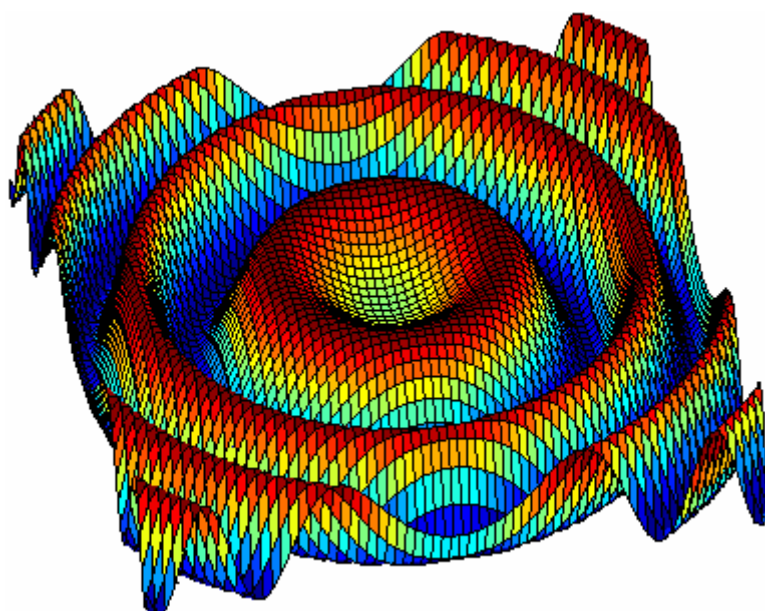


Ejercicios de matemáticas de 4º de ESO



Julián Moreno Mestre



*Algunos trucos de cálculo son bastante fáciles, otros son muy difíciles. Los tontos que escriben los libros de matemáticas avanzadas pocas veces se toman la molestia de mostrar cuán fáciles son los cálculos fáciles. **Silvanus P. Thomson.***

Edición 1.0

Índice.

Temario de 4º de ESO.....	3
Bibliografía de consulta y software.....	6
Aritmética:	
Ejercicios de números.....	7
Ejercicios de números enteros.....	8
Ejercicios de fracciones.....	11
Ejercicios de radicales.....	14
Álgebra, ecuaciones e inecuaciones:	
Ejercicios y problemas de ecuaciones de primer grado.....	16
Problemas de proporcionalidad directa.....	21
Problemas de proporcionalidad inversa.....	21
Problemas de porcentajes.....	22
Problemas de proporcionalidad compuesta.....	23
Ejercicios y problemas de ecuaciones de segundo grado.....	24
Ejercicios y problemas de sistemas de ecuaciones lineales.....	27
Ejercicios de ecuaciones irracionales.....	33
Ejercicios y problemas de sistemas de ecuaciones no lineales.....	34
Ejercicios de inecuaciones.....	37
Ejercicios de suma, resta, producto y división de polinomios.....	41
Ecuaciones polinómicas con raíces enteras (Fórmulas de Cardano-Vieta)...	43
Ejercicios de identidades notables.....	46
Ejercicios de algebraicos de simplificaciones en fracciones.....	48
Logaritmos y exponenciales:	
Ejercicios de introducción a los logaritmos.....	52
Ejercicios de ecuaciones logarítmicas y exponenciales.....	53
Geometría I (Trigonometría).	
Ejercicios de semejanza de triángulos.....	56
Ejercicios y problemas de trigonometría.....	57
Ejercicios de ecuaciones trigonométricas.....	62
Ejercicios de demostración de igualdades trigonométricas.....	63
Geometría II (Vectores, rectas y curvas)	
Ejercicios de vectores.....	64
Ejercicios de rectas.....	70
Ejercicios geométricos con puntos, segmentos y rectas.....	73
Ejercicios de circunferencias, elipses, hipérbolas y parábolas.....	74
Funciones y gráficas.	
Ejercicios de discusión de gráficas de funciones.....	82
Ejercicios de representación de funciones sencillas.....	92
Ejercicios de dominios.....	104
Ejercicios de composición e inversa de funciones.....	106
Ejercicios de simetrías y tasa de variación media.....	107
Ejercicios de polinomios de interpolación y extrapolación.....	107
Ejercicios para aprender a derivar.....	108
Estadística y probabilidad.	
Introducción a la combinatoria (Teoría y ejercicios).....	117
Ejercicios de probabilidad simple y compuesta.....	131
Ejercicios de estadística descriptiva.....	141
Regresión lineal.....	145

Temario de 4º ESO de Matemáticas.

Decreto 23/2007, de 10 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece en la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria.

Opción A

1. Números.

- 1.1. Operaciones con números enteros, fracciones y decimales.
- 1.2. Decimales infinitos no periódicos: números irracionales.
- 1.3. Expresión decimal de los números irracionales.
- 1.4. Notación científica. Operaciones sencillas con números en notación científica con y sin calculadora.
- 1.5. Potencias de exponente fraccionario. Operaciones con radicales numéricos sencillos.
- 1.6. Interpretación y utilización de los números y las operaciones en diferentes contextos, eligiendo la notación y precisión más adecuadas en cada caso.
- 1.7. Proporcionalidad directa e inversa: resolución de problemas.
- 1.8. Los porcentajes en la economía. Aumentos y disminuciones porcentuales. Porcentajes encadenados. Interés simple y compuesto.
- 1.9. Uso de la hoja de calculo para la organización de cálculos asociados a la resolución de problemas cotidianos y financieros.
- 1.10. Intervalos: tipos y significado.
- 1.11. Representación de números en la recta numérica.

2. Álgebra.

- 2.1. Valor numérico de polinomios y otras expresiones algebraicas.
- 2.2. Suma, resta y producto de polinomios.
- 2.3. Identidades notables: estudio particular de las expresiones $(a + b)^2$, $(a - b)^2$ y $(a + b) \cdot (a - b)$. Factorización de polinomios.
- 2.4. Resolución algebraica y gráfica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- 2.5. Resolución de problemas cotidianos y de otros campos de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas.
- 2.6. Resolución de otros tipos de ecuaciones mediante aproximaciones sucesivas con ayuda de la calculadora científica o gráfica.

3. Geometría.

- 3.1. Aplicación de la semejanza de triángulos y el teorema de Pitágoras para la obtención indirecta de medidas. Resolución de problemas geométricos frecuentes en la vida cotidiana.
- 3.2. Utilización de otros conocimientos geométricos en la resolución de problemas del mundo físico: medida y cálculo de longitudes, áreas, volúmenes, etc.
- 3.3. Iniciación a la geometría analítica plana: coordenadas de un punto; distancia entre dos puntos.

4. Funciones y gráficas.

- 4.1. Funciones. Estudio gráfico de una función.
- 4.2. Características de las graficas: crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, continuidad, simetrías y periodicidad.
- 4.3. Interpretación de un fenómeno descrito mediante un anunciado, tabla gráfica o expresión algebraica. Análisis de resultados utilizando el lenguaje matemático adecuado.

- 4.4. Estudio y utilización de otros modelos funcionales no lineales: exponencial y cuadrática. Utilización de las tecnologías de la información para su análisis.
- 4.5. La tasa de variación como medida de la variación de una función en un intervalo. Análisis de distintas formas de crecimiento en tablas, gráficas y enunciados verbales.

5. Estadística y probabilidad.

- 5.1. Estadística descriptiva unidimensional. Identificación de las fases y tareas de un estudio estadístico a partir de situaciones concretas cercanas al alumno.
- 5.2. Análisis elemental de la representatividad de las muestras estadísticas.
- 5.3. Variable discreta. Elaboración e interpretación de tablas de frecuencias y de gráficos estadísticos: gráficos de barras, de sectores, diagramas en caja y polígonos de frecuencias. Uso de la hoja de cálculo.
- 5.4. Cálculo e interpretación de los parámetros de centralización y dispersión para realizar comparaciones y valoraciones.
- 5.5. Variable continua: Intervalos y marcas de clase. Elaboración e interpretación de histogramas. Uso de la hoja de cálculos.
- 5.6. Azar y probabilidad. Idea de experimento aleatorio y suceso. Frecuencia y probabilidad de un suceso.
- 5.7. Experiencias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para la asignación de probabilidades.
- 5.8. Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar.

Opción B

1. Números.

- 1.1. Reconocimiento de números que no pueden expresarse en forma de fracción: números irracionales.
- 1.2. Iniciación al número real: representación sobre la recta real. Intervalos. Tipos y significado.
- 1.3. Interpretación y uso de los números reales en diferentes contextos eligiendo la notación y aproximación adecuadas en cada caso.
- 1.4. Potencias de exponente fraccionario y radicales. Radicales equivalentes. Operaciones elementales con radicales. Simplificación de expresiones radicales sencillas.
- 1.5. Utilización de la jerarquía y propiedades de las operaciones para realizar cálculos con potencias de exponente entero y fraccionario y radicales sencillos.
- 1.6. Cálculo con porcentajes. Interés compuesto.
- 1.7. Utilización de la calculadora para realizar operaciones con cualquier tipo de expresión numérica. Cálculos aproximados Reconocimiento de situaciones que requieran la expresión de resultados en forma radical.

2. Álgebra.

- 2.1. Raíces de un polinomio. Factorización de polinomios.
- 2.2. Regla de Ruffini. Utilización de las identidades notables y de la regla de Ruffini en la descomposición factorial de un polinomio.
- 2.3. Resolución algebraica de ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita.
- 2.4. Resolución algebraica y gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- 2.5. Uso de la descomposición factorial para la resolución de ecuaciones de grado superior a dos y simplificación de fracciones.
- 2.6. Resolución de problemas cotidianos y de otros campos de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas.

- 2.7. Resolución de otros tipos de ecuaciones mediante aproximaciones sucesivas con ayuda de los medios tecnológicos.
- 2.8. Inecuaciones y sistemas de inecuaciones de primer grado con una incógnita. Interpretación gráfica.
- 2.9. Planteamiento y resolución de problemas en diferentes contextos utilizando inecuaciones.

3. Geometría.

- 3.1. Figuras y cuerpos semejantes: razón entre longitudes, áreas y volúmenes de figuras semejantes.
- 3.2. Teorema de Tales. Aplicación al cálculo de medidas indirectas.
- 3.3. Razones trigonométricas de un ángulo agudo. Relaciones entre ellas.
- 3.4. Relaciones métricas en los triángulos. Resolución de triángulos rectángulos.
- 3.5. Uso de la calculadora para la obtención de ángulos y razones trigonométricas.
- 3.6. Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes.
- 3.7. Iniciación a la geometría analítica plana: coordenadas de un punto; distancia entre dos puntos. Representación de las soluciones de una ecuación de primer grado con dos incógnitas.

4. Funciones y gráficas.

- 4.1. Funciones: Expresión algebraica, variables, dominio y estudio gráfico.
- 4.2. Características de las gráficas: crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, continuidad, simetrías y periodicidad.
- 4.3. Estudio y representación gráfica de las funciones polinómicas de primer o segundo grado, de proporcionalidad inversa y de las funciones exponenciales y logarítmicas sencillas. Aplicaciones a contextos y situaciones reales.
- 4.4. Uso de las tecnologías de la información en la representación, simulación y análisis gráfico.
- 4.5. Funciones definidas a trozos. Búsqueda e interpretación de situaciones reales.
- 4.6. Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión algebraica. Análisis de resultados utilizando lenguaje matemático adecuado.
- 4.7. La tasa de variación como medida de la variación de una función en un intervalo. Análisis de distintas formas de crecimiento en tablas, gráficas y enunciados verbales.
- 4.8. Interpretación, lectura y representación de gráficas en la resolución de problemas relacionados con los fenómenos naturales y el mundo de la información.

5. Estadística y probabilidad.

- 5.1. Estadística descriptiva unidimensional. Identificación de las fases y tareas de un estudio estadístico.
- 5.2. Análisis elemental de la representatividad de las muestras estadísticas.
- 5.3. Variable discreta. Elaboración e interpretación de tablas de frecuencias y de gráficos estadísticos: gráficos de barras, de sectores, diagramas de caja y polígonos de frecuencias.
- 5.4. Cálculo e interpretación de los parámetros de centralización y dispersión: media, mediana, moda, recorrido y desviación típica para realizar comparaciones y valoraciones.
- 5.5. Representatividad de una distribución por su media y desviación típica o por otras medidas ante la presencia de descentralizaciones, asimetrías y valores atípicos. Valoración de la mejor representatividad, en función de la existencia o no de valores atípicos.

Bibliografía de consulta y software.

- Problemas de 4º de ESO de Isaac Musat (Gratuito en www.musat.net)
- 2000 Problemas de Matemáticas. S. Álvarez Areces, M. Fernandez Flores. Ed: Everest.
- Matemáticas 4º de ESO, opción A y B. J. Colera, R. García, M.J. y otros. Ed: Anaya.
- Matemáticas 4º de ESO, opción A y B. J. R. Vizmanos, M. Anzola y otros. Ed SM.
- Matemáticas 4º de ESO, opción B. J.L. Sanchez González y Juan Vera López.
Ed: Oxford educación.
- Ejercicios de repaso de 4º de ESO del Colegio de Nuestra Señora de la Consolación.
Antonio Cartas Martín.

Se recomienda además, bajar de Internet el programa Graphmatica, el cual será muy útil para funciones. El Derive es también un estupendo programa, se puede bajar desde la web de Isaac Musat (www.musat.net).

Ejercicios de números.

1º Expresa los siguientes números en notación científica:

- a) 1000 b) 13.15 c) 1000000 d) 0.000323
e) 0.0035 f) 0.00000034 g) 6534532 h) 0.000075
i) 34567.67 j) 0.00257 k) 34587.23 l) 25348.32

Sol: a) 10^3 ; b) $1.31 \cdot 10$; c) 10^6 ; d) $3.23 \cdot 10^{-4}$; e) $3.5 \cdot 10^{-3}$; f) $3.4 \cdot 10^{-7}$; g) $6.53 \cdot 10^6$;
h) $7.5 \cdot 10^{-5}$; i) $3.46 \cdot 10^4$; j) $2.57 \cdot 10^{-3}$; k) $3.46 \cdot 10^4$; l) $2.53 \cdot 10^4$.

2º Expresa con todas sus cifras los siguientes números en notación científica:

- a) $4.15 \cdot 10^3$ b) $1.24 \cdot 10^{-3}$ c) $3.25 \cdot 10^{-2}$ d) $3.14 \cdot 10^5$ e) $2.18 \cdot 10^4$

Sol: a) 4150; b) 0.00124; c) 0.0325; d) 314000; e) 21800.

3º Redondea hasta las milésimas los siguientes números:

- a) 1.23456 b) 1.34511 c) 45.32157 d) 32.2357 e) 0.03247

Sol: a) 1.235; b) 1.345; c) 45.322; d) 32.236; e) 0.032.

4º ¿Cuántas cifras significativas reconocemos en cada uno de los siguientes números?

- a) 450 b) 98.6 c) 0.0033 d) 902.10
e) 0.02173 f) 4000 g) 7.02 h) 67000000

Sol: a) tres; b) tres; c) dos; d) cinco; e) cuatro; f) cuatro; g) tres; h) ocho.

5º Clasifique los siguientes números decimales y páselos a fracciones después:

- a) 1.25 b) 75.2 c) 678.98 d) 9.34
e) 0.78787878... f) 0.88888... g) 0.678678678... h) 0.3333...
i) 1.1111... j) 2.33333... k) 5.98989898... l) 76.767676...
m) 1.258888... n) 1.89999... ñ) 26.415151515... o) 98.0123123123...

Sol: a) Exacto, $27/20$; b) Exacto, $376/5$; c) Exacto, $33949/50$; d) Exacto, $467/50$;
e) Periódico puro, $26/33$; f) Periódico puro, $8/9$; g) Periódico puro, $226/333$;
h) Periódico puro, $1/3$; i) Periódico puro, $10/9$; j) Periódico puro, $7/3$;
k) Periódico puro, $7600/99$; l) Periódico mixto, $1133/900$;
m) Periódico mixto, $1133/900$; n) Periódico mixto, $19/10$;
ñ) Periódico mixto, $8717/330$; o) Periódico mixto, $979143/9990$.

6º Clasifique cada uno de los siguientes números en naturales, enteros, racionales, reales y complejos ubicándolos en el conjunto numérico más pequeño al que pertenezcan:

- a) 1.25 b) 2.45 c) 33 d) -45 e) $1.32461...$ f) $1.11...$
g) $1.21212...$ h) $\sqrt{-1}$ i) $-\frac{6}{2}$ j) π k) $\sqrt{4}$ l) $\sqrt{-4}$

Sol: a) \mathbb{Q} ; b) \mathbb{Q} ; c) \mathbb{N} ; d) \mathbb{Z} ; e) \mathbb{R} ; f) \mathbb{Q} ; g) \mathbb{Q} ; h) \mathbb{C} ; i) \mathbb{Z} ; j) \mathbb{R} ; k) \mathbb{N} ; l) \mathbb{C} .

7º ¿Cuáles de los siguientes números son irracionales?

- a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{9}$ c) $\sqrt{-3}$ d) $2.718281...$ f) $\sqrt{7+\sqrt{4}}$

Sol: Solamente los de los apartados a) y d).

8º Usa tu calculadora científica para calcular los siguientes números y expresa el resultado en notación científica y con tres cifras significativas debidamente redondeadas:

- a) $\sqrt[3]{2}$ b) $5.23^{6.1}$ c) $\sqrt[4]{9.5^5}$ d) $\sqrt[7]{4.56^{2.2}}$ e) $5^{5.6}$ f) $\sqrt[16]{9.81^{65}}$

Sol: a) 1.260 ; b) $2.41 \cdot 10^4$; c) 6.53 ; d) 1.61 ; e) $8.21 \cdot 10^3$; f) $1.07 \cdot 10^4$.

Ejercicios de números enteros.

1º Calcula:

a) $5 - 3 - 7 + 1 + 8$

c) $1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11$

e) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8$

g) $2 - 1 - 4 - 6 + 6 + 7 - 2 - 5 + 3$

i) $3 - 2 - 5 - 2 + 1 + 2 + 7 - 4 - 2 - 1$

b) $2 - 3 + 4 + 1 - 8 + 2$

d) $2 + 4 - 6 - 8 + 10 - 12 + 14$

f) $3 - 2 + 5 + 7 - 3 - 5 + 2 - 2$

h) $2 + 4 + 5 + 3 - 4 - 5 - 7 + 3 - 6$

j) $5 - 6 + 7 - 2 + 5 + 8 - 6 + 3 - 1 - 7$

Sol: a) 4; b) -2; c) -6; d) 4; e) -4; f) 5; g) 0; h) -4; i) -3; j) 6.

2º Quita paréntesis y después opera:

a) $1 - (7 - 2 - 10) - (3 - 8)$

c) $(3 - 5) - (1 - 4) + (5 - 8)$

e) $(2 - 6 - 3) + (5 - 3 - 1) - (2 - 4 - 6)$

g) $15 + (6 - 18 + 11) - (7 + 15 - 19) - (2 + 6)$

i) $1 - (3 - [4 - (1 - 3)])$

b) $(8 - 4 - 3) - (5 - 8 - 1)$

d) $3 - (5 - 8) - (11 - 4) + (13 - 9)$

f) $(8 - 11 - 5) - (12 - 13) + (11 + 4)$

h) $3 - [(5 - 8) - (3 - 6)]$

j) $(2 + 7) - (5 - [6 - (10 - 4)])$

Sol: a) 11; b) 5; c) -2; d) 3; e) 2; f) 8; g) 3; h) 3; i) 4; j) 4.

3º Calcula:

a) $(-7) \cdot (+11)$

d) $(-2) \cdot (-3) \cdot (-4)$

g) $(+36) : (-12)$

j) $(+400) : [(-40) : (-5)]$

m) $(+300) : (+30) \cdot (-2)$

b) $(-6) \cdot (-8)$

e) $(-45) : (+3)$

h) $(-85) : (-5)$

k) $(+7) \cdot (-20) : (+10)$

n) $(+300) : [(+30) \cdot (-2)]$

c) $(+5) \cdot (+7) \cdot (-1)$

f) $(+85) : (+17)$

i) $(+400) : (-40) : (-5)$

l) $(+7) \cdot [(-20) : (+10)]$

ñ) $(+40) \cdot (-4) : [(5) \cdot (-16)]$

Sol: a) -77; b) 48; c) -35; d) -24; e) -15; f) 5; g) -3; h) 17; i) 2; j) 50; k) -14; l) -14; m) -20; n) -5; ñ) 2.

4º Calcula:

a) $6 \cdot 4 - 5 \cdot 6 - 2 \cdot 3$

c) $5 \cdot (-4) + (-2) \cdot 4 - 6 \cdot (-5) - 3 \cdot (-6)$

e) $(-5) \cdot (8 - 13)$

g) $(+4) \cdot (1 - 9 + 2) : (-3)$

i) $13 - [8 - (6 - 3) - 4 \cdot 3] : (-7)$

k) $12 \cdot (12 - 14) - 8 \cdot (16 - 11) - 4 \cdot (5 - 17)$

m) $4 + 36 : 9 - 50 : [12 + (17 - 4)]$

ñ) $3 \cdot 4 - 15 : [12 + 4 \cdot (2 - 7) + 5]$

b) $15 - 6 \cdot 3 + 2 \cdot 5 - 4 \cdot 3$

d) $18 - 3 \cdot 5 + 5 \cdot (-4) - 3 \cdot (-2)$

f) $(2 + 3 - 6) \cdot (-2)$

h) $(-12 - 10) : (-2 - 6 - 3)$

j) $5 \cdot (8 - 3) - 4 \cdot (2 - 7) - 5 \cdot (1 - 6)$

l) $18 - 40 : (5 + 4 - 1) - 36 : 12$

n) $48 : [5 \cdot 3 - 2 \cdot (6 - 10) - 17]$

o) $4 \cdot [-2 + 3 \cdot (4 + 2) - 2] : 7$

Sol: a) -12; b) -5; c) 20; d) -11; e) 25; f) 2; g) 8; h) 2; i) 12; j) 70; k) -16; l) 10; m) 6; n) 8; ñ) 17; o) 8.

5º Calcule los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} -5 & 9 \\ 9 & 4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -9 & 9 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 0 & -7 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -8 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} -7 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$

Sol: a) -101; b) -9; c) -62; d) -28; e) 0; f) -15;

6º Calcule los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 9 & 4 & 6 \\ 6 & 6 & -7 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -4 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 8 & -3 & 0 \\ 2 & 7 & -8 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} -6 & -9 & -5 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & 4 & -7 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} -6 & -4 & 2 \\ 1 & 6 & -9 \\ -5 & -6 & 4 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 3 & -7 & 5 \\ 0 & -4 & 4 \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 7 & -7 & 5 \\ 0 & -8 & 8 \end{vmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} -3 & -4 & -5 \\ 1 & 9 & 9 \\ 4 & -2 & -5 \end{vmatrix}$

Sol: a) 92; b) 10; c) 74; d) 53; e) 98; f) 64; g) -100; h) -200; i) 107.

7º Calcula:

a) $(-2)^7$ b) $(-3)^5$ c) $(-5)^3$ d) $(-10)^3$ e) $(-1)^{16}$ f) $(-1)^{17}$

Sol: a) -128; b) -243; c) -125; d) -1000; e) 1; f) -1.

8º Calcular:

a) $(-2)^4 \cdot (-2)^3$ b) $(+2)^3 \cdot (-2)^3$ c) $(-3)^2 \cdot (-5)^3$ d) $(-10)^{-2} \cdot (-10)^3$
e) $(-3)^5 : (-3)^3$ f) $(-5)^6 : (-5)^3$ g) $(-18)^2 : (-3)^3$ h) $(-24)^4 : (-6)^4$

Sol: a) -128; b) -64; c) 1125; d) -10; e) 9; f) -125; g) -12; h) 256.

9º Usando la calculadora, cuales de los siguientes números son primos o compuestos:

a) 142 b) 221 c) 253 d) 129 e) 193
f) 210 g) 191 h) 199 i) 151 j) 107

Sol: Son compuestos los números de los apartados a), b), c), d) y f), el resto son primos.

10º Descompón en factores primos:

a) 48 b) 54 c) 90 d) 105 e) 120
f) 135 g) 180 h) 378 i) 700 j) 1872

Sol: a) $2^4 \cdot 3$; b) $2 \cdot 3^3$; c) $2 \cdot 3^2 \cdot 5$; d) $3 \cdot 5 \cdot 7$; e) $2^3 \cdot 3 \cdot 5$; f) $3^3 \cdot 5$; g) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$; h) $2 \cdot 3^3 \cdot 7$; i) $2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$; j) $2^4 \cdot 3^2 \cdot 13$.

11º Calcula el mínimo común múltiplo de:

a) 12 y 15 b) 24 y 60 c) 48 y 54 d) 90 y 150
e) 6, 10 y 15 f) 8, 12 y 18 g) 12, 24 y 36 h) 7, 11 y 13

Sol: a) 60; b) 120; c) 432; d) 450; e) 30; f) 72; g) 72; h) 1001.

12º Calcula el máximo común divisor de:

a) 16 y 24 b) 48 y 72 c) 105 y 120 d) 135 y 180
e) 8, 12 y 16 f) 45, 60 y 105 g) 24, 36 y 40 h) 20, 30 y 50

Sol: a) 8; b) 24; c) 15; d) 45; e) 4; f) 15; g) 4; h) 10.

13º Calcula el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de:

a) 20 y 25 b) 48 y 69 c) 35 y 49
d) 100, 120 y 20 e) 66, 132 y 1100 f) 320, 256 y 500
g) 25, 30, 45 y 50 h) 14, 28, 42 y 84 i) 130, 200, 250 y 420

Sol: a) $mcm = 100$ y $mcd = 5$; b) $mcm = 1104$ y $mcd = 3$; c) $mcm = 245$ y $mcd = 7$;
d) $mcm = 600$ y $mcd = 20$; e) $mcm = 3300$ y $mcd = 22$; f) $mcm = 32000$ y $mcd = 4$;
g) $mcm = 450$ y $mcd = 5$; h) $mcm = 84$ y $mcd = 14$; i) $mcm = 273000$ y $mcd = 10$;

- 14º** Una sirena suena cada 32 minutos, otra cada 16 minutos y otra cada hora. A las 12 h del día 1 de enero sonaron las tres a la vez, predecir cuando volverán a sonar las tres sirenas al mismo tiempo. **Sol:** A las 20 horas del 1 de enero.
- 15º** Un barco pasa por un puerto cada 12 días, otro cada 8 días y otro cada 20 días. Si los tres barcos coincidieron un día, ¿Cuánto tiempo pasara hasta que vuelvan a coincidir?
Sol: Pasarán 120 días.
- 16º** Las dimensiones de un paralelepípedo son 165 m, 21 m y 3 m. Se hacen construir cajas cúbicas con las que puede llenarse completamente el paralelepípedo. Hallar la arista de estas cajas cúbicas. **Sol:** 3 m de arista.
- 17º** Un pasillo de 860 cm de largo y 240 cm de ancho se ha embaldosado con baldosas cuadradas, de la mayor dimensión posible, para caber un número entero de veces en cada lado.
a) ¿Cuánto mide el lado de cada baldosa?
b) ¿cuántas baldosas se emplearon?
Sol: a) 20 m; b) 516 baldosas.
- 18º** Al contar las canicas de 4 en 4, de 5 en 5 y de 6 en 6, unos niños se dan cuenta de que cada vez le sobran dos. ¿Cuántas canicas son, sabiendo que es un número comprendido entre 100 y 150? **Sol:** 122 canicas.
- 19º** Hallar el menor número que dividido por 5, 7 y 15 da siempre de resto 2. **Sol:** 107.
- 20º** Un comerciante quiere poner en cajas 720 limones y 2160 naranjas, de modo que todas las cajas contengan el mismo número de limones o de naranjas, si además quiere sacar el mayor número posible de cajas. Halla el número de naranjas y limones en cada caja y el número de cajas necesarias. **Sol:** 720 cajas, y en cada una un limón y tres naranjas.
- 21º** Un carpintero quiere cortar una tabla de madera de 256 cm de largo y 96 cm de ancho, en cuadrados lo más grandes posible.
a) ¿Cuál debe ser la longitud del lado de cada cuadrado?
b) ¿Cuántos cuadrados se obtienen de la plancha de madera?
Sol: a) 32 cm; b) 24 cuadrados.
- 22º** Un coche precisa cambiar el aceite cada 8000 km, el filtro del aire cada 12000 km y las bujías cada 20000 km. ¿A qué número mínimo de kilómetros habrá que hacerle todos los cambios a la vez? **Sol:** 120000 km.
- 23º** Los coches del tipo A hay que echarles gasolina cada 300 km, los del tipo B cada 400 km y los del tipo C cada 500 km. Suponemos además que los conductores necesitan descanso cada 150 km. Si tenemos una carretera semidesierta de tamaño 1000 km, y el gobierno nos exige colocar gasolineras y áreas de descanso con una distancia igual máximo común divisor de las cantidades anteriormente mencionadas, ¿Cuántas gasolineras con áreas de descanso tendremos que poner? **Sol:** Cada 50 km.

Ejercicios de fracciones.

1º Simplificar las siguientes fracciones:

a) $\frac{54}{72}$ b) $\frac{48}{72}$ c) $\frac{15}{60}$ d) $\frac{96}{64}$ e) $\frac{140}{40}$ f) $\frac{192}{320}$ g) $\frac{125}{100}$ h) $\frac{256}{512}$

Sol: a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{1}{4}$; d) $\frac{3}{2}$; e) $\frac{7}{2}$; f) $\frac{3}{5}$; g) $\frac{5}{4}$; h) $\frac{1}{2}$.

