5 Expresiones algebraicas

INTRODUCCIÓN

El lenguaje algebraico sirve para expresar situaciones relacionadas con la vida cotidiana, utilizando letras y números de forma combinada.

La realización de estas operaciones ha de hacerse al principio paso a paso, pero después se agilizarán y simplificarán las distintas fases en la resolución de ecuaciones.

El estudio de las expresiones algebraicas fomentará en los alumnos la agilidad en las operaciones aritméticas con números naturales y enteros, así como el empleo de técnicas de resolución por tanteo, ensayo-error y específicas, como la transposición y reducción de términos.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- El lenguaje algebraico utiliza letras en combinación con números y signos. La parte de las Matemáticas que estudia la relación entre números, letras y signos se llama Álgebra.
- Una expresión algebraica es el conjunto de números y letras que se combinan con los signos de las operaciones matemáticas.
- Podemos hallar el valor numérico de una expresión algebraica, sustituyendo las letras por números y realizando las operaciones.
- Los *monomios* son las expresiones algebraicas más sencillas. Están formados por números (coeficientes) y letras (parte literal).
- Un *polinomio* es una expresión algebraica formada por dos o más monomios. Podemos sumar, restar, multiplicar y dividir monomios.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
Expresar de forma algebraica ciertas situaciones.	Lenguaje numérico y algebraico.Expresión algebraica.Valor numérico.	 Traducción al lenguaje algebraico de ciertas situaciones. Obtención del valor numérico de una expresión.
2. Distinguir y operar con monomios.	 Monomios semejantes. Operaciones con monomios: suma, resta, multiplicación y división. 	 Resolución de operaciones de suma y resta de monomios semejantes. Multiplicación y división de dos monomios.
3. Identificar y operar con polinomios.	 Operaciones con polinomios: suma, resta y multiplicación. Sacar factor común. 	 Resolución de operaciones de suma, resta y multiplicación de polinomios. Extracción de factor común de un polinomio.
4. Aplicar las igualdades notables.	Cuadrado de una suma.Cuadrado de una diferencia.Suma por diferencia.	Aplicación de las igualdades notables para simplificar la expresión de algunos polinomios.



OBJETIVO 1

EXPRESAR DE FORMA ALGEBRAICA CIERTAS SITUACIONES

NOMBRE:	CURSO:	FFCHA.
10MDI\L	CUNSU:	1 LOI 1/ \

LENGUAJE NUMÉRICO Y LENGUAJE ALGEBRAICO

- El lenguaje en el que intervienen números y signos de operaciones se denomina lenguaje numérico.
- El lenguaje que combina letras con números y signos de operaciones aritméticas se llama **lenguaje algebraico**.

EJEMPLO

Lenguaje usual	Lenguaje numérico
Catorce dividido entre siete	14 : 7
Dos elevado al cuadrado	2^{2}
La tercera parte de 18	<u>18</u> 3
Lenguaje usual	Lenguaje algebraico
La suma de dos números	a + b
Un número menos 3 unidades	<i>y</i> – 3
El cuadrado de un número	b^2
La mitad de un número	$\frac{x}{2}$

1 Expresa con lenguaje numérico o lenguaje usual.

LENGUAJE USUAL	LENGUAJE NUMÉRICO
La suma de once más nueve es veinte	
Cien dividido entre veinte	
La cuarta parte de veinte es cinco	
Dos elevado al cubo es ocho	
	32 : 8
	3 · 4

2 Une cada enunciado con su equivalente en lenguaje algebraico.

a) La mitad de un número.

$$(m + n)^2$$

b) El triple de un número menos cinco unidades.

$$n-1$$

c) El número anterior a un número entero.

$$2 \cdot (a+b+c)$$

d) El número posterior a un número entero.

$$x + 1$$

e) El cuadrado de la suma de dos números.

$$\frac{m}{2}$$

f) El doble de la suma de tres números.

 $3 \cdot b - 5$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

EXPRESIÓN ALGEBRAICA

Una **expresión algebraica** es un conjunto de números y letras unidos con los signos de las operaciones matemáticas.

