{aligned}$$

La restricción para por lo menos 10000 galones de gasolina regular es

$$x_{1r} + x_{2r} + x_{3r} \geq 10,000$$

El modelo de programación lineal completo con seis variables de decisión y 10 restricciones es

$$\begin{aligned}
 \text{Max} \quad & 0.40x_{1r} + 0.30x_{2r} + 0.06x_{3r} + 0.50x_{1p} + 0.40x_{2p} + 0.16x_{3p} \\
 \text{s.a.} \quad & \\
 & x_{1r} + x_{1p} \leq 5,000 \\
 & \quad x_{2r} + x_{2p} \leq 10,000 \\
 & \quad \quad x_{3r} + x_{3p} \leq 10,000 \\
 & 0.70x_{1r} - 0.30x_{2r} - 0.30x_{3r} \leq 0 \\
 & -0.40x_{1r} + 0.60x_{2r} - 0.40x_{3r} \geq 0 \\
 & -0.20x_{1r} - 0.20x_{2r} + 0.80x_{3r} \leq 0 \\
 & \quad \quad \quad 0.75x_{1p} - 0.25x_{2p} - 0.25x_{3p} \geq 0 \\
 & \quad \quad \quad -0.45x_{1p} + 0.55x_{2p} - 0.45x_{3p} \leq 0 \\
 & \quad \quad \quad -0.30x_{1p} - 0.30x_{2p} + 0.70x_{3p} \geq 0 \\
 & x_{1r} + x_{2r} + x_{3r} \geq 10,000 \\
 & x_{1r}, x_{2r}, x_{3r}, x_{1p}, x_{2p}, x_{3p} \geq 0
 \end{aligned}$$

La solución óptima para el problema de mezcla de Grand Strand se muestra en la figura 9.9. La solución óptima, que proporciona utilidades de \$7 100, se resume en la tabla 9.15. La estrategia de mezcla óptima muestra que deben producirse 10,000 galones de gasolina regular.

**FIGURA 9.9** SOLUCIÓN DE THE MANAGEMENT SCIENTIST PARA EL PROBLEMA DE MEZCLA DE GRAND STRAND

**WEB** archivo  
Grand

Objective Function Value =			7100.000
Variable	Value	Reduced Costs	
X1R	1250.000	0.000	
X2R	6750.000	0.000	
X3R	2000.000	0.000	
X1P	3750.000	0.000	
X2P	3250.000	0.000	
X3P	8000.000	0.000	
Constraint	Slack/Surplus	Dual Prices	
1	0.000	0.500	
2	0.000	0.400	
3	0.000	0.160	
4	1750.000	0.000	
5	2750.000	0.000	
6	0.000	0.000	
7	0.000	0.000	
8	3500.000	0.000	
9	3500.000	0.000	
10	0.000	-0.100	

**TABLA 9.15** SOLUCIÓN DE MEZCLA DE GASOLINA PARA GRAND STRAND

Gasolina	Galones del componente (porcentaje)			Total
	Componente 1	Componente 2	Componente 3	
Regular	1 250 (12.5%)	6 750 (67.5%)	2 000 (20%)	10,000
Premium	3 750 (25%)	3 250 (21⅓%)	8 000 (53⅓%)	15,000

La gasolina regular se fabricará como una mezcla de 1 250 galones del componente 1, 6 750 galones del 2, y 2 000 galones del 3. Los 15,000 galones de gasolina premium se fabricarán como una mezcla de 3 750 galones del componente 1, 3 250 galones del componente 2, y 8 000 galones del componente 3.

*Resuelva el problema 15 como otro ejemplo de mezcla.*

La interpretación de las variables de holgura y de excedente asociadas con las restricciones de especificación de los productos (restricciones 4 a 9) en la figura 9.9 necesitan esclarecerse. Si la restricción es una de  $\leq$ , el valor de la variable de holgura puede interpretarse como el uso de galones del componente por debajo de la cantidad máxima del uso del componente especificada por la restricción. Por ejemplo, la holgura de 1750.000 para la restricción 4 muestra que el componente 1 usa 1750 galones por debajo de la cantidad máxima del componente 1 que podría haberse utilizado en la producción de 10,000 galones de gasolina regular. La restricción de especificación del producto es una restricción de  $\geq$ ; una variable de excedente muestra los galones del uso del componente por encima de la cantidad del uso del componente especificada por la restricción de mezcla. Por ejemplo, el excedente de 2750.000 para la restricción 5 muestra que el uso del componente 2 es 2 750 galones por encima de la cantidad mínima del componente 2 que debe usarse en la producción de 10,000 galones de gasolina regular.

## NOTAS Y COMENTARIOS

Una manera conveniente de definir las variables de decisión en un problema de mezcla es utilizar una matriz en la cual las filas correspondan a las materias primas y las columnas correspondan a los productos finales. Por ejemplo, en el problema de mezcla de Grand Strand, definimos las variables de decisión como sigue:

Este método presenta dos ventajas: 1) Proporciona una manera sistemática de definir las variables de decisión para cualquier problema de mezcla, y 2) proporciona una imagen visual de las variables de decisión en términos de la manera en la que se relacionan con las materias primas, los productos y entre sí.

		Productos finales	
		Gasolina regular	Gasolina premium
Materias primas	Componente 1	$x_{1r}$	$x_{1p}$
	Componente 2	$x_{2r}$	$x_{2p}$
	Componente 3	$x_{3r}$	$x_{3p}$

## Resumen

En este capítulo se presenta una amplia variedad de aplicaciones que demuestran cómo se utiliza la programación lineal para ayudar en el proceso de toma de decisiones. Se formularon y resolvieron problemas de marketing, finanzas y administración de operaciones, e interpretamos el resultado de la computadora.

Muchas de las ilustraciones presentadas en el capítulo son versiones reducidas de situaciones reales en las cuales se ha aplicado la programación lineal. En las aplicaciones reales, el problema tal vez no esté definido de manera tan concisa, los datos para el problema quizá no estén tan disponibles y lo más probable es que involucren muchas variables de decisión o restricciones. Sin embargo, un estudio minucioso de las aplicaciones de este capítulo es un buen lugar para empezar a aplicar la programación lineal a problemas reales.

## Problemas

*Nota:* Los problemas siguientes se han diseñado para que comprenda y evalúe la amplia variedad de problemas que pueden formularse como programas lineales. Usted debería poder formular un modelo de programación lineal para cada uno de los problemas. Sin embargo, necesitará acceso a un software de programación lineal para obtener las soluciones y hacer las interpretaciones requeridas.

### AUTOevaluación

1. La Cámara de Comercio de Westchester patrocina de forma periódica seminarios y programas de servicio público. En la actualidad, los planes promocionales para el programa de este año están en marcha. Las alternativas publicitarias incluyen televisión, radio y periódico. Las estimaciones de la audiencia, los costos y las limitaciones del uso máximo de los medios se muestran enseguida:

Restricción	Televisión	Radio	Periódico
Audiencia por anuncio	100,000	18,000	40,000
Costo por anuncio	\$2000	\$300	\$600
Uso máximo del medio	10	20	10

Para asegurar un uso equilibrado de los medios de publicidad, los anuncios de radio no deben exceder 50% del número total de anuncios permitido. Además, la televisión debe constituir por lo menos 10% del número total de anuncios autorizados.

- a. Si el presupuesto promocional está limitado a \$18,200, ¿cuántos mensajes comerciales deben manejarse en cada medio para maximizar el contacto total con la audiencia? ¿Cuál es la asignación del presupuesto entre los tres medios y cuál la audiencia total alcanzada?
  - b. ¿Cuánto aumentará el contacto de la audiencia si se asignaran \$100 adicionales al presupuesto promocional?
2. La gerencia de Hartman Company trata de determinar la cantidad de cada uno de dos productos a fabricar durante el próximo periodo de planeación. La información siguiente se refiere a la disponibilidad de la mano de obra, el uso de la misma y la rentabilidad del producto:

Departamento	Producto (horas/unidad)		Horas de mano de obra disponibles
	1	2	
A	1.00	0.35	100
B	0.30	0.20	36
C	0.20	0.50	50
Contribución a las utilidades/unidad	\$30.00	\$15.00	

- a. Elabore un modelo de programación lineal del problema de Hartman Company. Resuelva el modelo para determinar las cantidades de producción óptimas de los productos 1 y 2.

- b. Al calcular la contribución a las utilidades por unidad, la gerencia no dedujo los costos de mano de obra debido a que se consideran fijos para el periodo de planeación próximo. Sin embargo, suponga que se pueden añadir horas extra en algunos de los departamentos. ¿Cuáles departamentos recomendaría usted programar para horas extra? ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar por hora extra en cada uno?
  - c. Suponga que pueden programarse 10, 6 y 8 horas de tiempo extra en los departamentos A, B y C, respectivamente. El costo por hora extra es \$18 en el departamento A, \$22.50 en el B y \$12 en el C. Formule un modelo de programación lineal que se pueda utilizar para determinar las cantidades de producción óptimas si se dispone de horas extra. ¿Cuáles son las cantidades de producción óptimas y la contribución total a las utilidades modificada? ¿Cuántas horas extra recomienda utilizar en cada departamento? ¿Cuál es el incremento en la contribución total a las utilidades si se utilizan horas extra?
3. La cooperativa de ahorro y crédito de los empleados de la universidad estatal planea asignar los fondos para el año próximo. La cooperativa hace cuatro tipos de préstamos a sus miembros. Además, la invierte en valores sin riesgo para estabilizar los ingresos. Las diversas inversiones que producen ingresos junto con sus tasas de rendimiento anuales son las siguientes:

Tipo de préstamo/Inversión	Tasa de rendimiento anual (%)
Préstamos para automóvil	8
Préstamos para mobiliario	10
Otros préstamos garantizados	11
Préstamo quirografario	12
Valores sin riesgo	9

La cooperativa de ahorro y crédito tendrá \$2 millones disponibles para la inversión durante el año próximo. Las leyes estatales y las políticas de la cooperativa imponen las siguientes restricciones a la composición de los préstamos e inversiones:

- Los valores libres de riesgo no pueden exceder 30% de los fondos totales disponibles para inversión.
- Los préstamos quirografarios no pueden exceder 10% de los fondos invertidos en todos los préstamos (para automóvil, muebles, otros préstamos asegurados y préstamos quirografarios).
- Los préstamos para mobiliario, además de otros préstamos asegurados no pueden exceder los que se otorgan para automóvil.
- Otros préstamos asegurados más los quirografarios no pueden exceder los fondos invertidos en los valores sin riesgo.