2º Calcula y simplifica:

a) $\frac{12}{3} + \frac{3}{2}$ b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$
d) $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + 1$ e) $3 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3}$ f) $\frac{1}{6} + 2 - \frac{1}{3}$
g) $2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$ h) $\frac{1}{4} - \frac{1}{3} - 1$ i) $\frac{1}{6} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$
j) $2 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right)$ k) $\left(3 - \frac{2}{3}\right) + \left(3 - \frac{1}{4}\right)$ l) $\frac{2}{3} - 2 + \frac{1}{2}$
ll) $3 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$ m) $\frac{1}{3} - \left(2 + \frac{1}{2}\right)$ n) $\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right)$
ñ) $\frac{1}{3} + \frac{5}{4} + \frac{3}{2}$ o) $\frac{4}{3} + \frac{5}{3} - \frac{3}{2}$ p) $\frac{1}{3} + \frac{9}{5} - \frac{10}{6}$

Sol: a) $\frac{11}{2}$; b) $\frac{19}{30}$; c) $\frac{5}{12}$; d) $\frac{5}{4}$; e) $\frac{19}{6}$; f) $\frac{11}{6}$; g) $\frac{13}{6}$; h) $-\frac{13}{12}$; i) $-\frac{2}{3}$; j) $\frac{7}{6}$;
k) $\frac{61}{12}$; l) $-\frac{5}{6}$; ll) $\frac{13}{6}$; m) $-\frac{13}{6}$; n) $\frac{1}{12}$; ñ) $\frac{37}{12}$; o) $\frac{3}{2}$; p) $\frac{7}{15}$.

3º Calcula y simplifica:

a) $\frac{5}{2} \cdot \frac{2}{4}$ b) $\frac{3}{4} \cdot 2$ c) $\frac{1}{3} \cdot 6$ d) $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{5}$ e) $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{5}$
f) $\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5}$ g) $\frac{5}{3} \cdot \frac{2}{10}$ h) $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}$ i) $\frac{5}{2} \cdot \frac{4}{5}$ j) $\frac{7}{4} \cdot \frac{2}{3}$

Sol: a) $\frac{5}{4}$; b) $\frac{3}{2}$; c) 2; d) $\frac{3}{5}$; e) $\frac{6}{5}$; f) $\frac{4}{5}$; g) $\frac{1}{3}$; h) $\frac{1}{6}$; i) 2; j) $\frac{7}{6}$.

4º Calcula y simplifica:

a) $\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)$ b) $\left(\frac{2}{3} - 2\right) \cdot \left(3 - \frac{2}{3}\right)$ c) $\left(\frac{5}{3} - 1\right) \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)$
d) $\left(\frac{5}{2} - 1\right) \cdot 3$ e) $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}$ f) $\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{6} + \frac{3}{2}$
g) $\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right) - 3 \cdot \frac{1}{2}$ h) $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right) \cdot 4 + \frac{1}{3} - 2$ i) $\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{4}\right) - 3 \cdot \frac{1}{2}$
j) $\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)$ k) $\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{2}$ l) $\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} - \left(\frac{2}{6} + 1\right)$
ll) $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{4} - \frac{1}{5}\right) - \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\right)$ m) $\frac{2}{4} - \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{6}{10}\right) + \frac{2}{5}$ n) $\frac{3}{2} - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right)$
ñ) $3 \cdot \left(\frac{2}{4} - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right)$ o) $2 \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{3}\right)$ p) $\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{3}$

Sol: a) $-\frac{3}{5}$; b) $-\frac{28}{9}$; c) $\frac{1}{9}$; d) $\frac{9}{2}$; e) 0; f) $\frac{3}{2}$; g) $-\frac{25}{12}$; h) $-\frac{19}{15}$; i) $-\frac{11}{6}$; j) $-\frac{19}{12}$;
k) $-\frac{17}{12}$; l) $-\frac{7}{6}$; ll) $-\frac{17}{30}$; m) $\frac{2}{5}$; n) $\frac{3}{26}$; ñ) $\frac{1}{3}$; o) $\frac{79}{30}$; p) 1.

5º Calcula y simplifica cuando sea preciso:

a) $\frac{1}{5} : \frac{5}{4}$ b) $\frac{4}{3} : \frac{5}{3}$ c) $\frac{1}{3} : \frac{10}{6}$ d) $\frac{3}{5} : \frac{10}{3}$ e) $\frac{3}{4} : \frac{5}{7}$ f) $\frac{4}{5} : \frac{1}{3}$

Sol: a) 4/25; b) 4/5; c) 1/5; d) 9/50; e) 21/20; f) 12/5.

6º Calcula y simplifica cuando sea preciso:

a) $\frac{1}{3} + 2 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{4} : \frac{1}{3}$ b) $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}$ c) $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} : \frac{1}{3}$
d) $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) : \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$ e) $\left(\frac{3}{2} : \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} : \frac{3}{2}$ f) $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} : \frac{2}{3}$
g) $\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\right) : \left(\frac{3}{3} - \frac{1}{4}\right)$ h) $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{3}{6}\right) : \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right)^{-1}$ i) $\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right)^{-1} \cdot \frac{2}{6} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) \cdot 2$
j) $\left(\frac{2}{6} + \frac{1}{3}\right) - \frac{2}{4} + \frac{1}{3} : \frac{2}{4}$ k) $\left(\frac{3}{6} + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{3} : \frac{2}{4}$ l) $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{5}\right)^{-1} \cdot \frac{5}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{3}$
ll) $\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right)^{-1} \cdot 2 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right)^{-1}$ m) $\left(\frac{3}{3} - \frac{1}{4}\right)^{-1} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4}$ n) $\left(\frac{3}{2} : \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} : \frac{1}{2}\right)$
ñ) $\left(\frac{3}{6} + \frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{4} : \frac{1}{2}$ o) $\left(\frac{3}{6} + 1\right)^{-1} \cdot \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{4} + \frac{9}{12}\right)$ p) $\left(\frac{3}{6} + 1\right)^{-1} \cdot \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{4} + \frac{9}{12}\right)$
q) $\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ r) $\frac{2}{3} + 3 : \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}\right)$ s) $\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\right) : \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{4}\right)$

Sol: a) 5/3; b) -1/4; c) 67/48; d) 3/2; e) 167/36; f) 5/12; g) 7/3; h) -17/48; i) 5/42; j) 5/6;
k) -5/48; l) 20/3; ll) -6/5; m) 17/12; n) 11/3; ñ) 2; o) 0; p) 0; q) -1; r) 56/3; s) -15/2;

7º Calcula y simplifica cuando sea necesario:

a) $\frac{\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2} - 1\right)}{\frac{3}{2} - 1}$ b) $\frac{2\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{3}\right)}{-3\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right)}$ c) $\frac{1 - \frac{2}{3}}{\frac{3}{2} - 1 + \frac{1}{3}}$
d) $\frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}}{\frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 1}$ e) $\frac{\frac{2}{3} - 1 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}$ f) $\frac{2 - \frac{1}{3} + 1}{\frac{3}{2} - 1 + \frac{1}{3}}$
g) $\frac{\frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{2}{4} + \frac{5}{3}}{\frac{6}{3} + \frac{3}{2} + \frac{5}{6} - \frac{9}{4}}$ h) $\frac{\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{7}{3} - \frac{5}{2}\right)}{\frac{2}{3} + \frac{-5}{4} - \left(\frac{4}{2} - \frac{3}{4}\right)}$ i) $\frac{\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}}{\left(\frac{2}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \cdot 2}$
j) $\frac{\frac{3-5}{4+2} - \frac{7+4}{3+1} - \frac{5-2}{7-1}}{\frac{6+2}{5-4} - \frac{7-3}{6-2} + \frac{2+1}{3+3}}$ k) $\frac{\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{10}\right) \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{5}}{\left(\frac{2}{6} + \frac{1}{3} - \frac{6}{4}\right) : \frac{2}{3} + \frac{1}{6}}$ l) $\frac{\left(\frac{4}{5} + \frac{1}{6} - \frac{2}{10}\right) + \frac{1}{6} - \frac{1}{4}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{4} : \frac{2}{3}}$

$$\begin{array}{lll} \text{m)} \frac{-\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + (-3+2)}{-4+3-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{4}{16}} & \text{n)} \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{4}\right) - (3+2)}{-3+(3-1) \cdot (2-3) - 2} & \text{ñ)} \frac{\frac{2}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{3}{5} - \frac{6}{4}} \\ \text{o)} \frac{\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{6}\right) - \frac{2}{6} - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{2}{6} + \frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right) \cdot 4} & \text{p)} \frac{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4}} & \text{q)} \frac{\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{5}{2} - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right)} \end{array}$$

Sol: a) 5/3; b) -2/21; c) 2/5; d) 3/26; e) -10/9; f) 16/5; g) 48/25 ; h) 23/110; i) 21/50;
j) -43/90; k) -57/130; l) 82/65; m) 1; n) 1/7; ñ) 5/6; o) -1/6; p) 1/6; q) -11/3.

8º Calcula y simplifica:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{\left(\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{4}\right) - \frac{1}{3} + \frac{1}{6}}{\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)^{-1} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}} & \text{b)} \frac{\left(\frac{3}{3}\right)^{-8} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)^{-1}}{\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right)} & \text{c)} \frac{\left(\frac{2}{4} + \frac{1}{3}\right)^{-1} \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{12}\right)}{\left(\frac{3}{6} + \frac{1}{3}\right)^{-1} \left(\frac{2}{4} + \frac{3}{9}\right)} \\ \text{d)} \frac{\left[\left(\frac{3}{6} - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{4}{6} + \frac{1}{3}\right)^{-1}\right]^{-2}}{\left[\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)^{-1}\right]} & \text{e)} \frac{\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{3}{6} + \frac{7}{12}\right)^{-1}}{\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{6}\right)^{-24} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)^{37}} & \text{f)} \frac{\left[\left(\frac{4}{9} + \frac{1}{6}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}\right]^{-1}}{\left[\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{5}\right)^{-1} \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{6}\right)^{-1}\right]^{-1}} \\ \text{g)} \frac{\left(\frac{3}{3} + \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)^{-1} \frac{1}{2}}{\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{6}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{6}} & \text{h)} \frac{\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right) - \frac{4}{3} : \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}} & \text{i)} \frac{\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right]^{-1}}{\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(3^{-1} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)^{-1}} \\ \text{j)} \frac{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) \cdot 3 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)^{-1}}{\left(\frac{3}{6} + \frac{1}{3}\right)^{-1} \frac{2}{4} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\right)^{-1}} & \text{k)} \frac{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) \cdot \frac{-2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}}{\left(\frac{2}{4} - \frac{3}{6}\right) \left(\frac{5}{3} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}} & \text{l)} \frac{\left[\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right) \frac{6}{4} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)\right]^{-1}}{2\left(\frac{2}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right)} \end{array}$$

Sol: a) 26/81; b) 1872; c) 1; d) (24/5)²; e) 0; f) 88/39; g) 26/81; h) 132/13; i) 7/384;
j) -85/72; k) -49/9; l) 2.

9º Juan tiene ahorrados 18000 €. Cuando se fue de vacaciones se gastó 4/12 de sus ahorros. ¿Cuánto le queda ahorrado? **Sol:** 12000 €.

10º Entre tres empresarios deben repartirse 12000 €. El primero se lleva 7/15 del total, el segundo 5/12 del total y el tercero el resto. ¿Cuánto dinero se ha llevado cada uno?
Sol: El primero 5600 €, el segundo 5000 € y el tercero 1400 €.

11º Hoy he perdido 20 cromos que son 5/12 de los que tenía. ¿Cuántos cromos tenía? **Sol:** 48.

12º Alfonso dispone de 600 € para compras. El jueves gastó 1/5 de esa cantidad y el sábado los 3/4 de lo que le quedaba. ¿Cuánto le queda al final? **Sol:** 360 €.

Ejercicios de radicales.

1º Extrae todos los factores posibles de los siguientes radicales:

a) $\sqrt{2^5 \cdot 3^{10} \cdot 7^{11}}$ b) $\sqrt[3]{2^6 \cdot 3^9 \cdot 5^3}$ c) $\sqrt{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3}$ d) $\sqrt[3]{3^2 \cdot 2^4 \cdot 5}$
e) $\sqrt{3 \cdot 2^5 \cdot 5^3}$ f) $\sqrt[4]{3^6 \cdot 2^4 \cdot 5^5}$ g) $\sqrt{a^2 \cdot b^3 \cdot c}$ h) $\sqrt{x^3 \cdot a^2 \cdot c^3}$

Sol: a) $2^2 \cdot 3^5 \cdot 7^5 \cdot \sqrt{2 \cdot 7}$; b) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$; c) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{2 \cdot 5}$; d) $2 \cdot \sqrt[3]{3^2 \cdot 2 \cdot 5}$; e) $2^2 \cdot 5 \sqrt{3 \cdot 2 \cdot 5}$;
f) $3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \sqrt[4]{3^2 \cdot 5}$; g) $a \cdot b \cdot \sqrt{b \cdot c}$; h) $x \cdot a \cdot c \cdot \sqrt{x \cdot c}$.

2º Calcula sin usar la calculadora las siguientes raíces:

a) $\sqrt{49 \cdot 36 \cdot 100}$ b) $\sqrt{25 \cdot 9 \cdot 100}$ c) $\sqrt{625 : 25}$ d) $\sqrt{16 : 4}$
e) $\sqrt{81 \cdot 4 \cdot 25}$ f) $\sqrt{36 \cdot 49 \cdot 9}$ g) $\sqrt{25 \cdot 100}$ h) $\sqrt{81 \cdot 16 \cdot 25}$

Sol: a) 420; b) 150; c) 5; d) 2; e) 90; f) 216; g) 50; h) 180.

3º Calcula por descomposición factorial, las siguientes raíces:

a) $\sqrt{62500}$ b) $\sqrt{360000}$ c) $\sqrt{2025}$ d) $\sqrt{4000000}$ e) $\sqrt{2500}$
f) $\sqrt{122500}$ g) $\sqrt{22500}$ h) $\sqrt{5625}$ i) $\sqrt{3600}$ j) $\sqrt{40000}$

Sol: a) 250; b) 600; c) 45; d) 2000; e) 50; f) 350; g) 150; h) 75; i) 60; j) 200.

4º Simplifica las expresiones:

a) $3 \cdot \sqrt[3]{2} + 4 \cdot \sqrt[3]{2} - 2 \cdot \sqrt[3]{2}$ b) $2 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot \sqrt{3} - 9 \sqrt{3}$ c) $\sqrt{50} - \sqrt{72} - 2 \sqrt{2}$
d) $\sqrt{8} - 3 \cdot \sqrt{2} + 4 \cdot \sqrt{18} + \sqrt{50}$ e) $\sqrt{3} - 3 \cdot \sqrt{12} + 5 \cdot \sqrt{27}$ f) $\sqrt{12} + 5 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{27}$
g) $\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{3}$ h) $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{8} - \sqrt{2}$ i) $\sqrt{45} - \sqrt{20} + \sqrt{80} - \sqrt{5}$
j) $\sqrt{27} - \sqrt{12} - \sqrt{75} + \sqrt{3}$ k) $\sqrt{18} - 3 \cdot \sqrt{8} - \sqrt{2} + 5 \cdot \sqrt{2}$ l) $\sqrt{45} - \sqrt{20} + \sqrt{180}$

Sol: a) $5 \cdot \sqrt[3]{2}$; b) $-4 \sqrt{3}$; c) $-3 \cdot \sqrt{2}$; d) $16 \cdot \sqrt{2}$; e) $10 \sqrt{2}$; f) $4 \cdot \sqrt{3}$; g) 0; h) $5 \sqrt{2}$; i) $4 \cdot \sqrt{5}$;
j) $-3 \sqrt{3}$; k) $\sqrt{2}$; l) $7 \cdot \sqrt{5}$.

5º Introduce en el radical los factores que aparecen fuera de él:

a) $2 \cdot \sqrt{5}$ b) $5 \cdot \sqrt{3}$ c) $2 \cdot \sqrt[3]{3}$ d) $4 \cdot \sqrt{3}$ e) $3 \cdot \sqrt{2}$
f) $3 \cdot \sqrt[3]{3}$ g) $2 \cdot \sqrt[4]{3}$ h) $7 \cdot \sqrt{3}$ i) $4 \cdot \sqrt[3]{2}$ j) $2 \cdot \sqrt[5]{2}$

Sol: a) $\sqrt{20}$; b) $\sqrt{75}$; c) $\sqrt[3]{24}$; d) $\sqrt{48}$; e) $\sqrt{18}$; f) $\sqrt[3]{81}$; g) $\sqrt[4]{48}$; h) $\sqrt{147}$; i) $\sqrt[3]{128}$;
j) $\sqrt[5]{64}$.

6º Simplifica las siguientes expresiones:

a) $(\sqrt[5]{3})^5$ b) $(\sqrt[6]{2^4})^3$ c) $(\sqrt{3} \cdot \sqrt{2})^2$ d) $(2 \cdot \sqrt{3})^2$ e) $(\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2})^6$
f) $(3 \cdot \sqrt{2})^2$ g) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ h) $\left(\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right)^6$ i) $(\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{2})^4$ j) $(\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{2^2})^3$

Sol: a) 3; b) 4; c) 6; d) 12; e) 32; f) 18; g) 3/4; h) 9/4; i) 18; j) 12.

7º Simplifica y extrae todo lo que puedas:

a) $\frac{3 \cdot \sqrt{32}}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{3 \cdot \sqrt{32} - 2 \cdot \sqrt{8}}{\sqrt{8}}$ c) $\frac{\sqrt{8} - \sqrt{32} + 3 \cdot \sqrt{72}}{\sqrt{2}}$

Sol: a) 12; b) 4; c) 16.

8º Racionaliza las siguientes fracciones:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \frac{3}{2\sqrt{5}} & \text{b) } \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \text{c) } \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{2}} & \text{d) } \frac{7-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{e) } \frac{\sqrt{6}-1}{2\sqrt{5}} & \text{f) } \frac{28}{3\sqrt{7}} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{g) } \frac{3}{\sqrt[3]{6}} & \text{h) } \frac{4}{\sqrt[4]{2}} & \text{i) } \frac{4}{\sqrt[4]{8}} & \text{j) } \frac{5}{\sqrt[4]{125}} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{k) } \frac{4}{\sqrt[6]{12}} & \text{l) } \frac{5}{\sqrt[5]{27}} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{m) } \frac{3}{\sqrt{5}+2} & \text{n) } \frac{8}{6-\sqrt{12}} & \text{ñ) } \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} & \text{o) } \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{p) } \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} & \text{q) } \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{r) } \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} & \text{s) } \frac{2}{1+\sqrt{2}} & \text{t) } \frac{7}{3-\sqrt{2}} & \text{u) } \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{v) } \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+3} & \text{w) } \frac{10}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}} \end{array}$$

Sol: a) $3\sqrt{5}/10$; b) $\sqrt{6}$; c) $4\sqrt{3}$; d) $\frac{7\sqrt{3}-6}{3}$; e) $\frac{\sqrt{30}-\sqrt{5}}{10}$; f) $\frac{4\sqrt{7}}{3}$; g) $\frac{\sqrt[3]{36}}{6}$;

h) $2\sqrt[4]{8}$; i) $2\sqrt[4]{2}$; j) $\sqrt[4]{5}$; k) $\frac{2\sqrt[6]{12^5}}{3}$; l) $\frac{5\sqrt[5]{9}}{3}$; m) $3\sqrt{5}-6$; n) $\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$;

ñ) $-\sqrt{2}-\sqrt{3}$; o) $10-4\sqrt{5}$; p) $-3-2\sqrt{2}$; q) $2\sqrt{6}-5$; r) $-\sqrt{6}-3$; s) $2\sqrt{2}-2$;

t) $3+\sqrt{2}$; u) $-1-\sqrt{15}$; v) $6\sqrt{2}-4$; w) $2\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

9º Simplifica y extrae todo lo que puedas:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \frac{\sqrt{8a^3b}}{\sqrt{2ab}} & \text{b) } \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{ab}} & \text{c) } \frac{\sqrt{3a^2b}}{\sqrt{2ab}} & \text{d) } \frac{\sqrt[3]{ab^2c^2}}{\sqrt[3]{a^2bc}} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{e) } \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt[3]{2ab}} & \text{f) } \frac{\sqrt[4]{2a^2b}}{\sqrt{2a}} & \text{g) } \frac{\sqrt[3]{2a^3b^4c}}{\sqrt{2abc^2}} & \text{h) } \frac{\sqrt{2ab}\cdot\sqrt[3]{2a^2b}}{\sqrt[6]{2ab}} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{i) } \frac{\sqrt{3a^2b}}{\sqrt[3]{abc}\cdot\sqrt[6]{3bc}} & \text{j) } \frac{\sqrt[4]{a^3b^3}}{\sqrt{abc}} & \text{k) } \frac{\sqrt[3]{a^2bc^3d}}{\sqrt{ab^2c}} \end{array}$$

Sol: a) $2a$; b) $\sqrt[3]{b}$; c) $\sqrt{3a/2}$; d) $\sqrt[3]{bc/a}$; e) $\sqrt[6]{2ab}$; f) $\sqrt[4]{b/2}$; g) $\sqrt[6]{a^3b^5/(2c^4)}$;

h) $\sqrt[3]{2^2a^3b^2}$; i) $\sqrt[6]{3^2a^4/c^3}$; j) $\sqrt[4]{ab/c^2}$; k) $\sqrt[6]{ac^3d^2/b^4}$.

10º Demostrar que:

$$\text{a) } \frac{\sqrt[6]{ab}\cdot\sqrt[3]{a^2b^4}\cdot\sqrt{b^5}}{\sqrt[4]{a^2b^3}} = b^3\sqrt{b^3a^4}$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt[6]{\frac{ab}{c}}\cdot\sqrt{\frac{c^2}{b}}\cdot\sqrt[4]{\frac{c^3}{ab}}}{\sqrt[4]{\frac{ab}{c}}\cdot\sqrt{\frac{b^2c}{b}}\cdot\sqrt[4]{\frac{c^3}{ab}}} = \frac{1}{b}\sqrt[12]{\frac{c^7}{ba}}$$

$$\text{c) } \frac{\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}}\cdot\sqrt{\frac{b^2}{a^3}}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}}{\sqrt{\frac{a^3}{b^2}}\cdot\sqrt[6]{\frac{b^2}{2}}\cdot\sqrt[8]{b}} = \frac{1}{a^2}\sqrt[24]{\frac{b^92^4}{a^4}}$$

$$\text{d) } \frac{\sqrt[3]{\frac{b^2}{c}}\sqrt[4]{\frac{c}{b}}\sqrt{\frac{b}{c^3}}}{\sqrt[6]{\frac{b}{c^2}}} = \sqrt[24]{\frac{b^{11}}{c}}$$

$$\text{e) } \frac{\sqrt[4]{\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}}}\cdot\sqrt{\frac{a}{b\sqrt{a}}}\cdot\sqrt{\frac{b^2}{\sqrt{a}}}}{\sqrt{\frac{b}{\sqrt{a}}}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}} = \sqrt{a}$$

$$\text{f) } \frac{\sqrt{\frac{a^2b}{\sqrt{a}}}}{\sqrt{\frac{a}{\sqrt{b}}}} : \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt[4]{a^3b}$$

Ejercicios y problemas de ecuaciones de primer grado.

1º Resuelve las siguientes ecuaciones:

- | | | |
|------------------------|-------------------------|-------------------------|
| a) $2x - 34 = -20$ | b) $9x + 8 = 7x + 6$ | c) $4x + 3 = 3x + 5$ |
| d) $7x + 9 = 3 + 9x$ | e) $x - 8 = 2x - 11$ | f) $x + 1 = 2x - 7$ |
| g) $6x + 6 = 4 + 8x$ | h) $9 + 9x = 17 + 5x$ | i) $2x + 3 = 3x$ |
| j) $25 - 2x = 3x + 20$ | k) $4x + 1 = 3x + 3$ | l) $5x - 3 = 10x - 6$ |
| m) $1 + 8x = 31 - 16x$ | n) $5x - 11 = 15x - 19$ | ñ) $48 - 18x = 9x + 30$ |
| o) $2x + 17 = 3x + 7$ | p) $10 - 5x = x - 2$ | q) $70 - 3x = 4x$ |
| r) $48 - 3x = 5x$ | s) $30 - 4x = -3x - 10$ | t) $10x - 15 = 4x + 27$ |
| u) $3x + 1 = 6x - 8$ | v) $47 - 3x = 5 + 11x$ | w) $30 - 9x = 21 - 7x$ |
| x) $3x - 10 = 2x + 1$ | y) $25 - 2x = 3x - 35$ | z) $75 - 5x = 3x + 3$ |
| A) $5 + 8x = 2x + 20$ | B) $2x - 3 = x + 5$ | γ) $2 - 6x = 3x - 1$ |

Sol: a) 7; b) -1; c) 2; d) 3; e) 3; f) 8; g) 1; h) 2; i) 3; j) 1; k) 2; l) 3/5; m) 5/4; n) 4/5; ñ) 2/3; o) 10; p) 2; q) 10; r) 6; s) 40; t) 7; u) 3; v) 3; w) 9/2; x) 11; y) 12; z) 9; α) 5/2; β) 8; γ) 1/3.

2º Resuelve las siguientes ecuaciones con paréntesis y corchetes:

- | | | |
|------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|
| a) $x - 3(x - 2) = 6x - 2$ | b) $3x - 7 = 2(x + 1)$ | c) $2(2 + 4x) = 3 + 12x$ |
| d) $5x = 7(5x - 3) + 3$ | e) $2(x - 5) = 3x - 17$ | f) $2 + 5(x - 13) = x - 3$ |
| g) $2x - 1 = 3(2x - 15)$ | h) $2(x - 2) = -(4 - x)$ | i) $2(3x - 49) = -x + 14$ |
| j) $20 = 2x - (10 - 4x)$ | k) $60x - 1 = 3(1 + 12x)$ | l) $5(x - 1) + 10(x + 2) = 45$ |
| m) $2x + 3(2x - 1) = x + 67$ | n) $12x + 3(2x - 4) = 60$ | ñ) $3x - (x + 1) = x - 2$ |
| o) $x - 3(x + 5) = 3x + 10$ | p) $(x - 15) = 3(x - 19)$ | q) $3(2 - x) = 18x - 1$ |
| r) $3(x + 4) = 4x + 1$ | s) $10 + 5(x - 3) = 3(x + 1)$ | t) $2(3 - 4x) = 2x - 9$ |
| u) $10 - 9x = 4[x - 4]$ | v) $15x = 2[1 + 9x] - 3$ | w) $3[10 - x] = 2[8 - x] + 13x$ |
| x) $x + 3 = 3[2x - 4]$ | y) $3[2x - (3x + 1)] = x + 1$ | z) $6x + 4 = 4[2x - 5(x - 2)]$ |

Sol: a) 1; b) 9; c) 1/4; d) 3/5; e) 7; f) 15; g) 11; h) 0; i) 16; j) 5; k) 1/6; l) 2; m) 10; n) 4; ñ) -1; o) -5; p) 21; q) 1/3; r) 11; s) 4; t) 3/2; u) 2; v) 1/3; w) 1; x) 3; y) -1; z) 2.

3º Resuelve las siguientes ecuaciones con denominadores:

- | | | |
|--|--|--|
| a) $\frac{3x}{2} + 2 = x + 4$ | b) $x - 8 = \frac{x}{2} - \frac{x - 6}{3}$ | c) $x - \frac{3x}{4} = \frac{x}{7} + 3$ |
| d) $2\left(\frac{x + 5}{3}\right) = x + 3$ | e) $\frac{9x}{4} - 6 = \frac{2x}{3} + \frac{1}{3}$ | f) $\frac{5x}{6} - \frac{3x}{4} = x - 11$ |
| g) $\frac{3x}{5} - 7 = \frac{2x}{6} + 1$ | h) $x - 10 = \frac{5}{9}(x - 6)$ | i) $\frac{x}{3} + x = 10 + \frac{2x}{9}$ |
| j) $\frac{3x}{2} + 1 = 12 - \frac{x}{3}$ | k) $\frac{x}{5} + \frac{x}{2} = x - 3$ | l) $4x - 7 = \frac{5x - 6}{4}$ |
| m) $\frac{x + 2}{3} = 5x - 4$ | n) $\frac{2x - 10}{3x - 20} = \frac{7}{8}$ | ñ) $\frac{x}{4} + \frac{3x}{6} + x = 21$ |
| o) $\frac{x}{4} - \frac{13}{6} = \frac{5x}{2} - \frac{5}{6}$ | p) $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 94$ | q) $\frac{x}{3} + 10 = \frac{x}{5} + 16$ |
| r) $\frac{x - 7}{x + 3} = \frac{10}{x + 3} - 3$ | s) $3x - 9 + \frac{x}{5} = 2x - 3$ | t) $\frac{x}{4} + 5 = \frac{2x}{5} - 2 - \frac{x}{30}$ |
| u) $\frac{3}{x - 1} = \frac{x}{x - 1} - 1$ | v) $\frac{5x}{8} - 5(x - 20) = \frac{18 - 2x}{6}$ | w) $x + \frac{x + 1}{5} = x + \frac{x}{2}$ |

Sol: a) 4; b) 12; c) 28; d) 1; e) 4; f) 12; g) 30; h) 15; i) 9; j) 6; k) 10; l) 2; m) 1; n) 12; ñ) 12; o) -16/27; p) 120; q) 45; r) 2; s) 5; t) 60; u) 2; v) 24; w) 2/3.