EJEMPLO

Expresión escrita	Expresión algebraica
La suma de dos números menos dos	x + y - 2
El triple de un número más cinco	$3 \cdot x + 5$
El cuadrado de un número más una unidad	$x^2 + 1$

- 3 Escribe estos enunciados como expresión algebraica.
 - a) El doble de un número b.
 - b) El doble de la suma de dos números m y n.
 - c) El cuadrado de un número x más 4 unidades.
 - d) El producto de tres números a, b y c.
 - e) El doble de un número y más 3 unidades.
- 4 Relaciona cada enunciado con su expresión algebraica.
 - a) El doble de un número más dos unidades. x-5b) Un número disminuido en cinco unidades. $\frac{x}{3}$ c) La tercera parte de un número. $2 \cdot x + 2$ d) El cubo de un número. x+10e) El doble de un número. 2xf) Un número aumentado en diez unidades. x^3 g) La diferencia de dos números. x+1h) El número siguiente a un número entero. x-y
- 5 Si x es la edad de Juan, expresa en lenguaje algebraico.

LENGUAJE USUAL	LENGUAJE ALGEBRAICO
Los años que tenía el año pasado	
Los años que tendrá dentro de un año	
La edad que tenía hace 5 años	
La edad que tendrá dentro de 5 años	
Los años que faltan para que cumpla 70 años	

6 Inventa un enunciado para estas expresiones algebraicas.

a)
$$n+1 \longrightarrow$$

b)
$$a + b \longrightarrow$$

c)
$$\frac{b}{2}$$
 \longrightarrow

d)
$$2 \cdot (m-n) \rightarrow$$

e)
$$x^3 - 1 \longrightarrow$$

f)
$$2 \cdot x + 1 \longrightarrow$$

VALOR NUMÉRICO DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA

El **valor numérico** de una expresión algebraica es el número que se obtiene al sustituir las letras por números y realizar las operaciones que se indican.

EJEMPLO

Halla el valor numérico de la expresión algebraica 3x + 2 para x = 1.

Sustituimos x por 1 en la expresión algebraica y realizamos las operaciones:

$$x = 1 \rightarrow 3 \cdot 1 + 2 = 3 + 2 = 5$$

El valor numérico de 3x + 2, para x = 1, es 5.

7 Halla el valor numérico de la expresión algebraica 2x + 1 para estos valores:

VALOR	SUSTITUCIÓN	OPERACIÓN	VALOR NUMÉRICO
x = 0	2 · (0) + 1	$2 \cdot 0 + 1 = 0 + 1$	1
x=2			
x = -1			
x = -2			

8 Calcula el valor numérico de estas expresiones para los valores que se indican.

VALORES	x + y	2 <i>x</i> – 3 <i>y</i>	$(x+y)^2$
x=1 $y=0$	1 + 0 = 1	$2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 =$	$(1+0)^2 = (1)^2 =$
x = -1 $y = 2$			
x=1 $y=-2$			
x = -2 $y = 3$			
x = -1 $y = -1$			

MONOMIOS

Un **monomio** es una expresión algebraica formada por productos de números y letras. A los números se les denomina **coeficientes**, y a las letras con sus exponentes, **parte literal**.

EJEMPLO

мономо	3 <i>x</i>	-5 <i>ab</i>	$-5x^{3}$	$\frac{3}{5}x$
COEFICIENTE	3	-5	-5	<u>3</u> 5
PARTE LITERAL	Х	ab	<i>x</i> ³	Х

1 Completa las tablas.

MONOMIO	COEFICIENTE	PARTE LITERAL
Х	1	Х
-3 <i>xy</i>	-3	
$-5xy^2$		
$\frac{1}{3}x^2y$		

MONOMIO	COEFICIENTE	PARTE LITERAL
$\frac{2}{3}a^2b$		
-2 <i>xyz</i>		
$-3b^2c$		
$-\frac{5}{7}xyz^2$		

GRADO DE UN MONOMIO

El grado de un monomio es el número que resulta de sumar todos los exponentes de su parte literal.

