12 Cálculo de probabilidades

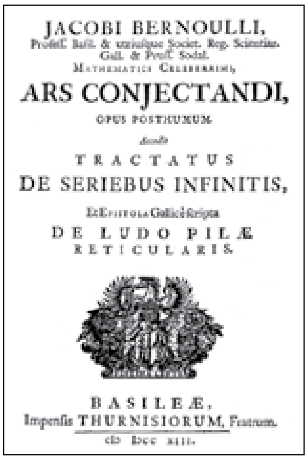
Probabilidad: del juego...

Históricamente, el interés por la probabilidad comienza con los juegos de azar. **Cardano,** algebrista italiano del siglo xvi, fue un jugador empedernido en algunas épocas de su vida. Esta pasión le llevó a escribir un libro sobre el juego, en el que, por primera vez, se teoriza sobre las probabilidades.

Fue otro jugador en el siglo xvii, el caballero de Meré, quien indujo, sin saberlo, a que los matemáticos **Pascal** y **Fermat** mantuvieran una fructífera correspondencia: en sus cartas, proponían soluciones a algunos problemas sobre juegos planteados por Meré y elucubraban sobre otras situaciones probabilísticas. Así nació, con estos dos genios, la base de la teoría de las probabilidades.

Ni Pascal ni Fermat publicaron sus conclusiones, pero sí lo hizo **Huygens** en 1656, en un breve libro titulado *Sobre los razonamientos en los juegos de azar.*

Christiaan Huygens (1629-1695).



JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et Epistola Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.
BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
ctɔ Iɔcc xiii.

Primera edición del "Arte de la conjetura" publicada en 1713, ocho años después de la muerte de Jacques Bernoulli (1654-1705).

... a la ciencia

Jacques Bernoulli recogió lo escrito por Huygens, lo amplió y completó, construyendo así el primer libro importante sobre la teoría de las probabilidades: *Arte de la conjetura.*

Laplace, en 1812, publicó *Teoría analítica de las probabilidades,* donde recogió y organizó multitud de resultados que había ido obteniendo y difundiendo desde hacía 40 años. Se trata de la mayor aportación de la historia a esta teoría. Es suya la siguiente frase:

> *La teoría de las probabilidades es solo*
> *sentido común expresado con números.*

Al comienzo del siglo xx, el ruso **Kolmogorov** elaboró una axiomática de la teoría de la probabilidad, lo que acabó de conferirle la precisión necesaria para ser considerada una rama de las matemáticas.

Pierre Simon Laplace (1749-1827).

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Probabilidades en experiencias simples

Experiencias irregulares

Para hallar la probabilidad de un suceso correspondiente a una experiencia irregular (una chincheta, o un dado cargado, o extraer una bola de una botella con una composición heterogénea en tamaños y pesos, …), no queda más remedio que experimentar. Es decir, repetir la experiencia muchas veces, averiguar la frecuencia relativa de ese suceso y asignarle ese valor (aproximado) a la probabilidad. Cuantas más veces repitamos la experiencia, más fiable será el valor asignado.

Por ejemplo, si en una bolsa hay bolas de cinco colores (🔴, 🟢, 🔵, ⚪ y ⚫) y realizamos 100 veces la experiencia de extraer, mirar, anotar y devolver a la bolsa, obteniendo los siguientes resultados:

f(🔴) = 34, *f*(🟢) = 23, *f*(🔵) = 21, *f*(⚪) = 8, *f*(⚫) = 14

les asignaríamos los siguientes valores a las probabilidades:

P[🔴] ≈ *fr*(🔴) = 0,34; *P*[🟢] ≈ *fr*(🟢) = 0,23; *P*[🔵] ≈ *fr*(🔵) = 0,21;