4º Resuelve las siguientes ecuaciones con denominadores:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} 3x - \frac{7-x}{8} = 2x - 1 + \frac{x-3}{4} & \text{b)} 8 - \frac{3x}{10} + \frac{2x}{4} - \frac{5x}{8} = -9 & \text{c)} \frac{x+1}{2} + \frac{3+x}{6} = 1 + \frac{x}{3} \\ \text{d)} \frac{3x}{5} - 2 + \frac{3x}{2} - \frac{x}{10} = 0 & \text{e)} \frac{10}{x+5} + \frac{3+4x}{x+5} = 3 & \text{f)} \frac{x+2}{x-1} - \frac{x+3}{x+1} = \frac{2x+2}{x^2-1} \\ \text{g)} \frac{7x-3}{6} - \frac{3x-1}{4} = \frac{5x-1}{4} & \text{h)} \frac{4x-3}{6} - \frac{3x-1}{4} = \frac{4x-2}{3} - 1 & \text{i)} \frac{2x}{5} - 2 - \frac{x}{3} = \frac{x}{10} - 3 \\ \text{j)} \frac{15}{x+10} - \frac{5}{x+2} = 0 & \text{k)} \frac{2x+1}{4} - \frac{3x}{9} - 2 = \frac{3x-2}{4} & \text{l)} \frac{15}{x-2} - \frac{12x+6}{x^2-4} = \frac{18}{x+2} \\ \text{m)} \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+a} = \frac{1}{x^2-a^2} & \text{n)} \frac{x}{2a} - 2 = \frac{1+x}{2} & \text{ñ)} \frac{x^2-2x+1}{x(x+1)(x-1)} = \frac{3}{2x} \\ \text{o)} \frac{x}{3} + \frac{x-5}{2} - \frac{x}{4} = \frac{5x-2}{2} & \text{p)} \frac{x+1}{2} + \frac{5+x}{6} = 1 + \frac{9-2x}{3} & \text{q)} \frac{x}{3} + x = \frac{2x}{6} - 2(3-x) \\ \text{r)} \frac{1 + \frac{x+1}{x-1}}{2 - \frac{x-1}{x+1}} = 2 & \text{s)} \frac{\frac{3x}{5} - 12}{x+1} = 6 & \text{t)} \frac{x}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x}{6} - x = 2 - x \\ \text{u)} \frac{x}{2} - \frac{x-3}{3} - x = -1 - 2\frac{x}{3} & \text{v)} \frac{2x-3}{5} - \frac{x}{2} + x = x - \frac{x}{4} & \text{w)} \frac{6x-3}{3} - \frac{4x-3}{5} = 2x - 2 \\ \text{x)} \frac{x-1}{2} + x = \frac{2x+3}{3} + 1 & \text{y)} 2x - \frac{x-3}{2} = x + \frac{4+x}{3} & \text{z)} \frac{2x-5}{5} - \frac{x}{2} + 2 = x + \frac{x+4}{4} \end{array}$$

Sol: a) -1; b) 40; c) 0; d) 1; e) 2; f) 3; g) 0; h) 1; i) 30; j) 2; k) -15/7; l) 4; m) 1/2; n) 5a/(1-a); ñ) -5; o) -18/23; p) 2; q) 6; r) 3; s) 5; t) 6; u) 12; v) 4; w) 2; x) 3; y) -1; z) 0.

5º Resuelve las siguientes ecuaciones con denominadores:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{5}{x-1} - \frac{3}{x+4} - \frac{3}{x^2+3x-4} = \frac{5}{x-1} & \text{b)} x - \frac{x}{2} + 3x = \frac{3x}{2} + \frac{5+x}{3} + x + 1 \\ \text{c)} \frac{x-3}{3} - \frac{3(x-2)}{2} = \frac{x-3-(x+2)}{2} & \text{d)} \frac{x-3}{5} - \frac{x-3}{2} = \frac{x-3}{3} - \frac{x+3}{2} \\ \text{e)} x(x-2) - \frac{x+2}{3} - \frac{x-2}{2} = (x-2)^2 - 4 & \text{f)} \frac{x-3}{2} + x = \frac{2x-13}{3} + 2 + x \\ \text{g)} x(x-2) - \frac{x+2}{3} - \frac{x-2}{2} = (x-2)^2 - 4x & \text{h)} x - \frac{x+2}{3} + 3(x-3) = 2 + \frac{2x+1}{3} \\ \text{i)} \frac{3(x+1)}{4} - \frac{x+3}{6} + x = 2x + \frac{3-7x}{12} & \text{j)} \frac{2}{x+1} + \frac{3x-3}{x^2-1} = \frac{2}{x-1} + \frac{7}{x+1} \\ \text{k)} \frac{x-3}{5} - \frac{4x+3}{5} = 2x + 4 & \text{l)} \frac{20}{x+1} + \frac{5x-5}{x^2-1} = \frac{52}{x-1} - \frac{40}{x+1} \end{array}$$

Sol: a) 0; b) 4; c) 27/7; d) 51/2; e) -2/7; f) 5; g) 22/31; h) 4; i) 0; j) 0; k) -2; l) 9.

6º Resolver la ecuación y dejar la solución en función de a y b:

$$(a+x)(b-x) - a(b+a) + x^2 + a^2 = \frac{b^2 - ab}{a}$$

Sol: b/a.

- 7º ¿Qué número aumentado en 12 da 53? **Sol:** 41.
- 8º Un número se multiplica por 3. El resultado se divide por 2 y luego se le resta 5. Este nuevo resultado se multiplica por 10, obteniéndose así 40. ¿Cuál es el número? **Sol:** 6.
- 9º ¿Qué número multiplicado por 4 y sumando luego 5 al producto da 29? **Sol:** 6.
- 10º ¿Cual es el número al que sumando 7 a su tercera parte es igual a 62? **Sol:** 165.
- 11º Si a un número se le resta 40 y la diferencia se multiplica por 4, el resultado es el mismo que si al número se le resta 20 y la diferencia se multiplica por 3. Hallar el número. **Sol:** 100.
- 12º ¿Cuál es el número natural que aumentado en la mitad del precedente y en la tercera parte del siguiente da 42? **Sol:** 23.
- 13º Obtener tres números consecutivos, tales que 3 veces el tercero más 2 veces el primero exceda en 5 al triple del segundo. **Sol:** 1, 2, 3.
- 14º Hallar tres números impares consecutivos tales que la suma de los dos últimos sea 72. **Sol:** 33, 35, 37.
- 15º Encontrar tres números naturales consecutivos tales que su suma sea 48. **Sol:** 15, 16, 17.
- 16º ¿Cuál es el número cuyos $\frac{5}{3}$ y $\frac{7}{6}$ difieren en 150? **Sol:** 300.
- 17º ¿Qué número hay que añadir a los dos términos de la fracción $\frac{5}{13}$ para que valga $\frac{3}{5}$? **Sol:** 7.
- 18º ¿Qué número hay que añadir a los dos términos de la fracción $\frac{23}{40}$ para que esta valga $\frac{2}{3}$? **Sol:** 11.
- 19º Se han consumido las $\frac{4}{5}$ partes de un bidón de aceite. Se reponen 30 litros quedando lleno hasta la mitad. Se pide la capacidad del bidón. **Sol:** 100 L.
- 20º Una fracción es equivalente a $\frac{5}{6}$; si sumamos 4 a sus dos términos, resulta una fracción equivalente a $\frac{7}{8}$. Hallar la fracción. **Sol:** $\frac{10}{12}$.
- 21º En una fracción el denominador tiene 3 unidades más que el numerador. Si se suman 2 unidades al numerador, el valor de la fracción será igual a $\frac{3}{2}$. ¿Cuál es esta fracción? **Sol:** $\frac{13}{10}$.
- 22º Añadiendo 7 unidades al doble de un número más los $\frac{3}{2}$ del mismo da por resultado el séxtuplo de dicho número menos 23. ¿Cuál es ese número? **Sol:** 12.
- 23º Hallar un número tal que el triple de la diferencia de dicho número con 5 sea igual al doble de la suma de dicho número con 3. **Sol:** 21.
- 24º El triple de un número es igual al quíntuplo del mismo menos 28. ¿Cuál es este número? **Sol:** 14.
- 25º Hallar un número que sumando su mitad, tercera parte, cuarta parte y 45 de por suma 448. **Sol:** 372.

- 26º** Preguntado un hombre por su edad, contesta: si al doble de mi edad se le quitan 20 años se obtiene lo que me falta para llegar a 100. ¿Cuál es la edad de dicha persona? **Sol:** 40 años.
- 27º** ¿Cuántos días de vacaciones ha tenido una familia si ha pasado la tercera parte de sus vacaciones en la playa, la mitad del resto en el campo y 6 días en casa? **Sol:** 24 días.
- 28º** Un rebaño de ovejas crece cada año en $\frac{1}{3}$ de su número, y al final de cada año se venden 10. Después de vender las 10 del final del segundo año quedan 190 ovejas. ¿Cuántas había al principio? **Sol:** 120.
- 29º** En un quiosco de periódicos se venden de un determinado semanario los $\frac{2}{5}$ del número de ejemplares en la mañana. Al mediodía el encargado adquiere 10 ejemplares más. Vende durante la tarde $\frac{3}{4}$ de las nuevas existencias y se queda con 10 ejemplares. ¿Cuántos ejemplares tenía al principio de la jornada? **Sol:** 50.
- 30º** Un hombre se contrata por 30 días a 50 € incluyendo alimentación por cada día de trabajo. En los días que no trabaje abonará 5 € por la alimentación. Al final de los 30 días recibe 950 €. ¿Cuántos días trabajó? **Sol:** 20 días.
- 31º** El perímetro de un triángulo isósceles es 50 cm. Cada uno de los lados iguales es 10 cm mayor que la base. ¿Cuánto vale cada lado? **Sol:** 10, 20, 20.
- 32º** Un poste tiene bajo tierra $\frac{1}{4}$ de su longitud, $\frac{1}{3}$ del resto sumergido en agua, y la parte emergente mide 6 m. Halla la longitud del poste. **Sol:** 12 m.
- 33º** Hallar la longitud de un poste que tiene bajo tierra $\frac{1}{5}$ de su longitud, $\frac{1}{4}$ del resto sumergido en agua, y la parte que emerge mide 12 metros. **Sol:** 20 m.
- 34º** Halla los lados de un triángulo isósceles de 60 cm de perímetro sabiendo que la razón de uno de los lados iguales a la base es de $\frac{5}{2}$. **Sol:** 10, 25, 25.
- 35º** De un depósito lleno de agua se saca la mitad de contenido y después un tercio del resto, quedando en él 100 L. Calcula la capacidad del depósito. **Sol:** 300 L.
- 36º** Después de gastar el 15% del depósito de gasolina de un coche quedan 42.5 l. ¿Cuál es la capacidad del depósito? **Sol:** 50 L.
- 37º** Tenía muchas monedas de 1 céntimo y las he cambiado por monedas de 5 céntimos. Ahora tengo la misma cantidad pero 60 monedas menos. ¿Cuánto dinero tengo? **Sol:** 75 céntimos.
- 38º** Un padre tiene 35 años y su hijo 15. ¿Cuántos años hace que la edad del padre era el triple que la edad del hijo? **Sol:** 5 años.
- 39º** Un señor tiene 39 años y su hijo 9 años. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será triple que la del hijo? **Sol:** 6 años.
- 40º** Una señora tiene 52 años y su hijo la mitad. ¿Cuántos años hace que la madre tenía 3 veces la edad del hijo? **Sol:** 13 años.
- 41º** Un padre tiene 34 años, y las edades de sus tres hijos suman 22 años. ¿Dentro de cuántos años las edades de los hijos sumarán como la edad del padre? **Sol:** 6 años.

- 42°** Preguntado un padre por la edad de su hijo contesta: "Si del doble de los años que tiene se le quitan el doble de los que tenía hace 6 años se tendrá su edad actual". Halla la edad del hijo en el momento actual. **Sol:** 12 años.
- 43°** Hállese la edad de una persona, sabiendo que si se añade 7 a la cuarta parte de su edad es lo mismo que si se le quita 3 a los $\frac{2}{3}$ de su edad. **Sol:** 24 años.
- 44°** En la fiesta de un amigo se han repartido entre los 20 asistentes el mismo número de monedas. Como a última hora ha acudido un chico más nos han dado a todos 1 moneda menos y han sobrado 17. ¿Cuántas monedas para repartía se tenía? **Sol:** 80 monedas.
- 45°** Un hombre recibe una paga de 2480 €. Si hubiera trabajado 5 días más y hubiera recibido 7 € menos cada día habría cobrado 2475 €. ¿Cuántos días trabajó? **Sol:** 40 días.
- 46°** Cuántos litros de un líquido que tiene 74% de alcohol se debe mezclar con 5 litros de otro que tiene 90% de alcohol, si se desea obtener una mezcla de 84% de alcohol? **Sol:** 3 L.
- 47°** Una fuente llena un depósito en 10 horas y otra en 15 horas. ¿Qué tardarían en llenarlo manando juntas ambas fuentes? **Sol:** 6 horas.
- 48°** Un depósito se llena por un grifo en 8 horas y por otro en 2 horas. ¿Cuánto tardará en llenarse abriendo los dos grifos a la vez? **Sol:** En una hora y 36 minutos.
- 49°** Un grifo llena un depósito en 2 horas, y otro grifo lo llena en 3 horas. ¿Cuánto tardará en llenarse el depósito si se abren ambos grifos a la vez? **Sol:** 1 h y 12 min.
- 50°** Un grifo puede llenar un depósito en 10 minutos, otro grifo en 20 minutos y un desagüe puede vaciarlo, estando lleno, en 15 minutos. ¿En cuánto tiempo se llenará el depósito si estando vacío y abierto el desagüe se abren los dos grifos? **Sol:** 12 min.
- 51°** Manando juntos dos grifos llenan un depósito en 4 horas. ¿Cuánto tardarán en llenarlo cada uno separadamente si el primer grifo invierte doble tiempo que el segundo? **Sol:** 12 h, 6 h.
- 52°** Un grifo A llena un depósito de agua en 4 horas y otro grifo B lo llena en 6 horas. El depósito tiene un desagüe que lo vacía en 12 horas estando los grifos cerrados. ¿Cuánto tiempo tardarán los dos grifos en llenar el depósito estando el desagüe abierto? **Sol:** 3 horas.
- 53°** Dos grifos alimentan simultáneamente un depósito tardando 24 horas en llenarlo. Si se abriera cada grifo por separado el primero tardaría 2 horas menos que el segundo. ¿Cuánto tiempo tardaría cada uno de ellos en llenarlo de manera independiente? **Sol:** 6 y 4 horas.
- 54°** En unas pruebas son eliminados en el ejercicio escrito el 20% de los alumnos presentados, y en el siguiente, el oral, la cuarta parte de los que quedaron. Aprobaron los ejercicios 120 alumnos. ¿Cuántos alumnos se presentaron?, y ¿cuál es el tanto por ciento de aprobados? **Sol:** 200, 60%.

Problemas de proporcionalidad directa.

- 1º Una máquina embotelladora ha llenado 135 botellas en 15 minutos. ¿Cuántas botellas llenará en hora y media? **Sol:** 810 botellas.
- 2º He recorrido 720 km en 9 horas, a una velocidad media de 80 km/h. ¿Cuánto habría tardado si la velocidad hubiese sido de 60 km/h? **Sol:** 6.75 horas.
- 3º Por 3.5 kg de chirimoyas he pagado 6.3 €. ¿Cuánto pagaré por cinco kilos? **Sol:** 9 €.
- 4º Si 4 entradas para el cine han costado 15.2 €, ¿cuánto costarán 5 entradas? **Sol:** 19 €.
- 5º El precio de un espejo de 0.3 m de ancho y 0.24 m de largo es de 90 €. ¿Qué anchura tendrá un espejo del mismo material de 0.36 m de largo que costó 126 €? **Sol:** 0.28 m.
- 6º Un corredor ha dado 8 vueltas a la pista en 12 min. ¿Cuántas vueltas dará, si mantiene el mismo ritmo, en 18 min? **Sol:** 12 vueltas.
- 7º Una población ha consumido 20000 m³ de agua en 5 meses. ¿Cuántos metros cúbicos consumirá en un año? **Sol:** 48000.
- 8º Un tren ha recorrido 240 km en tres horas. Si mantiene la misma velocidad, ¿cuántos kilómetros recorrerá en las próximas dos horas? **Sol:** 160 km.

Problemas de proporcionalidad inversa.

- 1º Con 15 kg de alimentos se alimentan 5 personas durante 12 días. ¿Durante cuántos días se alimentarán 6 personas con los mismos alimentos? **Sol:** 10 días.
- 2º Seis personas efectúan un trabajo en 10 días. ¿Cuánto tardarán 8 personas en hacer el mismo trabajo? **Sol:** 7.5 días.
- 3º Sabiendo que dispongo de una determinada cantidad de dinero y que con ella puedo comprar 6 prendas a 4000 € cada una. ¿Cuántas prendas podría comprar si me costaran a 3000 € cada una? **Sol:** 8 prendas.
- 4º Un ganadero tiene 20 vacas y dispone de pienso para alimentarlas durante 60 días. Si tuviera 120 vacas ¿para cuántos días tendría pienso? **Sol:** 10 días.
- 5º Ocho obreros construyen una pared en 9 días. ¿Cuánto tardarían en hacerlo 6 obreros? **Sol:** 12 días.
- 6º Cuatro palas excavadoras hacen un trabajo de movimiento de tierras en 14 días. ¿Cuánto se tarda en hacer ese mismo trabajo si se dispusiera de 7 palas excavadoras? **Sol:** 8 días.
- 7º Un coche tarda 3 h en recorrer un trayecto yendo a una velocidad de 90 km/h. ¿Cuánto tardará en recorrer el mismo trayecto a 120 km/h. **Sol:** 2.25 h.
- 8º Un coche, a 90 km/h, hace un recorrido en 5 horas. ¿Cuánto tiempo ganaría si aumentara su velocidad en 10 km/h? **Sol:** 4.5 h.

Problemas de porcentajes.

- 1º Calcula el 35 % de 2.580. **Sol:** 903.
- 2º ¿Cuánto costará un artículo de 6700 € que sube un 12 %? **Sol:** 7504 €.
- 3º En una clase de 30 alumnos hoy han faltado 6. ¿Cuál es el % de ausencias? **Sol:** 20 %.
- 4º Si en un establecimiento me rebajan el 15 %, y pago por un objeto 255 €, ¿cuál era el precio del artículo sin la rebaja? **Sol:** 300 €.
- 5º A una persona le retienen de su sueldo un 12%. Si cobra mensualmente 836 €. ¿Cuál será el sueldo bruto? **Sol:** 950 €.
- 6º Después de haber sido aumentado su valor en un 40 % el precio de una nevera es de 301 €. ¿Cuál era su valor inicial? **Sol:** 215 €.
- 7º El precio de varios artículos sin IVA es de 25 € y 17.6 €. Averigua cuál es el precio final sabiendo que con el IVA suben un 16 %. **Sol:** 29 €; 20.42 €.
- 8º Al cabo de varios años, se ha multiplicado por 2.23 el precio de una mercancía. ¿Cuál ha sido el aumento expresado en %? **Sol:** 123%.
- 9º Un campesino posee 110 hectáreas de monte y decide plantar un 20% con pinos, un 25% de abetos, un 35% de roble y el resto de castaños, teniendo en cuenta que un 5% lo tuvo que dedicar a caminos, calcula:
 - a) ¿Qué superficie plantó de cada tipo de árboles?
 - b) ¿Qué porcentaje plantó de castaños?**Sol:** a) 22 Ha de pinos, 27.5 Ha de abetos, 38.5 Ha de roble y 16.5 Ha de castaños.
b) El 15%.
- 10º En un colegio de 1.500 alumnos el 40% son chicas y el resto chicos. ¿Qué porcentaje de chicos hay? ¿Cuántas chicas hay? ¿Y chicos?. **Sol:** 60%; 600 chicas, 900 chicos.
- 11º El 20% de los alumnos de 1º de BAC hicieron mal un examen. Si el grupo está formado por 45 alumnos. ¿Cuántos lo hicieron bien? **Sol:** 36.
- 12º Al comprar una bicicleta que costaba 50 euros me hacen un descuento del 8%. ¿Cuánto dinero me rebajaron? ¿Cuánto tengo que pagar?. **Sol:** Rebajan 4 euros; Pagar 46 euros.
- 13º Por una factura de 800 € nos cobran 640 €. ¿Qué tanto por ciento de descuento nos han hecho? **Sol:** 20 %.
- 14º A una persona le retienen de su sueldo un 12 %. Si cobra mensualmente 836 €. ¿Cuál será el sueldo bruto? **Sol:** 950 €.
- 15º En un centro de 800 alumnos aprueban el curso en Junio 400 y en Septiembre 200. Calcula el porcentaje de aprobados en Junio, Septiembre y el total en el curso.
Sol: 50% en Junio; 25% en Septiembre; 75% en total.

Problemas de proporcionalidad compuesta.

- 1º Con 15 kg de alimentos se alimentan 5 personas durante 7 días. ¿Durante cuántos días se alimentarán 6 personas con 20 kg de alimentos? **Sol:** 7.77 días.
- 2º Seis personas hacen 20 m de muro en 10 días. ¿Cuánto tardarán 8 personas en hacer 32 m de muro? **Sol:** 12 días.
- 3º Sabiendo que dispongo de 240 € y que con ellas puedo comprar 6 prendas a 40 € cada una. ¿Cuántas prendas podría comprar con 360 € si me costaran a 30 € cada una? **Sol:** 12 prendas.
- 4º Por enviar un paquete de 5 kg de peso a una población que está a 60 km de distancia, una empresa de transporte me ha cobrado 9 €. ¿Cuánto me costará enviar un paquete de 15 kg a 200 km de distancia? **Sol:** 90 €.
- 5º Una cuadrilla de 8 mineros abren una galería de 120 m de longitud en 12 días. Si otra cuadrilla tiene 16 mineros, ¿cuántos metros de galerías abrirán en 29 días? **Sol:** 580.
- 6º Si 30 máquinas fabrican 5000 m de tejido en 20 días, ¿cuántas máquinas, iguales a las anteriores, será preciso poner en marcha para producir 7000 m en 14 días? **Sol:** 60.
- 7º Un depósito de 500 L es llenado por un grifo de 5 cm² de sección en 12 horas. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse un depósito de 750 L por un grifo de 8 cm² de sección? **Sol:** Tardará 11 horas y 15 minutos.
- 8º Una instalación de alumbrado consta de 16 focos que funcionan 12 horas diarias durante 15 días, esto significa un consumo 4.2 kw/h. ¿Cuánto consumirán 28 focos funcionando 14 horas diarias durante tres semanas? **Sol:** 12.005 kw/h.
- 9º En una residencia con 30 estudiantes, se gastan 18 000 € en 25 días. ¿Cuánto gastarían 42 estudiantes en 34 días, viviendo en idénticas condiciones? **Sol:** 34272 €.
- 10 La alimentación de 12 animales durante 8 días cuesta 8000 €. ¿Cuál sería el costo de alimentación de 15 animales en 5 días? **Sol:** 6250 €.
- 11º Si con 300 kg de algodón pueden trabajar 8 telares durante 2 días, a razón de 6 horas diarias, ¿cuántos kilogramos necesitarán 15 telares para trabajar 5 días, a razón de 10 horas diarias? **Sol:** 2343.75 kg.
- 12º Veinticinco farolas originan un gasto de 6000 € al mes, estando encendidas 6 horas diarias. ¿Qué gasto originarían 5 farolas en 45 días, encendidas durante 8 horas diarias? **Sol:** 2400 €.
- 13º Una persona desea hacer el Camino de Santiago a pie, para ello caminará 600 km en 25 días andando 4 horas por día. Si marcha 5 horas por día, ¿cuántos kilómetros recorrerá en 15 días? **Sol:** 450 km.
- 14º Una fábrica de muebles tarda 10 días con 6 carpinteros en hacer 30 armarios. Si tienen 20 días de plazo para entregar los 250 armarios de un hotel, ¿cuántos carpinteros necesitan? **Sol:** 25 carpinteros.

Ejercicios y problemas de ecuaciones de segundo grado.

1º Resuelve las siguientes ecuaciones:

- a) $3x^2 - 27 = 0$ b) $2x^2 - 4x = 0$ c) $x^2 = 16$ d) $9x^2 = 4$
e) $6 - 2x^2/3 = 0$ f) $2x^2 - 32 = 0$ g) $25x^2 - 9 = 0$ h) $6x^2 - 2x = 0$

Sol: a) ± 3 ; b) 0, 2; c) ± 4 ; d) $\pm 2/3$; e) ± 3 ; f) ± 4 ; g) $\pm 3/5$; h) 0, $1/3$.

2º Resuelve las siguientes ecuaciones:

- a) $(x-2) \cdot (x-3) = 0$ b) $x \cdot (2x-4) = 0$ c) $(x+1) \cdot (2x-1) = 0$
d) $(x-2)^2 = 0$ e) $7 \cdot (2x-6) \cdot (x+3) = 0$ f) $(x-4) \cdot (x+3) = 0$

Sol: a) 2, 3; b) 0, 2; c) -1, $1/2$; d) 2; e) ± 3 ; f) 4, -3.

3º Mediante la siguiente fórmula:

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado:

- a) $x^2 - 7x + 12 = 0$ b) $x^2 - 9x + 18 = 0$ c) $x^2 - 5x + 6 = 0$
d) $x^2 + 8x + 15 = 0$ e) $x^2 - 6x - 27 = 0$ f) $x^2 - 6x + 9 = 0$
g) $x^2 + 6x = -9$ h) $4x^2 + 4x = 3$ i) $x^2 - 9x + 14 = 0$
j) $x^2 - 6x + 8 = 0$ k) $2x^2 + 10x - 48 = 0$ l) $x^2 - x = 20$
m) $x^2 = 5x + 6$ n) $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ñ) $x^2 + 10x + 25 = 0$
o) $x^2 + 9 = 10x$ p) $3x^2 - 39x + 108 = 0$ q) $2x^2 - 9x + 9 = 0$
r) $3x^2 + 2x = 8$ s) $4x^2 + 12x + 9 = 0$ t) $5x^2 + 1 = 6x$
u) $6x^2 + 1 = 5x$ v) $6x^2 - 6 = 5x$ w) $2x^2 + 7x + 6 = 0$
x) $x^2 = 2x + 3$ y) $4x^2 + 3 = 8x$ z) $x^2 - x + 1/4 = 0$

Sol: a) 3, 4; b) 3, 6; c) 2, 3; d) -5, -3; e) -3, 9; f) 3; g) -3; h) $1/2$, $-3/2$; i) 2, 7; j) 4, 2; k) 3, -8;
l) -4, 5; m) 6, -1; n) 1, $3/2$; ñ) -5; o) 1, 9; p) 4, 9; q) 3, $3/2$; r) -2, $4/3$; s) $-3/2$; t) 1, $1/5$;
u) $1/2$, $1/3$; v) $-2/3$, $3/2$; w) -2, $-3/2$; x) -1, 3; y) $1/2$, $3/2$; z) $1/2$.

4º Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas y bicúbicas:

- a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ b) $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$ c) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$
d) $x^6 - 26x^3 - 27 = 0$ e) $6x^4 + 2x^2 - 8 = 0$ f) $x^4 - 4x^2 = 0$
g) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$ h) $9x^4 - 3x^2 + 4 = 0$ i) $x^4 - 6x^2 - 27 = 0$
j) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$ k) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$ l) $x^6 + 28x^3 + 27 = 0$

Sol: a) ± 1 , ± 2 ; b) ± 1 ; c) 2, 1; d) -1, 3; e) ± 1 ; f) 0, ± 2 ; g) ± 2 , $\pm 1/2$; h) $\pm 1/3$, ± 2 ; i) ± 3 ; j) 1, -2;
k) ± 2 ; l) -1, -3.

5º ¿Cuántas soluciones reales y diferentes pueden tener las siguientes ecuaciones de segundo grado?:

- a) $x^2 - 16 = 0$ b) $x^2 + 16 = 0$ c) $x^2 + x - 6 = 0$
d) $x^2 + x + 4 = 0$ e) $x^2 + 2x + 1 = 0$ f) $x^2 - 6x + 9 = 0$
g) $x^2 + x - 2 = 0$ h) $x^2 + 2x - 3 = 0$ i) $x^2 + 5x + 10 = 0$

Sol: a) dos; b) cero; c) dos; d) cero; e) una; f) una; g) dos; h) dos.

6º Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado con denominadores:

- a) $1 - \frac{x^2}{3} - \frac{3x+2}{3} = 1$ b) $(x-3)^2 - \frac{x-1}{3} = 2x$ c) $\frac{x-3}{3} - \frac{1}{x-1} = 3x$
d) $x - \frac{2}{x} + \frac{1}{2x} = 5x + 5$ e) $\frac{x-1}{x+1} - \frac{3+x}{x} = 2$ f) $\frac{x-1}{x+1} - \frac{3+x}{x-1} = 2$

g) $3x - 1 - \frac{3}{x} = \frac{1+3x}{4}$

h) $x + \frac{1}{x} = \frac{6}{3x}$

i) $x - 2 = \frac{2x-3}{x}$

j) $x + \frac{1}{x-2} = 4$

k) $x^2 - x = \frac{2}{9} - \frac{2x}{3}$

l) $\frac{x^2}{3} + 2 = \frac{5x}{3}$

m) $x + \frac{2}{x} = 3$

n) $x - 2 = \frac{4x-8}{x}$

ñ) $\frac{x}{2} + \frac{3}{x} = \frac{2x+9}{x}$

o) $2x - 2 = \frac{6x}{x-1} - 5$

p) $x(x+1) - \left(x + \frac{x}{2}\right) = 0$

q) $\frac{x}{3} + \frac{2}{x} = \frac{3x+10}{3x}$

r) $x + 3 = \frac{2x+1}{x-1}$

s) $\frac{9(x-1)}{3x^2-2x-2} = \frac{1}{x}$

t) $\frac{x-3}{2(x-1)} = -\frac{1}{x}$

Sol: a) -2, -1; b) 4/3, 7; c) 5/8, 0; d) -3/4, -1/2; e) -3, -1/2; f) -3, 0; g) 1, -4/3; h) ± 1 ; i) 3, 1; j) 3; k) -1/3, 2/3; l) 2, 3; m) 1, 2; n) 4, 2; ñ) -2, 6; o) -1/2, 3; p) 0, 1/2; q) -1, 4; r) ± 2 ; s) 1/2, 2/3; t) -1, 2.

7º Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado con denominadores:

a) $(x-3)(x-2) + \frac{x(x-3)}{2} = (x-2)^2$

b) $(x-2)x - \frac{x+2}{3} - \frac{x^2-4}{2} = (x-2)^2 - 4$

c) $(x-3)^2 - \frac{x-2}{3} + (3-x)(x-1) = (x-2)^2$

d) $\frac{x-3}{x} + 3x - \frac{5}{x} = 2x - \frac{3}{x} - 3$

e) $3x - \frac{8}{x} + (x-1)^2 = 3(x-2) - (x-5)$

f) $\frac{(x-3)^2}{2} - x + x^2 = x - (x-2)$

g) $\frac{1}{x-1} + 3x + 3x^2 - 2 = \frac{3}{x-1} + 3x^2$

h) $2 + \frac{x+4}{3} = \frac{4x+4}{3} + \frac{2-x}{x-3}$

Sol: a) 1, 4; b) -2/3, 4; c) -1, 8/3; d) -5, 1; e) -2, 2; f) 1, 5/3; g) 5/3, 0; h) 2, 4.

8º La suma de un número y su cuadrado es 30. Hávalo. **Sol:** 5.

9º La suma de los cuadrados de dos números consecutivos es 4141. ¿Cuáles son esos números?
Sol: 45, 46.