EJEMPLO

мономіо	GRADO	EXPLICACIÓN
-3 <i>x</i>	1	El exponente de x es 1 (x^1)
4 <i>a</i> ² <i>y</i>	3	La suma de los exponentes de a^2y^1 es $2+1=3$
$-5x^2y^3$	5	La suma de los exponentes de x^2y^3 es $2 + 3 = 5$

2 Calcula el grado de los siguientes monomios.

a)
$$-5x^2 \longrightarrow \text{Grado} =$$

d)
$$zx^2 \rightarrow \text{Grado} =$$

b)
$$7x^2y \longrightarrow \text{Grado} =$$

e)
$$-yx \rightarrow \text{Grado} =$$

c)
$$\frac{2}{3}a^5b \rightarrow \text{Grado} =$$

f)
$$-x \longrightarrow \text{Grado} =$$

3 Completa la siguiente tabla.

MONOMIO	COEFICIENTE	PARTE LITERAL	GRADO
-3 <i>x</i>	-3	Х	1
-2a³b			
-2 <i>ab</i>			
XYZ			
7ab ² c ³			
6 <i>y</i> ² <i>z</i>			

MONOMIOS SEMEJANTES

Dos o más monomios son semejantes cuando tienen la misma parte literal.

EJEMPLO

5x; 2x son monomios semejantes, porque tienen la misma parte literal (x).

 $3xy^2$; $-xy^2$ son monomios semejantes, porque tienen la misma parte literal (xy^2).

 x^2y^3 ; xy^2 no son monomios semejantes.

4 Escribe dos monomios semejantes para cada monomio.

мономіо	MONOMIOS SEMEJANTES
-5 <i>x</i>	
-ab	
$-2yx^3$	
$-3y^2z^3$	
$\frac{2}{3}a^2b$	
5 <i>xy</i>	

SUMA Y RESTA DE MONOMIOS

- La suma y resta de monomios solo se puede realizar cuando los monomios son semejantes.
- Para sumar o restar monomios semejantes se suman o restan los coeficientes y se deja la misma parte literal.

EJEMPLO

$$2x + x = (2 + 1)x = 3x$$

 $2x + y \rightarrow \text{La suma se deja indicada, porque no son monomios semejantes.}$

5 Realiza las siguientes operaciones.

a)
$$a + a + a + a =$$

d)
$$5x - 3x - x =$$

b)
$$2x^2 + x^2 + x^2 =$$

e)
$$-5x^3 - 3x^3 =$$

c)
$$5mn - mn - 4mn =$$

f)
$$p - 2p + 5p =$$

6 Completa los huecos con monomios semejantes y calcula.

c)
$$2x^3 + =$$

b)
$$+5p+$$
 =

d)
$$+2xy+$$
 =

7 Escribe un monomio semejante al que se indica y calcula.

a)
$$7x -$$
 =

b)
$$-x^2 =$$

d)
$$-4x^2y =$$

8 Reduce las siguientes expresiones algebraicas.

a)
$$6x^2 + 4x - 2x^2 - x$$

Sumamos y restamos los monomios semejantes y calculamos el resultado:

$$\underbrace{\begin{array}{ccc} 6x^2 - 2x^2 \\ \downarrow \\ 4x^2 \end{array}}_{} + \underbrace{\begin{array}{ccc} 4x - x \\ \downarrow \\ 3x \end{array}}_{}$$

b)
$$5x^2 - 2x + 3x^2 - x =$$

c)
$$ab - ab + 7ab + 4ab - 2ab =$$

d)
$$3ab^3 - 2ab + 5ab^3 - ab + 4ab =$$

e)
$$-10xy - 5xy + 2xy + 4x - 8y + 2y + 2x =$$

MULTIPLICACIÓN DE MONOMIOS

El **producto de dos o más monomios** es otro monomio cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes y cuya parte literal es el producto de las partes literales.