¿Cómo deben asignarse los \$2 millones a cada una de las alternativas para maximizar el rendimiento anual total? ¿Cuál es el rendimiento anual total proyectado?

4. Hilltop Coffee fabrica un producto al mezclar tres tipos de granos de café. El costo por libra y las libras disponibles de cada grano son los siguientes:

Grano	Costo por libra	Libras disponibles
1	\$0.50	500
2	\$0.70	600
3	\$0.45	400

Se usaron pruebas de consumo con productos de café para proporcionar calificaciones en una escala de 0-100; las calificaciones más altas indican una mayor calidad. Los estándares de calidad del producto para el café mezclado requieren que la calificación de los

consumidores para el aroma sea por lo menos 75 y que la calificación de los consumidores para el sabor sea por lo menos 80. Las calificaciones individuales del aroma y el sabor para el café hechos de 100% de cada grano son las siguientes:

Grano	Calificación de aroma	Calificación de sabor
1	75	86
2	85	88
3	60	75

Suponga que los atributos de aroma y sabor de la mezcla de café serán un promedio ponderado de los atributos de los granos usados en la mezcla.

- ¿Cuál es la mezcla de costo mínimo que cumplirá con los estándares de calidad y proporcionará 1000 libras de producto de café mezclado?
  - ¿Cuál es el costo por libra para la mezcla de café?
  - Determine las calificaciones de aroma y sabor para la mezcla de café.
  - Si se fuera a producir más café, ¿cuál sería el costo esperado por libra?
- Ajax Fuels, Inc. desarrolla un aditivo para los combustibles de avión, el cual es una mezcla de tres ingredientes: A, B y C. Para el desempeño apropiado, la cantidad total de aditivo (cantidad de A + cantidad de B + cantidad de C) debe ser por lo menos 10 onzas por galón. Sin embargo, por razones de seguridad, la cantidad de aditivo no debe exceder de 15 onzas por galón de combustible. La mezcla de los tres ingredientes es crítica. Por lo menos 1 onza del ingrediente A debe usarse para cada onza del ingrediente B. La cantidad de ingrediente B debe ser por lo menos la mitad de la cantidad del ingrediente A. Si los costos por onza para los ingredientes A, B y C son \$0.10, \$0.03 y \$0.09, respectivamente, encuentre la mezcla de costo mínimo de A, B y C para cada galón de combustible de avión.
  - G. Kunz and Sons, Inc. fabrica dos productos que se usan en la industria del equipo pesado. Los dos productos requieren operaciones de manufactura en dos departamentos. Las cifras siguientes son el tiempo de producción (en horas) y las utilidades a la contribución para los dos productos:

Producto	Utilidades por unidad	Horas de mano de obra	
		Dept. A	Dept. B
1	\$25	6	12
2	\$20	8	10

Para el periodo de producción siguiente, Kunz tiene disponibles un total de 900 horas de mano de obra que pueden asignarse a cualquiera de los dos departamentos. Encuentre el plan de producción y la asignación de mano de obra (horas asignadas en cada departamento) que maximizarán la contribución total a las utilidades.

- Como parte de la resolución de una demanda colectiva, Hoxworth Corporation debe proporcionar efectivo suficiente para hacer los pagos anuales siguientes (en miles de dólares):

Año	1	2	3	4	5	6
Pago	190	215	240	285	315	460

Los pagos anuales deben hacerse al principio de cada año. El juez aprobará una cantidad que, junto con ganancias sobre su inversión, cubrirán los pagos anuales. La inversión de los fondos estará limitada a ahorros (a 4% anualmente) y valores del gobierno, a los precios y tasas actualmente citados en *The Wall Street Journal*.

Hoxworth quiere elaborar un plan para hacer los pagos anuales al invertir los valores siguientes (valor nominal = \$1000). Los fondos no invertidos en estos valores se colocarán en ahorros.

Valor	Precio actual	Tasa (%)	Años para el vencimiento
1	\$1055	6.750	3
2	\$1000	5.125	4

Suponga que los intereses se pagan anualmente. El plan se presentará al juez y, en caso de que lo apruebe, Hoxworth deberá pagar un fideicomiso por el monto que se necesitará para financiar el plan.

- Utilice la programación lineal para determinar la resolución del efectivo mínimo necesario para financiar los pagos anuales.
  - Utilice el precio dual para determinar cuánto más debe estar dispuesto a pagar Hoxworth para reducir el pago del principio del año 6 a \$400,000.
  - Utilice el precio dual para determinar cuánto más debe estar dispuesto Hoxworth a pagar para reducir el pago del año 1 a \$150,000.
  - Suponga que los pagos anuales se harán al final de cada año. Vuelva a formular el modelo para tomar en cuenta este cambio. ¿Cuánto ahorraría Hoxworth si se pudiera negociar el cambio?
8. El Departamento del sheriff del condado Clark programa a los oficiales de policía para turnos de 8 horas. Las primeras horas para los turnos son las 8:00 A.M., el mediodía, las 4:00 P.M., las 8:00 P.M., la medianoche y las 4:00 A.M. Un oficial que empieza un turno a una de estas horas trabaja para las 8 horas siguientes. Durante las operaciones del fin de semana, el número de oficiales necesarios varía según la hora del día. Los lineamientos del personal del departamento requieren el siguiente número mínimo de oficiales en servicio:

Hora del día	Mínimo de oficiales en servicio
8:00 A.M. - Mediodía	5
Mediodía - 4:00 P.M.	6
4:00 P.M. - 8:00 P.M.	10
8:00 P.M. - Medianoche	7
Medianoche - 4:00 A.M.	4
4:00 A.M. - 8:00 A.M.	6

Determine el número de oficiales de policía que deben programarse para comenzar los turnos de 8 horas en cada uno de los seis horarios (8:00 A.M., mediodía, 4:00 P.M., 8:00 P.M., medianoche y 4:00 A.M.) y minimizarán el número total de oficiales requeridos. (Pista: Sea  $x_1$  = número de oficiales que empiezan a trabajar a las 8:00 A.M.,  $x_2$  = número de oficiales que empiezan a trabajar al mediodía, etcétera).

## AUTOevaluación

9. Reconsidere el problema de Welte Mutual Funds de la sección 9.2. Defina sus variables de decisión como la fracción de los fondos invertidos en cada valor. También modifique las restricciones que limitan las inversiones en las industrias del petróleo y del acero como sigue: No más de 50% de los fondos invertidos en acciones (petróleo y acero) pueden invertirse en la industria del petróleo, y no más de 50% de los fondos invertidos en acciones (petróleo y acero) pueden invertirse en la industria del acero.
- Resuelva el modelo de programación lineal modificado. ¿Qué fracción del portafolio debe invertirse en cada tipo de valor?
  - ¿Cuánto debe invertirse en cada tipo de valor?



- c. ¿Cuáles son las ganancias totales del portafolio?
  - d. ¿Cuál es la tasa de rendimiento marginal en el portafolio? Es decir, ¿cuánto más podría ganarse al invertir un dólar más en el portafolio?
10. Un asesor de inversiones en Shore Financial Services quiere desarrollar un modelo que se puede utilizar para asignar fondos de inversión entre cuatro alternativas: acciones, bonos, fondos mutualistas y efectivo. Para el periodo de inversión siguiente, la empresa elaboró estimaciones de la tasa de rendimiento anual y el riesgo asociado de cada alternativa. El riesgo se mide utilizando un índice entre 0 y 1, con valores de riesgo más altos que denotan más volatilidad, y por tanto más incertidumbre.

Inversión	Tasa de rendimiento anual (%)	Riesgo
Acciones	10	0.8
Bonos	3	0.2
Fondos de inversión	4	0.3
Efectivo	1	0.0

Debido a que el efectivo se tiene en un fondo de mercado de dinero, el rendimiento anual es menor, pero en esencia no conlleva ningún riesgo. El objetivo es determinar la porción de los fondos asignados a cada alternativa de inversión, con el fin de maximizar el rendimiento total anual para el portafolio al nivel de riesgo que el cliente está dispuesto a tolerar.

El riesgo total es la suma del riesgo para todas las alternativas de inversión. Por ejemplo, si 40% de los fondos de un cliente se invierte en acciones, 30% en bonos, 20% en fondos mutualistas y 10% en efectivo, el riesgo total para el portafolio sería  $0.40(0.8) + 0.30(0.2) + 0.20(0.3) + 0.10(0.0) = 0.44$ . Un asesor de inversiones se reunirá con cada cliente para discutir los objetivos de su inversión y determinar un valor de riesgo total máximo para él. Un valor de riesgo total máximo de menos de 0.3 se asignaría a un inversionista conservador; un valor de riesgo total máximo de entre 0.3 y 0.5 se asignaría a una tolerancia moderada al riesgo, y un valor de riesgo total máximo mayor que 0.5, se asignaría a un inversionista más agresivo.

Shore Financial Services especificó lineamientos adicionales que deben aplicarse a todos los clientes, los cuales son los siguientes:

- No más de 75% de la inversión total puede estar en acciones.
  - El monto invertido en fondos de inversión debe ser por lo menos igual que el monto invertido en bonos.
  - El monto de efectivo debe ser por lo menos 10%, pero no más de 30%, de los fondos de inversión totales.
- a. Suponga que un valor de riesgo máximo para un cliente en particular es 0.4. ¿Cuál es la asignación óptima de los fondos invertidos entre acciones, bonos, fondos de inversión y efectivo? ¿Cuál es la tasa de rendimiento anual y el riesgo total para el portafolio óptimo?
  - b. Suponga que el valor de riesgo máximo para un cliente más conservador es 0.18. ¿Cuál es la asignación óptima de los fondos invertidos para este cliente? ¿Cuáles son la tasa de rendimiento anual y el riesgo total para el portafolio óptimo?
  - c. Otro cliente más audaz tiene un valor de riesgo máximo de 0.7. ¿Cuál es la asignación óptima de los fondos invertidos para este cliente? ¿Cuáles son la tasa de rendimiento anual y el riesgo total para el portafolio óptimo?
  - d. Remítase a la solución para un cliente más audaz del inciso c). ¿Este cliente estaría interesado en solicitar al asesor de inversiones que aumente el porcentaje máximo permitido en acciones o que reduzca el requisito de que el monto de efectivo debe ser por lo menos 10% de los fondos invertidos? Explique por qué.
  - e. ¿Cuál es la ventaja de definir las variables de decisión como se hizo en este modelo en vez de establecer el monto a invertir y expresar las variables de decisión directamente en cantidades en dólares?

