

Programación Lineal

Dr. Omar Rojas

Instituto de Especialización para Ejecutivos

9 de julio de 2024

Resumen

Notas de clase para el bloque de aprendizaje de Programación Lineal (PL)

- Planeación de operaciones y ventas agregadas

Aplicaciones de PL

- Planeación de operaciones y ventas agregadas
- **Análisis de la productividad**

Aplicaciones de PL

- Planeación de operaciones y ventas agregadas
- Análisis de la productividad
- Planeación de los productos

Aplicaciones de PL

- Planeación de operaciones y ventas agregadas
- Análisis de la productividad
- Planeación de los productos
- Rutas de los productos

Aplicaciones de PL

- Planeación de operaciones y ventas agregadas
- Análisis de la productividad
- Planeación de los productos
- Rutas de los productos
- Programación de vehículos/cuadrillas

Aplicaciones de PL

- Planeación de operaciones y ventas agregadas
- Análisis de la productividad
- Planeación de los productos
- Rutas de los productos
- Programación de vehículos/cuadrillas
- Control de procesos

Aplicaciones de PL

- Planeación de operaciones y ventas agregadas
- Análisis de la productividad
- Planeación de los productos
- Rutas de los productos
- Programación de vehículos/cuadrillas
- Control de procesos
- Control de inventarios

Aplicaciones de PL

- Planeación de operaciones y ventas agregadas
- Análisis de la productividad
- Planeación de los productos
- Rutas de los productos
- Programación de vehículos/cuadrillas
- Control de procesos
- Control de inventarios
- Programación de la distribución

Aplicaciones de PL

- Planeación de operaciones y ventas agregadas
- Análisis de la productividad
- Planeación de los productos
- Rutas de los productos
- Programación de vehículos/cuadrillas
- Control de procesos
- Control de inventarios
- Programación de la distribución
- Estudios para ubicar la planta

Aplicaciones de PL

- Planeación de operaciones y ventas agregadas
- Análisis de la productividad
- Planeación de los productos
- Rutas de los productos
- Programación de vehículos/cuadrillas
- Control de procesos
- Control de inventarios
- Programación de la distribución
- Estudios para ubicar la planta
- Manejo de materiales

Definición de PL

Un **problema de programación lineal** (PL) es un problema de optimización para el cual se efectúa lo siguiente:

- 1 Se intenta maximizar (minimizar) una *función lineal* de las variables de decisión. La función que se desea maximizar (minimizar) se llama función objetivo.
- 2 Los valores de las variables de decisión deben satisfacer un conjunto de *restricciones*. Cada restricción debe ser una ecuación lineal o una desigualdad lineal.
- 3 Se relaciona una *restricción de signo* con cada variable x_i .

Programación Lineal

Definición de PL

Un **problema de programación lineal** (PL) es un problema de optimización para el cual se efectúa lo siguiente:

- 1 Se intenta maximizar (minimizar) una *función lineal* de las variables de decisión. La función que se desea maximizar (minimizar) se llama función objetivo.
- 2 Los valores de las variables de decisión deben satisfacer un conjunto de *restricciones*. Cada restricción debe ser una ecuación lineal o una desigualdad lineal.
- 3 Se relaciona una *restricción de signo* con cada variable x_i .

Además, un PL está caracterizado por las siguientes suposiciones:

- 1 Proporcionalidad y aditividad
- 2 Divisibilidad
- 3 Certidumbre

Supuestos de PL

Propiedades y supuestos de PL

- 1 Una función objetivo
- 2 una o más restricciones
- 3 cursos de acción alternativa
- 4 la función objetivo y las restricciones son lineales:
proporcionalidad y divisibilidad
- 5 certeza
- 6 divisibilidad
- 7 variables no negativas

Formulación matemática de PL

Variables de decisión $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Función objetivo

$$\max (\min) Z = cx$$

donde $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$

Restricciones

$$Ax \leq (\geq) B$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

y $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$

Ejemplo de PL

Problema de PL

Una empresa fabrica dos tipos de productos (p_1 y p_2). El p_1 produce una utilidad de \$2, mientras que p_2 produce una utilidad de \$4. La producción de p_1 requiere de 4 horas de trabajo en el centro A, y 2 horas en el centro de maquinado B. La fabricación del p_2 requiere 6 horas en A, 6 horas en B y 1 hora en el centro C. Los centros de máquinas tienen una capacidad en horas de 120, 72 y 10, respectivamente. Si la compañía quiere maximizar la utilidad, cuántos elementos de cada producto debe producir al día?