EJEMPLO

$$3x \cdot 2x = (3 \cdot 2) \cdot x \cdot x = 6x^2$$

4
$$x \cdot (-2x^2) = [4 \cdot (-2)] \cdot x \cdot x^2 = -8x^3$$

9 Realiza estas multiplicaciones.

a)
$$4a \cdot 3a =$$

c)
$$-2x \cdot (-5x) =$$

e)
$$m \cdot m^2 =$$

b)
$$3x^2 \cdot 3x^2 =$$

d)
$$3x^2 \cdot (-3x^2) =$$

f)
$$\frac{2}{3}x \cdot \frac{3}{5}x^2 =$$

10 Calcula y reduce.

a)
$$4x(2x-5) = 4x \cdot 2x - 4x \cdot 5 = 4 \cdot 2 \cdot x \cdot x - 4 \cdot 5 \cdot x = 8x^2 - 20x$$

b)
$$3(2x + 3x^2) =$$

c)
$$2a(4a^3 - 3a^2) =$$

d)
$$(3 - ab + ab^2)2a =$$

e)
$$2(x^2 + 3x) - 2x =$$

f)
$$-3x(x^3 - 2x + 4) - 12x =$$

g)
$$-x^3(-5x+4-3x^2-10x) =$$

h)
$$-\frac{1}{3}x(-x^4+3x-2x)+x^2=$$

DIVISIÓN DE MONOMIOS

El cociente de dos monomios es otro monomio cuyo coeficiente es el cociente de los coeficientes y cuya parte literal es el cociente de las partes literales.

EJEMPLO

6x: **2**x =
$$\frac{6x}{2x} = \frac{6}{2} \cdot \frac{x}{x} = 3 \cdot 1 = 3$$

$$6x : 2x = \frac{6x}{2x} = \frac{6}{2} \cdot \frac{x}{x} = 3 \cdot 1 = 3$$

$$10x^3 : (-5x) = \frac{10}{-5} \cdot \frac{x^3}{x} = -2x^2$$

11 Resuelve estas divisiones de monomios.

a)
$$8x^3 : 2x =$$

d)
$$a^4 : a^2 =$$

b)
$$(-12x^5): (-12x^4) =$$

e)
$$(-14y^4): (-2y^2) =$$

c)
$$20m^4:15m^3=$$

f)
$$(-20z^5): 4z^4 =$$

12 Efectúa las siguientes operaciones.

a)
$$(7x^5 : 2x) + x =$$

b)
$$(6x^7 : x^3) - (5x : x) =$$

c)
$$(8a^2b:4ab)+b^2=$$

d)
$$3x(x+1) - (4x^2 : x) =$$

e)
$$(12a^3b^2:3a^2b)-b=$$

f)
$$3(4xy^2 : 2xy) - 2y =$$

g)
$$2x[(-2y^2x^3):(-x^2y)]+x(x-1)=$$

OBJETIVO 3

IDENTIFICAR Y OPERAR CON POLINOMIOS

NOMBRE: CURSO	: FECHA:
---------------	----------

POLINOMIOS

Un **polinomio** es la suma o resta de varios monomios.

- Cada uno de los sumandos se llama **término** del polinomio.
- Los términos que no tienen parte literal se denominan **términos independientes**.
- El **grado de un polinomio** es el del monomio de mayor grado.

EJEMPLO

POLINOMIO	TÉRMINOS	TÉRMINO INDEPENDIENTE	GRADO DEL POLINOMIO
$2x^3 - 3x - 1$	$2x^3$; $-3x$; -1	-1	3, que es el grado de $2x^3$
-2xy+9	−2 <i>xy</i> ; 9	9	2, que es el grado de $-2xy$
-5 <i>x</i>	-5 <i>x</i>	No tiene	1, que es el grado de $-5x$

1 Completa esta tabla.

POLINOMIO	TÉRMINOS	TÉRMINO INDEPENDIENTE	GRADO DEL POLINOMIO
$-2x^3 + 3x - 5$			
5ab – 5ax²b			
$x^3 - 2x^2 - x - 3$			
6 <i>x</i> – 7			
5 <i>xy</i> – 2 <i>y</i>			
$\frac{2}{3}a^2b+1$			
$3xy + 5xy^2$			

- 2 Escribe un polinomio de grado 3 que tenga un término, otro con dos términos y un tercero con tres términos.
- 3 Indica el grado de los siguientes polinomios.

a)
$$-x + 3x^2 \rightarrow \text{Grado} =$$

c)
$$2x^5 - x \longrightarrow \text{Grado} =$$

b)
$$x^2y - 3x \longrightarrow \text{Grado} =$$

d)
$$-5x^4 - x^3 - 8 \rightarrow \text{Grado} =$$

4 Halla el valor numérico del polinomio $x^2 - 2x + 1$ para los valores que se indican.

VALOR	VALOR NUMÉRICO DEL POLINOMIO
x = 0	$0^2 - 2 \cdot 0 + 1 = 0 - 0 + 1 = 1$
x = 1	
x = -2	

SUMA Y RESTA DE POLINOMIOS

Para **sumar** o **restar polinomios** se suman o restan los monomios semejantes.