11. Edwards Manufacturing Company compra dos partes componentes a tres proveedores diferentes, quienes tienen capacidad limitada, y ninguno de ellos puede satisfacer todas las necesidades de la empresa. Además, los proveedores cobran diferentes precios por los componentes. Los datos sobre los precios de los componentes (en precio por unidad) son los siguientes:

Componente	Proveedor		
	1	2	3
1	\$12	\$13	\$14
2	\$10	\$11	\$10

Cada proveedor tiene una capacidad limitada en función del número total de componentes que puede suministrar. Sin embargo, siempre que Edwards proporcione suficientes pedidos por adelantado, cada proveedor puede dedicar su capacidad al componente 1, al componente 2 o a cualquier mezcla de los dos componentes, si el número total de unidades ordenado está dentro de su capacidad. Las capacidades del proveedor son las siguientes:

Proveedor	1	2	3
Capacidad	600	1000	800

Si el plan de producción de Edwards para el periodo siguiente incluye 1000 unidades del componente 1 y 800 del componente 2, ¿qué compras recomienda usted? Es decir, ¿cuántas unidades de cada componente deben ordenarse de cada proveedor? ¿Cuál es el costo de compra total de los componentes?

12. Atlantic Seafood Company (ASC) es un comprador y distribuidor de mariscos que vende a restaurantes y tiendas especializadas en todo el noreste de Estados Unidos. ASC tiene una instalación de almacenamiento congelado en Nueva York, la cual sirve como el punto de distribución principal de todos los productos. Uno de los productos de la empresa es un camarón tigre negro gigante congelado, que se mide de 16 a 20 piezas por libra. ASC puede comprar o vender cada sábado más camarón tigre al precio de mercado del almacén de Nueva York. Su meta es comprar camarón tigre a un precio bajo semanalmente y venderlo después a un precio más alto. ASC tiene actualmente 20,000 libras de camarón tigre almacenadas, hay espacio disponible para almacenar un máximo de 100,000 libras cada semana. Además, ASC desarrolló las estimaciones siguientes de los precios del camarón tigre para las siguientes cuatro semanas:

Semana	Precio/lb.
1	\$6.00
2	\$6.20
3	\$6.65
4	\$5.55

A esta empresa le gustaría determinar la estrategia de compra/almacenamiento/venta óptima para las siguientes cuatro semanas. El costo por almacenar una libra de camarón por semana es \$0.15, y para representar los cambios imprevistos en oferta y demanda, la gerencia también indicó que se deben almacenar 25 000 libras de camarón tigre al final de la semana 4. Determine la estrategia de compra/almacenamiento/venta óptima para ASC. ¿Cuáles son las utilidades proyectadas para las cuatro semanas?

13. Romans Food Market, localizado en Saratoga, Nueva York, vende una variedad de comida especializada de todo el mundo. Dos de los productos líderes de la tienda usan el

nombre de Romans Food Market: Romans Regular Coffee y Romans DeCaf Coffee. Estos cafés son mezclas de granos de café Brazilian Natural y Colombian Mild, los cuales se compran a un distribuidor localizado en la ciudad de Nueva York. Como Romans compra cantidades grandes, los granos de café pueden comprarse cuando se necesite a un precio 10% mayor que el precio de mercado que el distribuidor paga por los granos. El precio de mercado actual es \$0.47 por libra para Brazilian Natural y \$0.62 por libra para Colombian Mild. Las composiciones de cada mezcla de café son las siguientes:

Grano	Mezcla	
	Regular	DeCaf
Brazilian Natural	75%	40%
Colombian Mild	25%	60%

Romans vende por libra la mezcla Regular a \$3.60 y la mezcla DeCaf a \$4.40. A Romans le gustaría colocar un pedido para los granos de café brasileños y colombianos que permita la producción de 1000 libras de café Romans Regular y 500 de café Romans DeCaf. El costo de producción es \$0.80 por libra para la mezcla Regular. Debido a los pasos adicionales requeridos para producir DeCaf, el costo de producción para la mezcla DeCaf es \$1.05 por libra. Los costos de empaque para ambos productos son \$0.25 por libra. Formule un modelo de programación lineal que se utilice para determinar las libras de Brazilian Natural y Colombian Mild que maximizarán la contribución total a las utilidades. ¿Cuál es la solución óptima y la contribución a las utilidades?

14. El gerente de producción de Classic Boat Corporation debe determinar cuántas unidades del modelo Classic 21 producir durante los siguientes cuatro trimestres. La empresa tiene un inventario inicial de 100 latas Classic 21 y la demanda para los cuatro trimestres es 2000 unidades en el trimestre 1, 4000 en el 2, 3000 en el 3 y 1500 en el 4. La empresa tiene una capacidad de producción limitada en cada trimestre. Es decir, hasta 4000 unidades pueden producirse en el trimestre 1, 3000 en el 2, 2000 en el 3, y 4000 en el 4. Cada lata guardada en inventario en los trimestres 1 y 2 incurre en un costo de mantenimiento en inventario de \$250 por unidad; el costo de mantenimiento para los trimestres 3 y 4 es \$300 por unidad. Los costos de producción para el primer trimestre son \$10,000 por unidad; se espera que este precio aumente 10% cada trimestre debido a los incrementos en los costos de mano de obra y del material. La gerencia especificó que el inventario final para el trimestre 4 debe ser por lo menos de 500 latas.
  - a. Formule un modelo de programación lineal que se utilice para determinar el programa de producción que minimizará el costo total de cumplir con la demanda en cada trimestre sujeto a las capacidades de producción en cada trimestre y también al inventario final requerido en el trimestre 4.
  - b. Resuelva el programa lineal formulado en el inciso a). Luego elabore una tabla que muestre el número de unidades a fabricar para cada trimestre, el inventario final y los costos incurridos.
  - c. Interprete cada uno de los precios duales que corresponden a las restricciones elaboradas para satisfacer la demanda en cada trimestre. Con base en estos precios duales, ¿qué consejo le daría al gerente de producción?
  - d. Interprete cada uno de los precios duales que corresponden a la capacidad de producción en cada trimestre. Con base en estos precios duales, ¿qué consejo le daría al gerente de producción?
15. Seastrand Oil Company produce dos grados de gasolina: regular y alto octanaje. Las dos gasolinas se producen al mezclar dos tipos de petróleo crudo. Aunque ambos tipos de petróleo crudo contienen los dos ingredientes importantes requeridos para producir las dos gasolinas, el porcentaje de ingredientes importantes en cada tipo de petróleo crudo

difieren, al igual que el costo por galón. El porcentaje de ingredientes A y B en cada tipo de petróleo crudo y el costo por galón se muestran enseguida:

Petróleo crudo	Costo	Ingrediente A	Ingrediente B
1	\$0.10	20%	60%
2	\$0.15	50%	30%

Cada galón de gasolina regular debe contener por lo menos 40% del ingrediente A, mientras que cada galón de alto octanaje puede contener como máximo 50% del ingrediente B. La demanda diaria de la gasolina regular y de alto octanaje es 800,000 y 500,000 galones, respectivamente. ¿Cuántos galones de cada tipo de petróleo crudo deben usarse en las dos gasolinas para satisfacer la demanda diaria a un costo mínimo?

16. Ferguson Paper Company produce rollos de papel para usar en las máquinas sumadoras, las calculadoras de escritorio y las cajas registradoras. Los rollos, que miden 200 pies de largo, se producen en anchos de  $1\frac{1}{2}$ ,  $2\frac{1}{2}$  y  $3\frac{1}{2}$  pulgadas. El proceso de producción proporciona rollos de 200 pies sólo con un ancho de 10 pulgadas. La empresa debe, por consiguiente, cortar los rollos a los tamaños de producto final deseados. Las siete alternativas de corte y la cantidad de desperdicio generada por cada rollo son las siguientes:

Alternativa de corte	Número de rollo			Desperdicio (pulgadas)
	$1\frac{1}{2}$ in.	$2\frac{1}{2}$ in.	$3\frac{1}{2}$ in.	
1	6	0	0	1
2	0	4	0	0
3	2	0	2	0
4	0	1	2	$\frac{1}{2}$
5	1	3	0	1
6	1	2	1	0
7	4	0	1	$\frac{1}{2}$

Los requerimientos mínimos para los tres productos son:

Ancho de rollo (pulgadas)	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$
Unidades	1 000	2 000	4 000

- Si la empresa quiere minimizar el número de rollos de 10 pulgadas que deben fabricarse, ¿cuántos rollos de 10 pulgadas se procesarán en cada alternativa de corte? ¿Cuántos rollos se requieren y cuál es el desperdicio total (pulgadas)?
  - Si la empresa quiere minimizar el desperdicio generado, ¿cuántos rollos de 10 pulgadas se procesarán en cada alternativa de corte? ¿Cuántos rollos se requieren y cuál es el desperdicio total (pulgadas)?
  - ¿Cuáles son las diferencias en los incisos a y b para este problema? En este caso, ¿qué objetivo prefiere usted? Explique por qué. ¿Qué tipos de situaciones harían que el otro objetivo fuera preferible?
17. Frandec Company fabrica, ensambla y reconstruye equipo para manejo de material empleado en almacenes y centros de distribución. Un producto, llamado Liftmaster, se ensambla a partir de cuatro componentes: un armazón, un motor, dos soportes y un asa de metal. El programa de producción de la empresa exige que se fabriquen 5 000 Liftmasters

para el mes siguiente. Frandec compra los motores a un proveedor externo, pero la empresa puede, ya sea fabricar los armazones, los soportes y las asas, o comprarlos a un proveedor externo. Los costos de manufactura y compra por unidad se muestran en la tabla:

Componente	Costo de manufactura	Costo de compra
Armazón	\$38.00	\$51.00
Soporte	\$11.50	\$15.00
Asa	\$ 6.50	\$ 7.50

Hay tres departamentos involucrados en la producción de estos componentes. El tiempo (en minutos por unidad) requerido para procesar cada componente en cada departamento y la capacidad disponible (en horas) para los tres departamentos son los siguientes:

Componente	Departamento		
	Corte	Fresado	Moldeado
Armazón	3.5	2.2	3.1
Soporte	1.3	1.7	2.6
Asa	0.8	—	1.7
Capacidad (horas)	350	420	680

- Formule y resuelva un modelo de programación lineal para esta aplicación de hacer o comprar. ¿Cuántos de cada componente deben fabricarse y cuántos comprarse?
  - ¿Cuál es el costo total del plan de manufactura y compra?
  - ¿Cuántas horas de producción se usan en cada departamento?
  - ¿Cuánto está dispuesto a pagar Frandec por una hora adicional de tiempo en el departamento de moldeado?
  - Otro fabricante ha ofrecido vender armazones a Frandec por \$45 cada uno. ¿Podría mejorar Frandec su posición al aprovechar esta oportunidad? ¿Por qué?
18. Two-Rivers Oilnear cerca de Pittsburgh transporta gasolina a sus distribuidores en camión. La empresa recientemente contrató a distribuidores que le suministraran gasolina en el sur de Ohio y tiene \$600,000 disponibles para gastar en la expansión necesaria de su flota de camiones cisterna de gasolina, de los que hay tres modelos de estos camiones para gasolina disponibles.