P[⚪] ≈ *fr*(⚪) = 0,08; *P*[⚫] ≈ *fr*(⚫) = 0,14

Experiencias regulares. Ley de Laplace

Si la experiencia aleatoria se realiza con un instrumento regular (dado correcto, baraja completa, botella con bolas homogéneas en tamaños y pesos de la que se extrae una, …), entra en juego la ley de Laplace. Recordémosla:

- Si el espacio muestral tiene n casos y la experiencia es *regular*, entonces todos ellos tienen la misma probabilidad, $1/n$.
- Si un suceso tiene k casos, entonces su probabilidad es k/n.

$$P[S] = \frac{\text{número de casos favorables a } S}{\text{número total de casos posibles}}$$

Por ejemplo, en una bolsa hay 40 bolas idénticas salvo en el color. De ellas, 15 son rojas. Entonces, al extraer una bola al azar:

$$P[\text{Roja}] = \frac{15}{40} = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

Problemas resueltos

1. ***Lanzamos un dado con forma de dodecaedro regular, con las caras numeradas del 1 al 12. Calcular:***

a) P [8]

b) P [menor que 3]

c) P [impar]

d) P [número primo]

e) P [mayor que 4 y menor que 8]

a) $P[8] = \frac{1}{12}$. Hay 12 casos, y el "8" es uno de ellos.

b) Solo 1 y 2 son menores que 3 $\rightarrow$ $P[\text{menor que } 3] = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

c) Hay 6 números impares menores que 12 $\rightarrow$ $P[\text{impar}] = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

d) 2, 3, 5, 7, 11 son primos $\rightarrow$ $P[\text{número primo}] = \frac{5}{12}$

e) $P[\{5, 6, 7\}] = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2. ***Se han fabricado con un molde varios miles de dados. Sospechamos que son incorrectos. ¿Cómo procedemos para averiguar si son o no correctos? En caso de que no lo sean, ¿cómo averiguaremos la probabilidad de cada cara?***

Podemos suponer que todos los dados son idénticos. Experimentamos con varios efectuando, en total, 1 000 lanzamientos. Estos son los resultados:

	1	2	3	4	5	6
f	154	123	236	105	201	181
fr	0,154	0,123	0,236	0,105	0,201	0,181

Observamos que algunas de las frecuencias relativas se diferencian demasiado del valor 1/6 = 0,166…

Puesto que el número de experimentaciones (1 000) es suficientemente grande, podemos concluir que el dado es defectuoso. Tomaremos las frecuencias relativas de las distintas caras como valores aproximados de sus respectivas probabilidades.

3. ***Lanzamos dos dados correctos y anotamos las diferencias de las puntuaciones.***

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) ¿Qué probabilidad tiene cada caso?

c) Hallar la probabilidad del suceso "la diferencia es mayor que 3".

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	0	1	2	3	4	5
⚁	1	0	1	2	3	4
⚂	2	1	0	1	2	3
⚃	3	2	1	0	1	2
⚄	4	3	2	1	0	1
⚅	5	4	3	2	1	0

A partir de la tabla de la izquierda, construimos la distribución siguiente:

DIFERENCIAS	0	1	2	3	4	5
N.º DE VECES	6	10	8	6	4	2
PROBABILIDAD	6/36	10/36	8/36	6/36	4/36	2/36

a) y b) En la tabla anterior aparece el espacio muestral, $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, con las probabilidades asociadas a cada caso.

c) P[diferencia mayor que 3] = $P[\{4, 5\}]$ = 4/36 + 2/36 = 6/36 = 1/6

4. ***Un juego de cartas solo distingue estas posibilidades: FIGURA (sota, caballo o rey), AS, MENOR QUE 6 (2, 3, 4, 5), MAYOR QUE 5 (6, 7).***

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Dar la probabilidad de cada caso.

c) ¿Cuál es la probabilidad de "NO FIGURA"?