10º Si de un número se resta 3, y también se le añade 3, el producto de estos resultados es 72. Halla el número. **Sol:** 9.

11º Si se añade 49 al cuadrado de cierto número, la suma es igual al cuadrado de 11. ¿Cuál es el número? **Sol:** 9.

12º Si el lado de un cuadrado aumenta en 3 cm, su superficie aumenta en 81 cm². Halla el lado del cuadrado. **Sol:** 12.

13º Calcula el radio de un círculo sabiendo que si aumentamos el radio en 4 cm se cuadruplica su área. **Sol:** R = 4.

14º Hallar el perímetro de un cuadrado sabiendo que el área es 64 m². **Sol:** 32 m.

15º Un campo rectangular tiene 80 m² de superficie y 2 metros de longitud más que de anchura. Halla las dimensiones. **Sol:** 8x10.

- 16º** Los lados de un triángulo miden 5, 6 y 7 cm. Determina qué cantidad igual se debe restar a cada uno para que resulte un triángulo rectángulo. **Sol:** 2.
- 17º** La diagonal de un rectángulo mide 30 cm y las dimensiones de los lados son proporcionales a 3 y 4. Halla los lados. **Sol:** 18 y 24.
- 18º** Las dimensiones de un ortoedro son proporcionales a 3, 4 y 5. Halla estas dimensiones sabiendo que el volumen del ortoedro es 480 cm^3 . **Sol:** 6, 8, 10.
- 19º** En un triángulo rectángulo el cateto mayor mide 3 m menos que la hipotenusa y 3 m más que el otro cateto. Hallar los lados y el área del triángulo. **Sol:** 12, 9, 15; 54 m^2 .
- 20º** Un lado de un rectángulo mide 10 cm más que el otro. Sabiendo que el área del rectángulo es de 200 cm^2 , hallar las dimensiones. **Sol:** 10×20 .
- 21º** Los lados de un triángulo rectángulo tienen por medida en centímetros tres números enteros consecutivos. Halla dichos números. **Sol:** 3, 4 y 5.
- 22º** Un triángulo rectángulo tiene de hipotenusa 10 cm. Hallar los catetos sabiendo que su diferencia es de 2 cm. **Sol:** 8 y 6.
- 23º** En un recinto cuadrado de un parque hay una arboleda. Este recinto está rodeado por un paseo de 5 m de ancho; el área del paseo es 25 m^2 más grande que la del recinto cuadrado. Hallar el área de este cuadrado. **Sol:** 100 m^2 .
- 24º** Una madre reparte entre sus hijos 24 monedas de euro en partes iguales. Si fuesen 2 hijos menos, recibiría cada uno 2 monedas más. ¿Cuántos son los hijos? **Sol:** 6 hijos.
- 25º** Varias personas viajan en un coche que han alquilado por 342 €. Pero se les agregan 3 personas más lo cual hace bajar en 19 € a lo que antes debía pagar cada persona. ¿Cuántas personas iban al principio en el coche? **Sol:** 6.

Ejercicios y problemas de sistemas de ecuaciones lineales:

1º Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ -x + y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -x + y = -3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x - y = 3 \\ -x + 3y = -1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ -2x + 5y = 1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 5x - y = 3 \\ 2x - 2y = -2 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 7x + y = 8 \end{cases}$

k) $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - y = 23 \end{cases}$

l) $\begin{cases} 5x - 6y = 3 \\ 7x - 2y = 17 \end{cases}$

m) $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ x - y = 3 \end{cases}$

n) $\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 2x - 3y = -7 \end{cases}$

ñ) $\begin{cases} 3x - y = -5 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$

o) $\begin{cases} 5x + 3y = -1 \\ 3x + 5y = -7 \end{cases}$

p) $\begin{cases} 12x - 7y = 3 \\ 15x - 3y = 21 \end{cases}$

q) $\begin{cases} 4x + 12y = -8 \\ 5x - y = 6 \end{cases}$

r) $\begin{cases} 3x + 5y = 12 \\ 5x + 3y = 4 \end{cases}$

s) $\begin{cases} 7x - 3y = -5 \\ 5x + y = 9 \end{cases}$

t) $\begin{cases} 2(x - 3) = 2y \\ 2x - y = 5 \end{cases}$

u) $\begin{cases} 5(x + 2) = y \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

v) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2(x + 1) = 2y \end{cases}$

w) $\begin{cases} 2x + y = -5 \\ 3(x - 2y) = 15 \end{cases}$

x) $\begin{cases} 3x = 3(y - 1) \\ 2 = 2(2x - y) \end{cases}$

y) $\begin{cases} 2(3x - 2) = -5y \\ 3(2x + 3y) = 12 \end{cases}$

z) $\begin{cases} x = 2(4 - y) \\ y - 3 = x - 5 \end{cases}$

Sol: a) $x = 1, y = 1$; b) $x = 1, y = 0$; c) $x = 2, y = -1$; d) $x = 3, y = -2$; e) $x = 0, y = 1$;
f) $x = 4, y = 1$; g) $x = 2, y = 1$; h) $x = -2, y = 3$; i) $x = 1, y = 2$; j) $x = 1, y = 1$;
k) $x = 10, y = -3$; l) $x = 3, y = 2$; m) $x = 4, y = 1$; n) $x = 1, y = 3$; ñ) $x = -1, y = 2$;
o) $x = 1, y = -2$; p) $x = 2, y = 3$; q) $x = 1, y = -1$; r) $x = -1, y = 3$; s) $x = 1, y = 4$;
t) $x = 2, y = -1$; u) $x = -1, y = 5$; v) $x = 1, y = 2$; w) $x = -1, y = -3$; x) $x = 2, y = 3$;
y) $x = -1, y = 2$; z) $x = 4, y = 2$.

2º Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x + 3y = x - 6 \\ x - 1 = 2y + 2x \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3(x - 2y + 1) = -3y \\ x + 5y = 2x + 3y + 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - y = 3(x - 3 + y) \\ 3x + 5y = -3x + 2y \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 8 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3(x - y) = 2x + 1 \\ 4x - 15y = -2x \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y = 3 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x - 3y = 6 \\ \frac{x}{3} + 2y = 5 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 3x = 6y \\ \frac{x}{2} = \frac{3y}{2} - 1 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x + 2y = 9 \\ 3x - \frac{y}{4} = 2 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ \frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = -1 \end{cases}$

k) $\begin{cases} \frac{2x - y}{x} = 4 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$

l) $\begin{cases} x + 5y = 2x \\ \frac{3x}{2} - 3y = \frac{9}{2} \end{cases}$

Sol: a) $x = 3, y = -2$; b) $x = 1, y = 2$; c) $x = -1, y = 2$; d) $x = 2, y = 6$; e) $x = -5, y = -2$;
f) $x = -3, y = 6$; g) $x = 9, y = 1$; h) $x = 4, y = 2$; i) $x = 1, y = 4$; j) $x = 2, y = -3$;
k) $x = -1, y = 2$; l) $x = 5, y = 1$.

3º Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a) \begin{cases} \frac{x+1}{y} = 2 \\ \frac{x}{y+1} = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{x-y}{2} + \frac{x+y}{3} = 1 \\ 2x - \frac{3y}{4} = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \frac{3x}{6} + \frac{y}{4} = 1 \\ \frac{2x}{10} - \frac{y}{6} = \frac{14}{15} \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x = 3y \\ \frac{2x}{3} = \frac{7y}{5} + 3 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 3x - \frac{2y}{7} = 4 \\ y - 6 = x - 1 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 2x - y = 1 \\ \frac{2x}{3} - \frac{y}{5} = 1 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 0 \\ \frac{2x}{3} + \frac{3y}{4} = 1 \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = 5 \\ \frac{3x}{3+3y} = 1 \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} \frac{x}{2} - y = -2 \\ x - \frac{y}{2} = 2 \end{cases}$$

$$j) \begin{cases} \frac{5x}{x+y} = 2 \\ 3x - 2y = x - 2 \end{cases}$$

$$k) \begin{cases} \frac{3x}{2x+y} = 2 - \frac{1}{5} \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}$$

$$l) \begin{cases} \frac{x+y-2}{x-y} = -\frac{1}{3} \\ \frac{3x+y-3}{2y-x} = -\frac{1}{11} \end{cases}$$

Sol: a) $x = 3, y = 2$; b) $x = 2, y = 4$; c) $x = 3, y = -2$; d) $x = 15, y = 5$; e) $x = 2, y = 7$;
f) $x = 3, y = 5$; g) $x = 6, y = -4$; h) $x = 3, y = 2$; i) $x = 4, y = 4$; j) $x = 2, y = 3$;
k) $x = 3, y = -1$; l) $x = -1, y = 5$.

4º Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones (se recomienda usar Gauss o reducción):

$$a) \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y + 2z = 7 \\ x - y - z = -2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x - 2y + 4z = 1 \\ x - y - 2z = 0 \\ 3x - 2y - z = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ 3x - y - z = 2 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 3x - y + z = 2 \\ x - 2y - z = -3 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x + 2y - z = -1 \\ 2x + 5y + 3z = 3 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 4x - 3y + 2z = -7 \\ 2x - y + 5z = 2 \\ x - y + z = -2 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} x + y - 2z = -1 \\ 3x - y + z = -4 \\ 2x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} 3x - y + z = 3 \\ 2x + y - z = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y + 2z = 1 \\ x + 2y - z = 5 \end{cases}$$

$$j) \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 3 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$k) \begin{cases} 3x - y + z = 4 \\ x + y - z = 0 \\ x + 2y + 2z = -1 \end{cases}$$

$$l) \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x - y + 2z = 8 \\ x + y + 2z = 8 \end{cases}$$

$$m) \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 0 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

$$n) \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x - 2y = 3 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Sol: a) $x = 1, y = 2, z = 1$; b) $x = 1, y = 1, z = 0$; c) $x = 1, y = -1, z = 2$; d) $x = 2, y = 3, z = -1$;
e) $x = 1, y = -1, z = 2$; f) $x = 0, y = 3, z = 1$; g) $x = -1, y = 2, z = 1$; h) $x = 1, y = 1, z = 1$;
i) $x = 2, y = 1, z = -1$; j) $x = 2, y = 1, z = 1$; k) $x = 1, y = -1, z = 0$; l) $x = 4, y = 2, z = 1$;
m) $x = 2, y = -1, z = 1$; n) $x = 1, y = -1, z = -1$.

5º Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones (se recomienda usar Gauss o reducción):

$$\text{a) } \begin{cases} x + \frac{y}{2} = 7 \\ y + \frac{z}{2} = 8 \\ z + \frac{x}{4} = 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 8 \\ x - 2y + z = 6 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} - \frac{z}{4} = 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{x+1}{2} - \frac{y+2}{4} = 0 \\ \frac{x-1}{3} + \frac{y+z}{2} = 2 \\ x + \frac{y-z}{4} = 1 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \frac{x}{2} + 2y + z = 2 \\ x + y - 2z = 1 \\ x - y + \frac{z}{2} = -1 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} \frac{x+z}{3} = y - 1 \\ x + y - z = 1 \\ \frac{y+z}{2} = x + 2 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} x + y = 5z \\ \frac{x+z}{3} = y + 2 \\ x + 2y - 2z = 3 \end{cases}$$

Sol: a) $x = 4, y = 6, z = 4$; b) $x = 6, y = 6, z = 12$; c) $x = 1, y = 2, z = 2$; d) $x = 0, y = 1, z = 0$;
e) $x = 3, y = 4, z = 6$; f) $x = 5, y = 0, z = 1$.

- 6º Dos números suman 38. Si el primero le dividimos entre 3 y el segundo entre 4, los cocientes se diferencian en 1. Halla el valor de dichos números. **Sol:** 18, 20.
- 7º Una pluma y su carga cuestan juntas 6 €. La pluma cuesta 4 € más que la carga. ¿Cuánto cuesta la pluma y cuánto cuesta la carga? **Sol:** 5 € la pluma y 1 € la carga.
- 8º Reparte 140 € entre tres personas, de manera que la primera reciba 10 más que la segunda, y ésta reciba 20 € más que la tercera. **Sol:** 60, 50, 30.
- 9º Tres números son tales que: el segundo más $\frac{1}{4}$ del primero suman 68; la mitad del tercero más $\frac{3}{4}$ del primero suman 64; y el tercero más $\frac{1}{4}$ del segundo suman 95. Obtener dichos números. **Sol:** 32, 60, 80.
- 10º Halla tres números naturales consecutivos sabiendo que la suma de la mitad del primero más los $\frac{2}{3}$ del segundo dan como resultado el tercero. **Sol:** 8, 9, 10.
- 11º La suma de dos números es 16 y su diferencia 4. Háyalos. **Sol:** 10, 6.
- 12º La suma de las cifras de un número menor que 100 es 12. Si se permutan las cifras, el nuevo número supera al anterior en 18 unidades. Hallar el número. **Sol:** 57.
- 13º Divide 180 en dos sumandos de modo que al dividir la mayor sea el doble de la menor. **Sol:** 120, 60.
- 14º Divide 33 en dos sumandos de tal forma que al sumar $\frac{2}{5}$ del primero y $\frac{1}{3}$ del segundo dé 12. **Sol:** 15, 18.
- 15º La diferencia de dos números es $\frac{1}{6}$. El triple del mayor menos el duplo del menor es 1. Halla dichos números. **Sol:** $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{2}$.
- 16º Un triángulo tiene 33 cm de perímetro y es semejante a otro cuyos lados son 2 cm, 4 cm y 5 cm. ¿Cuáles son las dimensiones del triángulo? **Sol:** 6, 12, 15.
- 17º Los ángulos de un triángulo son proporcionales a los números 2, 2 y 4. Halla los valores de los ángulos. **Sol:** 45, 45, 90.

- 18º** Un triángulo es semejante a otro cuyos lados son 3, 4 y 6. Halla los lados sabiendo que su perímetro es 48 cm. **Sol:** 12, 16, 20.
- 19º** El área de un campo rectangular es 240 dm^2 . La diagonal del campo mide 26 m. Halla sus dimensiones. **Sol:** 10, 24.
- 20º** Se han comprado 6 kg de azúcar y 3 kg de café por un coste total de 8.4 €. Sabiendo que 3 kg de azúcar más 2 kg de café cuestan 4.8 €, hallar el precio del kilogramo de azúcar y el del café. **Sol:** 0.8 y 1.2 €.
- 21º** Se mezcla una cierta cantidad de café, cuyo precio es de 34 € el kilo, con 80 kilos de otro café cuyo precio es de 50 € el kilo, con el fin de obtener una mezcla que pueda venderse a 44 € el kilo. Cuántos kilos de café de 34 € deben emplearse en la mezcla? **Sol:** 44 kg.
- 22º** Un lingote de oro cuesta 12000 € y pesa 2 kg, un lingote de plata pesa kilo y medio y su coste en el mercado es de 3000 €. Una corona de masa 1.5 kg se ha fabricado con una mezcla de oro y plata y le ha costado al joyero 7000 €. Calcular la cantidad de oro en la misma. **Sol:** 1 kg.
- 23º** Se quieren mezclar vino de 60 € con otro de 35 €, de modo que resulte vino con un precio de 50 € el litro. ¿Cuántos litros de cada clase deben mezclarse para obtener 200 L de la mezcla? **Sol:** 120 litros de 60 €/L y 80 litros de 35 €/L.
- 24º** Tenemos la opción de comprar dos clases de una mercancía de precios diferentes. Disponemos de 300 €. Si compro 10 kg de la primera clase podemos comprar 2 kg de la segunda, pero si compramos 5 kg de la primera clase solamente podemos comprar 4 kg de la segunda. ¿Cuál es el precio de cada una de las clases de dicha mercancía? **Sol:** 20 €/kg, 50 €/kg.
- 25º** Se sabe que la Coca Cola de botella cuesta un euro por litro, y que una botella de ginebra 10 € el litro. Un empresario desea producir cubatas de 1 € de valor y de cuarto de litro de volumen. ¿Qué cantidad de ginebra empleará? **Sol:** 0.075 L.
- 26º** Un crucero tiene habitaciones dobles (2 camas) y sencillas (1 cama). En total tiene 47 habitaciones y 79 camas. ¿Cuántas habitaciones tiene de cada tipo? **Sol:** 15 individuales y 32 dobles.
- 27º** Mi padrino tiene 80 años y me contó el otro día que entre nietas y nietos suman 8 y que si les diese 1000 ptas a cada nieta y 500 a cada nieto se gastaría 6500 ptas. ¿Cuántos nietos y nietas tiene mi padrino? **Sol:** 5 nietas y 3 nietos.
- 28º** En un corral hay conejos y gallinas; en total, 25 cabezas y 80 patas. Calcula el número de animales de cada clase. **Sol:** 15 conejos y 10 gallinas.
- 29º** En una granja se crían gallinas y cerdos. Si se cuentan las cabezas son 50, y las patas son 134. ¿Cuántos animales hay de cada clase? **Sol:** 17 cerdos y 33 gallinas.
- 30º** En una lucha entre moscas y arañas intervienen 42 cabezas y 276 patas. ¿Cuántos luchadores había de cada clase? (Recuerda que una mosca tiene 6 patas y una araña 8 patas). **Sol:** 25 moscas y 17 arañas.
- 31º** En la granja se han envasado 300 L de leche en 120 botellas de 2 y 5 L. ¿Cuántas botellas de cada clase se han usado? **Sol:** 100 botellas de 2 L y 20 botellas de 5 L.

- 32º** Tengo 30 monedas. Unas son de cinco céntimos y otras de un céntimo. ¿Puedo tener en total 78 céntimos? **Sol:** Si.
- 33º** En una bolsa hay 16 monedas con un valor de 220 ptas. Las monedas son de 5 y 25 ptas. ¿Cuántas monedas hay de cada valor? **Sol:** 9 de 5 ptas y 7 de 25 ptas.
- 34º** La madre de Ana tiene triple edad que ella, y dentro de 10 años sólo tendrá el doble de la que entonces tenga su hija. ¿Qué edad tiene cada una? **Sol:** 30, 10.
- 35º** Juan tiene 3 años más que su hermano, y dentro de 3 años la suma de sus edades será de 29 años. ¿Qué edad tiene cada uno? **Sol:** 19, 13.
- 36º** Hace 5 años la edad de un padre era el triple de la de su hijo, y dentro de 5 años sólo será el duplo. ¿Cuáles son las edades del padre y del hijo? **Sol:** El padre 35 y el hijo 15.
- 37º** La suma de las edades de mi abuelo y mi hermano es de 56 años. Si mi abuelo tiene 50 años más que mi hermano, ¿qué edades tienen cada uno? **Sol:** 53 el abuelo y 3 mi hermano.
- 38º** La suma de las edades de 3 personas es de 112 años. La mediana tiene 8 años más que la joven, y la mayor tiene tantos como las otras dos juntas. ¿Qué edad tiene cada una? **Sol:**
- 39º** El otro día mi abuelo de 70 años de edad quiso repartir entre sus nietos cierta cantidad de dinero. Si nos daba 300 € a cada uno le sobraba 600 € y si no daba 500 € le faltaba 1000 €. ¿Cuántos nietos tiene? ¿Qué cantidad quería repartir? **Sol:** 8 nietos y 3.000 €.
- 40º** Un empresario contrata un número de empleados por 660 €. Otro empresario contrata un empleado más, pero paga 5 € menos por cada uno de ellos y emplea la misma suma. Hallar el número de empleados y lo que gana cada uno. **Sol:** 11 empleados a 60 €.
- 41º** Un frutero lleva al mercado 8 kg de manzanas, 10 de peras y 15 de naranjas, y lo vende todo ello en 34 €. Otro lleva 10 kg de manzanas, 12 de peras y 10 de naranjas, cobrando por todo 31.6 €. Un cliente compra 1 kg de cada clase de fruta y paga 2 €. ¿A cómo estaban los precios de cada clase de fruta aquel día? **Sol:** 1 €/kg manzana, 0.8 €/kg pera, 1.2 €/kg naranja.
- 42º** Entre dos clases hay 60 alumnos. Si el número de alumnos de una clase es el $\frac{5}{7}$ de la otra, ¿cuántos alumnos hay en cada clase? **Sol:** 35, 25.
- 43º** Hallar la cantidad de vino que hay en dos vasijas, sabiendo que los $\frac{2}{5}$ de la primera equivalen a los $\frac{2}{3}$ de la segunda y que la mitad de la primera contiene 5 l menos que la segunda. **Sol:** 50, 30.
- 44º** Se ha comprado un número de objetos del mismo precio, por valor de 240 €. Si cada objeto costase 4 € menos, por el mismo dinero habríamos comprado 10 objetos más. ¿Cuántos objetos se han comprado y cuánto ha costado cada uno? **Sol:** 20 objetos, 12 €.
- 45º** Un obrero ha trabajado en dos obras durante 40 días. En la primera cobra 50 € diarios, y en la segunda 75 € diarios. Sabiendo que ha cobrado en total 2.375 €. ¿Cuántos días ha trabajado en cada obra? **Sol:** 25, 15.

- 46°** Al iniciar una batalla, los efectivos de los dos ejércitos en contienda estaban en la razón de 7 a 9. El ejército menor perdió 15000 hombres y el mayor 25000. La relación de efectivos quedó, por efecto de dichas bajas, en la de 11 a 13. Calcular el número inicial de soldados de cada ejército. **Sol:** 90000 y 70000.
- 47°** Un padre tiene 30 años más que su hijo, y dentro de 5 años la edad del padre será triple de la del hijo. ¿Qué edad tiene cada uno? **Sol:** 40, 10.
- 48°** Sabemos que mi tío tiene 27 años más que su hijo y que dentro de 12 años le doblará la edad. ¿Cuántos años tiene cada uno? **Sol:** Mi tío 42 y mi primo 15 años.
- 49°** Un bisabuelo le dijo a su bisnieta. "Hoy tu edad es $\frac{1}{5}$ de la mía y hace 7 años no era más que $\frac{1}{7}$ ". ¿Qué edad tienen el bisabuelo y la bisnieta? **Sol:** 105 el bisabuelo y 21 la bisnieta.
- 50°** Juan y Roberto comentan: Juan: "Si yo te tomo 2 monedas, tendré tantas como tú" Roberto: "Sí, pero si yo te tomo 4, entonces tendré 4 veces más que tú". ¿Cuántas monedas tienen cada uno? **Sol:** Juan tiene 8 monedas y Roberto 12 monedas.
- 51°** En una reunión de chicas y chicos, el número de éstas excede en 26 al de aquellos. Después de haber salido 12 chicos y 12 chicas, quedan doble de éstas que de aquéllos. Halla el número de chicos y chicas que había en la reunión. **Sol:** 32 chicas y 22 chicos.
- 52°** Calcular el número de monedas que tiene cada uno de los amigos José, Luis e Iván, sabiendo que si Iván diese 5 a José tendrían las mismas; si José diera 5 a Luis, éste tendría el cuádruple que José; además se sabe que Luis tiene la tercera parte del número de monedas que poseen los tres. **Sol:** 10, 15, 20.
- 53°** Un granjero cuenta con un determinado número de jaulas para sus conejos. Si introduce 6 conejos en cada jaula quedan cuatro plazas libres en una jaula. Si introduce 5 conejos en cada jaula quedan dos conejos libres. ¿Cuántos conejos y jaulas hay? **Sol:** 6 jaulas y 32 conejos.
- 54°** Un número está formado por dos cifras cuya suma es 9. El número invertido es igual al número dado más 9 unidades. Hállese dicho número. **Sol:** 45.
- 55°** Un número consta de dos cifras cuya suma es 15. Si se toma la cuarta parte del número y se le agregan 45 resulta el número invertido. ¿Cuál es ese número? **Sol:** 96.
- 56°** Hallar una fracción tal que si se añade 1 al numerador se convierte en $\frac{1}{3}$ y añadiendo 1 a su denominador sea igual a $\frac{1}{4}$. **Sol:** $\frac{4}{15}$.
- 57°** Encontrar un quebrado tal que añadiendo 7 a los términos de la fracción de $\frac{5}{7}$ y quitando 5 a los términos de $\frac{1}{2}$. **Sol:** $\frac{13}{21}$.

Ejercicios de ecuaciones irracionales.

1º Resuelva las siguientes ecuaciones irracionales:

a) $x + \sqrt{x} = 30$

c) $\sqrt{7-3x} - x = 7$

e) $5\sqrt{x} + 3 = 2x$

g) $\sqrt{4x+5} - \sqrt{3x+1} = 1$

i) $\sqrt{\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+4}} = 6$

k) $\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x} = \sqrt{x}$

m) $2\sqrt{x+4} = \sqrt{5x+4}$

ñ) $-\sqrt{x} = x+1$

p) $\sqrt{3x-2} - 4 = 0$

r) $\sqrt{3x+10} = 1 + \sqrt{3x+3}$

t) $\sqrt{2} + \sqrt{\frac{8}{x}} = \sqrt{2x}$

v) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{2x+1} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$

x) $\sqrt{x+6} + \sqrt{x+11} = \sqrt{5-10x}$

z) $\sqrt{x+6} + \sqrt{x+1} = \sqrt{7x+4}$

b) $\sqrt{x} + 1 = \sqrt{x+9}$

d) $\sqrt{x+4} = 3 - \sqrt{x-1}$

f) $3\sqrt{6x+1} - 5 = 2x$

h) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+4} = 6$

j) $1 + \sqrt{x+1} = x/3$

l) $\sqrt{x-3} + \sqrt{x+4} = \sqrt{4x+1}$

n) $\sqrt{x^2 + 3x + 7} = 5$

o) $\sqrt{2x+5} + 6 = 3x+3$

q) $\sqrt{2x+1} = x-1$

s) $\frac{3}{\sqrt{x}} = \frac{6}{\sqrt{3x+4}}$

u) $\sqrt{8x-4} = \sqrt{6x-5} + \sqrt{2x+9}$

w) $\frac{21}{\sqrt{6x+1}} - \sqrt{6x+1} = 2\sqrt{3x}$

y) $\sqrt{9\sqrt{15-x}} = 6\sqrt{2x+3}$

Sol: a) 25; b) 16; c) -3, -14; d) 13/9; e) 9, 1/4; f) 8, 1/2; g) 5, 1; h) 5; i) 221; j) 15, 0; k) 0, ± 3 ;
l) 12; m) 12; n) 3, -6; ñ) 1, 4; o) 2/9, 2; p) 6; q) 4, 0; r) 2; s) 4; t) 1, 4; u) 5; v) 5/8;
w) 4/3; x) -2, 3/7; y) -1; z) $x = 3$.

2º ¿Qué número aumentado en 3 unidades su raíz cuadrada da 12? **Sol:** 81.

Ejercicios de sistemas de ecuaciones no lineales.

1º Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 169 \\ x + y = 17 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{5}{7} \\ x^2 + y^2 = 1184 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy + 2y = 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} xy - y^2 = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

h) $\begin{cases} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 13 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1 \end{cases}$

i) $\begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{2}{y} = 13 \\ \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = 3 \end{cases}$

j) $\begin{cases} xy = 28 \\ x^2 + y^2 = 65 \end{cases}$

k) $\begin{cases} 2x + y^2 = 5 \\ 5x = 9 + y \end{cases}$

l) $\begin{cases} 5x + 7y = 61 \\ xy = 8 \end{cases}$

m) $\begin{cases} x + xy + y = 11 \\ xy = 6 \end{cases}$

n) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x - 5y = 24 \\ x + y = 7 \end{cases}$

ñ) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 3x + y = 20 \\ x - y = 2 \end{cases}$

Sol: a) $x = 3, y = 4; x = 4, y = 3$; b) $x = 3, y = 4; x = 4, y = 3$; c) $x = 5, y = 12; x = 5, y = 12$;
d) $x = 20, y = 28; x = -20, y = -28$; e) $x = 0, y = 1; x = -1, y = 2$;
f) $x = y = 1; x = 7/5, y = 1/5$; g) $x = y = 1; x = 3/2, y = 0$;
h) $x = 1/3, y = 1/2; x = -1/2, y = -1/3$; i) $x = 1/2, y = 2/3$;
j) $x = 4, y = 7; x = -4, y = -7; x = 7, y = 4; x = -7, y = -4$;
k) $x = 2, y = 1; x = 38/25, y = -7/5$; l) $x = 1, y = 8; x = 56/5, y = 5/7$;
m) $x = 2, y = 3; x = 3, y = 2$; n) $x = -1, y = 8; x = 5, y = 2$; ñ) $x = 3, y = 1; x = -3, y = -5$.

2º Resuelve el siguiente sistema por el método de reducción y comprueba que tiene cuatro soluciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 74 \\ 2x^2 - 3y^2 = 23 \end{cases}$$

Sol: $x = 7, y = \pm 5; x = -7, y = \pm 5$.

3º Hallar dos números naturales cuya diferencia es 8 y cuyo producto es 105. **Sol:** 7, 15.

4º Dos números suman 52 y sus cuadrados 1354. Hallarlos. **Sol:** 25, 27.

5º La diferencia entre los cuadrados de dos números consecutivos es 17. ¿Cuáles son dichos números? **Sol:** 8 y 9.

6º Dos números suman 22 y la diferencia de sus cuadrados es 44. Halla estos números. **Sol:** 10, 12.

7º Dos números suman 65 y la diferencia de sus cuadrados es 325. Calculados. **Sol:** 30, 35.

8º Halla dos números sabiendo que su suma es 15 y la diferencia de sus cuadrados 15. **Sol:** 7, 8.

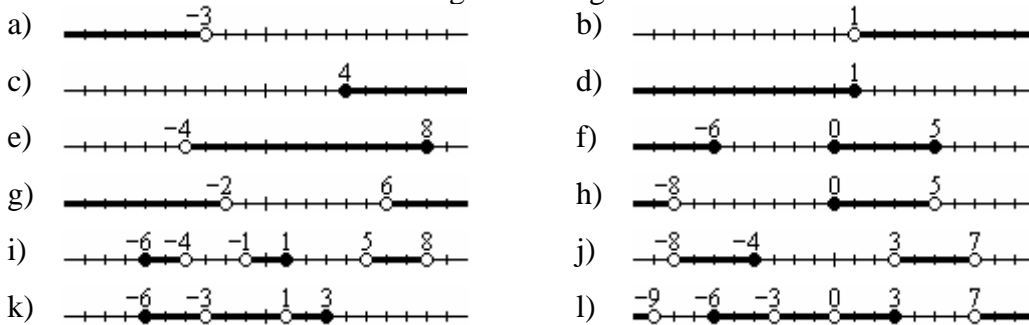
9º Halla dos números cuya suma es 23 y su producto 130. **Sol:** 10, 13.