Modelo de camión	Capacidad (galones)	Costo de compra	Costo de operación mensual, incluida la depreciación
SuperTanker	5 000	\$67,000	\$550
Línea regular	2 500	\$55,000	\$425
Econo-Tanker	1 000	\$46,000	\$350

La empresa estima que la demanda mensual para la región será 550,000 galones de gasolina. Debido a las diferencias en tamaño y rapidez de los camiones, el número de entregas o viajes redondos posibles por mes para cada modelo de camión variará. Las capacidades del transporte se estiman en 15 viajes al mes para el Super Tanker, 20 viajes al mes para la línea regular y 25 viajes al mes para el Econo-Tanker. Con base en el mantenimiento y la disponibilidad de los conductores, la empresa no quiere añadir más de 15 vehículos

nuevos a su flota. Además, la empresa ha decidido comprar por lo menos tres de los nuevos Econo-Tankers para usarlos en las rutas cortas de poca demanda. Como restricción final, la empresa no quiere que más de la mitad de los modelos nuevos sean Super Tankers.

- a. Si la empresa quiere satisfacer la demanda de gasolina con un gasto operativo mínimo, ¿cuántos modelos de cada camión debe comprar?
- b. Si la empresa no requiriera por lo menos tres Econo-Tankers y limitara el número de Super Tankers a la mitad de los modelos nuevos máximo, ¿cuántos modelos de cada uno deberían comprarse?

## AUTOevaluación

19. Silver Star Bicycle fabricará modelos para hombre y mujer para sus bicicletas Easy-Pedal de 10 velocidades durante los dos meses siguientes. La gerencia quiere desarrollar un programa de producción que indique cuántas bicicletas de cada modelo debe fabricar cada mes. Los pronósticos de la demanda actual exigen envíos de 150 bicicletas para hombre y 125 para mujer durante el primer mes, y 200 modelos para hombre y 150 para mujer durante el segundo mes. Enseguida se muestran otros datos:

Modelo	Costos de producción	Requisitos de mano de obra (horas)		Inventario actual
		Manufactura	Ensamblaje	
Hombre	\$120	2.0	1.5	20
Mujer	\$ 90	1.6	1.0	30

El mes pasado la empresa usó un total de 1000 horas de mano de obra. La política de relaciones laborales de la empresa no permite que el total de horas de trabajo combinadas (manufactura más ensamblaje) aumente o disminuya más de 100 horas de un mes a otro. Además, Silver Star cobra mensualmente el inventario a la tasa de 2% del costo de producción con base en los niveles de inventario al final del mes. A la empresa le gustaría tener por lo menos 25 unidades de cada modelo al final de dos meses.

- a. Establezca un programa de producción que minimice los costos de producción y de inventario y satisfaga los requerimientos de suavización de la mano de obra, demanda e inventario. ¿Qué inventario se mantendrá y cuáles son los requerimientos mensuales de mano de obra?
  - b. Si la empresa cambiara las restricciones de modo que los incrementos y disminuciones mensuales de mano de obra no pudieran exceder 50 horas, ¿qué pasaría con el programa de producción? ¿Cuánto aumentaría el costo? ¿Qué recomendaría?
20. Filtron Corporation produce contenedores de filtración que se usan en los sistemas de tratamiento de agua. Aunque el negocio ha crecido, la demanda varía cada mes de forma considerable. Como resultado, la empresa utiliza una combinación de empleados de tiempo parcial y de tiempo completo para satisfacer las demandas de producción. Aunque este enfoque permite a Filtron gran flexibilidad, provocó un aumento en los costos y generó problemas morales entre los empleados. Por ejemplo, si Filtron necesita aumentar la producción de un mes al otro, se tienen que contratar y entrenar empleados de tiempo parcial, lo que aumenta los costos. Si Filtron tiene que reducir la producción, se debe reducir la planta laboral y la empresa incurriría en costos adicionales relacionados con las prestaciones por desempleo y la baja moral. Las mejores estimaciones son que aumentar la cantidad de unidades producidas de un mes al siguiente incrementará los costos de producción \$1.25 por unidad, y que disminuir el número de unidades producidas aumentará los costos de producción \$1.00 por unidad. Filtron produjo en febrero 10,000 contenedores de filtración, pero sólo vendió 7 500 unidades; 2 500 están actualmente en el inventario. Los pronósticos de ventas para marzo, abril y mayo son 12,000, 8 000 y 15,000 unidades, respectivamente. Además, Filtron tiene la capacidad de almacenar hasta 3 000 contenedores de filtración al final de cualquier mes. A la gerencia le gustaría determinar el número de unidades a producir en marzo, abril y mayo lo que minimizará el costo total de los aumentos y las disminuciones de la producción mensual.

21. Greenville Cabinets ganó un contrato para fabricar gabinetes para bocinas para un fabricante importante. El contrato exige la producción de 3 300 bocinas de estante y 4 100 bocinas de piso durante los dos meses siguientes, con este siguiente programa de entrega:

Modelo	Mes 1	Mes 2
Estante	2 100	1 200
Piso	1 500	2 600

Greenville estima que el tiempo de producción para cada modelo de librero es de 0.7 horas y para cada modelo de piso es de 1 hora. Los costos de las materias primas son \$10 para cada modelo de librero y \$12 para cada modelo de piso. Los costos de mano de obra son \$22 por hora usando el tiempo de producción regular y \$33 usando horas extra. Greenville tiene hasta 2 400 horas de tiempo de producción regular disponibles cada mes y hasta 1 000 horas adicionales de horas extra disponibles cada mes. Si la producción de cualquiera de los gabinetes excede la demanda en el mes 1, los muebles pueden almacenarse a un costo de \$5 por unidad. Para cada producto, determine el número de unidades que deben fabricarse cada mes en el tiempo regular y en las horas extra para minimizar los costos totales de producción y almacenaje.

22. TriCity Manufacturing (TCM) fabrica tazas, platos y recipientes para sándwiches y comida, de Styrofoam. El programa de la semana siguiente exige la producción de 80,000 recipientes para sándwich pequeños; 80,000 recipientes para sándwich grandes, y 65,000 recipientes para comida. Para fabricar estos contenedores, las hojas de Styrofoam se funden y forman en productos finales usando tres máquinas: M1, M2 y M3. La máquina M1 puede procesar hojas de Styrofoam con un ancho máximo de 12 pulgadas. La capacidad de ancho de la máquina M2 es 16 pulgadas y de la máquina M3 es 20 pulgadas. Los recipientes para sándwich pequeños requieren hojas de Styrofoam de 10 pulgadas de ancho; por tanto, estos recipientes pueden producirse en cada una de las tres máquinas. Los recipientes para sándwiches grandes requieren hojas de 12 pulgadas de ancho; por tanto, estos recipientes también pueden producirse en cada una de las tres máquinas. Sin embargo, los recipientes para comida necesitan hojas de Styrofoam de 16 pulgadas, de modo que no se pueden producir en la máquina M1. En la producción de los tres recipientes se genera desperdicio debido a que se pierde Styrofoam en el proceso de calentamiento y formación, así como en el recorte final del producto. La cantidad de desperdicio varía según el recipiente producido y la máquina usada. La tabla siguiente muestra el desperdicio en pulgadas cuadradas para cada máquina y combinación de producto. El material de desperdicio se recicla para usarlo en el futuro.

Máquina	Sándwich pequeño	Sándwich grande	Comida
M1	20	15	—
M2	24	28	18
M3	32	35	36

Las tasas de producción también dependen del contenedor producido y la máquina usada. La tabla siguiente muestra las tasas de producción en unidades por minuto para cada máquina y mezcla de producto. Las capacidades de las máquinas están limitadas para la semana siguiente. El tiempo disponible es 35 horas para la máquina M1, 35 para la M2 y 40 para la M3.

Máquina	Sándwich pequeño	Sándwich grande	Comida
M1	30	25	—
M2	45	40	30
M3	60	52	44



- a. Los costos asociados con el reprocesamiento del material de desperdicio se han incrementado. Por tanto, a TCM le gustaría minimizar la cantidad de desperdicio generado al cumplir con el programa de producción de la semana siguiente. Formule un modelo de programación lineal que se utilice para determinar el mejor programa de producción.
  - b. Resuelva el programa lineal formulado en el inciso a) para determinar el programa de producción. ¿Cuánto desperdicio se genera? ¿Cuáles máquinas, si hay alguna, tienen capacidad inactiva?
23. EZ-Windows, Inc. fabrica ventanas de remplazo para empresas que se dedican a la remodelación de casas. En enero, la empresa produjo 15,000 ventanas y terminó el mes con 9 000 en inventario. Al equipo directivo de EZ-Windows le gustaría desarrollar un programa de producción para los tres meses siguientes. Desde luego, un programa de producción suave es deseable debido a que mantiene a los empleados actuales y proporciona una operación similar cada mes. Sin embargo, dados los pronósticos de ventas, las capacidades de producción y de almacenamiento, el equipo directivo piensa que un programa de producción suave con la misma cantidad de producción no sea posible cada mes.