Hay 40 cartas. La probabilidad de cada una es 1/40.

a) En este juego, el espacio muestral es E = {"FIGURA", "AS", "< 6", "> 5"}.

b) Hay 3 figuras en cada palo ⟶ P[FIGURA] = 12/40 = 3/10 = 0,3

Hay 4 ases en la baraja ⟶ P[AS] = 4/40 = 1/10 = 0,1

Hay 4 números < 6 en cada palo → P[< 6] = 16/40 = 2/5 = 0,4

Hay 2 números > 5 en cada palo → P[> 5] = 8/40 = 1/5 = 0,2

c) P[no FIGURA] = 1 – P[FIGURA] = 1 – 0,3 = 0,7

Piensa y practica

En la web Actividades para reforzar el cálculo de probabilidades sencillas.

1. Lanzamos un dado con forma de octaedro, con sus caras numeradas del 1 al 8. Evalúa estas probabilidades:

a) P[múltiplo de 3]

b) P[menor que 5]

c) P[número primo]

d) P[no múltiplo de 3]

2. Lanzamos dos dados y anotamos *la menor de las puntuaciones.*

a) Escribe el espacio muestral e indica la probabilidad de cada uno.

b) Calcula:

P[< 4] P[no < 4]

En la web Cálculo de probabilidades mediante la ley de Laplace.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Probabilidades en experiencias compuestas

Recuerda

Las siguientes experiencias:

a) *extraer tres cartas de una baraja,*

b) *lanzar cinco dados,*

se pueden considerar como experiencias compuestas de otras simples:

a) *Extraer una carta de una baraja, después otra, y después otra.*

b) *Lanzar un dado, y otro… y otro.*

Las experiencias simples que forman una experiencia compuesta pueden ser *dependientes* o *independientes.*

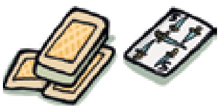
Dos o más experiencias aleatorias se llaman **independientes** cuando el resultado de cada una de ellas no depende del resultado de las demás.

Por ejemplo, el lanzamiento de dos dados puede considerarse como composición de dos pruebas (un dado y otro dado) independientes, pues el resultado de cada dado no influye en el otro.

Dos o más experiencias aleatorias se llaman **dependientes** cuando el resultado de cada una de ellas influye en las probabilidades de las siguientes.

La 1.ª es AS. Quedan 3 ASES en 39 cartas.

La 1.ª no es AS. Quedan 4 ASES en 39 cartas.



Por ejemplo, extraer dos cartas de una baraja (una carta seguida de otra carta) es la composición de dos pruebas *dependientes*, pues el resultado de la primera influye en las probabilidades de los sucesos de la segunda:

1.ª extracción	quedan	2.ª extracción
AS	39 cartas, 3 ASES	$P[\text{AS}] = 3/39$
NO AS	39 cartas, 4 ASES	$P[\text{AS}] = 4/39$

Como vemos, las probabilidades de los sucesos en la 2.ª extracción *dependen* de lo que ocurrió en la 1.ª.

Extracciones con o sin reemplazamiento

"Extraemos una bola de esta bolsa y, después, otra". Falta un dato: ¿la que hemos extraído la echamos de nuevo a la bolsa antes de la 2.ª extracción o no?

— "Sacamos una bola, la miramos, la devolvemos a la bolsa, removemos y volvemos a sacar", lo resumimos así: "sacamos dos bolas **con reemplazamiento**".

— "Sacamos una bola, la miramos y sacamos otra" se resume así: "sacamos dos bolas **sin reemplazamiento**".

En el primer caso, las experiencias son independientes. En el segundo, dependientes.

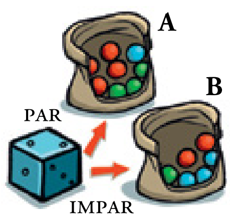
En la web

Actividades para reforzar la distinción entre experiencias dependientes e independientes.

Piensa y practica

1. 

Lanzamos un dado y, después, sacamos una bola de la bolsa. Estas dos experiencias, ¿son dependientes o independientes?