Ejemplo de PL

Problema de PL

Una empresa fabrica dos tipos de productos (p_1 y p_2). El p_1 produce una utilidad de \$2, mientras que p_2 produce una utilidad de \$4. La producción de p_1 requiere de 4 horas de trabajo en el centro A, y 2 horas en el centro de maquinado B. La fabricación del p_2 requiere 6 horas en A, 6 horas en B y 1 hora en el centro C. Los centros de máquinas tienen una capacidad en horas de 120, 72 y 10, respectivamente. Si la compañía quiere maximizar la utilidad, cuántos elementos de cada producto debe producir al día?

Solución

Plantear y resolver de forma gráfica y en Solver de Excel

Problema de PL

La compañía FF fabrica mesas y sillas de bajo precios. El proceso de fabricación de cada una es similar. Cada mesa requiera de 4 horas de carpintería y 2 horas en el taller de barnizado. Cada silla requiere de 3 horas de carpintería y 1 hora de barnizado. Durante el periodo de producción actual, están disponibles 240 horas de tiempo de carpintería, así como 100 horas de tiempo de barnizado. Cada mesa vendida genera una utilidad de \$70; cada silla fabricada se vende con una utilidad de \$50. El problema de FF es determinar la mejor combinación posible de mesas y sillas a fabricar, con la finalidad de alcanzar la utilidad máxima

Ejercicios

Problema de PL

La compañía FF fabrica mesas y sillas de bajo precios. El proceso de fabricación de cada una es similar. Cada mesa requiera de 4 horas de carpintería y 2 horas en el taller de barnizado. Cada silla requiere de 3 horas de carpintería y 1 hora de barnizado. Durante el periodo de producción actual, están disponibles 240 horas de tiempo de carpintería, así como 100 horas de tiempo de barnizado. Cada mesa vendida genera una utilidad de \$70; cada silla fabricada se vende con una utilidad de \$50. El problema de FF es determinar la mejor combinación posible de mesas y sillas a fabricar, con la finalidad de alcanzar la utilidad máxima

Solución

Plantear y resolver de forma gráfica y en Solver de Excel

Problemas de minimización

Un rancho de engorda está considerando comprar dos marcas de alimento para pavo, y mezclarlos para ofrecer una buena dieta de bajo costo para sus aves. Cada alimento contiene, en proporciones variables, alguno o los tres ingredientes nutricionales esenciales para pavos de engorda. Por ejemplo, cada libra de la marca 1 contiene 5 onzas del ingrediente A, 4 onzas del ingrediente B, y 0.5 onzas del ingrediente C. Cada libra de la marca 2 contiene 10 onzas del ingrediente A, 3 onzas del ingrediente B, pero nada del ingrediente C. La marca 1 del alimento cuesta 2 centavos de dólar por libra, mientras que la marca 2 de alimento cuesta 3 centavos de dólar por libra. El propietario del rancho desea utilizar la PL para determinar la dieta con costo mínimo que cumpla con el requisito mínimo de ingesta mensual de cada ingrediente nutricional, que es de 90 onzas por pavo del ingrediente A, 48 del ingrediente B y 1.5 del ingrediente C.