	Febrero	Marzo	Abril
Pronóstico de ventas	15,000	16,500	20,000
Capacidad de producción	14,000	14,000	18,000
Capacidad de almacenamiento	6,000	6,000	6,000

El departamento de contabilidad de costos de la empresa estima que el aumento en la producción por ventana de un mes a otro incrementará los costos totales \$1.00 por cada incremento unitario en el nivel de producción. Además, la disminución de la producción en una unidad de un mes al siguiente incrementará los costos totales \$0.65 por cada disminución unitaria en el nivel de producción. Ignorando los costos de producción y acarreo de inventario, formule y resuelva un modelo de programación lineal que minimice el costo de cambiar los niveles de producción al tiempo que se satisfacen los pronósticos mensuales de ventas.

24. Morton Financial debe decidir el porcentaje de fondos disponibles para comprometerse con cada una de dos inversiones, llamadas A y B, durante los cuatro periodos siguientes. La tabla siguiente muestra la cantidad de fondos nuevos disponibles para cada uno de los cuatro periodos, así como el gasto requerido para cada inversión (valores negativos) o los ingresos en efectivo de la inversión (valores positivos). Los datos mostrados (en miles de dólares) reflejan el monto del gasto o ingreso si se invierte 100% de los fondos disponibles en cualquier periodo, ya sea en A o en B. Por ejemplo, si Morton decide invertir 100% de los fondos disponibles en cualquier periodo en la inversión A, incurrirá en gastos de efectivo de \$1000 en el periodo 1, \$800 en el 2, \$200 en el 3, e ingresos de \$200 en el periodo 4. Observe, sin embargo, que si Morton toma la decisión de invertir 80% en la inversión A, los gastos o ingresos en efectivo serían 80% de los valores mostrados.

Periodo	Nuevos fondos disponible para invertir	Inversión	
		A	B
1	\$1500	-\$1000	-\$800
2	\$ 400	-\$ 800	-\$500
3	\$ 500	-\$ 200	-\$300
4	\$ 100	-\$ 200	-\$300

La cantidad de fondos disponibles en cualquier periodo es la suma de los nuevos fondos para invertir para el periodo, los nuevos fondos para préstamos, los ahorros del periodo anterior, el ingreso en efectivo para la inversión A y el ingreso en efectivo para la inversión



B. Los fondos disponibles en cualquier periodo se pueden usar para pagar el préstamo y el interés del periodo anterior, colocarse en ahorros, usarse para pagar los gastos en efectivo para la inversión A o para pagar los gastos en efectivo para la inversión B.

Suponga una tasa de interés de 10% para el periodo de ahorros y una de 18% para el periodo por los fondos prestados. Sea

$S(t)$  = los ahorros para el periodo  $t$

$L(t)$  = los nuevos fondos para préstamos para el periodo  $t$

Por tanto, en cualquier periodo  $t$ , el ingreso por ahorros del periodo anterior es  $1.1S(t-1)$  y el gasto por el préstamo y el interés del periodo anterior es  $1.18L(t-1)$ .

Al final del periodo 4, se espera que la inversión A tenga un valor al contado de \$3200 (suponiendo una inversión de 100% en A), y se confía que la inversión B tenga un valor al contado de \$2500 (suponiendo una inversión de 100% en B). Los ingresos y gastos adicionales al final del periodo 4 serán los ingresos por los ahorros en este periodo menos el pago del préstamo del periodo 4 más intereses.

Suponga que las variables de decisión se definen como sigue

$x_1$  = la proporción de la inversión A hecha

$x_2$  = la proporción de la inversión B hecha

Por ejemplo, si  $x_1 = 0.5$ , se invertirían \$500 en la inversión A durante el primer periodo, y todos los flujos de efectivo restantes y los valores finales de la inversión A se multiplicarían por 0.5. Lo mismo es válido para la inversión B. El modelo debe incluir las restricciones  $x_1 \leq 1$  y  $x_2 \leq 1$  para asegurarse de que no se puede hacer más del 100% de las inversiones.

Si no se puede pedir prestado más de \$200 en ningún periodo, determine las proporciones de las inversiones A y B, y la cantidad de ahorros y préstamos en cada periodo que maximizará el valor al contado para la empresa al final de los cuatro periodos.

25. Western Family Steakhouse ofrece una variedad de comida de bajo costo y servicio rápido. Aparte de la gerencia, el restaurante especializado en carnes opera con dos empleados de tiempo completo que trabajan 8 horas al día. El resto de los empleados laboran tiempo parcial y están programados para turnos de 4 horas durante las horas pico de comida. El restaurante abre los sábados de 11:00 A.M. a 10:00 P.M. La gerencia quiere desarrollar un programa para empleados de tiempo parcial que minimizará los costos de mano de obra y aun así proporcionará un excelente servicio al cliente. La tasa salarial media para los empleados de tiempo parcial es \$7.60 por hora. El número total de empleados de tiempo completo y de tiempo parcial necesarios varía con la hora del día como se muestra.

Hora	Número total de empleados necesarios
11:00 A.M. – Medio día	9
Medio día – 1:00 P.M.	9
1:00 P.M. – 2:00 P.M.	9
2:00 P.M. – 3:00 P.M.	3
3:00 P.M. – 4:00 P.M.	3
4:00 P.M. – 5:00 P.M.	3
5:00 P.M. – 6:00 P.M.	6
6:00 P.M. – 7:00 P.M.	12
7:00 P.M. – 8:00 P.M.	12
8:00 P.M. – 9:00 P.M.	7
9:00 P.M. – 10:00 P.M.	7

Un empleado de tiempo completo entra a las 11:00 A.M., trabaja 4 horas, toma una hora de descanso y regresa a trabajar otras 4 horas. El otro empleado de tiempo completo llega a la 1:00 P.M., sigue el mismo patrón de 4 horas de trabajo, 1 hora de descanso y 4 horas de trabajo.

- Desarrolle un programa de costo mínimo para empleados de tiempo parcial.
- ¿Cuál es la nómina total para los empleados de tiempo parcial? ¿Cuántos turnos de tiempo parcial se necesitan? Utilice las variables de excedente para comentar la conveniencia de programar por lo menos algunos de los empleados de tiempo parcial para turnos de 3 horas.
- Suponga que se puede asignar a los empleados de tiempo parcial, ya sea un turno de 3 o uno de 4 horas. Elabore un programa de costo mínimo para los empleados de tiempo parcial. ¿Cuántos turnos de tiempo parcial se necesitan, y cuáles son los ahorros en el costo comparados con el programa anterior?

## Caso a resolver 1 Planeación de una campaña publicitaria

Flamingo Grill es un restaurante exclusivo localizado en St. Petersburg, Florida. Para ayudar a planear una campaña publicitaria para la próxima temporada, el equipo gerencial de Flamingo contrató a la firma de publicidad Haskell & Johnson (HJ). El equipo directivo solicitó a HJ una recomendación respecto a cómo debe distribuirse el presupuesto de publicidad entre la televisión, la radio y los anuncios en periódico. El presupuesto se ha establecido en \$279 000.

En una reunión con el equipo directivo de Flamingo, los consultores de HJ proporcionaron la siguiente información respecto a la efectividad de la exposición de la industria clasificada por anuncio, su estimación del número de nuevos clientes potenciales alcanzados por anuncio y el costo de cada anuncio:

Medio de publicidad	Calificación de exposición por anuncio	Clientes nuevos por anuncio	Costo por anuncio
Televisión	90	4 000	\$10,000
Radio	25	2 000	\$ 3 000
Periódico	10	1 000	\$ 1 000

La calificación de exposición se considera una medida del valor del anuncio tanto a los clientes existentes como a los clientes potenciales. Esto en función de elementos, como imagen, recuerdo de mensajes, atractivo visual y de audio, etc. Como se esperaba, el anuncio por televisión más costoso tiene la mayor efectividad de exposición calificando junto con el mayor potencial para alcanzar a los nuevos clientes.

En este punto, los consultores de HJ señalaron que los datos concernientes al alcance de exposición sólo eran aplicables a los primeros pocos anuncios en cada medio. Para la televisión, la agencia estableció que la calificación de exposición de 90 y los 4 000 clientes nuevos alcanzados por anuncio eran confiables para los primeros 10 anuncios de televisión; después de estos anuncios, se esperaba que los beneficios declinaran. Para propósitos de planeación, HJ recomendó la reducción de la calificación de exposición a 55 y la estimación de los clientes potenciales llegó a 1500 para cualesquiera anuncios por televisión que rebasaran los 10. Para los anuncios de radio, los datos anteriores eran confiables hasta un máximo de 15 anuncios, después de los cuales, la calificación de exposición baja a 20 y el número de clientes nuevos alcanzados disminuye a 1200 por anuncio. De modo parecido, para los anuncios de periódico, los datos precedentes son confiables hasta un máximo de 20; la calificación de exposición disminuye a 5 y el número potencial de clientes nuevos alcanzados disminuye a 800 para anuncios adicionales.

El equipo gerencial de Flamingo aceptó la maximización de la calificación de exposición total a través de un medio como el objetivo de la campaña publicitaria. Debido a la

preocupación de la gerencia por atraer a nuevos clientes, ésta estableció que la campaña publicitaria debe llegar por lo menos a 100,000 clientes nuevos. Para equilibrar la campaña y hacer uso de todos los medios de publicidad, el equipo gerencial de Flamingo también adoptó los siguientes lineamientos:

- Utilice por lo menos el doble de anuncios en radio que anuncios en televisión.
- Utilice no más de 20 anuncios en televisión.
- El presupuesto de televisión debe ser por lo menos de \$140,000.
- El presupuesto de los anuncios en radio debe estar restringido a un máximo de \$99,000.
- El presupuesto de periódico debe ser por lo menos \$30,000.

HJ aceptó trabajar con estos lineamientos y proporcionar una recomendación respecto a cómo deben asignarse los \$279,000 del presupuesto de publicidad entre televisión, radio y periódico.

### Informe gerencial

Elabore un modelo que se pueda utilizar para determinar la asignación del presupuesto de publicidad para Flamingo Grill. Incluya en su informe una discusión de los puntos siguientes:

1. Un programa que muestre el número recomendado de anuncios en televisión, radio y periódico, y la asignación del presupuesto para cada medio.
2. ¿Cómo cambiaría la exposición total si se añadieran \$10,000 adicionales al presupuesto de publicidad?
3. Una discusión de los rangos para los coeficientes de la función objetivo. ¿Qué indican los rangos sobre qué tan sensible es la solución recomendada para los coeficientes de calificación de la exposición de HJ?
4. Después de revisar la recomendación de HJ, el equipo gerencial de Flamingo preguntó cómo cambiaría la recomendación si el objetivo de la campaña publicitaria fuera maximizar el número de clientes potenciales alcanzados. Elabore un programa de medios bajo este objetivo.
5. Compare las recomendaciones de los incisos 1 y 4. ¿Cuál es su recomendación para la campaña publicitaria de Flamingo Grill?