- 10º** Halla dos números consecutivos cuyo producto es 240. **Sol:** 15, 16.
- 11º** Halla dos números cuya suma es 15 y la de sus cuadrados 117. **Sol:** 6, 9.
- 12º** Halla dos números positivos cuya diferencia sea 3 y la suma de sus cuadrados 929. **Sol:** 20, 23.
- 13º** La suma de los cuadrados de dos números positivos es 56. Hallar dichos números, sabiendo además que el mayor excede al menor en 2. **Sol:** 15, 13.
- 14º** Hallar dos números sabiendo que la suma de los mismos es 9 y el producto de sus cuadrados es 400. **Sol:** 4 y 5.
- 15º** Descomponer el número 15 en dos sumandos tales que el triple del cuadrado del primero y el doble del segundo sume 255. **Sol:** 9, 6.
- 16º** Descomponer el número 10 en dos números cuyo producto sea 24. **Sol:** 4, 6.
- 17º** Halla dos números naturales cuya suma es 12 y la suma de sus cuadrados 80. **Sol:** 4, 8.
- 18º** Descomponer el número 15 en dos partes, cuyos cuadrados difieran en 45. **Sol:** 6, 9.
- 19º** La suma de los cuadrados de dos números positivos es 117, y la diferencia de sus cuadrados es 45. ¿Cuáles son los números? **Sol:** 6, 9.
- 20º** Hallar un número de dos cifras en que la cifra de las unidades sea igual al cuadrado de la cifra de las decenas y la suma de las dos cifras sea 6. **Sol:** 24.
- 21º** La suma de dos números enteros positivos es 36. El producto del primero, aumentado en 3, por el segundo aumentado en 2, es 408. ¿Cuáles son dichos números? **Sol:** 21 y 15 y también 14 y 22.
- 22º** Para vallar una finca rectangular de 600 m^2 se han utilizado 100 m de cerca. Calcula las dimensiones de la finca. **Sol:** 30×20 .
- 23º** Calcular las dimensiones de un rectángulo de 30 cm de perímetro y 54 cm^2 de área. **Sol:** 6, 9.
- 24º** La suma de las áreas de dos cuadrados es 100 dm^2 , y su diferencia es 28 dm^2 . Hallar los lados de los cuadrados. **Sol:** 6 y 8.
- 25º** Un jardín de forma rectangular tiene 600 m^2 de superficie y su perímetro mide 100 m. ¿Cuáles son sus lados? **Sol:** 20, 30.
- 26º** El perímetro de un triángulo rectángulo es de 56 m y la hipotenusa 25 m. Hallar los lados. **Sol:** 7, 24.
- 27º** Un cuadrado tiene 44 m^2 más de área que otro, y éste dos metros menos de lado que el primero. Hallar los lados de los dos cuadrados. **Sol:** 12, 10.
- 28º** Calcular los tres lados de un triángulo rectángulo sabiendo que la suma de sus lados es 24 y que la suma de sus cuadrados es 200. **Sol:** 6, 8, 10.

- 29º** Un cuadrado tiene 13 m^2 más que otro y éste 1 m menos de lado que el primero. Halla los lados de los cuadrados. **Sol:** 6, 7.
- 30º** La hipotenusa de un triángulo rectángulo es 26 m, y la suma de los catetos es 34 m. Hallar los catetos. **Sol:** 10, 24.
- 31º** Uno de los lados de un rectángulo mide 2 cm más que el otro. ¿Cuáles son las dimensiones si su área es 15 cm^2 ? **Sol:** 3×5 .
- 32º** Una habitación de suelo rectangular tiene una superficie de 30 m^2 con un perímetro de 22 m. Halla las dimensiones de la habitación. **Sol:** 5×6 .
- 33º** Se tiene un lote de baldosas cuadradas. Si se forma con ellas un cuadrado de x baldosas por lado sobran 8, y si se toman $x + 1$ baldosas por lado faltan 13. Hallar las baldosas del lote. **Sol:** 108 baldosas.
- 34º** Un rectángulo tiene una longitud de 30 cm y una anchura de 15 cm. ¿Cuánto se debe añadir a la anchura y quitar a la longitud para que su área disminuya en 100 cm^2 y su perímetro no varíe? **Sol:** 5 cm.
- 35º** La edad de mi tía, hoy es el cuadrado de la de su hija; pero dentro de nueve años será solamente el triple. ¿Qué edad tiene cada una? **Sol:** la tía 36 y la hija 6.
- 36º** Hallar una fracción cuyo valor no cambia añadiendo 15 al numerador y 18 al denominador y que se triplica cuando se añade 55 al numerador y 6 al denominador. **Sol:** $20/24$.
- 37º** Al principio del curso la relación del número de alumnos de dos colegios era $7/10$. Habiéndose retirado 50 alumnos del primer curso y 80 del segundo curso al fin de curso la relación es $5/7$. ¿Cuál fue el número de alumnos matriculados en cada colegio? **Sol:** $350/750$.
- 38º** Hállense las dimensiones de un rectángulo sabiendo que si se añaden 8 m a la base y 5 a la altura la superficie aumenta 180 m^2 . Pero si se aumenta 3 m a la base y se quitan 4 m a la altura la superficie disminuye 30 m^2 . **Sol:** La base mide 12 m y la altura 10 m.

Ejercicios de inecuaciones:

1º Escribir en forma de intervalo las siguientes regiones:



Sol: a) $(-\infty, -3)$; b) $(1, \infty)$; c) $[4, \infty)$; d) $(-\infty, 1]$; e) $(-4, 8]$; f) $(-\infty, -6] \cup [0, 5]$;
g) $(-\infty, -2) \cup (6, \infty)$; h) $(-\infty, -8] \cup [0, 5]$; i) $[-6, -4] \cup (-1, 1] \cup (5, 8]$;
j) $(-8, -4] \cup (3, 7)$; k) $[-6, -3] \cup (-3, 1) \cup (1, 3]$;
l) $(-\infty, -9] \cup [-6, -3] \cup (-3, 0) \cup (0, 3] \cup (7, \infty)$.

2º Resolver las siguientes inecuaciones expresando mediante intervalos los resultados:

- | | | |
|-------------------------|--------------------------|-------------------------------|
| a) $3x < 15$ | b) $3x - 9 > 0$ | c) $4x - 20 < 0$ |
| d) $4x - 8 > 3x - 14$ | e) $3x + 6 > 2x + 12$ | f) $5x + 3 > 2x + 6$ |
| g) $10 - 3x < 4x - 4$ | h) $10x + 24 < 16x + 12$ | i) $-2x + 3 \geq -3x - 1$ |
| j) $5(x + 6) - 5 > -10$ | k) $2(5 - 7x) \geq 52$ | l) $3(2x - 1) + 1 < -13 - 5x$ |

Sol: a) $(-\infty, 5)$; b) $(3, \infty)$; c) $(-\infty, 5)$; d) $(-6, \infty)$; e) $(6, \infty)$; f) $(-3, \infty)$; g) $(2, \infty)$;
h) $(2, \infty)$; i) $[-4, \infty)$; j) $(-7, \infty)$; k) $(-\infty, -3]$; l) $(-\infty, -1)$.

3º Resolver las siguientes inecuaciones expresando los resultados mediante intervalos:

- | | |
|---|---|
| a) $\frac{x}{10} > 4x - \frac{78}{10}$ | b) $\frac{2x}{3} + \frac{5x-1}{2} < \frac{26}{3}$ |
| c) $\frac{3(4x-7)}{4} - \frac{x}{8} \geq \frac{3x}{8} - \frac{21}{4}$ | d) $\frac{3x+5}{6} - \frac{5-2x}{2} \leq \frac{x-12}{3}$ |
| e) $\frac{4-3x}{3} - \frac{2x-3}{4} > -\frac{65}{13}$ | f) $\frac{2}{3} - x + \frac{1}{6} - \frac{x}{3} \geq \frac{19-22x}{18}$ |

Sol: a) $(-\infty, 2)$; b) $(-\infty, 3)$; c) $[0, \infty)$; d) $(-\infty, -2]$; e) $(-\infty, -5)$; f) $(-\infty, -2]$.

4º Resolver las siguientes inecuaciones:

- | | | |
|---------------------------|------------------------|---------------------------|
| a) $x^2 - 7x + 10 > 0$ | b) $x^2 - 7x + 6 < 0$ | c) $x^2 - 7x + 12 \geq 0$ |
| d) $-2x^2 - 10x - 8 > 0$ | e) $x^2 - 6x + 9 > 0$ | f) $3x^2 + 5x - 2 \leq 0$ |
| g) $-8x \leq -x^2 - 15$ | h) $6x^2 > 12x$ | i) $-27x \leq -12x^2$ |
| j) $9x^2 - 6x + 1 \leq 0$ | k) $x^2 + 5x - 14 < 0$ | l) $(x-2)(x+1) \geq 18$ |
| m) $x^2 + 3x - 54 < 0$ | n) $x^2 + 3x - 40 > 0$ | ñ) $x^2 + 9x + 14 > 0$ |

Sol: a) $(-\infty, 2) \cup (5, \infty)$; b) $(1, 6)$; c) $(-\infty, 3] \cup [4, \infty)$; d) $(-4, -1)$; e) $\mathbb{R} - \{3\}$;
f) $[-2, 1/3]$; g) $[3, 5]$; h) $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$; i) $[0, 9/4]$; j) $\{1/3\}$; k) $(-7, 2)$;
l) $(-\infty, -4] \cup [5, \infty)$; m) $(-9, 6)$; n) $(-\infty, -8) \cup (5, \infty)$; ñ) $(-\infty, -7) \cup (-2, \infty)$.

5º Resolver las siguientes inecuaciones:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{x-2}{x+3} > 0 & \text{b)} \frac{x-3}{x+1} > 0 & \text{c)} \frac{x-3}{x+1} > 0 \\ \text{d)} \frac{2x-1}{x} > 0 & \text{e)} \frac{x^2+x}{x-2} > 0 & \text{f)} \frac{x^2-25}{x^2-7x+10} \leq 0 \\ \text{g)} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4x-5} \geq 0 & \text{h)} \frac{x^2-4x+3}{x^2+3x+2} \leq 0 & \text{i)} \frac{x^2-8x+7}{x^2-3x-10} < 0 \\ \text{j)} \frac{x^2-2x-8}{x^2-1} \geq 0 & \text{k)} \frac{x^2-3x-4}{x} > 0 & \text{l)} \frac{x^2-2x-3}{x^2-4} > 0 \\ \text{m)} \frac{x^2-4x-21}{x+10} \leq 0 & \text{n)} \frac{x^2+4x-77}{x+8} \geq 0 & \text{ñ)} \frac{x^2-4x-77}{x+5} \geq 0 \end{array}$$

Sol: a) $(-\infty, -3) \cup (2, \infty)$; b) $(-\infty, -1) \cup [3, \infty)$; c) $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$; d) $(0, -1]$; e) $(-1, 0) \cup (2, \infty)$; f) $[-5, 2]$; g) $(-\infty, -1) \cup [2, 3] \cup (5, \infty)$; h) $(-2, -1) \cup (1, 3)$; i) $(5, 7) \cup (-2, 1)$; j) $(-\infty, -2] \cup (-1, 1) \cup [4, \infty)$; k) $(-1, 0) \cup (4, \infty)$; l) $(-\infty, -2) \cup (-1, 2) \cup (3, \infty)$; m) $(-\infty, -10) \cup [-3, 7]$; n) $[-11, -8] \cup [7, \infty)$; ñ) $[-7, -5] \cup [11, \infty)$.

6º Resuelve, si se pudiese, los siguientes sistemas de inecuaciones:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 2x-4 > 0 \\ 3x+12 > 0 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x-5 > 0 \\ x+8 > 0 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 2-x > 0 \\ 1+x > 0 \end{cases} \\ \text{d)} \begin{cases} 2x+3 \geq 1 \\ -x+2 \geq -1 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} 2x+3 \geq 1 \\ -x+2 < -1 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 2x+3 < 1 \\ -x+6 < 3 \end{cases} \\ \text{g)} \begin{cases} 3x-2 < x \\ 6x-4 > 3-x \end{cases} & \text{h)} \begin{cases} x+3x \geq 4 \\ 2x+3 \leq 10-x \end{cases} & \text{i)} \begin{cases} 10x+2 \leq 3x+10 \\ 2(x+3) \geq x \end{cases} \\ \text{j)} \begin{cases} x+3 > 0 \\ x^2+x-2 < 0 \end{cases} & \text{k)} \begin{cases} x+1 \leq 0 \\ x^2+x > 0 \end{cases} & \text{l)} \begin{cases} x^2-4 \leq 0 \\ x^2-2x-3 \geq 0 \end{cases} \\ \text{m)} \begin{cases} \frac{x^2-4}{3-x} > 0 \\ 2(4x-3) \leq 9x-2 \end{cases} & \text{n)} \begin{cases} (x+1)^2 - x^2 + x + 2 > 0 \\ \frac{x}{x-2} > 0 \end{cases} & \text{ñ)} \begin{cases} x^2-2x-8 \leq 0 \\ \frac{x-1}{x+1} > 0 \end{cases} \end{array}$$

Sol: a) $(2, \infty)$; b) $(5, \infty)$; c) $(-1, 2)$; d) $[-1, 3]$; e) $(3, \infty)$; f) Sin solución; g) Sin solución; h) $[1, 7/3]$; i) $[-6, 8/7]$; j) $(-2, 1)$; k) $(-\infty, -1)$; l) $[-2, -1]$; m) $[-4, -2) \cup (2, 3)$; n) $(-1, 0) \cup (2, \infty)$; ñ) $[-2, -1) \cup (1, 4]$.

7º Resolver el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} -x^2 + x + 2 > 0 \\ x^2 + 4 \leq (x+2)^2 \\ 3x+5 < x+7 \end{cases}$$

Sol: $[0, 1)$.

8º Representa las siguientes regiones:

a) $x - y \leq 0$

b) $2x + 3y < 1$

c) $x + 2y \geq 2$

d) $6x - y \geq 3$

e) $3x - 2y \leq 2$

f) $x - 2y < 3$

g) $3x - y \geq 3$

h) $4x - 3y \leq -1$

i) $x - 3y > -2$

j) $2x + y \geq 4$

k) $-x - y \leq 2$

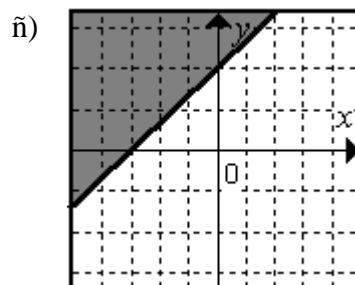
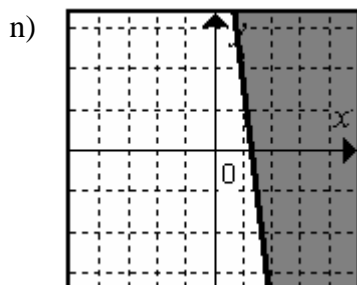
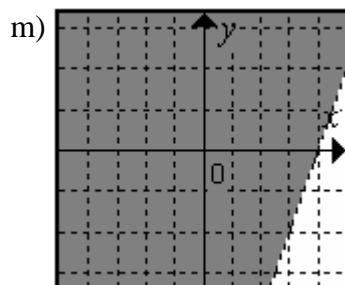
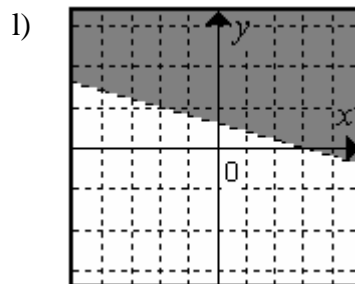
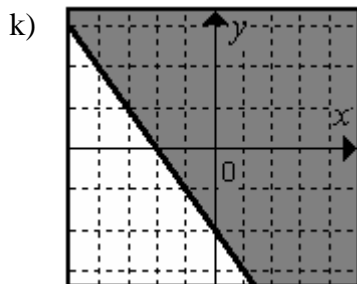
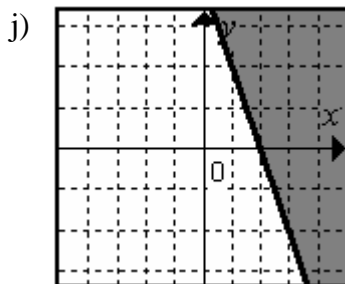
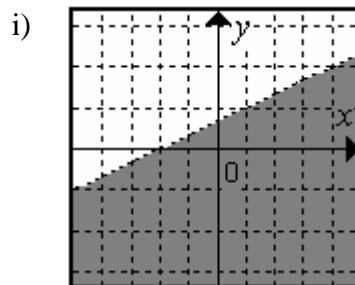
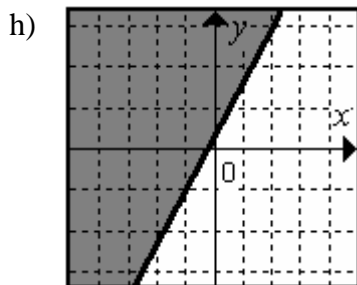
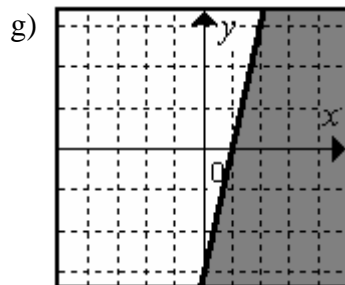
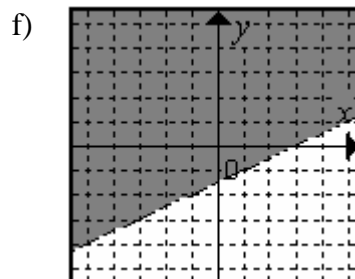
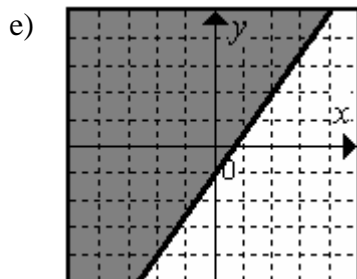
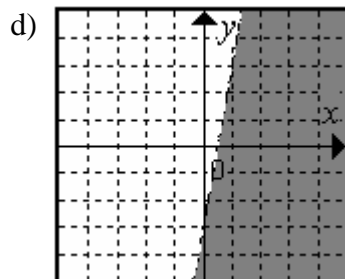
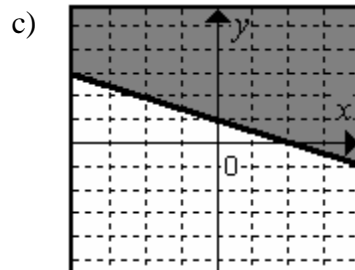
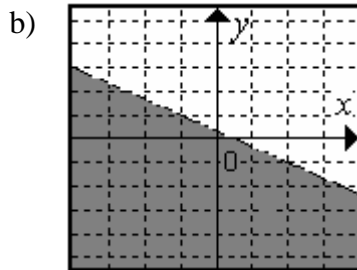
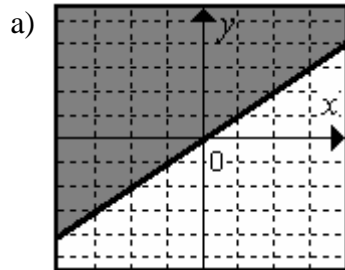
l) $x + 5y > 3$

m) $x - \frac{y}{2} < 4$

n) $3x + \frac{y}{2} \geq 4$

ñ) $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} \leq -1$

Sol:



9º Representa las siguientes regiones:

a) $\begin{cases} x + y \geq 1 \\ x - y \geq 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y \leq 2 \\ 2x - y \geq 4 \end{cases}$

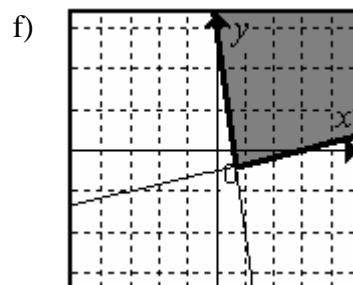
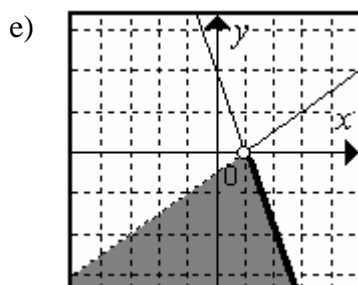
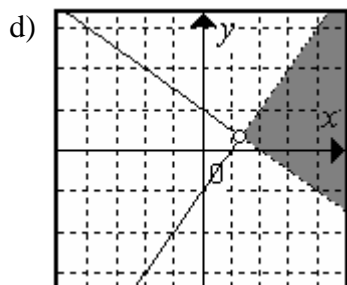
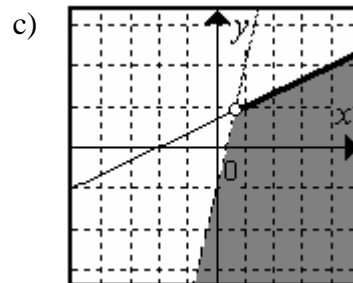
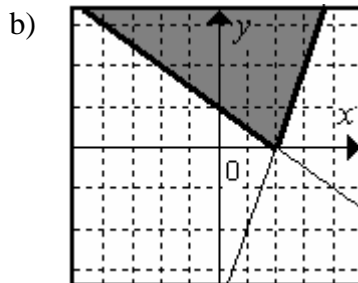
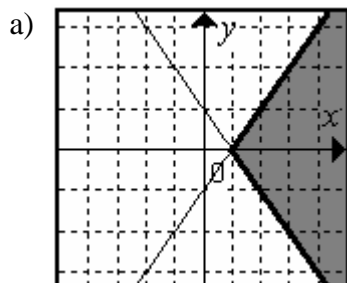
c) $\begin{cases} -x + 3y \leq 2 \\ 3x - y > 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y > 2 \\ x - y > 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + y \leq 2 \\ x - 2y > 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x - 6y \leq 3 \\ 5x + y \geq 3 \end{cases}$

Sol:



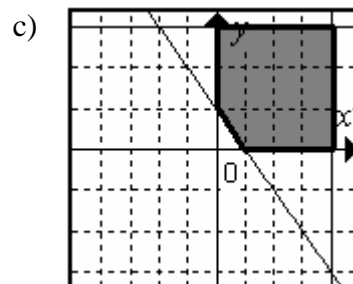
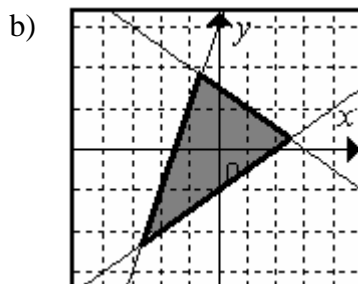
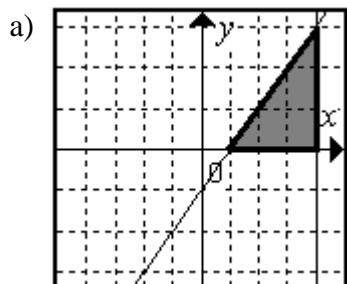
10º Representa las siguientes regiones:

a) $\begin{cases} x - y \geq 1 \\ y \geq 0 \\ x \leq 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y \leq 2 \\ x + 2y \leq 3 \\ y - 2x \leq 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y \geq 1 \\ y \leq 3 \\ x \geq 0 \\ x \leq 4 \end{cases}$

Sol:



Ejercicios de suma, resta, producto y división de polinomios.

1º Opera:

- | | | |
|---|--------------------------------------|--|
| a) $4x^2 - 3x^2 + x^2$ | b) $7x - 3x + 2x$ | c) $7x^3 - 3x^3 + 4x^3$ |
| d) $7x - 4x + 2x$ | e) $9x^5 - 3x^5 - 2x^5$ | f) $2x - 5x + 9x$ |
| g) $4x^3 - 5x^3 - 2x^3$ | h) $x^4 + 7x^4 - 6x^4$ | i) $2x^2 + x^4 - 5x^4$ |
| j) $3x^3 - 2x^3 - x^3$ | k) $-2x^2 + 5x^2 - 4x^2$ | l) $-x^2 - 2x^2 + 5x^2$ |
| m) $x^4 - \frac{2x^4}{3} + \frac{x^4}{2}$ | n) $2x - \frac{2x}{3} + \frac{x}{2}$ | ñ) $\frac{2x^3}{3} + x^3 - \frac{3x^3}{2}$ |

Sol: a) $2x^2$; b) $6x$; c) $8x^3$; d) $5x$; e) $4x^5$; f) $6x$; g) $-3x^3$; h) $2x^4$; i) $-2x^4$; j) 0 ; $-x^2$; m) $5x^4/6$; n) $11x/6$; ñ) $x^3/6$.

2º Reduce las siguientes expresiones:

- | | |
|---|---|
| a) $2x^2 - 4 + 3x - 3x^2$ | b) $3x - 4x^2 - 4 - 5x + 3x^2$ |
| c) $6x - 3x^3 - 4 - 4x^3 + 4x$ | d) $7 - 3(x^2 - 1) + 2(x - 3) - 4x + x^2$ |
| e) $2x^3 - 3x^3 - 2(x - x^3) + 4x - 2x^3$ | f) $3x^2 - 3 + 4x - 5 + 3x^2$ |

Sol: a) $-x^2 + 3x - 4$; b) $-x^2 - 2x - 4$; c) $-7x^3 + 10x - 4$; d) $-2x^2 - 2x + 4$; e) $-x^3 + 2x$; f) $6x^2 + 4x - 8$.

3º Halla el polinomio que sumado a $P(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x$ da como resultado:

- | | | | |
|--------------------------|----------------------|---------------|---------------------------|
| a) $2x^3 - 3x^2 - x + 2$ | b) $3x^3 - 3x^2 + 1$ | c) $4x^3 + 1$ | d) $2x^3 - 3x^2 + 5x - 2$ |
|--------------------------|----------------------|---------------|---------------------------|

Sol: a) $-2x^3 - 3x + 2$; b) $-2x^3 - 3x + 2$; c) $-x^3 - 2x + 1$; d) $-2x^3 + 3x - 2$.

4º Efectúa y reduce:

- | | | |
|-----------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|
| a) $(x^2 - 3x + 1) \cdot (x + 2)$ | b) $(2x^3 - 3x^2 + 2)(2x - 1)$ | c) $(x^2 + x - 2)(x^2 + 1)$ |
|-----------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|

Sol: a) $x^3 - x^2 - 5x + 2$; b) $4x^4 - 8x^3 + 3x^2 + 4x - 2$; c) $x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$.

5º Efectúa y reduce:

- | | | |
|-----------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| a) $2x^2 \cdot 3x - 2x \cdot x^2$ | b) $3x - 2(7x - 5)$ | c) $x^2(3x - 2) + 3x^3$ |
| d) $7x^2 - 3x(-2x) + 5x^2$ | e) $4x(x - 2) - 3x(x - 1)$ | f) $6x(-3x^2) - 5x^2(-2x)$ |

Sol: a) $4x^3$; b) $-11x + 10$; c) $6x^3 - 2x^2$; d) $18x^2$; e) $x^2 - 5x$; f) $-8x^3$.

6º Opera y reduce las siguientes expresiones:

- | | |
|---|------------------------------------|
| a) $2x^2 - 3x(2x^2 - 3x) + 2(x^2 - 2x)$ | b) $3x(3 - x) + 4(x^2 - 3x)$ |
| c) $x^2 - 3x(-5x) - x(x - 3x)$ | d) $(x^2 - 3x + 2) \cdot (3x - 2)$ |
| e) $(x - 3)(x^2 - 3x + 1)$ | f) $(x - 3) \cdot (-2x + 3)$ |

Sol: a) $-6x^3 + 13x^2 - 4x$; b) $x^2 - 3x$; c) $18x^2$; d) $3x^3 - 11x^2 + 12x - 4$; e) $x^3 - 6x^2 + 10x - 3$; f) $-2x^2 + 9x - 9$.

7º Sean los polinomios:

$$P(x) = 4x^3 - 3x^2 + 1$$

$$Q(x) = 3x^2 - 3x + 2$$

Calcular:

- | | | | |
|------------------|----------------------------------|------------------|----------------------|
| a) $P(x) - Q(x)$ | b) $3 \cdot P(x) + 2 \cdot Q(x)$ | c) $P(x) + Q(x)$ | d) $P(x) \cdot Q(x)$ |
|------------------|----------------------------------|------------------|----------------------|

Sol: a) $P - Q = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 1$; b) $3P + 2Q = 12x^3 - 3x^2 - 6x + 7$;

c) $P + Q = 4x^3 - 3x + 3$; d) $P \cdot Q = 12x^5 - 21x^4 + 17x^3 - 3x^2 - 3x + 2$.

8º Sean los polinomios:

$$P(x) = x^3 - x^2 - 3x + 1$$

$$Q(x) = 2x^2 - 2x + 1$$

$$R(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x - 1$$

Calcular:

a) $P(x) + Q(x)$

b) $P(x) - Q(x)$

c) $P(x) + Q(x) + R(x)$

d) $P(x) - Q(x) + R(x)$

e) $2 \cdot P(x) - 3 \cdot Q(x)$

f) $P(x) \cdot Q(x) - R(x)$

g) $Q(x) \cdot (2 \cdot P(x) - R(x))$

h) $P(x) + Q(x) - R(x)$

i) $Q(x) \cdot P(x) \cdot R(x)$

Sol: a) $x^3 + x^2 - 5x + 2$; b) $x^3 - 3x^2 - x$; c) $3x^3 - 5x^2 + x + 1$; d) $3x^3 - 9x^2 + 5x - 1$;
e) $2x^3 - 8x^2 - 1$; f) $2x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 13x^2 - 11x + 2$; g) $8x^4 - 32x^3 + 34x^2 - 18x + 3$;
h) $-x^3 + 7x^2 - 11x + 3$; i) $4x^8 - 20x^7 + 30x^6 + 6x^5 - 66x^4 + 77x^3 - 43x^2 + 11x - 1$.