2. 

Lanzamos un dado. Si sale par, extraemos una bola de la bolsa A. Si sale impar, de la B. Las experiencias, ¿son dependientes o independientes?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Composición de experiencias independientes

Es más sencillo calcular las probabilidades de los sucesos compuestos descomponiéndolos en sucesos simples.

Experiencias independientes

El resultado de cada experiencia **no influye** en el resultado de la siguiente.

Cuando varias experiencias aleatorias son independientes, la probabilidad de que ocurra S_1 en la primera, S_2 en la segunda, etc., es:

$$P[S_1 \text{ y } S_2 \text{ y } \dots] = P[S_1] \cdot P[S_2] \cdot \dots$$

Problemas resueltos

1. ***Lanzamos dos dados, uno rojo (R) y otro verde (V). Hallar estas probabilidades:***

a) 3 en R y 5 en V

b) 5 en R y 3 en V

c) un 3 y un 5

d) PAR en R y > 2 en V

"PAR" = {2, 4, 6}

"> 2" = {3, 4, 5, 6}

a) $P[3 \text{ en R y } 5 \text{ en V}] = P[3] \cdot P[5] = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36$

b) $P[5 \text{ en R y } 3 \text{ en V}] = P[5] \cdot P[3] = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36$

c) $P[\text{un } 3 \text{ y un } 5] = P[3 \text{ en R y } 5 \text{ en V}] + P[5 \text{ en R y } 3 \text{ en V}] =$

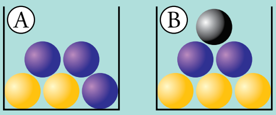
$$= \left(\frac{1}{36}\right) + \left(\frac{1}{36}\right) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

d) $P[\text{PAR en R y } > 2 \text{ en V}] =$

$$= P[\text{PAR}] \cdot P[> 2] = \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1,1	2,1	3,1	4,1	5,1	6,1
⚁	1,2	2,2	3,2	4,2	5,2	6,2
⚂	1,3	2,3	3,3	4,3	5,3	6,3
⚃	1,4	2,4	3,4	4,4	5,4	6,4
⚄	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
⚅	1,6	2,6	3,6	4,6	5,6	6,6

2. ***Sacamos una bola de A y una bola de B. Calcular:***



a) P[🟡 y 🟡]

b) P[🟡 y 🟣]

c) P[🟣 y 🟡]

d) P[una de ellas 🟡 y otra 🟣]

e) P[la segunda ⚫]

a) $P[$🟡 y 🟡$] = P[1.^a$ 🟡$] \cdot P[2.^a$ 🟡$] = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

b) $P[$🟡 y 🟣$] = P[1.^a$ 🟡$] \cdot P[2.^a$ 🟣$] = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$

c) $P[$🟣 y 🟡$] = P[1.^a$ 🟣$] \cdot P[2.^a$ 🟡$] = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{6} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$

d) $P[$una de ellas 🟡 y otra 🟣$] = P[$🟡 y 🟣$] + P[$🟣 y 🟡$] = \frac{4}{30} + \frac{9}{30} = \frac{13}{30}$

e) $P[$la $2.^a$ ⚫$] = P[$cualquier cosa la $1.^a] \cdot P[$la $2.^a$ ⚫$] = 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

Piensa y practica

En la web — Refuerza el cálculo de probabilidades en experiencias independientes.

1. Se extraen 3 cartas con reemplazamiento. Halla:

a) $P[$AS en $1.^a$ y FIGURA en $2.^a$ y $3.^a]$ b) $P[3$ ASES$]$

c) $P[$un AS y dos FIGURAS$]$ d) $P[$ningún AS$]$

2. Se lanzan 5 monedas. Halla la probabilidad de:

a) 5 caras b) alguna cruz

3. Lanzamos 3 monedas. Calcula:

a) $P[$tres caras$]$ b) $P[$ninguna cara$]$ c) $P[$alguna cara$]$

4. Se lanzan dos monedas y un dado. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara en ambas monedas y seis en el dado? ¿Cuál, la de obtener cruz en las monedas y par en el dado?