## Caso a resolver 2 Phoenix Computer

Phoenix Computer fabrica y vende computadoras personales directamente a los clientes. Los pedidos se aceptan por teléfono a través del sitio web de la empresa. Phoenix introducirá varios modelos de laptop nuevos durante los siguientes meses, y la gerencia reconoce la necesidad de incluir personal de soporte técnico que se especialice en los nuevos sistemas de laptop. Una opción que se considera es contratar empleados nuevos y someterlos a un programa de capacitación de tres meses. Otra es asignar a los especialistas de servicio al cliente actuales en un programa de capacitación de dos meses para los nuevos modelos de laptop. Phoenix estima que la necesidad de especialistas de laptop aumentará de 0 a 100 durante el periodo de mayo a septiembre como sigue: mayo – 20, junio – 30, julio – 85, agosto – 85, y septiembre – 100. Después de septiembre, Phoenix espera que mantener un personal de especialistas en laptops 100 sea suficiente.

El sueldo anual para un empleado nuevo se estima en \$27,000, ya sea que la persona se contrate para ingresar en el programa de capacitación o para reemplazar a un empleado actual que entre en dicho programa y sueldo anual para los empleados actuales de Phoenix para el programa es aproximadamente de \$36,000. El costo del programa de capacitación de tres meses es \$1500 por persona, y el de dos meses es \$1000 por persona. Observe que la duración del programa de capacitación significa que ocurrirá un retraso entre el momento

en que una persona nueva se contrata y el momento en que un especialista en laptop nuevo está disponible. El número actual de empleados que estarán disponibles para la capacitación es limitado. Phoenix estima que los números siguientes pueden estar disponibles en los próximos meses: marzo — 15, abril — 21, mayo — 0, junio — 5 y julio — 10. El centro de capacitación está disponible para empezar las clases de dos y tres meses al principio de cada mes; sin embargo, el número total de estudiantes (empleados nuevos y actuales) que comienzan la capacitación cada mes no puede exceder de 25.

Phoenix debe determinar el número de contrataciones nuevas que deben empezar cada mes la capacitación de tres meses y el número de empleados actuales que inician cada mes el programa de capacitación de dos meses. El objetivo es satisfacer las necesidades de personal de mayo a septiembre al menor costo total posible; es decir, minimizar el costo del incremento en el sueldo y el costo total de la capacitación.

Corre el mes de enero, y a Phoenix Computer le gustaría elaborar un plan para contratar a los empleados nuevos y determinar la mezcla de nuevas contrataciones y empleados actuales que entren en el programa de capacitación.

## Informe gerencial

Haga un análisis del problema de Phoenix Computer y prepare un informe que resuma sus hallazgos. Asegúrese de incluir información y un análisis sobre los puntos siguientes:

1. El aumento de sueldo y el costo de la capacitación asociados con la contratación de un empleado nuevo y capacitarlo para que sea un especialista en laptop.
2. El aumento de sueldo y el costo asociado con asignar a un empleado actual en un programa de capacitación. (No olvide que debe contratarse un reemplazo si el empleado actual entra en el programa.)
3. Recomendaciones respecto a la contratación y al plan de capacitación que minimizará los costos por sueldo y capacitación durante el periodo de febrero a agosto, así como las respuestas a estas preguntas: ¿Cuál es el costo total de proporcionar soporte técnico para los nuevos modelos de laptop? ¿De cuánto más serán los costos de nómina mensuales en septiembre que en enero?

## Caso a resolver 3 Fábrica de textiles

Scottsville Textile Mill<sup>1</sup> fabrica cinco telas diferentes. Cada una puede tejerse en uno o más de los 38 telares de la fábrica. El pronóstico de la demanda del departamento de ventas para el siguiente mes se muestra en la tabla 9.16, junto con datos sobre el precio de venta por yarda, el costo variable por yarda y el precio de compra por yarda. La fábrica opera 24 horas al día y se programa 30 días durante el siguiente mes.

La fábrica tiene dos tipos de telares: doble y regular. Los telares con lizos son más versátiles y se pueden usar para las cinco telas. Los telares regulares pueden producir sólo tres de las telas. La fábrica tiene 38 telares: 8 son lizos y 30 son regulares. La tasa de producción para cada tela en cada tipo de telar se proporciona en la tabla 9.17. El tiempo requerido para hacer el cambio de la producción de una tela a otra es insignificante y no es necesario considerarlo.

La fábrica de textiles Scottsville satisface toda la demanda, ya sea con su propia tela o con tela comprada a otra fábrica. Las telas que no pueden tejerse en la fábrica Scottsville debido a la capacidad limitada de los telares se comprarán a otra fábrica. El precio de compra de cada tela también se muestra en la tabla 9.16.

<sup>1</sup> Este caso se basa en "Calhoun Textile Mill Case", por Jeffrey D. Camm, P. M. Dearing, y Suresh K. Tadisnia, 1987.

**TABLA 9.16** DATOS DE LA DEMANDA MENSUAL, EL PRECIO DE VENTA, EL COSTO VARIABLE Y EL PRECIO DE COMPRA PARA LA FÁBRICA DE TEXTILES SCOTTSVILLE

Tela	Demanda (yardas)	Precio de venta (\$/yarda)	Costo variable (\$/yarda)	Precio de compra (\$/yarda)
1	16,500	0.99	0.66	0.80
2	22,000	0.86	0.55	0.70
3	62,000	1.10	0.49	0.60
4	7,500	1.24	0.51	0.70
5	62,000	0.70	0.50	0.70

**TABLA 9.17** TASAS DE PRODUCCIÓN DE LOS TELARES PARA LA FÁBRICA DE TEXTILES SCOTTSVILLE

Tela	Tasa del telar (yardas/hora)	
	Con lizos	Regular
1	4.63	—
2	4.63	—
3	5.23	5.23
4	5.23	5.23
5	4.17	4.17

*Nota:* Las telas 1 y 2 pueden fabricarse sólo en el telar con lizos

## Informe gerencial

Elabore un modelo que se utilice para programar la producción de la fábrica de textiles Scottsville y, al mismo tiempo, determine cuántas yardas de cada tela deben comprarse a otra fábrica. Incluya en su informe una discusión y análisis de los puntos siguientes:

1. El programa de producción final y las asignaciones de los telares para cada tela.
2. La contribución total a las utilidades proyectada.
3. Una discusión del valor adicional del tiempo de telar. (La fábrica considera comprar un telar de 9 lizos. ¿Cuál es su estimación de la contribución mensual a las utilidades de este telar adicional?)
4. Una discusión de los rangos de los coeficientes objetivos.
5. Una discusión de cómo el objetivo de minimizar los costos totales proporcionaría un modelo diferente que el objetivo de maximizar la contribución total a las utilidades. (¿Cómo difiere la interpretación sobre los rangos de los coeficientes objetivo para estos dos modelos?)

## Caso a resolver 4 Programación de la planta laboral

Davis Instruments tiene dos plantas de manufactura localizadas en Atlanta, Georgia. La demanda del producto varía cada mes, provocando que Davis tenga dificultad para programar su planta laboral. Hace poco, la empresa empezó a contratar empleados temporales que le suministró WorkForce Unlimited, que se especializa en proporcionar empleados

temporales a las empresas en el área principal de Atlanta. WorkForce Unlimited ofreció proporcionar empleados temporales bajo tres opciones de contrato que difieren en términos de la duración del empleo y el costo. Las tres opciones se resumen aquí:

Opción	Duración del empleo	Costo
1	Un mes	\$2 000
2	Dos meses	\$4 800
3	Tres meses	\$7 500

Los periodos de contrato más largos son más costosos, debido a que WorkForce Unlimited tiene mayor dificultad para encontrar empleados temporales que estén dispuestos a comprometerse con asignaciones de trabajo más largas.

Durante los próximos seis meses, Davis proyecta las necesidades siguientes para empleados adicionales:

Mes	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
<b>Empleados requeridos</b>	10	23	19	26	20	14

Cada mes, Davis puede contratar tantos empleados temporales como se requiera, bajo cada una de tres opciones. Por ejemplo, si Davis contrata a cinco empleados en enero bajo la opción 2, WorkForce Unlimited suministrará a Davis cinco empleados temporales que trabajarán dos meses: enero y febrero. Por estos empleados, Davis tendrá que pagar  $5(\$4\,800) = \$24,000$ . Debido a que hay algunas negociaciones de fusiones en trámite, Davis no quiere comprometerse con ninguna obligación contractual para los empleados temporales que se extiendan más allá de junio.

El programa de control de calidad de Davis requiere que cada empleado temporal reciba capacitación al momento de la contratación. El programa de capacitación se requiere, incluso si la persona trabajó para Davis Instruments en el pasado. La empresa estima que el costo de capacitación es \$875 cada vez que se contrata un empleado temporal. Por tanto, si un empleado temporal se contrata por un mes, Davis incurrirá en un costo de capacitación de \$875 pero no incurrirá en un costo de capacitación adicional si el contrato del empleado dura de dos o tres meses.

## Informe gerencial

Elabore un modelo que se utilice para determinar el número de empleados temporales que Davis debe contratar cada mes bajo cada plan de contrato con el fin de cumplir con las necesidades proyectadas a un costo total mínimo. Incluya los puntos siguientes en su informe:

1. Un programa que muestre el número de empleados temporales que Davis debe contratar cada mes para cada opción de contrato.
2. Una tabla de resumen muestra el número de empleados temporales que Davis debe contratar bajo cada opción de contrato, el costo de contrato asociado con cada opción y el costo de capacitación asociado para cada opción. Proporcione un resumen de los totales que muestre el número total de empleados temporales contratados, los costos totales por contrato y los costos de capacitación.
3. Si el costo por capacitar a cada empleado temporal pudiera reducirse a \$700 por mes, ¿qué efecto tendría este cambio en el plan de contratación? Explique por qué. Comente las implicaciones de este efecto en el plan de contratación para identificar métodos de reducción de costos. ¿Cuánto de una reducción en los costos de capacitación se requeriría para modificar el plan de contratación basado en un costo de capacitación de \$875 por empleado temporal?
4. Suponga que Davis contrató a 10 empleados de tiempo completo al principio de enero con el fin de satisfacer parte de los requerimientos de mano de obra durante

los seis meses siguientes. Si Davis puede contratar empleados de tiempo completo a \$16.50 por hora, incluyendo incentivos, ¿qué efecto tendría en los costos de mano de obra y capacitación en el periodo de seis meses en comparación con contratar sólo empleados temporales? Suponga que los empleados de tiempo completo y temporales trabajan aproximadamente 160 horas al mes. Proporcione una recomendación respecto a la decisión de contratar empleados de tiempo completo adicionales.