9º Haz las divisiones siguientes, calculando su cociente y su resto:

a) $(x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2) : (x^2 - x)$

b) $(x^5 - 4x^3 + 4x^2 + 4x - 3) : (x^2 - 2)$

c) $(x^5 + 3x^4 - 2x^2 + 5x + 2) : (x^3 - x + 1)$

d) $(x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 3x + 2) : (x^2 - 1)$

e) $(x^6 - 4x^4 + x^3 + 3x^2 + x) : (x^3 - x)$

f) $(x^4 + 2x^2 - 5) : (x^2 + 3)$

Sol: a) cociente: $x^2 - 3x + 1$, resto: $x + 2$; b) cociente: $x^3 - 2x + 4$, resto: 5;
c) cociente: $x^2 + 3x + 1$, resto: $3x + 1$; d) cociente: $x^2 + 3x - 2$, resto: 0;
e) cociente: $x^3 - 3x + 1$, resto: $2x$; f) cociente: $x^2 - 1$, resto: -2.

10º En una división de polinomios, el divisor es $2x^2 - 3$, el cociente $x + 3$ y el resto $x - 1$. ¿Cuál es el dividendo? **Sol:** $x^3 + 6x^2 - 2x - 10$.

11º Calcula el cociente y el resto en las divisiones siguientes mediante el método de Ruffini:

a) $(x^5 - 2x^4 - 3x^2 + 7x + 1) : (x - 2)$

b) $(x^4 - x^3 - 2x^2 + x - 1) : (x + 1)$

c) $(2x^3 - 3x^2 + 4x - 3) : (x - 1)$

d) $(x^4 + 3x^3 - x^2 - x + 3) : (x + 3)$

e) $(-x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 2x + 7) : (x - 3)$

f) $(x^5 + x^4 - 2x^3 + 4x - 3) : (x + 2)$

Sol: a) cociente: $x^4 - 3x + 1$, resto: 3; b) cociente: $x^3 - 2x^2 + 1$, resto: -2;
c) cociente: $2x^2 - x + 3$, resto: 0; d) cociente: $x^3 - x + 2$, resto: -3;
e) cociente: $-x^3 + x^2 - 2$, resto: 1; f) cociente: $x^4 - x^3 + 4$, resto: -11.

12º Halla el resto de la división utilizando el teorema del resto:

a) $(x^5 - 2x^3 + x^2 - 1) : (x - 2)$

b) $(x^3 - 3x + 2) : (x - 1)$

c) $(2x^4 - 3x^2 + x - 1) : (x + 1)$

d) $(-x^4 - 3x^3 - 3) : (x + 2)$

e) $(x^3 - 2x^2 + x + 3) : (x - 1)$

f) $(2x^4 - 3x^2 - x + 1) : (x - 3)$

g) $(x^4 - 3x^3 + 2x) : (x - 2)$

h) $(3x^4 - 2x^3 + 3) : (x + 1)$

Sol: a) 19; b) 0; c) -3; d) 5; e) 3; f) 133; g) -4; h) 8.

13º Halla "a" para que la siguiente división sea exacta:

$$(x^5 - 3x^3 + ax^2 - 4) : (x - 2)$$

Sol: $a = -1$.

14º Halla "a" para que la siguiente división tenga de resto 2:

$$(x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 5x^3 + 4x^2 + ax + 2) : (x - 1)$$

Sol: $a = -1$.

15º Calcula el valor de k para que la división:

$$(2x^4 - 6x^3 + kx^2 - 11) : (x + 1)$$

sea exacta. **Sol:** $k = 3$.

16º Halla el valor que debe tener m para que el resto de la división

$$(2x^3 + xm^2 + x - 4) : (x - 2)$$

sea igual a 6. **Sol:** $m = -2$.

17º Calcula m para que el polinomio:

$$P(x) = 2x^3 + mx^2 + 5x + 2$$

sea divisible por $(x + 1)$. **Sol:** $m = 5$.

Ecuaciones polinómicas con raíces enteras.

Teorema fundamental del Álgebra:

Todo polinomio de grado n , con coeficientes reales o complejos, tiene exactamente n raíces, no forzosamente distintas, es decir contadas con su orden de multiplicidad.

Factorización de un polinomio:

Consiste en expresar el polinomio como un producto de binomios:

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} \dots + a_2 x + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_1)^{n_1} \cdot (x - x_2)^{n_2} \dots (x - x_r)^{n_r}$$

Con

$$n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$$

Donde x_1, x_2, \dots, x_r son las raíces mencionadas por el teorema fundamental del álgebra.

Formulas de Cardano-Vieta:

Son unas expresiones que nos permiten relacionar los coeficientes de un polinomio con sus raíces.

Formulas de Cardano-Vieta para grado 2:

$$p(z) = a_2 \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$\frac{a_1}{a_2} = -(x_1 + x_2)$$

$$\frac{a_0}{a_2} = x_1 \cdot x_2$$

Formulas de Cardano-Vieta para grado 3:

$$p(z) = a_3 \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$\frac{a_2}{a_3} = -(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$\frac{a_1}{a_3} = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3$$

$$\frac{a_0}{a_3} = -x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

Formulas de Cardano-Vieta para grado 4:

$$p(z) = a_4 \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_4) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$\frac{a_3}{a_4} = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

$$\frac{a_2}{a_4} = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_4$$

$$\frac{a_1}{a_4} = -(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4)$$

$$\frac{a_0}{a_4} = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$$

Ejercicios:

1º Determina las raíces de las siguientes ecuaciones:

- a) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ b) $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ c) $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$
 d) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ e) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$ f) $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0$
 g) $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$ h) $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$ i) $x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$
 j) $2x^3 + 4x^2 - 10x - 12 = 0$ k) $2x^3 - x^2 - 25x - 12 = 0$ l) $3x^3 + 6x^2 - 45x - 108 = 0$

Sol: a) $x = \pm 1, x = 2$; b) $x = \pm 1, x = 3$; c) $x = 1$ (doble), $x = 3$; d) $x = 1$ (doble), $x = 2$;
 e) $x = 1, x = 2$ (doble); f) $x = -2, x = 2$ (doble); g) $x = 2, x = -2$ (doble);
 h) $x = -1, x = -2$ (doble); i) $x = 2, x = -1, x = -4$; j) $x = 2, x = -1, x = -3$;
 k) $x = 4, x = -3, x = -1/2$; l) $x = 4, x = -3$ (doble).

2º Determina las raíces de las siguientes ecuaciones:

- a) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ b) $x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 = 0$
 c) $x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4 = 0$ d) $x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4 = 0$
 e) $x^4 + 9x^3 + 30x^2 + 44x + 24 = 0$ f) $x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 20x - 24 = 0$
 g) $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$ h) $x^4 - x^3 - 11x^2 + 5x + 30 = 0$
 i) $2x^4 + 3x^3 - x = 0$ j) $3x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 8x + 4 = 0$
 k) $7x^4 - 28x^3 + 21x^2 + 28x - 28 = 0$ l) $2x^4 - 13x^3 + 27x^2 - 23x + 7 = 0$

Sol: a) $x = 1$ (doble), $x = -1$ (doble); b) $x = -2, x = -1, x = 1$ (doble);
 c) $x = 2$ (doble), $x = \pm 1$; d) $x = -1$ (doble), $x = -2$ (doble); e) $x = -3, x = -2$ (triple);
 f) $x = -2$ (doble), $x = 2, x = -3$; g) $x = \pm 1, x = -3, x = 2$; h) $x = 3, x = -2, x = \pm\sqrt{5}$;
 i) $x = -1$ (doble), $x = 1/2, x = 0$; j) $x = 1, x = -1/3, x = \pm 2$;
 k) $x = 1$ (doble), $x = 2$ (doble); l) $x = 1$ (triple), $x = 7/2$.

3º Factorice los siguientes polinomios:

- a) $P(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x$ b) $P(x) = 3x^3 + 3x^2 - 18x$
 c) $P(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 24$ d) $P(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$
 e) $P(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 3x^2$ f) $P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 12x$
 g) $P(x) = 3x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 6x + 3$ h) $P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$
 i) $P(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4$ j) $P(x) = 4x^4 - 6x^3 + 2x^2$

Sol: a) $(x-1)^2 \cdot (x+1) \cdot x$; b) $(x+3) \cdot (x-2) \cdot 3x$; c) $(x-1) \cdot (x+4) \cdot (x-2) \cdot (x-3)$;
 d) $(x^2+1) \cdot (x-2) \cdot (x-1)$; e) $x^2 \cdot (x-1)^2 \cdot (x-3)$; f) $(x+2) \cdot (x-3) \cdot 2x$;
 g) $3 \cdot (x+1)^2 \cdot (x^2+1)$; h) $(x-2) \cdot (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x+3)$; i) $(x+1) \cdot (x+2) \cdot (x^2+2)$;
 j) $2x^2 \cdot (x-1) \cdot (2x-1)$.

4º Factorice los siguientes polinomios:

- a) $P(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ b) $P(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 27$
 c) $P(x) = x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 36x - 27$ d) $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4$
 e) $P(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$ f) $P(x) = x^3 - 3x^2$
 g) $P(x) = x^3 - 7x^2 + 15x - 9$ h) $P(x) = x^3 - 13x + 12$
 i) $P(x) = x^3 - 2x^2 - 15x + 36$ j) $P(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$
 k) $P(x) = x^3 + 7x^2 + 16x + 12$ l) $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$
 m) $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ n) $P(x) = x^3 - x^2 - 2x$
 ñ) $P(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 9x$ o) $P(x) = x^3 + 5x^2 + 7x + 3$

p) $P(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$

q) $P(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$

Sol: a) $(x+1) \cdot (x-1) \cdot (x+3)$; b) $(x-3) \cdot (x+3)^2$; c) $(x+1)(x-3)(x+3)^2$; d) $(x-1)(x+2)^2$; e) $(x+2)(x-3)(x-1)^2$; f) $x^2(x-3)$; g) $(x-1)(x-3)^2$; h) $(x+4)(x-3)(x-1)$; i) $(x+4)(x-3)^2$; j) $(x-1)^2(x+3)^2$; k) $(x+3)(x+2)^2$; l) $(x-1)(x+2)(x+3)$; m) $(x+2)(x-3)(x-1)$; n) $x(x+1)(x-2)$; ñ) $x(x+1)(x-3)^2$; o) $(x+3)(x+1)^2$; p) $(x-1)(x+1)(x+3)$; q) $(x-1)(x+3)(x-3)$.

4º Halla el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo en cada caso:

a) $P(x) = x^2 + 2x + 1$ y $Q(x) = 3x + 3$ b) $P(x) = x^3 - 2x^2$ y $Q(x) = x^3 - 4x$

Sol: a) mcm: $3 \cdot (x+1)^2$; mcd: $(x+1)$; b) mcm: $x^2 \cdot (x-4) \cdot (x+4)$; mcd: $(x-2) \cdot x$.

5º Halla el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de:

$f(x) = x^2 - x$

$g(x) = x^2 - 1$

$h(x) = x^2 - 2x + 1$

Sol: mcm: $x \cdot (x-1)^2(x+1)$; mcd: $(x-1)$.

6º Halla el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de:

$f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ $g(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 27$ $h(x) = x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 36x - 27$

Sol: mcm: $(x+1) \cdot (x-1) \cdot (x-3) \cdot (x+3)^2$; mcd: $(x+3)$.

7º Halla el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de:

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

$g(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$

$h(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Sol: mcm: $(x-1)^2 \cdot (x+2)^2 \cdot (x-3)$; mcd: $(x-1) \cdot (x+2)$.

8º Halla el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de:

$f(x) = x^3 - 7x^2 + 15x - 9$

$g(x) = x^3 - 13x + 12$

$h(x) = x^3 - 2x^2 - 15x + 36$

Sol: mcm: $(x-3)^2 \cdot (x+4) \cdot (x-1)$; mcd: $(x-3)$.

9º Halla el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de:

$f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$

$g(x) = x^3 + 7x^2 + 16x + 12$

$h(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

Sol: mcm: $(x-1)^2 \cdot (x+3)^2 \cdot (x+2)^2$; mcd: $(x+3)$.

10º Halla el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de:

$f(x) = x^3 - 3x^2$

$g(x) = x^3 - x^2 - 2x$

$h(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 9x$

Sol: mcm: $x^2 \cdot (x-3)^2 \cdot (x+1) \cdot (x-2)$; mcd: x .

11º Halla el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de:

$f(x) = x^3 + 5x^2 + 7x + 3$

$g(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$

$h(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$

Sol: e) mcm: $(x-3) \cdot (x+3) \cdot (x+1)^2 \cdot (x-1)$; mcd: $(x+3)$.

12º Halla el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de:

$f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 24x + 36$

$g(x) = 4x^3 - 28x + 24$

$h(x) = 2x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 36x$

Sol: mcm: $12x \cdot (x+3)^2 \cdot (x-1) \cdot (x-2)^2$; mcd: $(x-2) \cdot (x+3)$.

Identidades notables.

1º Desarrolla los siguientes cuadrados notables:

- | | | | |
|---|------------------------------------|-------------------------------------|--|
| a) $(x+1)^2$ | b) $(x-4)^2$ | c) $(x-3)^2$ | d) $(x+3)^2$ |
| e) $(x-5)^2$ | f) $(3x-2)^2$ | g) $(2x-3)^2$ | h) $(3+2x)^2$ |
| i) $(4x-2)^2$ | j) $(3x-5)^2$ | k) $(3-4x)^2$ | l) $(2x-x^2)^2$ |
| m) $(3x+2)^2$ | n) $(2x-1)^2$ | ñ) $(x-y)^2$ | o) $(3-x^2)^2$ |
| p) $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)^2$ | q) $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^2$ | r) $\left(\frac{x}{2}+x^2\right)^2$ | s) $\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{4}y\right)^2$ |
| t) $\left(\frac{2x}{3}-3\right)^2$ | u) $\left(\frac{2}{3}+2x\right)^2$ | v) $\left(\frac{x}{2}-2\right)^2$ | w) $\left(\frac{2}{5}+3x\right)^2$ |

Sol: a) x^2+2x+1 ; b) $x^2-8x+16$; c) x^2-6x+9 ; d) x^2+6x+9 ; e) $x^2-10x+25$;
f) $9x^2-12x+4$; g) $4x^2-12x+9$; h) $9+12x+4x^2$; i) $16x^2-16x+4$;
j) $9x^2-30x+25$; k) $9-24x+16x^2$; l) $4x^2-4x^3+x^4$; m) $9x^2+12x+4$;
n) $4x^2-4x+1$; ñ) $x^2-2xy+y^2$; o) $9-6x^2+x^4$; p) $\frac{x^2}{4}+\frac{xy}{3}+\frac{y^2}{9}$; q) $4x^2-4+\frac{1}{x^2}$;
r) $\frac{x^2}{4}+x^3+x^4$; s) $\frac{x^2}{4}-\frac{3xy}{4}+\frac{9y^2}{16}$; t) $\frac{4x^2}{9}-4x+9$; u) $\frac{4}{9}+\frac{8x}{3}+4x^2$;
v) $\frac{x^2}{4}-2x+4$; w) $\frac{4}{25}+\frac{12x}{5}+9x^2$.

2º Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia:

- | | | | |
|-------------------------|---------------------------|-----------------------------------|--------------------------------------|
| a) x^2-6x+9 | b) x^2-4x+4 | c) $4x^2-12x+9$ | d) $x^2+8x+16$ |
| e) $x^2+10x+25$ | f) $x^2+12x+36$ | g) $9x^2-12x+4$ | h) $4x^2+8x+4$ |
| i) $\frac{x^2}{4}+3x+9$ | k) $\frac{1}{x^2}-4+4x^2$ | l) $x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}$ | m) $\frac{9x^2}{25}-2x+\frac{25}{9}$ |

Sol: a) $(x-3)^2$; b) $(x-2)^2$; c) $(2x-3)^2$; d) $(x+4)^2$; e) $(x+5)^2$; f) $(x+6)^2$; g) $(3x-2)^2$;
h) $(2x-2)^2$; i) $\left(\frac{x}{2}+3\right)^2$; k) $\left(\frac{1}{x}-2x\right)^2$; l) $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$; m) $\left(\frac{3x}{5}+\frac{5}{3}\right)^2$.

3º Desarrolla los siguientes productos notables:

- | | | | |
|--|--|--|--------------------------|
| a) $(2+x)\cdot(2-x)$ | b) $(x+3)\cdot(x-3)$ | c) $(x-a)\cdot(x+a)$ | d) $(3-2x)\cdot(3+2x)$ |
| e) $(2x-5)\cdot(2x+5)$ | f) $(a-3b)\cdot(a+3b)$ | g) $(x^2+1)\cdot(x^2-1)$ | h) $(x^3-x)\cdot(x^3+x)$ |
| i) $\left(\frac{1}{2}-x^2\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+x^2\right)$ | j) $\left(2-\frac{1}{x}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{x}\right)$ | k) $\left(\frac{1}{2}-x^2\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+x^2\right)$ | |
| l) $\left(2x+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(2x-\frac{1}{3}\right)$ | m) $\left(\frac{a}{3}+b\right)\cdot\left(\frac{a}{3}-b\right)$ | n) $\left(\frac{x}{2}-3\right)\cdot\left(\frac{x}{2}+3\right)$ | |

Sol: a) $4-x^2$; b) x^2-9 ; c) x^2-a^2 ; d) $9-4x^2$; e) $4x-25$; f) a^2-9b^2 ; g) x^4-1 ;
h) x^6-x^2 ; i) $\frac{1}{4}-x^4$; j) $4-\frac{1}{x^2}$; k) $\frac{1}{4}-x^4$; l) $4x^2-\frac{1}{9}$; m) $\frac{a^2}{9}-b^2$; n) $\frac{x^2}{4}-9$.

4º Expresa como el producto notable de suma por diferencia:

- a) $x^2 - y^2$ b) $4x^2 - 9y^2$ c) $x^2 - 25$ d) $9x^2 - 4$
e) $25x^2 - 16$ f) $49 - 4x^2$ g) $x^4 - 9$ h) $4x^2 - 16$

Sol: a) $(x - y) \cdot (x + y)$; b) $(2x - 3y)(2x + 3y)$; c) $(x - 5) \cdot (x + 5)$; d) $(3x - 2) \cdot (3x + 2)$;

e) $(5x - 4) \cdot (5x + 4)$; f) $(7 - 2x) \cdot (7 + 2x)$; g) $(x^2 + 3)(x^2 - 3)$; h) $(2x^2 - 4)(2x^2 + 4)$.

Ejercicios algebraicos de simplificaciones en fracciones.

1º Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{48a}{72ab}$	b) $\frac{25a^2b}{75ab^2}$	c) $\frac{96m^3n^2}{32m^4n^3}$	d) $\frac{15a^3b^2}{5ab^4}$
e) $\frac{121a^4c^5d^7}{11ac^5d^8}$	f) $\frac{7mn^4p^6}{21m^2np^7}$	g) $\frac{12a^4b^2c}{3a^3bc}$	h) $\frac{10a^2bc}{-5ab}$
i) $\frac{-15a^2bc^2d^3}{5abc^2d^3}$	j) $\frac{-12a^2x}{-28ax^2}$	k) $\frac{10ab^2x^4y^2}{15b^3x^2y^3z}$	l) $\frac{-20abc^3}{2ab^2}$
m) $\frac{-18a^3bc^2x}{-36a^4b^2x}$	n) $\frac{3a^2b}{18a^3b^2}$	ñ) $\frac{-12acx^2}{26a^2c^2x}$	o) $\frac{38m^3n^4r^2}{57m^4n^4r}$

Sol:

a) $\frac{2}{3b}$	b) $\frac{a}{3b}$	c) $\frac{3}{mn}$	d) $\frac{3a^2}{b^2}$	e) $\frac{11a^3}{d}$	f) $\frac{n^3}{3mp}$	g) $4ab$	h) $-2ac$
i) $-\frac{3a}{d}$	j) $\frac{3a}{7x}$	k) $\frac{2ax^2}{5byz}$	l) $-\frac{10c^3}{b}$	m) $\frac{c^2}{2ab}$	n) $\frac{1}{6ab}$	ñ) $-\frac{6x}{13ac}$	o) $\frac{r}{3m}$

2º Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{b+b^2}{a+ab}$	b) $\frac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}$	c) $\frac{x^2-x}{xy-x}$	d) $\frac{x^3-1}{x-1}$
e) $\frac{x^2y-xy}{x^2-1}$	f) $\frac{x^2-9y^2}{ax+3ay}$	g) $\frac{ax+by}{ax^2+bxy}$	h) $\frac{ax^2-a^3}{bx^2-a^2b}$
i) $\frac{4a^2b^3-8a^3b^3}{12a^2b^4+4a^4b^4}$	j) $\frac{35xz-45yz}{7x-9y}$	k) $\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}$	l) $\frac{2a^2+4ab}{3ab+6b^2}$
m) $\frac{8a-16b}{24}$	n) $\frac{42}{18a+24b}$	ñ) $\frac{14x+21y}{50x+75y}$	o) $\frac{27m-36n}{36m-48n}$
p) $\frac{a^2+2ab+b^2}{3a+3b}$	q) $\frac{m^2-n^2}{m^2+2mn+n^2}$	r) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$	s) $\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$
t) $\frac{6xy^2-6xz^2}{3xy-3xz}$	u) $\frac{(a+b)^2-4ab}{a-b}$	v) $\frac{(a-b)^2+4ab}{a+b}$	w) $\frac{2m^2-2n^2}{4m+4n}$

Sol:

a) $\frac{b}{a}$	b) $\frac{a+b}{a-b}$	c) $\frac{x-1}{y-1}$	d) x^2+x+1	e) $\frac{xy}{x+1}$
f) $\frac{x-3y}{a}$	g) $\frac{1}{x}$	h) $\frac{a}{b}$	i) $\frac{1-2a}{3b+a^2b}$	j) $5z$
k) $\frac{a-b}{a+b}$	l) $\frac{2a}{3b}$	m) $\frac{a-2b}{3}$	n) $\frac{7}{3a+4b}$	ñ) $\frac{7}{25}$
o) $\frac{3}{4}$	p) $\frac{a+b}{3}$	q) $\frac{m-n}{m+n}$	r) $\frac{x-3}{x}$	s) $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$
t) $2(y+z)$	u) $a-b$	v) $a+b$	w) $\frac{m-n}{2}$	

3º Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

- | | | |
|---|--|--|
| a) $\frac{12x^2y - 18xy^2}{10ax^3y^2 - 15ax^2y^3}$ | b) $\frac{uv - 3u + 2v - 6}{uv - 5v - 3u + 15}$ | c) $\frac{xy - 4y - 5x + 20}{xy - 24 + 6x - 4y}$ |
| d) $\frac{xw + xz - wy - yz}{wx + wy + zx + yz}$ | e) $\frac{-bd + ac + bc - ad}{ac + bd - ad - bc}$ | f) $\frac{km + 7m + kn + 7n}{kn - 4m - 4n + km}$ |
| g) $\frac{2p - qr - 2q + pr}{pr + 6p - qr - 6q}$ | h) $\frac{uw - 4u + 3vw - 12v}{uw - 4u - 5vw + 20v}$ | i) $\frac{6xz + 14y + 7xy + 12z}{7xy + 6xz - 7y - 6z}$ |
| j) $\frac{2ac - ad + 10bc - 5bd}{2ac + ad + 10bc + 5bd}$ | k) $\frac{3jm + 21jn - 2km - 14kn}{3jm - 18jn - 2km + 12kn}$ | l) $\frac{xz + wx - yz - wy}{4x^2 - 4y^2}$ |
| m) $\frac{ac - bd - ad + bc}{2a^2 + 4ab + 2b^2}$ | n) $\frac{3p^2 - 6pq + 3q^2}{pr - p - qr + q}$ | ñ) $\frac{c^2 + 6c + 8}{c^2 + 7c + 10}$ |
| o) $\frac{d^2 - 8d + 15}{d^2 - 2d - 15}$ | p) $\frac{x^2 + xy - xz - yz}{x^2 + xy + xz + yz}$ | q) $\frac{mp - mq + np - nq}{5p^2 - 5q^2}$ |
| r) $\frac{(x^2 - 1)(x^2 - 2x + 1)}{x(x^2 - 1) - (x^2 - 1)}$ | s) $\frac{5a^2c + 10abc + 5b^2c}{15ac + 15bc}$ | t) $\frac{8p^2 - 16pq + 8q^2}{8p^2 - 8q^2}$ |
| u) $\frac{u^4 - v^4}{u^2 - v^2}$ | v) $\frac{a^2x - 2ax + x}{2a^3 - 6a^2 + 6a - 2}$ | w) $\frac{(m + n)^3 - 4mn(m + n)}{m^2 - n^2}$ |

Sol:

- | | | | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|--------------------------|----------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| a) $\frac{6}{5axy}$ | b) $\frac{u + 2}{u - 5}$ | c) $\frac{y - 5}{y + 6}$ | d) $\frac{x - y}{x + y}$ | e) $\frac{a + b}{a - b}$ | f) $\frac{k + 7}{k - 4}$ |
| g) $\frac{2 + r}{r + 6}$ | h) $\frac{u + 3v}{u - 5v}$ | i) $\frac{x + 2}{x - 1}$ | j) $\frac{2c - d}{2c + d}$ | k) $\frac{m + 7n}{m - 6n}$ | l) $\frac{z + w}{4(x + y)}$ |
| m) $\frac{c - d}{2(a + b)}$ | n) $\frac{3(p - q)}{r - 1}$ | ñ) $\frac{c + 4}{c + 5}$ | o) $\frac{d - 3}{d + 3}$ | p) $\frac{x - z}{x + z}$ | q) $\frac{m + n}{5(p + q)}$ |
| r) $x - 1$ | s) $\frac{a + b}{2}$ | t) $\frac{p - q}{p + q}$ | u) $u^2 + v^2$ | v) $\frac{x}{2(a - 1)}$ | w) $m - n$ |

4º Opera y simplifica:

- | | | | |
|---|--|---|---|
| a) $\frac{b}{3a} \cdot \frac{6a}{5b^2}$ | b) $\frac{3x^2y}{4ab^2} \cdot \frac{4ab}{3xy}$ | c) $\frac{10a^2b^3c}{4a^2} \cdot \frac{2a^3b}{a^2b^2d}$ | d) $\frac{2xy^4}{3a^3b} \cdot \frac{5x^3y}{7ab^4}$ |
| e) $\frac{3z}{2x} \cdot \frac{17z}{19x^3}$ | f) $\frac{-x^3y^4}{x^4y^5} \cdot \frac{x^7y^8}{-x^{15}y^3}$ | g) $\frac{14a^3b}{15xy^3} \cdot \frac{5xy^2}{7a^2b}$ | h) $\frac{(4xy^2)^4}{16(2x^2y^4)^2} \cdot \frac{xy}{4}$ |
| i) $\left(\frac{x^4y}{x^3y^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{x^3y}{yx^2}\right)^{-2}$ | j) $\frac{x^2y^3}{(a^3b^4)^5} \cdot \frac{(a^2b^3)^4}{(x^2y)^5}$ | k) $\frac{(x^3y)^2}{(xy^{10})^3} \cdot \frac{y^{20}x}{y^{-7}x^3}$ | l) $\frac{(xyz^2)^3}{(x^2yz)^{-2}} \cdot \frac{xyz^{-1}}{(x^3y^2)^2}$ |

Sol:

- | | | | | | |
|-------------------|------------------|-----------------------|--------------------------------|--------------------------|----------------------|
| a) $\frac{2}{5b}$ | b) $\frac{x}{b}$ | c) $\frac{5ab^2c}{d}$ | d) $\frac{10x^4y^5}{21a^4b^5}$ | e) $\frac{51z^2}{38x^4}$ | f) $\frac{y^4}{x^9}$ |
| g) $\frac{a}{y}$ | h) $\frac{x}{y}$ | i) $\frac{1}{y^2}$ | j) $\frac{1}{x^8y^2a^7b^8}$ | k) $\frac{1}{xy}$ | l) $x^2y^2z^7$ |

5º Opera y simplifica:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{6ab}{3c-d} \left(\frac{c+d}{4} - \frac{d}{3} \right) & \text{b)} \frac{i^2+9i+18}{i^2+8i+15} \cdot \frac{i^2+7i+10}{i^2+11i+18} & \text{c)} \frac{t^2-10t+16}{t^2-9t+14} \cdot \frac{t^2-10t+21}{t^2+2t-15} \\ \text{d)} \frac{n^2+n-2}{n^2-2n-8} \cdot \frac{n-4}{n-1} & \text{e)} \frac{l^2-4l-45}{l^2-5l-36} \cdot \frac{l^2-16}{l^2+10l+25} & \text{f)} \frac{6x+5}{3x+3} \cdot \frac{x+1}{6x^2-7x-10} \\ \text{g)} \frac{a^2-x^2}{a+x} \cdot \frac{a^2+x^2}{a-x} & \text{h)} \frac{a-1}{2a+1} \cdot \frac{1-4a^2}{ab-b} & \text{i)} \frac{a^2-b^2}{3c-3d} \cdot \frac{c-d}{a+b} \\ \text{j)} \frac{a^2-4}{a+3} \cdot \frac{a^2-9}{a+2} \cdot \frac{a}{a-3} & \text{k)} \frac{(ax+b)^2}{ax-b} \cdot \frac{3(a^2x^2-b^2)}{(ax+b)^3} & \end{array}$$

Sol:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \frac{ab}{2} & \text{b)} \frac{i+6}{i+9} & \text{c)} \frac{t-8}{t+5} & \text{d)} 1 \\ \text{e)} \frac{l-4}{l+5} & \text{f)} \frac{1}{3(x-2)} & & \\ \text{g)} a^2+x^2 & \text{h)} 1-2a & \text{i)} \frac{a+b}{3} & \text{j)} a^2-2a \\ \text{k)} 3 & & & \end{array}$$

6º Opera y simplifica:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{3x}{4y} : \frac{2x}{5y^2} & \text{b)} 5ab : \frac{5a^2b}{2c} & \text{c)} \frac{2xy^2}{7ab} : 4x^2y^2 \\ \text{d)} \frac{35a^2}{18b^3} : \frac{14ab^2}{9b^3} & \text{e)} \frac{3x^2y^2}{5ab^2} : \frac{6x^2y}{15a^2b^2} & \text{f)} \frac{a^5b^8c^7}{a^4b^6c^{10}} : \frac{a^6b^8c^9}{a^3b^2c^5} \\ \text{g)} \frac{a}{b-c} : \frac{a}{b} & \text{h)} (a+b) : \frac{a+b}{a-b} & \text{i)} \frac{1}{a+b} : \frac{1}{a^2-b^2} \\ \text{j)} \frac{a+b}{a-b} : \frac{a^2-b^2}{a+b} & \text{k)} \frac{x^3-x}{3x-6} : \frac{5x+5}{2x-4} & \text{l)} \frac{6x^2+9xy}{a^3} : \frac{12x^3+18x^2y}{a} \end{array}$$

Sol:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \frac{15y}{8} & \text{b)} \frac{2c}{a} & \text{c)} \frac{1}{14abx} & \text{d)} \frac{5a}{4b^2} \\ \text{e)} \frac{3ay}{2} & \text{f)} \frac{1}{a^2b^4c^7} & & \\ \text{g)} \frac{b}{b-c} & \text{h)} a-b & \text{i)} a-b & \text{j)} \frac{a+b}{(a-b)^2} \\ \text{k)} \frac{2x(x-1)}{15} & \text{l)} \frac{1}{2xa^2} & & \end{array}$$

7º Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{x^2+8x+7}{x^2+9x+14} & \text{b)} \frac{x^2-x-6}{x^2-2x-3} & \text{c)} \frac{x^2-1}{x^2+8x+7} \\ \text{d)} \frac{x^2+2x+1}{x^3+3x^2+3x+1} & \text{e)} \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6} & \text{f)} \frac{x^3+3x^2-4x-12}{x^3+4x^2+x-6} \\ \text{g)} \frac{x^3-2x^2+x-2}{x^3-2x^2-x+2} & \text{h)} \frac{x^3-1}{x^3+2x^2+2x+1} & \text{i)} \frac{x^3-x^2+4x-4}{x^3-2x^2+4x-8} \\ \text{j)} \frac{x^3-6x^2+9x-4}{x^3-3x^2-6x+8} & \text{k)} \frac{2x^3-7x^2+7x-2}{4x^3-9x^2-x-6} & \text{l)} \frac{3x^3-11x^2+8x+4}{2x^3-3x^2-12x+20} \end{array}$$

Sol:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \frac{x+1}{x+2} & \text{b)} \frac{x+2}{x+1} & \text{c)} x-1 & \text{d)} \frac{1}{x+1} \\ \text{e)} \frac{x+1}{x+3} & \text{f)} \frac{x-2}{x-1} & & \\ \text{g)} \frac{x^2+1}{x^2-1} & \text{h)} \frac{x-1}{x-2} & \text{i)} \frac{x-1}{x-2} & \text{j)} \frac{x-1}{x+2} \\ \text{k)} \frac{2x-1}{4x+3} & \text{l)} \frac{3x+1}{2x+5} & & \end{array}$$

8º Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24}{x^4 + 8x^3 + 17x^2 - 2x - 24}$

b) $\frac{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1}{2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + x - 1}$

c) $\frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^4 + 3x^2 + x - 3x - 2}$

d) $\frac{x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36}{x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6}$

Sol:

a) $\frac{x+1}{x-1}$

b) $\frac{x-1}{2x+1}$

c) $\frac{x-1}{x+2}$

d) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 1}$

9º Opera y simplifica las siguientes expresiones algebraicas:

a) $\frac{9+6x+x^2}{4x^2-16} \cdot \frac{3x^2-x^3}{2x^2-8x+8}$

b) $\frac{1+2x+x^2}{2x^2+14x+20} \cdot \frac{4x^2-4x}{x^3-50+2x^2-25x}$

c) $\frac{2x-4}{x^3+x^2-6x} \cdot \frac{x-2}{x^2-9}$

d) $\frac{x^2-2x+1}{2x+2} \cdot \frac{x-1}{x^3-4x^2-7x+10}$

e) $\frac{x^2+x}{x^2-5x+6} \cdot \frac{x^3+6x^2+9x}{x^2+x}$

f) $\frac{a^2-1}{a-1} \cdot \frac{a^2+1}{a+1} \cdot \left(\frac{a^2+1}{a} - \frac{a^2-2a+1}{(a-1)^2} \right)$

g) $\frac{x^2-3x-10}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{6x-2x^2}$

h) $\frac{x^3-2x^2-4x+8}{3-x} \cdot \frac{x-5}{2x^2-4x}$

Sol: a) 1; b) 1; c) 1; d) 1; e) 1; f) 1; g) 1.