En la web — Cálculo de probabilidades en experiencias independientes.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Composición de experiencias dependientes

Experiencias dependientes

El resultado de cada experiencia influye en las probabilidades de las siguientes.

Si dos sucesos S_1 y S_2 corresponden a pruebas dependientes, la probabilidad de que ocurra S_1 en la 1.ª y S_2 en la 2.ª es:

$$P[S_1 \text{ y } S_2] = P[S_1] \cdot P[S_2 \text{ en la 2.ª} / S_1 \text{ en la 1.ª}] = P[S_1] \cdot P[S_2 / S_1]$$

La expresión $P[S_2 / S_1]$ se llama **probabilidad condicionada:** probabilidad de S_2 **condicionada** a que ocurra S_1.

Para tres sucesos dependientes:

$$P[S_1 \text{ y } S_2 \text{ y } S_3] = P[S_1] \cdot P[S_2 / S_1] \cdot P[S_3 / S_1 \text{ y } S_2]$$

La probabilidad condicionada $P[S_3 / S_1 \text{ y } S_2]$ significa "probabilidad de que ocurra S_3 supuesto que ocurrieron S_1 y S_2".

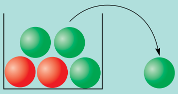
Ejercicio resuelto

De una urna con 3 bolas verdes y 2 rojas, extraemos dos bolas. Calcular la probabilidad de que:

a) Ambas sean verdes.

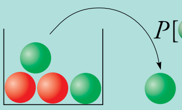
b) La 1.ª sea roja y la 2.ª, verde.

c) Las dos sean rojas.

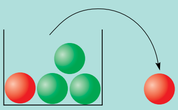


$P[🟢] = \frac{3}{5}$

Si la 1.ª es 🟢



$P[🟢$ en este caso$] = \frac{2}{4}$



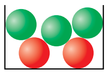
Si la 1.ª es 🔴, quedan cuatro: 1 🔴 y 3 🟢

a) Imaginemos una gran cantidad de gente. Cada uno de ellos tiene una urna con 3 bolas verdes y 2 bolas rojas. Son sometidos a dos pruebas:

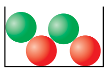
1.ª prueba: Han de extraer bola verde. (La dejan fuera).

2.ª prueba: Han de volver a extraer verde.

Averigüemos qué proporción de gente supera cada prueba y, en consecuencia, qué proporción supera las dos.

PRIMERA EXTRACCIÓN  $P[🟢] = 3/5$. Por término medio, 3 de cada 5 individuos extraen bola verde y superan la 1.ª prueba.

Ahora, la composición de la urna se modifica dependiendo del resultado de la primera prueba. Como estamos siguiendo la pista a los que extraen bola verde, estos tienen ahora una urna con 2 bolas verdes y 2 bolas rojas. Veamos *qué proporción de ellos* supera la 2.ª prueba.

SEGUNDA EXTRACCIÓN  $P[🟢] = 2/4$. Por término medio, 2 de cada 4 de los que superan la 1.ª prueba superan también la 2.ª.

Proporción de individuos que superan ambas pruebas: $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$. Es decir:

$$P[🟢 \text{ y } 🟢] = P[🟢 \text{ la 1.ª}] \cdot P[🟢 \text{ la 2.ª} / 🟢 \text{ la 1.ª}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

Estas pruebas son **dependientes,** porque el resultado de la primera influye en la segunda.

b) $P[🔴 \text{ y } 🟢] = P[🔴 \text{ la 1.ª}] \cdot P[🟢 \text{ la 2.ª} / 🔴 \text{ la 1.ª}] = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

c) $P[🔴 \text{ y } 🔴] = P[🔴 \text{ la 1.ª}] \cdot P[🔴 \text{ la 2.ª} / 🔴 \text{ la 1.ª}] = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