EJEMPLO

$$A(x) = 2x^{2} + 5$$

$$B(x) = x^{3} - 5x^{2} - 2x + 3$$

$$2x^{2} + 5$$

$$2x + 3 + x^{3} - 5x^{2} - 2x + 3$$

$$x^{3} - 3x^{2} - 2x + 8$$

$$A(x) + B(x) = (2x^2 + 5) + (x^3 - 5x^2 - 2x + 3) =$$

= $x^3 - 3x^2 - 2x + 8$

$$A(x) - B(x) = (2x^{2} + 5) - (x^{3} - 5x^{2} - 2x + 3) = 2x^{2} + 5$$

$$= 2x^{2} + 5 - x^{3} + 5x^{2} + 2x - 3 = -x^{3} + 7x^{2} + 2x + 2$$

$$= -x^{3} + 7x^{2} + 2x + 2$$

$$-x^{3} + 7x^{2} + 2x + 2$$

- 5 Dados los polinomios $A(x) = 6x^2 8x + 1$ y $B(x) = -9x^2 2x + 7$, calcula.
 - a) A(x) + B(x)
- b) A(x) B(x)
- c) B(x) A(x)

- 6 Dados los polinomios $A(x) = x^3 3x + 2$, $B(x) = -2x^2 + 7x$ y $C(x) = -x^3 2$, calcula.
 - a) A(x) + B(x) + C(x)
- b) A(x) + B(x) C(x) c) A(x) B(x) C(x)

7 Escribe los siguientes polinomios de forma reducida.

$$P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5x^3 + 4x^2 - 7x + 2x^3$$

$$Q(x) = -4x^2 - 5x^3 + 2x^2 - 6x + 2x^2 + 5x^3 - 1$$

$$R(x) = 2x^4 - 6x^3 + 4x + 2x^2 - 3x^3 + 8x - 2$$

$$P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5x^3 + 4x^2 - 7x + 2x^3 = 3x^3 - 5x^3 + 2x^3 + 2x^2 + 4x^2 - 7x = 6x^2 - 7x$$

8 Con los polinomios reducidos del ejercicio anterior, calcula.

a)
$$P(x) + Q(x)$$

b)
$$Q(x) + R(x)$$

c)
$$Q(x) - R(x)$$

c)
$$Q(x) - R(x)$$
 d) $P(x) - Q(x)$

PRODUCTO DE POLINOMIOS

Para calcular el producto de dos polinomios se multiplica cada monomio del primer polinomio por cada monomio del segundo. A continuación, se reducen los monomios semejantes.

EJEMPLO

$$A(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 1$$

$$B(x) = 2x^2 + 3x$$

$$x^3 - 5x^2 - 2x + 1$$

$$\times 2x^2 + 3x$$

$$3x^4 - 15x^3 - 6x^2 + 3x$$

$$2x^5 - 10x^4 - 4x^3 + 2x^2$$

$$A(x) \cdot B(x) \rightarrow 2x^5 - 7x^4 - 19x^3 - 4x^2 + 3x$$

- 9 Dados los polinomios $A(x) = -4x^3 + 6x^2 8x + 1$ y $B(x) = 2x^2 7$, calcula.
 - a) $A(x) \cdot B(x)$
- b) $B(x) \cdot 3x$ c) $A(x) \cdot x$
- d) $B(x) \cdot (-3x)$

SACAR FACTOR COMÚN

Una aplicación de la propiedad distributiva es **sacar factor común**. Esta operación consiste en extraer como factor común el monomio que se repite en todos los términos.