10º Demostrar que:

a) $\frac{a^2+4ac+3ab+3c^2+5bc+2b^2}{a^2+2ac+ab-3c^2-5bc-2b^2} = \frac{a+b+c}{a-b-c}$

b) $\frac{a^2+ac+2ab+ad+bc+b^2+bd}{a^2+2ac+ad+c^2+cd-b^2-bd} = \frac{a+b}{a-b+c}$

c) $\frac{a^4-a^2c^2-2a^2bc-2a^2b^2+b^2c^2+2b^3c+b^4}{a^3-a^2b-ab^2-2abc-ac^2+b^3+2b^2c+bc^2} = a+b$

d) $\frac{acx+abc-bxz-abz-cxy-acy+xyz+ayz}{xyz+cxy-bxz-bcx+ayz+acy-abz-abc} = \frac{z-c}{z+c}$

e) $\frac{x^4+a^2x^3+x^3-a^4x-a^2x-a^4}{x^4+bx^3+a^2x^3+a^2bx^2-a^2x^2-a^2bx-a^4x-a^4b} = \frac{x+1}{x+b}$

f) $\frac{bxz+abx+xz^2+axz-abz-a^2b-az^2-a^2z}{ab^2x+b^2xz+axz+xz^2-a^2b^2-ab^2c-a^2z-az^2} = \frac{z+b}{z+b^2}$

g) $\frac{2xz^2+bxz+axz+abx-a^2x+2z^2+bz+az+ab-a^2}{2xz^2-bxz+3axz-abx+a^2x+2z^2-bz+3az-ab+a^2} = \frac{2z+b-a}{2z-b+a}$

Ejercicios de introducción a los logaritmos:

1º Calcular los valores de los siguientes logaritmos sin usar la calculadora:

- a) $\log_2 8$ b) $\log_3 9$ c) $\log_4 2$ d) $\log_{27} 3$
e) $\log_5 0.2$ f) $\log_2 0.25$ g) $\log_{0.5} 16$ h) $\log_{0.1} 100$

Sol: a) 3; b) 2; c) 0.5; d) 1/3; e) -1; f) -2; g) -4; h) -2.

2º Opera sin usar la calculadora:

- a) $\log_3 27 + \log_3 1$ b) $\log_5 25 - \log_5 5$ c) $\log_4 64 + \log_8 64$
d) $\log 0.1 - \log 0.01$ e) $\log 5 + \log 20$ f) $\log 2 - \log 0.2$

Sol: a) 3; b) 1; c) 5; d) 1; e) 2; f) 1.

3º Opera sin usar la calculadora:

- a) $\frac{\log 32}{\log 2}$ b) $\frac{\log 3}{\log 81}$ c) $(\log_2 3) \cdot (\log_3 4)$ d) $\frac{\log_9 25}{\log_3 5}$

Sol: a) 5; b) 0.25; c) 2; d) 1.

4º Sabiendo que:

$$\log 2 = 0.301$$

$$\log 3 = 0.477$$

$$\log 7 = 0.845$$

Calcule sin usar la tecla log de la calculadora el valor de los siguientes logaritmos:

- a) $\log 8$ b) $\log 9$ c) $\log 5$ d) $\log 54$
e) $\log 75$ f) $\log 0.25$ g) $\log(1/6)$ h) $\log(1/36)$
i) $\log(1/98)$ j) $\log(2/3)$ k) $\log 0.3$ l) $\log 1.25$

Sol: a) 0.903; b) 0.954; c) 0.699; d) 1.732; e) 1.875; f) -0.602; g) -0.778; h) -1.556;
i) -1.991; j) -0.176; k) -0.523; l) 0.097.

5º Conocidos los valores de los logaritmos $\ln a = 0.6$ y $\ln b = 2.4$, calcule:

- a) $\ln \sqrt{a}$ b) $\ln \sqrt[4]{b}$ c) $\ln \sqrt{ab}$ d) $\ln \left(\sqrt[3]{\frac{ab}{e^2}} \right)$ e) $\ln \left(\frac{\sqrt{a^{-3}}}{\sqrt[3]{b^2}} \right)$

Sol: a) 0.3; b) 0.6; c) 1.5; d) 1/3; e) -2.5.

6º Halla:

- a) $\log_2 \left(\frac{\sqrt[3]{64 \cdot 2^3}}{2^4 \cdot \sqrt{128}} \right)$ b) $\log_3 \left(\frac{\sqrt{3^3 \cdot 9 \cdot 3^{-1}}}{81^2 \cdot 3^{-2}} \right)$ c) $\log \left(\frac{0.01 \cdot \sqrt[3]{100}}{10^{-1} \cdot 0.1} \right)$ d) $\log_5 \left(\frac{5^{-2} \cdot \sqrt{625}}{25 \cdot \sqrt{125}} \right)$
e) $\log_2 \left(\frac{\sqrt{64 \cdot 2^3}}{32 \cdot \sqrt{8}} \right)^2$ f) $\log \left(\sqrt[3]{\frac{1000 \cdot 10^{-2}}{10^5 \cdot 10^{-1}}} \right)$ g) $\ln \left(\frac{e^3 \cdot \sqrt{e^3}}{e^2 \cdot e^{-4}} \right)$ h) $\log_3 \left(\frac{27 \cdot 3}{3^2 \cdot \sqrt{81}} \right)$
i) $\log_5 \left(\frac{125 \cdot \sqrt{625}}{5^2 \cdot 25^2} \right)$ j) $\log_4 \left(\frac{16 \cdot 2}{2^2 \cdot \sqrt{8}} \right)$

Sol: a) -5/2; b) -9/2; c) 2/3; d) -7/2; e) -1; f) -1; g) 13/2; h) 0; i) -1; j) 3/4.

Ejercicios de ecuaciones logarítmicas y exponenciales.

1º Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

- | | | |
|---|--|---|
| a) $\log(2x) = -1$ | b) $\log x^2 = \frac{1}{2}$ | c) $\log(3x) = 2$ |
| d) $\log x = -1$ | e) $\log x = \frac{3}{2}$ | f) $\log(3x^2) = -2$ |
| g) $5\log(2x) = 20$ | h) $\log\left(\frac{2x-4}{5}\right) = 2$ | i) $\log(x+1)^2 = 2$ |
| j) $3\log(5x) = -9$ | k) $\log x^3 = 3$ | l) $\log_2\left(\frac{x^2}{4}\right) = 2$ |
| m) $\log_3\left(\frac{x+2}{3}\right) = 1$ | n) $\log_5(5x) = 2$ | ñ) $\ln(x+e) = 1$ |

Sol: a) $1/20$; b) $\pm\sqrt[4]{10}$; c) $100/3$; d) $1/10$; e) $10\sqrt{10}$; f) $\sqrt{3}/30$; g) 5000 ; h) 252 ;
i) $9, -11$; j) $1/5000$; k) 10 ; l) 4 ; m) 7 ; n) 5 ; ñ) 0 .

2º Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

- | | |
|--|---|
| a) $\log x + \log 50 = \log 100$ | b) $\log x^3 = \log 6 + 2\log x$ |
| c) $\log x = 1 + \log(22-x)$ | d) $2\log x - \log(x-16) = 2$ |
| e) $\log x + \log 20 = 3$ | f) $3\log x + 2\log x^2 = \log 128$ |
| g) $1 - \log x = 2 - 2\log x$ | h) $\log x - \log 2 = 1 + \log(21-x)$ |
| i) $\log(7x+15) - \log 5 = 1$ | j) $2\log x - \log(x^2 - 2x + 6) = 0$ |
| k) $2\log x = \log(10-3x)$ | l) $\log(2x-3) + \log(3x-2) = 2 - \log 25$ |
| m) $(x^2 - x + 3)\log(4) = \log 1 - \log 64$ | n) $\log 8 + (x^2 - 5x + 7)\log 3 = \log 24$ |
| ñ) $2\log(5x+4) - 2\log 2 = \log(x+4)$ | o) $\log(35-x^3) = 3\log(5-x)$ |
| p) $2\log x = 3 + \log(x/10)$ | q) $\log x + \log(x+3) = 2\log(x+1)$ |
| r) $\log 2 + \log(11-x^2) = 2\log(5-x)$ | s) $\log_2(\log_2(x^2)) = 2$ |
| t) $\log_5(x^2) + \log_5 10 = \log_5 x + \log_5 50$ | u) $\log_3 \sqrt{x} + \log_3(9x) - 5 = \log_3(x/3)$ |
| v) $\log(7-3x) - \log(1-x) = \log 5$ | w) $\log(2x+16) - \log 18 = \log x$ |
| x) $\log(x+1) = \log(\sqrt{x-1}) + \log(\sqrt{x+4})$ | y) $\log(x-1) + \log(3x-5) = \log(2x-3)$ |

Sol: a) 20 ; b) 6 ; c) 20 ; d) $80, 20$; e) 50 ; f) 2 ; g) 10 ; h) 20 ; i) 5 ; j) 3 ; k) 2 ; l) 2 ;
m) No tiene solución; n) $3, 2$; ñ) 0 ; o) $3, 2$; p) 100 ; q) 1 ; r) $1/3, 3$; s) ± 4 ; t) 5 ; u) 81 ;
v) -1 ; w) 1 ; x) 5 ; y) 2 .

3º Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

- | | |
|--|---|
| a) $\frac{\log 2 + \log(11-x^2)}{\log(5-x)} = 2$ | b) $\log x = \frac{2 - \log x}{\log x}$ |
| c) $\frac{\log(35-x^3)}{\log(5-x)} = 3$ | d) $\log_5 x + \frac{\log_5 125}{\log_5 x} = \frac{7}{2}$ |

Sol: a) $3, 1/3$; b) $10, 1/100$; c) $3, 2$; d) $25, \sqrt{125}$.

4º Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

- a) $\log_x 27 = 3$ b) $\log_x 20 = 1$ c) $4 \log_x 125 = 12$
d) $6 \log_x 27 = 18$ e) $\log_x 4 + \log_x 8 = 5$ f) $\log_x 3 + \log_x 9 = 3$
g) $\log_x 108 + \log_x 2 = 3$ h) $4 \log_x 2 + 3 \log_x 8 = 13$ i) $\log_x 4 + 2 \log_x 32 = 7$

Sol: a) 3; b) 20; c) 5; d) 3; e) 2; f) 3; g) 6; h) 2; i) 2.

5º Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones logarítmicas:

- a) $\begin{cases} 2 \log x - 5 \log y = -1 \\ 3 \log x + 2 \log y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4 \log x - 3 \log y = -1 \\ \log(xy) = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \log x + \log y^3 = 5 \\ \log(x^3 / y^2) = 4 \end{cases}$
d) $\begin{cases} \log(x^2 y) = 2 \\ \log(x / y) = 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ x - y = 999 / 10 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \log x^2 - 3 \log y = 2 \\ \log(x / y^2) = 3 \end{cases}$
g) $\begin{cases} \log x - \log y = 7 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$ h) $\begin{cases} \log x + 3 \log y = 5 \\ \log(x^2 / y) = 3 \end{cases}$ i) $\begin{cases} 2 \log x^2 - \log y^2 = 4 \\ 2 \log x + \log y^2 = 2 \end{cases}$
j) $\begin{cases} x - y = 15 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$ k) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 5 \\ \log_2 x^2 - \log_2 y = 1 \end{cases}$ l) $\begin{cases} \log x^2 - 3 \log y = -1 \\ \log(xy^2) = 3 \end{cases}$
m) $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$ n) $\begin{cases} \log x + \log y = \log 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ ñ) $\begin{cases} \log x - \log y = 1 \\ x^2 - y^2 = 11 \end{cases}$

Sol: a) $x = 100, y = 10$; b) $x = 100, y = 1000$; c) $x = 100, y = 10$; d) $x = 10, y = 1$;
e) $x = 100, y = 1/10$; f) $x = 10^{-5}, y = 10^{-4}$; g) $x = 10^5, y = 10^{-2}$; h) $x = 100, y = 10$;
i) $x = 100, y = 1$; j) $x = -5, y = -20$; k) $x = 20, y = 5$; l) $x = 4, y = 8$; m) $x = 100, y = 10$; n) $x = 1, y = 2$; ñ) $10/3, -1/3$.

6º Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

- a) $3^x = 9$ b) $2^x = 128$ c) $5^x = 125$
d) $2 \cdot 5^x = 50$ e) $4^{x+1} = 16$ f) $6^{3x} = 216$
g) $2^{2x-1} = 4$ h) $6^{12-3x} = 216$ i) $2^{1-x^2} = 1/8$
j) $5^{-x} = 1/25$ k) $4^x = 2$ l) $9^{x+2} = 1$
m) $8^{x^2+3x+2} = 1$ n) $2^{x+2} = 0.5^{2x-1}$ ñ) $\sqrt[3]{a^{7-x}} = a^2$
o) $(4^{3-x})^{2-x} = 1$ p) $(2/7)^5 = 3.5^{x+1}$ q) $10^{x^2-11x+30} = (2.5)^2$
r) $3^{2x-1} = \sqrt[3]{9^{x^2-1/4}}$ s) $4^x \cdot 5^{x-1} = 1600$ t) $3^{x-1} \cdot 2^x = 12$

Sol: a) 2; b) 7; c) 3; d) 2; e) 1; f) 1; g) 3/2; h) 3; i) ± 2 ; j) 2; k) ; l) -2; m) -2, -1; n) -1/3;
ñ) 1; o) 3, 2; p) -6; q) 7, 4; r) 11/2, 1/2; s) 3; t) 2.

7º Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

- a) $5^x + 5^{x-1} = 30$ b) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$ c) $7^{2x+3} - 8 \cdot 7^{x+1} + 1 = 0$
d) $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 117$ e) $3^{2(x+1)} - 28 \cdot 3^x + 3 = 0$ f) $2^{2x} - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$
g) $9^x - 3^x - 6 = 0$ h) $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = 31/5$ i) $2^x + 2^{1-x} = 3$
j) $\frac{4^{x-1}}{2^{x+2}} = 128$ k) $5^x - \frac{5}{5^{x-1}} - 24 = 0$ l) $\frac{6^{x+2}}{6^{2-x^2}} = 1$

Sol: a) 2; b) 2, 0; c) -1, -2; d) 3; e) -2, 1; f) 2, 1; g) 1; h) 0; i) 1, 0; j) 11; k) 2; l) -1, 0.

8º Calcula el valor de x :

a) $2^x = 3$

b) $4^{x+1} = 7$

c) $3^{x+1} = 12$

d) $7^{x-2} = 2$

Sol: a) 1.585; b) 0.4037; c) 1.2616; d) 2.3562.

9º Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones logarítmicas:

a) $\begin{cases} 3 \cdot 2^x - 4 \cdot 7^y = -172 \\ 7 \cdot 2^x + 2 \cdot 7^y = 154 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4^{x+1} - 6^y = 40 \\ 2 \cdot 4^x - 6^y = -88 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3^x + 2^y = 31 \\ 3^{x+1} - 2^{y+2} = 65 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2 \cdot 3^{x+1} - 5^{y+2} = -2639 \\ 4 \cdot 3^x + 5^y = 449 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 5^{x+y} = 25^3 \\ 5^{x-y} = 25 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 15 \cdot 5^{x-1} - 6^y = 339 \\ 3 \cdot 5^x + 2 \cdot 6^{y+1} = 807 \end{cases}$

g) $\begin{cases} a^{x+y} = a^4 \\ a^{x-y} = a^2 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 8^y \cdot 2^{2x} = 128 \\ 3^{2y} \cdot 3^{x-1} = 27 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 3^{3x-y} = \sqrt{3^{10}} \\ 3^{2x+y} = 3 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = -6 \\ 4 \cdot 2^x - 3 \cdot 3^y = -11 \end{cases}$

k) $\begin{cases} 3 \cdot 2^x - 5 \cdot 3^y = 3 \\ 2^{x+1} + 3^{y+1} = 59 \end{cases}$

l) $\begin{cases} 2^x - 3^{y-1} = 5 \\ 2^{x+1} + 8 \cdot 3^y = 712 \end{cases}$

m) $\begin{cases} 2 \cdot 3^x + 2^{y+3} = 86 \\ 3^x - 2^y = 23 \end{cases}$

n) $\begin{cases} 2^{x+2y} = 32 \\ 5^{2x-y} = 1 \end{cases}$

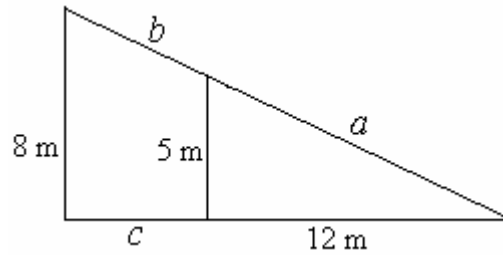
Sol: a) $x = 3, y = 2$; b) $x = y = 3$; c) $x = 3, y = 2$; d) $x = y = 4$; e) $x = 4, y = 2$;

f) $x = 3, y = 2$; g) $x = 3, y = 1$; h) $x = -70, y = 49$; i) $x = 6/5, y = -7/5$; j) $x = y = 2$;

k) $x = y = 4$; l) $x = 5, y = 4$; m) $x = 3, y = 2$; n) $x = 1, y = 2$.

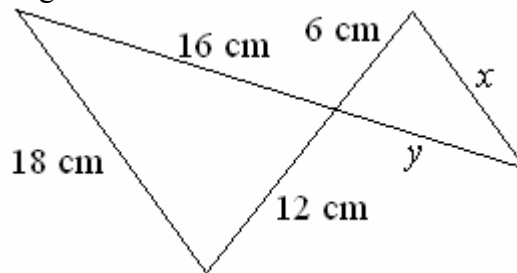
Ejercicios de semejanza de triángulos:

- 1º Calcular a , b y c en la figura:



Sol: $a = 13$ m, $b = 7.8$ m, $c = 7.2$ m.

- 2º Hallar x e y en el dibujo siguiente:

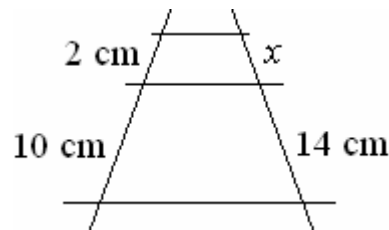


Sol: $x = 9$, $y = 8$.

- 3º Tenemos un pozo cuadrado de anchura es 1.2 m. Un observador cuyos ojos están a 1.7 m de alto, observa a 0.4 m del borde, el borde de la pared que da con el fondo del pozo tal y como indica el dibujo a la derecha. Determina la profundidad del pozo. **Sol:** 5.1 m.

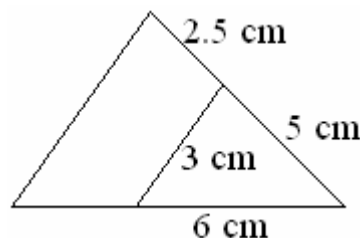


- 4º Calcula el valor de x .



Sol: 5.6 cm.

- 5º Calcular el valor de todos los lados del triángulo ampliación del pequeño teniendo en cuenta que son semejantes:



Sol: 7.5 cm, 4.5 cm y 9 cm.

- 6º Los catetos de un triángulo rectángulo miden 24 m y 10 m. ¿Cuánto miden los catetos de un triángulo semejante al primero cuya hipotenusa mide 52 m? **Sol:** 48 y 20 m.
- 7º Calcular la altura de un edificio que proyecta una sombra de 6.5 m a la misma hora que un poste de 4.5 m de altura da una sombra de 0.90 m. **Sol:** 32.5 m.

Ejercicios y problemas de trigonometría.

- 1º Expresa en radianes los siguientes ángulos:
a) 315° b) 300° c) 135° d) 2210° e) 945° f) -1500° g) 1650°
Sol: a) 5.50 rad; b) 5.24 rad; c) 2.36 rad; d) 38.57 rad; e) 16.49 rad; f) -26.18 rad; g) 28.80 rad.
- 2º Expresa en grados sexagesimales los siguientes ángulos:
a) $\pi/6$ rad b) $9\pi/5$ rad c) 5π rad d) $11\pi/3$ rad
e) $26\pi/5$ rad f) $17\pi/18$ rad g) $215\pi/4$ rad
Sol: a) 30° ; b) 324° ; c) 900° ; d) 660° ; e) 936° ; f) 170° ; g) 9675° .
- 3º Reduce los siguientes ángulos:
a) 730° b) 529° c) 2952° d) 9π rad e) $55\pi/6$ rad f) $217\pi/4$ rad
Sol: a) 10° ; b) 169° ; c) 72° ; d) π rad; e) $7\pi/6$ rad; f) $\pi/4$ rad.
- 4º En una circunferencia de radio 6 cm, tenemos un arco de 4.5 cm de longitud. ¿Cuántos radianes mide el ángulo central que determina? ¿Cuántos grados sexagesimales?
Sol: 0.75 rad; 42.97° .
- 5º Halla la longitud del arco de circunferencia que determina un ángulo de 1.7 radianes, sabiendo que la longitud de la circunferencia es de 9.3 cm. **Sol:** 2.52 cm.
- 6º Calcula el valor de las restantes razones trigonométricas sin calcular el valor de α en los casos siguientes:
a) $\sin \alpha = 1/4$ $\alpha \in [0, 90^\circ]$ b) $\sin \alpha = -1/3$ $\alpha \in [180^\circ, 270^\circ]$
c) $\sin \alpha = \sqrt{3}/2$ $\alpha \in [0, 90^\circ]$ d) $\cos \alpha = 0.8$ $\alpha \in [0, 90^\circ]$
e) $\tan \alpha = 2$ $\alpha \in [0, 90^\circ]$ f) $\cos \alpha = 3/5$ $\alpha \in [270^\circ, 360^\circ]$
g) $\cos \alpha = -1/3$ $\alpha \in [90^\circ, 180^\circ]$ h) $\sec \alpha = -3/2$ $\alpha \in [180^\circ, 270^\circ]$
Sol: a) $\cos \alpha = \sqrt{15}/4$, $\sec \alpha = 4/\sqrt{15}$, $\operatorname{cosec} \alpha = 4$, $\tan \alpha = 1/\sqrt{15}$, $\cotan \alpha = \sqrt{15}$;
b) $\cos \alpha = -\sqrt{8}/3$, $\sec \alpha = -3/\sqrt{8}$, $\operatorname{cosec} \alpha = -3$, $\tan \alpha = 1/\sqrt{8}$, $\cotan \alpha = \sqrt{8}$;
c) $\cos \alpha = 1/2$, $\sec \alpha = 2$, $\operatorname{cosec} \alpha = 2/\sqrt{3}$, $\tan \alpha = \sqrt{3}$, $\cotan \alpha = 1/\sqrt{3}$;
d) $\sin \alpha = 0.6$, $\sec \alpha = 1.25$, $\operatorname{cosec} \alpha = 1.\bar{6}$, $\tan \alpha = 0.75$, $\cotan \alpha = 1.\bar{3}$;
e) $\sin \alpha = 2/\sqrt{5}$, $\cos \alpha = 1/\sqrt{5}$, $\sec \alpha = \sqrt{5}$, $\operatorname{cosec} \alpha = \sqrt{5}/2$, $\cotan \alpha = 1/2$;
f) $\sin \alpha = -4/5$, $\sec \alpha = 5/3$, $\operatorname{cosec} \alpha = -5/4$, $\tan \alpha = -4/3$, $\cotan \alpha = -3/4$;
g) $\sin \alpha = \sqrt{8}/3$, $\sec \alpha = -3$, $\operatorname{cosec} \alpha = 3/\sqrt{8}$, $\tan \alpha = -\sqrt{8}$, $\cotan \alpha = -1/\sqrt{8}$;
h) $\sin \alpha = -\sqrt{5}/3$, $\cos \alpha = -2/3$, $\operatorname{cosec} \alpha = -3/\sqrt{5}$, $\tan \alpha = \sqrt{5}/2$, $\cotan \alpha = 2/\sqrt{5}$;
- 7º Calcula con la calculadora un valor de α expresado en grados en los siguientes casos:
a) $\sin \alpha = 0.6018$ b) $\cos \alpha = 0.6428$ c) $\tan \alpha = 2.7475$
Sol: a) 36.9° ; b) 49.9° ; c) 70.0° .
- 8º Sabiendo que:
$$\sin(17^\circ) = 0.29$$

Calcula:
a) $\sin(73^\circ)$ b) $\tan(73^\circ)$
Sol: a) 0.96; b) 3.27.

9º Utilizando únicamente la tabla de las razones trigonométricas conocidas:

	0°	30°	45°	60°	90°
Sin α	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos α	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
Tan α	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Calcular las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de los siguientes ángulos:

- a) 120° b) 135° c) 150° d) 180° e) 210° f) 225°
g) 240° h) 270° i) 300° j) 315° k) 330° l) 360°

Sol: a) $\sin(120^\circ) = \sqrt{3}/2$, $\cos(120^\circ) = -1/2$, $\tan(120^\circ) = -\sqrt{3}$;

b) $\sin(135^\circ) = \sqrt{2}/2$, $\cos(135^\circ) = -\sqrt{2}/2$, $\tan(135^\circ) = -1$;

c) $\sin(150^\circ) = \sqrt{3}/2$, $\cos(150^\circ) = -1/2$, $\tan(150^\circ) = -\sqrt{3}$;

d) $\sin(180^\circ) = 0$, $\cos(180^\circ) = -1$, $\tan(180^\circ) = 0$;

e) $\sin(210^\circ) = -1/2$, $\cos(210^\circ) = -\sqrt{3}/2$, $\tan(210^\circ) = 1/\sqrt{3}$;

f) $\sin(225^\circ) = -\sqrt{2}/2$, $\cos(225^\circ) = -\sqrt{2}/2$, $\tan(225^\circ) = 1$;

g) $\sin(240^\circ) = -\sqrt{3}/2$, $\cos(240^\circ) = -1/2$, $\tan(240^\circ) = \sqrt{3}$;

h) $\sin(270^\circ) = -1$, $\cos(270^\circ) = 0$, $\tan(270^\circ) = \pm\infty$;

i) $\sin(300^\circ) = -\sqrt{3}/2$, $\cos(300^\circ) = 1/2$, $\tan(300^\circ) = -\sqrt{3}$;

j) $\sin(315^\circ) = -\sqrt{2}/2$, $\cos(315^\circ) = \sqrt{2}/2$, $\tan(315^\circ) = -1$;

k) $\sin(330^\circ) = -1/2$, $\cos(330^\circ) = \sqrt{3}/2$, $\tan(330^\circ) = -1/\sqrt{3}$;

l) $\sin(360^\circ) = 0$, $\cos(360^\circ) = 1$, $\tan(360^\circ) = 0$.