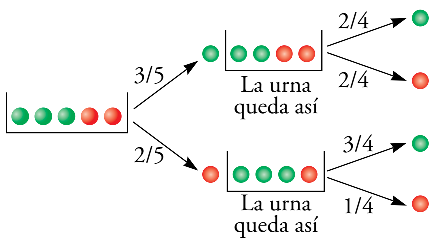
En la web

Amplía, con más actividades, el cálculo de probabilidades en experiencias dependientes utilizando diagramas en árbol.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Descripción de la experiencia mediante un diagrama en árbol

La experiencia de la página anterior se puede describir sistemáticamente, y de forma muy clara, mediante un **diagrama en árbol:**



$P[$🟢 y 🟢$] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

$P[$🟢 y 🔴$] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

$P[$🔴 y 🟢$] = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

$P[$🔴 y 🔴$] = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

Recuerda

Significado de algunas probabilidades:

$\frac{2}{5} = P[$🔴 en la 1.ª$]$

$\frac{3}{4} = P[$🟢 en 2.ª / 🔴 en 1.ª$]$

Ejercicio resuelto

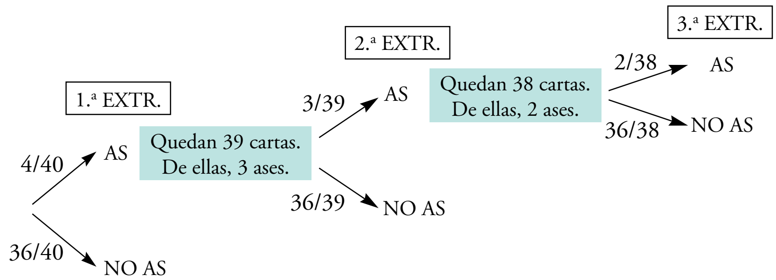
Extraemos tres cartas de una baraja española. Hallar la probabilidad de obtener tres ASES.

$P[3 \text{ ASES}] = P[\text{AS en 1.ª y AS en 2.ª y AS en 3.ª}] =$

$= P[\text{AS en 1.ª}] \cdot P[\text{AS en 2.ª / AS en 1.ª}] \cdot P[\text{AS en 3.ª / AS en 1.ª y 2.ª}] =$

$= \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38}$

Lo describimos en un diagrama en árbol:



$P[3 \text{ ASES}] = P[\text{AS y AS y AS}] = P[\text{AS}] \cdot P[\text{AS en 2.ª / AS en 1.ª}] \cdot$

$\cdot\, P[\text{AS en 3.ª / AS en 1.ª y 2.ª}] = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} = \frac{1}{2\,470}$

Observa

Si en la 1.ª sale AS, quedan 3 ASES en 39 cartas. Por tanto:

$P[\text{AS en 2.ª / AS en 1.ª}] = \frac{3}{39}$

Análogamente:

$P[\text{AS en 3.ª / AS en 1.ª y 2.ª}] = \frac{2}{38}$

En la web — Cálculo de probabilidades en experiencias dependientes.

Piensa y practica

1. Extraemos dos cartas de una baraja española. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea un REY y la segunda un AS?

2. Completa el diagrama en árbol del ejercicio resuelto de esta página y sobre él halla $P[\text{NINGÚN AS}]$.

3. Una urna contiene 5 bolas negras y 3 blancas. Extraemos tres bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean blancas? ¿Y negras?

4. Se extraen, una tras otra, 3 cartas de una baraja. ¿Cuál es la probabilidad de obtener BASTOS las tres veces?

a) Supón que se extraen con reemplazamiento.

b) Supón que se extraen sin reemplazamiento.