EJEMPLO

EXPRESIÓN	FACTOR COMÚN	SACAR FACTOR COMÚN
5x + 5y	5	5(x+y)
$7x^2 - 3x$	X	x(7x - 3)
$5x^2 - 5x$	5 <i>x</i>	5x(x-1)
$3x^2 - 12x + 15x^3$	3 <i>x</i>	$3x(x-4+5x^2)$

10 Extrae factor común en las siguientes expresiones.

a)
$$3b + 4b$$

c)
$$15x^4 - 5x^2 + 10x$$

e)
$$12x^2 - 3x^2 + 9x^3$$

b)
$$3a + 6b + 12$$

d)
$$6x^2y + 4xy^2$$

f)
$$10xy^2 - 20xy + 10x^2y$$

11 Simplifica las fracciones, sacando factor común en el numerador y en el denominador.

a)
$$\frac{10x^3 + 10x}{5x} = \frac{10x(x^2 + 1)}{5x} = \frac{2 \cdot \cancel{5x}(x^2 + 1)}{\cancel{5x}} = \frac{2(x^2 + 1)}{1} = 2(x^2 + 1)$$

b)
$$\frac{6x^4y^2}{-3x^3y^2} =$$

c)
$$\frac{a^3b^3}{a^3b} =$$

d)
$$\frac{12m^3}{12m} =$$

e)
$$\frac{4-6a}{6a^2-9a^3}=$$

f)
$$\frac{x^2y^2 - x^3y^2}{x^2y^2} =$$

APLICAR LAS IGUALDADES NOTABLES

NOMBRE: _____ CURSO: ____ FECHA: _____

IGUALDADES NOTABLES

Las **igualdades notables** son ciertas igualdades cuya aplicación resulta muy útil para abreviar cálculos con expresiones algebraicas.

Las principales igualdades notables son:

Cuadrado de una suma: $(a + b)^2$ Cuadrado de una diferencia: $(a - b)^2$ Suma por diferencia: $(a + b) \cdot (a - b)$

CUADRADO DE UNA SUMA

El **cuadrado de una suma** es igual al cuadrado del primer sumando más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\begin{array}{c}
a+b \\
\times a+b \\
\hline
ba+b^2 \\
\hline
a^2+ab \\
\hline
a^2+2ab+b^2
\end{array}$$

1 Calcula.

a)
$$(x + 5)^2 =$$

c)
$$(2 + x)^2 =$$

b)
$$(a + 2b)^2 =$$

d)
$$(xy + 1)^2 =$$

CUADRADO DE UNA DIFERENCIA

El **cuadrado de una diferencia** es igual al cuadrado del primer sumando menos el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\begin{array}{c}
\times & a-b \\
-ba+b^2 \\
a^2 & -ab+b^2 \\
\hline
a^2 - 2ab + b^2
\end{array}$$

a - b

2 Calcula.

a)
$$(x-1)^2 =$$

c)
$$(2a - 3b)^2 =$$

b)
$$(a - 6b)^2 =$$

d)
$$(5 - 3x)^2 =$$

SUMA POR DIFERENCIA

El producto de una **suma por diferencia** es igual a la diferencia de los cuadrados.

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

$$\begin{array}{c}
a+b \\
\times & a-b \\
-ba-b^2 \\
\hline
a^2+ab \\
\hline
a^2+0-b^2
\end{array}$$

3 Calcula.

a)
$$(x + 5) \cdot (x - 5) =$$

c)
$$(7 + x) \cdot (7 - x) =$$

b)
$$(2a + b) \cdot (2a - b) =$$

d)
$$(5a + 1) \cdot (5a - 1) =$$

4 Expresa en forma de igualdad notable.

a)
$$x^2 + 2x + 1 =$$

d)
$$4x^2 - 4x + 1 =$$

b)
$$x^2 + 10x + 25 =$$

e)
$$9a^2 - 30ab + 25b^2 =$$

c)
$$x^2 - 16 =$$

f)
$$4x^2 - 36 =$$

5 Simplifica las fracciones, utilizando las igualdades notables.

a)
$$\frac{x^2-4}{x^2-4x+4} =$$

b)
$$\frac{x^2 - 10x + 5^2}{x^2 - 25} =$$