## Caso a resolver 5 Asignación de carbón en Duke Energy<sup>2</sup>

Duke Energy fabrica y distribuye electricidad a sus clientes en Estados Unidos y América Latina. Hace poco, la empresa compró Cinergy Corporation, la cual tiene instalaciones de generación de electricidad y clientes de energía en Indiana, Kentucky y Ohio. Para estos clientes Cinergy ha invertido de \$725 a \$750 millones cada año en el combustible necesario para operar sus plantas de combustión de carbón y de gas natural; de 9% a 95% del combustible usado es carbón. En esta región, Duke Energy usa 10 plantas generadoras que utilizan carbón: 5 localizadas en el interior y 5 en el río Ohio; algunas plantas tienen más de una unidad generadora. Duke Energy usa de 28 a 29 millones de toneladas de carbón al año a un costo de aproximadamente \$2 millones cada día en esta región.

La empresa compra carbón usando contratos de tonelaje fijo o tonelaje variable de minas en Indiana (49%), West Virginia (20%), Ohio (12%), Kentucky (11%), Illinois (5%) y Pennsylvania (3%). La empresa debe comprar todo el carbón contratado en contratos de toneladas fijas, pero en contratos de toneladas variables puede comprar cantidades que varían hasta el límite especificado en el contrato. El carbón se envía desde las minas a las plantas generadoras de Duke Energy en Ohio, Kentucky e Indiana. El costo del carbón varía de \$19 a \$35 por tonelada y los cargos por transporte/entrega varían de \$1.50 a \$5.00 por tonelada.

Para determinar los megawatts-hora (mWh) de electricidad que se espera produzca cada unidad generadora y proporcionar una medida de la eficiencia de cada unidad generadora, conocida como la tasa de calor, se utiliza un modelo. La tasa de calor son los BTU totales requeridos para producir 1 kilowatt-hora (kWh) de energía eléctrica.

### Modelo de asignación de carbón

Duke Energy utiliza un modelo de programación lineal, llamado modelo de asignación de carbón, para asignar carbón a sus instalaciones generadoras. El objetivo del modelo de asignación de carbón es determinar el método de costo más bajo para comprar y distribuir carbón a las unidades generadoras. El suministro/disponibilidad del carbón está determinado por los contratos con las diversas minas, y la demanda de carbón en las unidades generadoras está determinada de manera indirecta por los megawatts-hora de electricidad que cada unidad debe producir.

El costo de procesar el carbón, llamado costo adicional, depende de las características del carbón (contenido de humedad, contenido de cenizas, contenido de BTU, contenido de sulfuro y molienda) y la eficiencia de la unidad generadora. El costo adicional más el costo de transporte se añade al costo de compra del carbón para determinar el costo total por comprar y usar el carbón.

### Problema actual

Duke Energy firmó tres contratos de tonelaje fijo y cuatro de tonelaje variable. A la empresa le gustaría determinar la manera más barata de asignar el carbón disponible mediante

<sup>2</sup>Los autores están en deuda con Thomas Mason y David Bossee de Duke Energy Corporation, antes Cinergy Corp., por su contribución a este caso.



estos contratos a cinco unidades generadoras. Los datos relevantes para los tres contratos de tonelaje fijo son los siguientes:

<b>Proveedor</b>	<b>Número de toneladas contratadas</b>	<b>Costo (\$/ton)</b>	<b>BTU/lb</b>
RAG	350,000	22	13,000
Peabody Coal Sales	300,000	26	13,300
American Coal Sales	275,000	22	12,600

Por ejemplo, el contrato firmado con RAG requiere que Duke Energy compre 350 000 toneladas de carbón a un precio de \$22 por tonelada; cada libra de este carbón en particular proporciona 13 000 BTU.

Los datos para los cuatro contratos de tonelaje variable se muestran enseguida.

<b>Proveedor</b>	<b>Número de toneladas disponibles</b>	<b>Costo (\$/ton)</b>	<b>BTU/lb</b>
Consol, Inc.	200,000	32	12,250
Cyprus Amax	175,000	35	12,000
Addington Mining	200,000	31	12,000
Waterloo	180,000	33	11,300

Por ejemplo, el contrato con Consol, Inc. permite a Duke Energy comprar hasta 200 000 toneladas de carbón a un costo de \$32 por tonelada; cada libra de este carbón proporciona 12 250 BTU.

El número de megawatts-hora de electricidad que cada unidad generadora debe producir y la tasa de calor proporcionada son los siguientes:

<b>Unidad generadora</b>	<b>Electricidad producida (mWh)</b>	<b>Tasa de calor (BTU por kWh)</b>
Unidad 5 de Miami Fort	550,000	10,500
Unidad 7 de Miami Fort	500,000	10,200
Unidad 1 de Beckjord	650,000	10,100
Unidad 2 de East Bend	750,000	10,000
Unidad 1 de Zimmer	1 100,000	10,000

Por ejemplo, la Unidad 5 de Miami Fort debe producir 550 000 megawatt-horas de electricidad; se necesitan 10 500 BTU para producir cada kilowatt-hora.

El costo de transporte y el adicional en dólares por tonelada se muestran aquí:

<b>Costos de transporte (\$/ton)</b>					
<b>Proveedor</b>	<b>Unidad 5 de Miami Fort</b>	<b>Unidad 7 de Miami Fort</b>	<b>Unidad 1 de Beckjord</b>	<b>Unidad 2 de East Bend</b>	<b>Unidad 1 de Zimmer</b>
RAG	5.00	5.00	4.75	5.00	4.75
Peabody	3.75	3.75	3.50	3.75	3.50
American	3.00	3.00	2.75	3.00	2.75
Consol	3.25	3.25	2.85	3.25	2.85
Cyprus	5.00	5.00	4.75	5.00	4.75
Addington	2.25	2.25	2.00	2.25	2.00
Waterloo	2.00	2.00	1.60	2.00	1.60



Proveedor	Costo adicional (\$/ton)				
	Unidad 5 de Miami Fort	Unidad 7 de Miami Fort	Unidad 1 de Beckjord	Unidad 2 de East Bend	Unidad 1 de Zimmer
RAG	10.00	10.00	10.00	5.00	6.00
Peabody	10.00	10.00	11.00	6.00	7.00
American	13.00	13.00	15.00	9.00	9.00
Consol	10.00	10.00	11.00	7.00	7.00
Cyprus	10.00	10.00	10.00	5.00	6.00
Addington	5.00	5.00	6.00	4.00	4.00
Waterloo	11.00	11.00	11.00	7.00	9.00

## Informe gerencial

Prepare un informe que resuma sus recomendaciones respecto al problema de asignación de carbón de Duke Energy. Asegúrese de incluir información y análisis para los problemas siguientes:

1. Determine cuánto carbón comprar de cada una de las compañías mineras y cómo debe asignarse a las unidades generadoras. ¿Cuál es el costo de comprar, entregar y procesar el carbón?
2. Calcule el costo promedio del carbón en centavos por millón de BTU para cada unidad generadora (una medida del costo de combustible para la unidad generadora).
3. Calcule el número medio de BTU por libra de carbón recibida en cada unidad generadora (una medida de la eficiencia de energía del carbón recibido en cada unidad).
4. Suponga que Duke Energy puede comprar 80,000 toneladas adicionales de carbón a American Coal Sales como un “trato de todo o nada” por \$30 por tonelada. ¿Debe Duke Energy comprar las 80,000 toneladas adicionales de carbón?
5. Suponga que Duke Energy aprende que el contenido energético del carbón de Cyprus Amax en realidad es 13,000 BTU por libra. ¿Debe Duke Energy modificar su plan de adquisiciones?
6. Duke Energy se ha enterado por su grupo comercial que Duke Energy puede vender 50,000 megawatts-hora a otros proveedores de electricidad a un precio de \$30 por megawatt-hora. ¿Debe Duke Energy vender la electricidad? Si es así, ¿qué unidades generadoras deben producir la electricidad adicional?

## Apéndice 9.1

## Solución de Excel para el problema de planeación financiera de Hewlitt Corporation

En el apéndice 7.3 mostramos cómo se usa Excel para resolver el problema de programación lineal de RMC. Para ilustrar el uso de Excel y resolver un problema de programación lineal más complejo, mostramos la solución al problema de planeación financiera de Hewlitt Corporation presentado en la sección 9.2.

Las fórmulas y la solución de la hoja de cálculo para el problema de Hewlitt Corporation se muestran en la figura 9.10. Como se describió en el apéndice 7.3, nuestra práctica es escribir los datos requeridos para el problema en la parte superior de la hoja de trabajo y generar el modelo en la parte inferior de la misma. El modelo se compone de un conjunto de celdas para las variables de decisión, una celda para la función objetivo, otro conjunto

FIGURA 9.10 SOLUCIÓN DE EXCEL PARA EL PROBLEMA DE HEWLITT CORPORATION

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	<b>Requerimientos de efectivo de Hewlett Corporation</b>											
2												
3		Requerimientos										
4	Año	de efectivo				Bono						
5	1	430			1	2	3					
6	2	210	Precio (\$1000)		1.15	1	1.35					
7	3	222	Tasa		0.08875	0.055	0.1175					
8	4	231	Años para el vencimientos		5	6	7					
9	5	240										
10	6	195	Ahorros anuales múltiples			1.04						
11	7	225										
12	8	255										
13												
14	<b>Modelo</b>											
15												
16	F	B1	B2	B3	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8
17	1728.794	144.988	187.856	228.188	636.148	501.606	349.682	182.681	0	0	0	0
18												
19					Flujo de efectivo		Flujo de		Requerimientos			
20	Fondos mínimos	1728.7939		Restricciones	Dentro	Fuera	efectivo neto		de efectivo			
21				Year 1	1728.794	1298.794	430	=	430			
22				Year 2	711.6057	501.6057	210	=	210			
23				Year 3	571.6818	349.6818	222	=	222			
24				Year 4	413.6809	182.6809	231	=	231			
25				Year 5	240	0	240	=	240			
26				Year 6	195	0	195	=	195			
27				Year 7	225	0	225	=	225			
28				Year 8	255	0	255	=	255			

para las funciones del lado izquierdo y un conjunto de celdas para las restricciones del lado derecho. Las celdas para cada uno de estos componentes del modelo se visualizan; y para las variables de decisión están resaltadas también por una línea gruesa. Las etiquetas descriptivas se utilizan para facilitar la lectura de la hoja de cálculo.