5. Una urna A tiene tres bolas blancas y una negra. Otra B tiene una bola negra. Sacamos una bola de A y la echamos en B. Removemos y sacamos una bola de B. ¿Cuál es la probabilidad de que esta sea blanca?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Practica

Cálculo de probabilidades en experiencias simples

1. En un sorteo de lotería observamos la cifra en que termina el "gordo". Calcula:

a) P[menor que 5] b) P[par]

c) P[par o menor que 5] d) P[par y menor que 5]

e) P[mayor o igual que 5] f) P[impar]

g) P[mayor o igual que 5 e impar]

2. Lanzamos un dado rojo y otro verde. Anotamos el resultado. Por ejemplo, (3, 4) significa 3 en el rojo y 4 en el verde. Halla:

a) P[la suma de puntos es 6]

b) P[en uno de los dados ha salido 4]

c) P[en los dados salió el mismo resultado]

d) P[la suma de puntos es 6 o en uno ha salido 4]

e) P[la suma de puntos es 6 y en uno ha salido 4]

3. El dominó consta de 28 fichas. Sacamos una al azar y anotamos la suma (x) de puntuaciones. Calcula:

a) P[x es un número primo]

b) P[x es mayor que 4]

c) P[x es un número primo o mayor que 4]

d) P[x es un número primo y mayor que 4]

e) P[x no es primo]

4. Se extrae una carta de una baraja española. Di cuál es la probabilidad de que sea:

a) REY O AS. b) FIGURA Y OROS. c) NO SEA ESPADAS.

Cálculo de probabilidades en experiencias compuestas

5. Lanzamos dos dados y anotamos la puntuación del mayor (si coinciden, la de uno de ellos).

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1	2				
⚁	2				5	
⚂						
⚃				4		6
⚄						
⚅		6				

a) Completa la tabla y di las probabilidades de los seis sucesos elementales 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

b) Halla la probabilidad de los sucesos:

A: n.° par; B: n.° menor que 4; $A \cap B$.

6. a) Tenemos dos barajas de 40 cartas. Sacamos una carta de cada una. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean 7? ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean figuras (sota, caballo o rey)?

b) Tenemos una baraja de 40 cartas. Sacamos dos cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas cartas sean un 7? ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean figura?

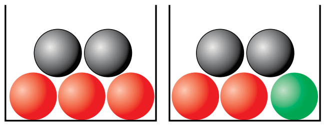
7. Lanzamos tres dados. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres puntuaciones sean menores que 5?

8. Sacamos una bola de cada urna. Calcula la probabilidad de que:

a) Ambas sean rojas.

b) Ambas sean negras.

c) Alguna sea verde.



9. Una urna tiene 3 bolas rojas y 2 verdes. Extraemos dos. Calcula P[2 rojas] y P[2 verdes].

10. En una bolsa hay 4 bolas rojas, 5 verdes y 1 azul. Extraemos 3 bolas. Calcula la probabilidad de que:

a) Las tres sean rojas.

b) Las tres sean verdes.

c) Cada una de las tres sea roja o verde.

d) Una de las tres sea azul.

11. a) Lanzamos dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de no conseguir "ningún 6"? ¿Y la de conseguir "algún 6"?

b) Responde a las mismas preguntas si lanzamos tres dados.

Aplica lo aprendido

12. Después de tirar muchas veces un modelo de chinchetas, sabemos que la probabilidad de que una cualquiera caiga con la punta hacia arriba es 0,38.

Si tiramos dos chinchetas, ¿cuál será la probabilidad de que las dos caigan de distinta forma?