Holgura y excedentes

La **holgura** es la cantidad de un recurso que no se utiliza. Para una restricción menor o igual a, se tiene

$$\text{Holgura} = \text{Recursos_disponibles} - \text{Recursos_utilizados}$$

Holgura y excedentes

La **holgura** es la cantidad de un recurso que no se utiliza. Para una restricción menor o igual a, se tiene

$$\text{Holgura} = \text{Recursos_disponibles} - \text{Recursos_utilizados}$$

El **excedente** se emplea con las restricciones mayor que o igual a para indicar la cantidad en que se ha superado el lado derecho de la restricción

$$\text{Excedente} = \text{Cantidad_real} - \text{Cantidad_minima}$$

Casos especiales

- 1 Solución no factible
- 2 Región no acotada
- 3 Redundancia
- 4 Soluciones óptimas múltiples

8.2b Investigación de mercados

Management Sciences Associates (MSA) es una empresa de investigación de mercados con sede en Washington, D.C, que realiza encuestas al consumidor. Uno de los clientes es el servicio de prensa nacional que periódicamente levanta encuestas políticas sobre cuestiones de interés general. En una encuesta para el servicio de prensa, MSA determina que debe llenar varios requisitos para obtener conclusiones estadísticas válidas acerca de un aspecto sensible de las nuevas leyes de inmigración estadounidenses:

- 1 Encuestar al menos 2,300 hogares en Estados Unidos en total.
- 2 Encuestar al menos 1,000 hogares, cuyos jefes de familia tengan 30 años de edad o menos.
- 3 Encuestar al menos 600 hogares, cuyos jefes de familia tengan entre 31 y 50 años de edad.
- 4 Asegurar que al menos 15 % de los encuestados vivan en un estado de la frontera con México.
- 5 Asegurar que no más de 20 % de los encuestados que tienen 51 años de edad o más vivan en un estado de la frontera con México.

8.5 Selección de portafolios

International City Trust (ICT) invierte en créditos comerciales a corto plazo, bonos corporativos, reservas de oro y préstamos de construcción. Para fomentar un portafolios diversificado, el consejo de administración ha puesto límites en la cantidad que se puede comprometer a cualquier tipo de inversión. ICT dispone de 5 millones para inversión inmediata y desea hacer dos cosas:

- 1 Maximizar el rendimiento sobre la inversión hecha para los siguientes seis meses.
- 2 Satisfacer los requerimientos de diversificación según los estipuló el consejo de administración

Adicionalmente, el consejo especifica lo siguiente:

- 1 Por lo menos el 55 % de los fondos deben invertirse en reservas de oro y préstamos para construcción.
- 2 Por lo menos 15 % tiene que invertirse en créditos comerciales.
- 3 La cantidad total invertida no debe exceder 5 millones (puede ser menor).

8.6 Problemas de dieta

Whole Food Nutrition Center utiliza tres granos para mezclar un cereal natural natural que se vende por libra. En el empaque de cada uno de los productos, Whole Food indica el contenido nutricional por cada tazón de cereal cuando se consume con media taza de leche; se consultaron índices de dieta con la finalidad de establecer las cantidades recomendadas de ciertas vitaminas y minerales para un adulto promedio, determinándose lo siguiente:

- 1 Cada porción de 2 onzas de cereal debería contener 3 unidades de proteína, 2 unidades de riboflavina, 1 unidad de fósforo y 0.425 unidades de magnesio.
- 2 Habrá 4 restricciones de (para proteína, riboflavina, fósforo, magnesio) que estipulan el número de unidades que debe ser por lo menos la cantidad mínima especificada.
- 3 Como los requerimientos son por cada porciones de 2 onzas, la cantidad total de granos usada será de 2 onzas o 0.125 libras.
- 4 Se debe tomar en cuenta que el costo se expresa por libra de los tres tipos de granos.

Problema de dieta

Mi dieta requiere ingerir cantidades de entre los cuatro siguientes alimentos: barras de chocolate, helados, refrescos y pasteles. Cada chocolate cuesta \$50, cada helado cuesta \$20, cada refresco \$30 y cada rebanada de pastel \$80. Todos los días debo ingerir por lo menos 500 calorías, 6 onzas de chocolate, 10 onzas de azúcar y 8 onzas de grasa. El contenido nutricional por cada alimento se muestra en la tabla siguiente:

Tipo alimento	Calorías	Chocolate	Azúcar	Grasa
Barra chocolate	400	3	2	2
Helado	200	2	2	4
Refresco	150	0	4	1
Pastel	500	0	4	5

Plantee un PL que se pueda utilizar para cumplir mis necesidades nutricionales al mínimo costo