## Fórmulas

Los datos y las etiquetas descriptivas están contenidas en las celdas A1:G12. Las celdas visualizadas en la parte inferior de la hoja de cálculo contienen los elementos clave del modelo requerido por Excel Solver.

**Variables de decisión** Las celdas A17:L17 están reservadas para las variables de decisión. Los valores óptimos (redondeados a tres posiciones) se muestra que son  $F = 1728.794$ ,  $B_1 = 144.988$ ,  $B_2 = 187.856$ ,  $B_3 = 228.188$ ,  $S_1 = 636.148$ ,  $S_2 = 501.606$ ,  $S_3 = 349.682$ ,  $S_4 = 182.681$  y  $S_5 = S_6 = S_7 = S_8 = 0$ .

## Función objetivo

La fórmula = A17 se ha colocado en la celda B20 para reflejar los fondos totales requeridos. Es sencillamente el valor de la variable de decisión,  $F$ . Los fondos totales requeridos por la solución óptima se muestra que son \$1,728,794.

### Lados izquierdos

Los lados izquierdos para las ocho restricciones representan el flujo de efectivo neto anual. Se colocan en las celdas G21:G28. La celda G21 = E21 – F21 (Copiar a G22:G28).

Para este problema, algunas de las celdas del lado izquierdo hacen referencia a otras que contienen fórmulas. Estas celdas referenciadas proporcionan el flujo de efectivo de Hewlett hacia dentro y hacia fuera para los ocho años.<sup>3</sup> Las celdas y sus fórmulas son las siguientes:

Celda E21 = A17

Celda E22 = SUMPRODUCT(\$E\$7:\$G\$7,\$B\$17:\$D\$17)+\$F\$10\*E17

Celda E23 = SUMPRODUCT(\$E\$7:\$G\$7,\$B\$17:\$D\$17)+\$F\$10\*F17

Celda E24 = SUMPRODUCT(\$E\$7:\$G\$7,\$B\$17:\$D\$17)+\$F\$10\*G17

Celda E25 = SUMPRODUCT(\$E\$7:\$G\$7,\$B\$17:\$D\$17)+\$F\$10\*H17

Celda E26 = (1+E7)\*B17+F7\*C17+G7\*D17+F10\*I17

Celda E27 = (1+F7)\*C17+G7\*D17+F10\*J17

Celda E28 = (1+G7)\*D17+F10\*K17

Celda F21 = SUMPRODUCT(E6:G6,B17:D17)+E17

Celda F22 = F17

Celda F23 = G17

Celda F24 = H17

Celda F25 = I17

Celda F26 = J17

Celda F27 = K17

Celda F28 = L17

### Lados derechos

Los lados derechos para las ocho restricciones representan los requerimientos anuales de efectivo. Se colocan en las celdas I21:I28. Celda I21 = B5 (Copiar a I22:I28)

## Solución de Excel

Ahora estamos listos para usar la información de la hoja de trabajo para determinar la solución óptima al problema de Hewlett Corporation. Los pasos siguientes describen cómo usar Excel para obtener la solución óptima:

**Paso 1.** Seleccione la ficha **Add-ins** en la cinta.

**Paso 2.** Seleccione **Premium Solver** en el grupo **Menu Commands (Comandos de menú)**.

**Paso 3.** Cuando aparezca el cuadro de diálogo **Solver Parameters (Parámetros de Solver)** (figura 9.11):

Asegúrese de que **Standard LPSimplex** esté desplegado.

Introduzca B20 en el cuadro **Set Cell (Establecer celda)**.

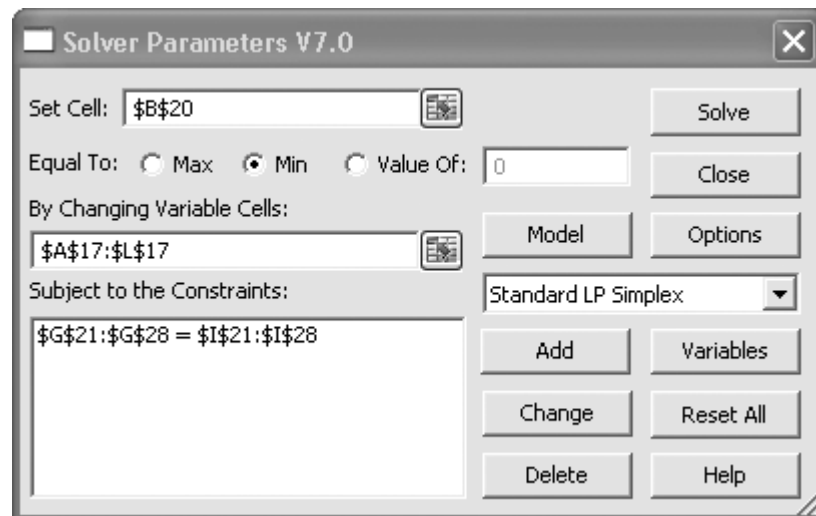
Seleccione la opción **Equal to: Min (Igual a Min)**.

Introduzca A17:L17 en el cuadro **By Changing Variable Cells (Al cambiar las celdas de variables)**.

Haga clic en **Add (Agregar)**.

<sup>3</sup>El flujo de efectivo hacia dentro es la suma de los términos positivos en cada ecuación de restricción en el modelo matemático, y el flujo de efectivo hacia fuera es la suma de los términos negativos en cada ecuación de restricción.

**FIGURA 9.11** CUADRO DE DIÁLOGO DE PARÁMETROS DE SOLVER PARA EL PROBLEMA DE HEWLITT CORPORATION



- Paso 4.** Cuando aparezca el cuadro de diálogo **Add Restriction (Añadir restricción)**:  
 Introduzca G21:G28 en el cuadro izquierdo del área **Cell Reference (Referencia de celda)**.  
 Seleccione =.  
 Introduzca I21:I28 en el cuadro de la derecha.  
 Haga clic en **OK (Aceptar)**.
- Paso 5.** Cuando vuelva a aparecer el cuadro de diálogo **Solver Parameters (Parámetros de Solver)** (figura 9.11):  
 Escoja **Options (Opciones)**.
- Paso 6.** Cuando aparezca el cuadro de diálogo **LP Simplex Solver Options (Opciones de LP Simplex Solver)**:  
 Seleccione **Assume Non-Negative (Asumir valor no negativo)**.  
 Haga clic en **OK (Aceptar)**.
- Paso 7.** Cuando vuelva a aparecer el cuadro de diálogo **Solver Parameters (Parámetros de Solver)**:  
 Escoja **Solve (Resolver)**.
- Paso 8.** Cuando aparezca el cuadro de diálogo **Solver Results (Resultados de Solver)**:  
 Seleccione **Keep Solver Solution (Mantener la solución de Solver)**.  
 Seleccione **Sensitivity (Sensibilidad)** en el cuadro **Reports (Informes)**.  
 Haga clic en **OK (Aceptar)**.

El cuadro de diálogo de parámetros de Solver se indica en la figura 9.11. La solución óptima se muestra en la figura 9.10; el informe de sensibilidad que la acompaña aparece en la figura 9.12.

## Discusión

Las figuras 9.10 y 9.12 contienen en esencia la misma información que aquella proporcionada por la solución de The Management Scientist de la figura 9.4. Recuerde que el informe de sensibilidad de Excel utiliza el término *precio sombra* para describir el *cambio* en el valor de la solución por incremento unitario en el lado derecho de una restric-

**FIGURA 9.12** INFORME DE SENSIBILIDAD DE EXCEL PARA EL PROBLEMA DE HEWLITT CORPORATION

Celdas ajustables

Celda	Nombre	Valor final	Costo reducido	Coefficiente objetivo	Aumento permisible	Disminución permisible
SA\$17	F	1728.793855	0	1	1E + 30	1
SBS17	B1	144.9881496	0	0	0.067026339	0.013026775
SCS17	B2	187.8558478	0	0	0.012795531	0.020273774
SDS17	B3	228.1879195	0	0	0.022906851	0.749663022
SES17	S1	636.1479438	0	0	0.109559907	0.05507386
SFS17	S2	501.605712	0	0	0.143307365	0.056948823
SGS17	S3	349.681791	0	0	0.210854199	0.059039182
SH\$17	S4	182.680913	0	0	0.413598622	0.061382404
SI\$17	S5	0	0.064025159	0	1E + 30	0.064025159
SJ\$17	S6	0	0.012613604	0	1E + 30	0.012613604
SK\$17	S7	0	0.021318233	0	1E + 30	0.021318233
SL\$17	S8	0	0.670839393	0	1E + 30	0.670839393

Restricciones

Celda	Nombre	Valor final	Precio sombra	Restricción R.H. Side	Aumento permisible	Disminución permisible
\$G\$21	Year 1 Flow	430	1	430	1E + 30	1728.793855
\$G\$22	Year 2 Flow	210	0.961538462	210	1E + 30	661.5938616
\$G\$23	Year 3 Flow	222	0.924556213	222	1E + 30	521.6699405
\$G\$24	Year 4 Flow	231	0.888996359	231	1E + 30	363.6690626
\$G\$25	Year 5 Flow	240	0.854804191	240	1E + 30	189.9881496
\$G\$26	Year 6 Flow	195	0.760364454	195	2149.927647	157.8558478
\$G\$27	Year 7 Flow	225	0.718991202	225	3027.962172	198.1879195
\$G\$28	Year 8 Flow	255	0.670839393	255	1583.881915	255

ción. The Management Scientist y LINGO utilizan el término *precio dual* para describir la *mejora* en el valor de la solución por incremento unitario en el lado derecho de la restricción. Para los problemas de maximización, el precio sombra y el precio dual son lo mismo; para los problemas de minimización, ambos precios tienen signos opuestos. Como el problema de planeación financiera de Hewlitt involucra la minimización, los precios sombra en el informe de sensibilidad de Excel (figura 9.12) son el negativo de los precios duales en la solución de The Management Scientist (figura 9.4).