13. En una clase hay 12 chicos y 18 chicas. Elegimos al azar dos estudiantes de esa clase.

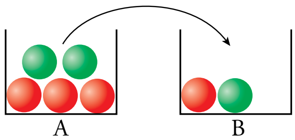
Calcula la probabilidad de que:

a) Los dos sean chicos. b) Sean dos chicas.

c) Sean un chico y una chica.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

14. Sacamos una bola de A, la echamos en B, removemos y sacamos una de B.



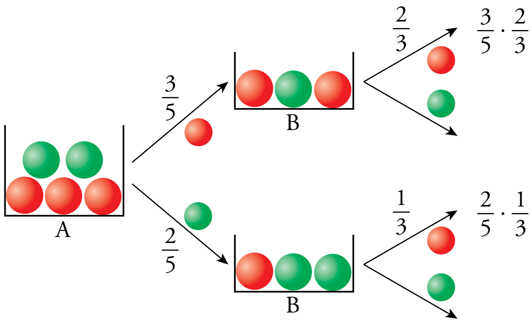
Calcula:

a) P[1.ª roja y 2.ª roja] b) P[1.ª roja y 2.ª verde]

c) P[2.ª roja / 1.ª verde] d) P[2.ª roja / 1.ª roja]

e) P[2.ª roja] f) P[2.ª verde]

e) Ten en cuenta el diagrama.



15. Tiramos dos dados correctos (verde y rojo). Di cuál es la probabilidad de obtener:

a) En los dos, la misma puntuación.

b) Un 6 en alguno de ellos.

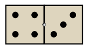
c) En el rojo, mayor puntuación que en el verde.

16. Se extraen dos bolas de una bolsa con 3 rojas y 4 azules. Calcula la probabilidad de que ambas sean del mismo color.

Resuelve problemas

17. Ana tira un dado y Eva lo tira después. ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación de Eva sea superior a la de Ana?

18. Sacamos dos fichas de un dominó. ¿Cuál es la probabilidad de que en ambas la suma de sus puntuaciones sea un número primo (2, 3, 5, 7 u 11)?

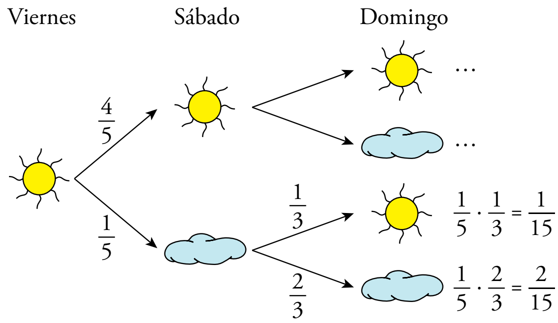
 4 + 3 = 7 es primo

19. En cierto lugar se sabe que si hoy hace sol, la probabilidad de que mañana también lo haga es 4/5.

Pero si hoy está nublado, la probabilidad de que mañana lo siga estando es 2/3.

Si hoy es viernes y hace sol, ¿cuál es la probabilidad de que el domingo también haga sol?

Para resolverlo, completa el diagrama en tu cuaderno y razona sobre él:



Autoevaluación

1. Encima de una mesa tenemos estas cuatro cartas de una baraja española:

– Cinco de copas. – As de oros.

– Cuatro de bastos. – Dos de oros.

Sacando al azar otra carta del mazo y fijándonos en su número, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de las puntuaciones de las cinco cartas (las cuatro de la mesa y la extraída del mazo) sea 15? ¿Y 16?

2. Lanzamos una moneda y un dado.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener cruz y cinco?

b) ¿Y la de obtener cara y número par?

3. Tenemos dos bolsas, A y B, con estas bolas:

A: 7 blancas y 3 negras.

B: 1 blanca, 2 negras y 7 rojas.

Tirando un dado, si sale 1 o 2 extraemos una bola de A. Si sale 3, 4, 5 o 6, extraemos una bola de B. Calcula la probabilidad de extraer la bola roja.

4. La urna A tiene 3 bolas rojas y 1 negra, y la B, 3 negras y 1 roja. Sacamos una bola de A, la echamos en B, removemos y sacamos una bola de B. Calcula la probabilidad de que ambas bolas sean rojas.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....