10º Resuelve, sin emplear calculadora, los triángulos en los que se conocen estos datos:

a) $a = 20$, $\beta = 45^\circ$ y $\gamma = 75^\circ$.

b) $b = 12$, $\alpha = 15^\circ$ y $\beta = 30^\circ$.

c) $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 60^\circ$ y $a = 20$.

Sol: a) $\alpha = 60^\circ$, $b = 20\sqrt{2/3}$, $c = 10(\sqrt{2} + 1)$; b) $\gamma = 135^\circ$, $a = 12\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, $c = 12\sqrt{2}$

c) $\gamma = 30^\circ$, $a = 10\sqrt{3}$, $c = 10$.

11º Calcula β en un triángulo de lado $a = 10$, $b = 5$ y $c = 5\sqrt{3}$. **Sol:** 30° .

12º En un triángulo isósceles el ángulo que determinan los lados iguales mide 52.34° y el lado desigual 55 cm. Calcula su perímetro y su área. **Sol:** 145 cm; 979.9 cm^2 .

13º En un terreno horizontal se divisa una torre desde un punto A bajo un ángulo de 30° . Si nos aproximamos 20 m se llega a un punto B, desde el que observamos la torre bajo un ángulo de 45° . Calcula la altura de la torre. **Sol:** 27.32 m.

14º En un triángulo isósceles los dos lados iguales miden 10 cm y su área vale 48 cm^2 . Calcula el valor de sus ángulos. **Sol:** 73.74° , 53.1° y 53.1° .

15º Calcular la altura del pico de una montaña, sabiendo que, en ese momento del día, el Sol incide con sus rayos sobre el suelo con un ángulo de 75° y provoca una sombra sobre el suelo de 53 metros. **Sol:** 197.8 m.

- 16º** Una escalera de 12m de largo esta apoyada en una pared con un ángulo de 60° respecto al suelo. Calcular la altura de la pared hasta donde apoya la escalera, y la separación de ésta a la pared. **Sol:** 10.4 m de altura y 6 m de separación.
- 17º** La sombra de un árbol mide 50 m y el ángulo que forman los rayos del sol con el suelo es de 60° . ¿Cuál es la altura del árbol? **Sol:** 86.6 m.
- 18º** En el parque de atracciones observas a tu amigo en lo alto de la Noria con un ángulo de 60° . Calcular a la altura que se encuentra, sabiendo que tú estás a 50m de la Noria. **Sol:** 86.6 m.
- 19º** Daniel observa a sus compañeros, que están en lo alto de un campanario, con un ángulo de 80° . Calcular la altura a la que se encuentran sabiendo que Daniel está a 10 metros del edificio. **Sol:** 56.7 m.
- 20º** Observas el nido de un águila, en una pared vertical de una montaña, con un ángulo de 70° . Calcular la altura a la que se encuentra el nido, sabiendo que estás a 40m de esa pared. **Sol:** 109.9 m.
- 21º** Una escalera de bomberos de 10 m de longitud se ha fijado en un punto de la calzada. Si se apoya sobre una de las fachadas forma un ángulo con el suelo de 45° y si se apoya sobre la otra fachada forma un ángulo de 30° . Calcular:
- a) La anchura de la calle.
 - b) La altura de la escalera sobre la fachada de 30° .
 - c) La altura de la escalera sobre la fachada de 45° .
- Sol:** a) 15.7 m; b) 7.07 m; c) 5.
- 22º** Dos amigos parten de un mismo punto A y siguen direcciones que forman entre sí un ángulo de 35° . Tras caminar 50 m y 75 m, respectivamente, se sitúan en dos puntos B y C. Calcula la distancia que les separa y los ángulos B y C del triángulo ABC (Peligro, presencia de ángulo obtuso). **Sol:** 44.51 m, 104.9° y 40.1°
- 23º** Calcula la altura de una torre, si situándonos a 20 m de su pie vemos la parte más alta bajo un ángulo de 45° . **Sol:** 20 m.
- 24º** En un solar de forma triangular dos de sus lados miden 6 y 10 m respectivamente y el ángulo comprendido se midió con un teodolito y resultó ser de 30° . ¿Cuál es su superficie? **Sol:** 15 m^2 .
- 25º** Los padres de Pedro tienen una parcela en el campo de forma triangular. Cuyos lados miden 20, 22 y 30 m. Pedro quiere calcular los ángulos. ¿Cuáles son esos ángulos?. **Sol:** 41.8° , 47.16° y 91.04° .
- 26º** Estando situado a 100 m de un árbol, veo su copa bajo un ángulo de 30° . Mi amigo ve el mismo árbol bajo un ángulo de 60° . ¿A qué distancia está mi amigo del árbol? **Sol:** $100/3 \text{ m}$.
- 27º** Un avión que está volando a 500 m de altura distingue un castillo con un ángulo de depresión de 15° ¿A qué distancia del castillo se halla? **Sol:** 1932 m

- 28°** Un avión vuela durante dos horas a 200 km/h en dirección NO. Calcula la distancia que recorre hacia el Norte y hacia el Oeste. **Sol:** $x = y = 282.8$ km.
- 29°** El ángulo de elevación de una torreta eléctrica es de 45° a una distancia de 10 m de la torreta. Si el observador se encuentra a 1 m sobre el suelo. Calcula la altura de la torreta. **Sol:** 11 m.
- 30°** Dos móviles parten de un punto al mismo tiempo, siguiendo dos trayectorias rectilíneas que forman entre sí un ángulo de 135° y con velocidades de 10 y 20 m/s respectivamente. Al cabo de cinco minutos ¿qué distancia los separa? **Sol:** 8394 m.
- 31°** Desde cierto lugar del suelo se ve el punto más alto de una torre, formando la visual un ángulo de 30° con la horizontal. Si nos acercamos 50 m a la torre, ese ángulo se hace de 60° . Calcula la altura de la torre. **Sol:** $25\sqrt{3}$ m.
- 32°** Un avión vuela horizontalmente a una determinada altura "h". Cuando se encuentra sobre la vertical de un punto A, ve la torre del aeropuerto bajo un ángulo de depresión de 30° . Al aproximarse 1000 m ve la misma luz bajo un ángulo de 60° . Halla:
a) La altura a la que vuela el avión
b) La distancia del punto A a la torre del aeropuerto.
Sol: a) $500\sqrt{3}$ m; b) 1500 m.
- 33°** Calcula la longitud de los lados de un paralelogramo cuyas diagonales son de 20 y 16 cm. y las diagonales forman entre sí un ángulo de 37° . **Sol:** 6 y 17.1 cm.
- 34°** Calcula el área del decágono regular de 10 cm de lado. **Sol:** 765 cm^2 .
- 35°** Calcular el área de un dodecágono de 4cm de lado. **Sol:** 179.1 cm^2 .
- 36°** La longitud del lado de un octógono es de 16 cm. Calcular su área. **Sol:** 1236 cm^2 .
- 37°** Calcula el área de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 12 m. **Sol:** 342.4 m^2 .
- 38°** En una circunferencia de 10 cm de radio se traza una cuerda de 6 cm. Averigua el ángulo central que abarca dicha cuerda. **Sol:** 34.9° .
- 39°** Calcula los ángulos de un rombo cuyas diagonales miden 14 cm y 8 cm. **Sol:** 120.5° ; 59.5° .
- 40°** Dos personas, que están separadas 6 km, observan un avión que vuela de uno de ellos hacia el otro. Uno de ellos lo observa bajo un ángulo de 30° , mientras el otro lo hace bajo un ángulo de 15° . Calcular la altura a la que vuela el avión. **Sol:** 1.10 km.
- 41°** Desde un punto determinado del mar, el capitán de un barco observa la luz de un faro con una inclinación de 15° . Su situación es dramática, le queda combustible para recorrer 10 km y no sabe si llegará a tierra. Tras recorrer 2 km en dirección hacia el faro vuelve a comprobar la inclinación de la luz del faro que ahora resulta de 25° . En estos momentos el capitán ya conoce lo que le interesa. Calcular:
a) La altura del faro.
b) La distancia a la que se encuentra del faro.
Sol: a) 1.26 km; b) 2.71 km.

- 42°** Un submarino desciende hacia el fondo del mar con una inclinación de 35° . Cuando llega al fondo, y después de realizar los pertinentes trabajos, asciende a la superficie con un ángulo de 45° . Cuando ha emergido completamente comprueba que se ha desplazado 200 metros desde el punto donde empezó la inmersión. Se pide calcular la profundidad del mar en el punto en el que estuvo trabajando el submarino. **Sol:** 82.4 m.
- 43°** Dos personas separadas por una llanura de 2 km, observan sobre la llanura un globo aerostático con ángulos de 30° y 45° respectivamente. Hallar la altura a la que vuela dicho artefacto. **Sol:** 732 m.
- 44°** Acaban de colocar una antena de 7 metros en lo alto de un edificio. El extremo superior de la antena se ve bajo un ángulo de 85° , mientras que la base se ve bajo a un ángulo de 80° . Calcular la altura del edificio y la distancia que te separa de él.
Sol: Distancia de 1.21 m y altura de 6.89 m.
- 45°** En el tejado de un edificio están colocando una antena. Desde la calle veo la base de ella con un ángulo de 70° mientras que el extremo superior lo veo con un ángulo de 80° . Si la antena mide 10m, calcular la altura del edificio y la distancia que me separa de él. **Sol:** Estoy a 3.42 m del edificio y su altura es de 9.4 m.
- 46°** Desde un puesto de caza, un cazador apunta con su escopeta a una tórtola, que se encuentra posada en la copa de un árbol, con un ángulo de 50° . Cuando iba a disparar la tórtola salió volando y se posó en una rama 4m más abajo; al apuntarla con su escopeta lo hace bajo un ángulo de 40° . ¿Qué altura tiene el árbol?, ¿Qué distancia me separa de él? **Sol:** Altura 13.5 m y distancia 11.3 m.
- 47°** Pablo observa desde la ventana de su casa un accidente con un ángulo de 60° ; como es muy curioso y desde allí no lo ve muy bien, decide subir a la azotea del edificio, que se encuentra 10 m más arriba. Desde allí, con unos prismáticos, se empapa de todo mirando con un ángulo de 40° . Determinar la altura del edificio de Pablo. **Sol:** 19.4 m.
- 48°** Calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo sabiendo que un cateto mide 75 cm y sabiendo que la longitud de la bisectriz del ángulo opuesto al otro cateto mide 94 cm. **Sol:** 274.52 cm.
- 49°** La base de un triángulo isósceles mide 55 cm y los lados iguales 39 cm. Calcular el valor de sus ángulos. **Sol:** Los lados iguales 45.16° y el desigual 89.68° .
- 50°** Una de las alturas de un triángulo isósceles mide 33 cm y forma un ángulo de 55° con dos de sus lados. Determinar todos los lados.
Sol: Dos lados son iguales y miden 57.53 cm y el otro vale 66.33 cm.
- 51°** Calcular el lado del pentágono regular inscrito en una circunferencia cuyo diámetro es 30 cm. **Sol:** 17.63 cm.
- 52°** Calcular la base y la altura de un rectángulo, sabiendo que su diagonal mide 84 cm y uno de los ángulos adyacentes a ella, 72.48° . **Sol:** 80.24 cm, 24.84 cm.
- 53°** Un ángulo de un rombo mide 62° . La diagonal menor, 34 cm. Calcular el perímetro y el área. **Sol:** 132 cm; 962 cm^2 .

Ejercicios de ecuaciones trigonométricas:

56° Calcular todas las soluciones a las siguientes ecuaciones trigonométricas:

- a) $\sin(2x) = 1$ b) $\sin(x/2) = \sqrt{2}/2$ c) $\sin(x + 30^\circ) = -1$
 d) $\cos(x - 45^\circ) = -1$ e) $\cos(3x) = 1/2$ f) $\cos(2x + 60^\circ) = 1$
 g) $\tan(6x - 60^\circ) = -1$ h) $\tan(5x) = 1$ i) $\tan(3x + 45^\circ) = \sqrt{3}$

Sol: a) $x = 45^\circ + 180^\circ k$; b) $x = 90^\circ + 720^\circ k, x = 270^\circ + 720^\circ k$; c) $x = 240^\circ + 360^\circ k$;
 d) $x = 225^\circ + 360^\circ k$; e) $x = 20^\circ + 120^\circ k, x = -20^\circ + 120^\circ k$; f) $x = -30^\circ + 180^\circ k$;
 g) $x = 5^\circ + 60^\circ k$; h) $x = 9^\circ + 36^\circ k$; i) $x = 5^\circ + 60^\circ k$.

57° Calcular todas las soluciones a las siguientes ecuaciones trigonométricas:

- a) $\sin^2(2x) = 3/4$ b) $\sin^2(3x) = 1/4$ c) $\sin^2(x + 45^\circ) = 1$
 d) $\cos^2(2x) = 3/4$ e) $\cos^2(3x) = 1/4$ f) $\cos^2(x + 45^\circ) = 1$
 g) $\tan^2(x) = 1$ h) $\tan^2(x - 45^\circ) = 0$ i) $\tan^2(3x - 60^\circ) = 3$

Sol: a) $x = 30^\circ + 180^\circ k, x = 60^\circ + 180^\circ k, x = 120^\circ + 180^\circ k, x = 150^\circ + 180^\circ k$;
 b) $x = 10^\circ + 120^\circ k, x = 50^\circ + 120^\circ k, x = 70^\circ + 120^\circ k, x = 110^\circ + 120^\circ k$;
 c) $x = 45^\circ + 180^\circ k$;
 d) $x = 15^\circ + 180^\circ k, x = 75^\circ + 180^\circ k, x = 105^\circ + 180^\circ k, x = 115^\circ + 180^\circ k$;
 e) $x = 20^\circ + 120^\circ k, x = 40^\circ + 120^\circ k, x = 80^\circ + 120^\circ k, x = 100^\circ + 120^\circ k$;
 f) $x = -45^\circ + 180^\circ k$; g) $x = 45^\circ + 90^\circ k$; h) $x = 45^\circ + 180^\circ k$; i) $x = 40^\circ + 60^\circ k, x = 60^\circ k$.

58° Calcular todas las soluciones a las siguientes ecuaciones trigonométricas:

- a) $\sin^2 x - \cos^2 x = 1/2$ b) $\cos^2 x = \sin^2 x$ c) $\sin^2 x + \cos^2 x = 2 - \cos^2 x$
 d) $5 \cos^2 x + \sin^2 x = 4 \cos x$ e) $\sin^2 x + \cos(2x) = 1/4$ f) $\tan^2 x + 2 = 3 \tan x$
 g) $2 \sin^2 x = \tan x$ h) $\cos(2x) + 5 \cos x + 3 = 0$ i)

Sol: a) $x = 60 + 180k, x = -60 + 180k$; b) $x = 45 + 180k, x = 135 + 180k$; c) $x = 180k$;
 d) $x = 60 + 360k, x = -60 + 360k$; e) $x = 60 + 180k, x = 120 + 180k$;
 f) $x = 45 + 180k$; g) $x = 45 + 180k, x = 180k$; h) $x = -30 + 360k, x = -150 + 360k$.

59° Calcular todas las soluciones a las siguientes ecuaciones trigonométricas:

- a) $\sin(2x) = -1/2$ b) $\tan x = 1$
 c) $\cos(2x) = \cos x$ d) $\sin(2x) = \cos x$
 e) $\sin(2x + 60) = \sin(x - 60)$ f) $\cos(2x) = \cos(x + 90)$
 g) $\sin(2x - 15) = \cos(x + 15)$ h) $\sin x \cos x = 1/2$
 i) $\tan x \sec x = \sqrt{2}$ j) $\cos(8x) + \cos(6x) = 2 \cdot \cos(210) \cdot \cos x$

Sol: a) $x = 105 + 180k, x = -15 + 180k$; b) $x = 45 + 180k$; c) $x = 120k$;
 d) $x = 30 + 120k, x = 90 + 120k$; e) $x = 60 + 120k, -120 + 90k$; f) $x = 90 + 360k$;
 g) $x = 30 + 120k, x = 330 + 360k$; h) $x = 45 + 180k$;
 i) $x = -45 + 360k, x = -135 + 360k$; j) $x = 90 + 180k, x = \pm 30^\circ 360 \cdot k/7$.

Ejercicios de demostración de igualdades trigonométricas:

60º Verifique las siguientes igualdades trigonométricas a partir de las igualdades más elementales:

a) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin(2x)$

b) $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

c) $\cos^2 x = \frac{\cotan^2 x}{1 + \cotan^2 x}$

d) $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$

e) $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$

f) $\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

g) $\frac{\sin x - \operatorname{cosec} x}{\cos x - \sec x} = \cotan^3 x$

h) $\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = \frac{4}{\sin^2(2x)}$

i) $\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{\tan\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\tan\left(\frac{x-y}{2}\right)}$

j) $\frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\sin(x+y) + \sin(x-y)} = \tan y$

k) $\frac{\tan^2(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} = \frac{1 - \cos x}{2}$

l) $\tan x = \cotan x - 2 \cotan(2x)$

m) $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \operatorname{cosec} x - \cotan x$

n) $\frac{\tan x}{\tan(2x) - \tan x} = \cos(2x)$

ñ) $\tan(45+x) - \tan(45-x) = 2 \tan(2x)$

o) $\frac{\cos(x+y) \cdot \cos(x-y)}{\cos x - \sin y} = \cos x + \sin y$

p) $\frac{\sin x + \cos x}{\cos x} = \sin x \cdot \sec x + 1$

q) $\sin x + \cotan x = \cos x \cdot \tan x + \operatorname{cosec} x$

r) $\sec(x \pm y) = \frac{\sec(x) \sec(y) \operatorname{cosec}(x) \operatorname{cosec}(y)}{\operatorname{cosec}(x) \operatorname{cosec}(y) \mp \sec(x) \sec(y)}$

s) $\operatorname{cosec}(x \pm y) = \frac{\sec(x) \sec(y) \operatorname{cosec}(x) \operatorname{cosec}(y)}{\sec(x) \operatorname{cosec}(y) \pm \operatorname{cosec}(x) \sec(y)}$

61º En matemáticas, toda función periódica es posible aproximarla a una suma o serie de funciones trigonométricas seno y coseno denominada serie de Fourier. A continuación aparecen los desarrollos en serie de Fourier de algunas potencias de funciones trigonométricas. Demostrar y verificar las igualdades tal y como se hizo en el ejercicio anterior:

a) $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x)$

b) $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x)$

c) $\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin(3x)$

d) $\cos^3 x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x$

e) $\sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{8} \cos(4x)$

f) $\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{8} \cos(4x)$

e) $\sin^5 x = \frac{5}{8} \sin x - \frac{5}{16} \sin(3x) + \frac{\sin(5x)}{16}$

f) $\cos^5 x = \frac{5}{8} \cos x + \frac{5}{16} \cos(3x) + \frac{\cos(5x)}{16}$

Ejercicios de vectores:

1º Realizar las siguientes operaciones aritméticas:

- a) $(2, 3) + (1, 1) - (3, 2)$ b) $(1, -3) - (1, -1) - (2, 2)$ c) $(4, -3) - (6, -1) + (3, 2)$
d) $(7, 10) + (1, 1) - (2, 2)$ e) $(3, 1) + (1, 3) - (2, 5)$ f) $(2, -1) + (-1, 3) + (1, 1)$

Sol: a) $(0, 2)$; b) $(-2, -4)$; c) $(1, 0)$; d) $(6, 9)$; e) $(2, -1)$; f) $(2, 3)$.

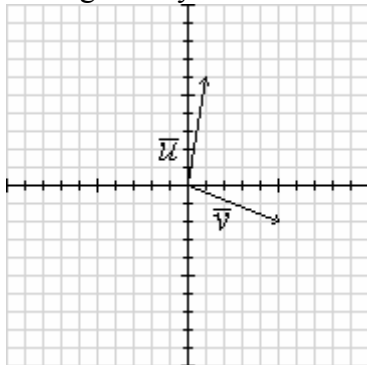
2º Realizar las siguientes operaciones aritméticas:

- a) $3 \cdot (2, 3)$ b) $5 \cdot (1, 2)$ c) $5 \cdot (6, -1)$ d) $-3 \cdot (4, -3)$

Sol: a) $(6, 9)$; b) $(5, 10)$; c) $(30, -5)$; d) $(-12, -9)$.

3º Observando las gráficas, determine en cada caso el valor de los vectores \vec{u} y \vec{v} .
Determine gráfica y aritméticamente el vector $\vec{u} + \vec{v}$.

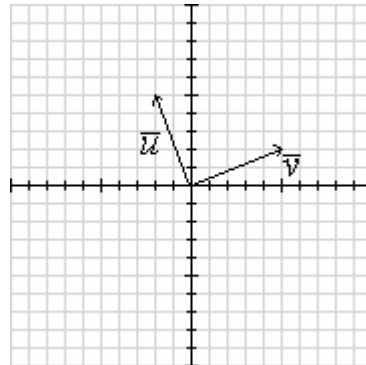
a)



$$\vec{u} = \quad \vec{v} =$$

$$\vec{u} + \vec{v} =$$

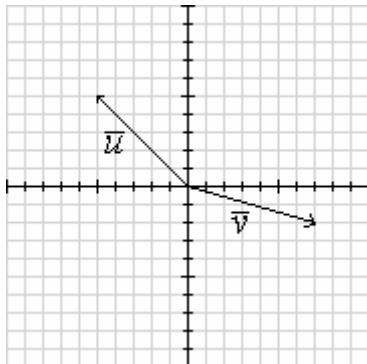
b)



$$\vec{u} = \quad \vec{v} =$$

$$\vec{u} + \vec{v} =$$

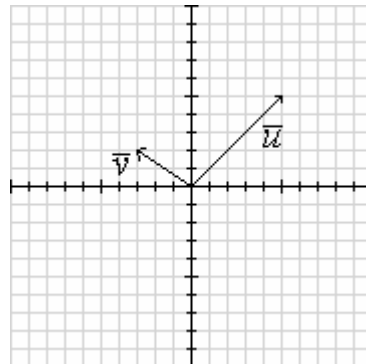
c)



$$\vec{u} = \quad \vec{v} =$$

$$\vec{u} + \vec{v} =$$

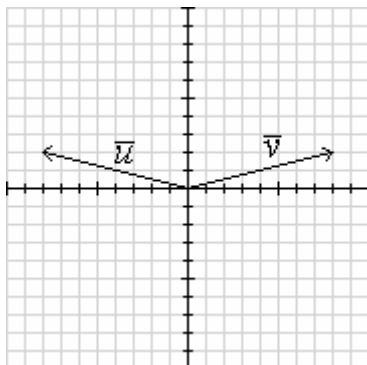
d)



$$\vec{u} = \quad \vec{v} =$$

$$\vec{u} + \vec{v} =$$

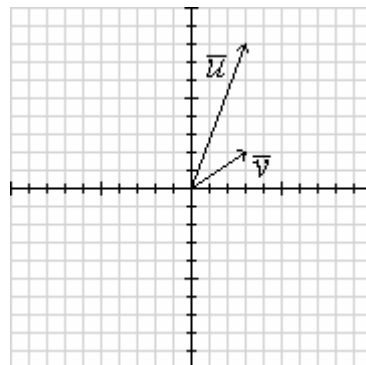
e)



$$\vec{u} = \quad \vec{v} =$$

$$\vec{u} + \vec{v} =$$

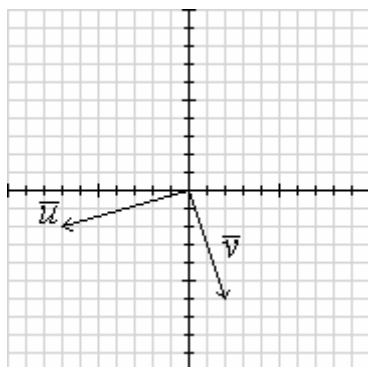
f)



$$\vec{u} = \quad \vec{v} =$$

$$\vec{u} + \vec{v} =$$

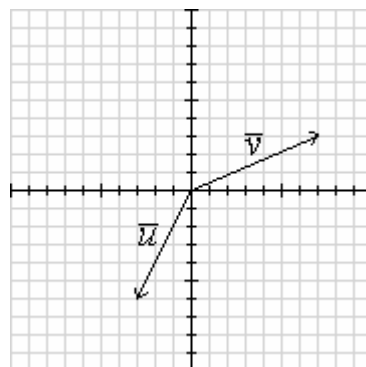
g)



$$\vec{u} = \quad \vec{v} =$$

$$\vec{u} + \vec{v} =$$

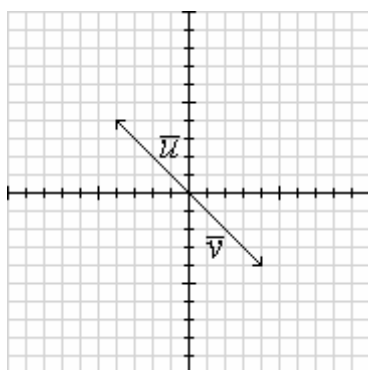
h)



$$\vec{u} = \quad \vec{v} =$$

$$\vec{u} + \vec{v} =$$

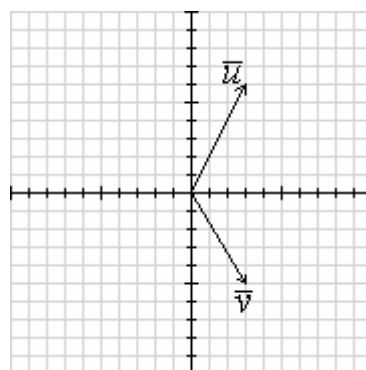
i)



$$\vec{u} = \quad \vec{v} =$$

$$\vec{u} + \vec{v} =$$

j)

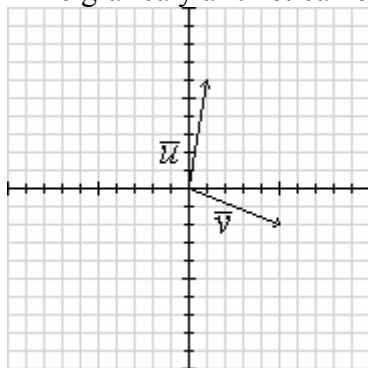


$$\vec{u} = \quad \vec{v} =$$

$$\vec{u} + \vec{v} =$$

4º Determine gráfica y aritméticamente los vectores diferencia que se indican.

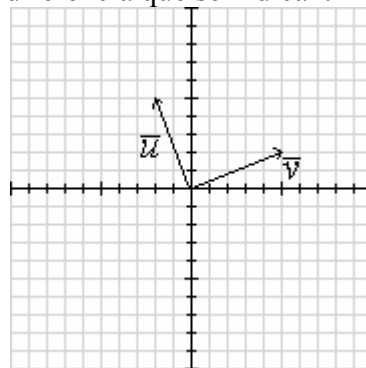
a)



$$\vec{u} = \quad \vec{v} =$$

$$\vec{u} - \vec{v} =$$

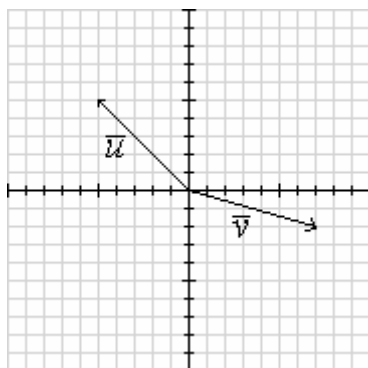
b)



$$\vec{u} = \quad \vec{v} =$$

$$\vec{u} - \vec{v} =$$

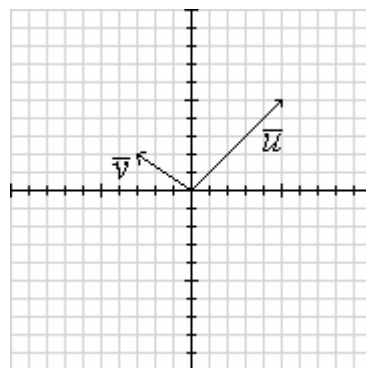
c)



$$\vec{u} = \quad \vec{v} =$$

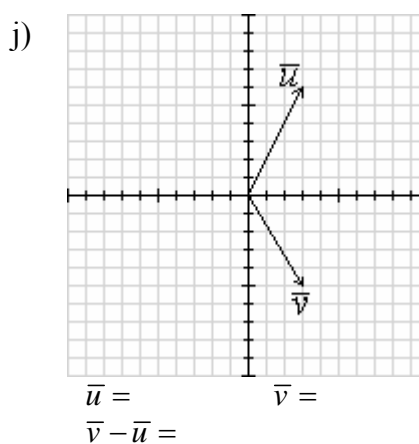
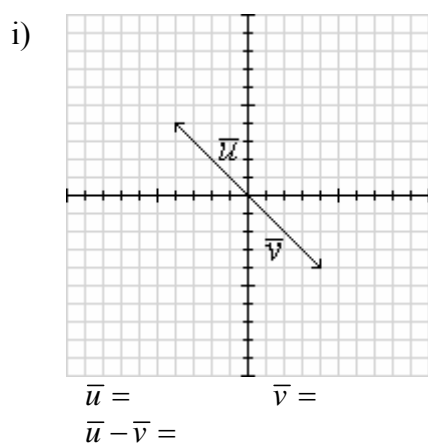
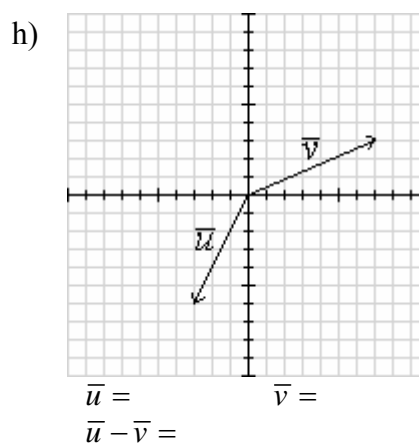
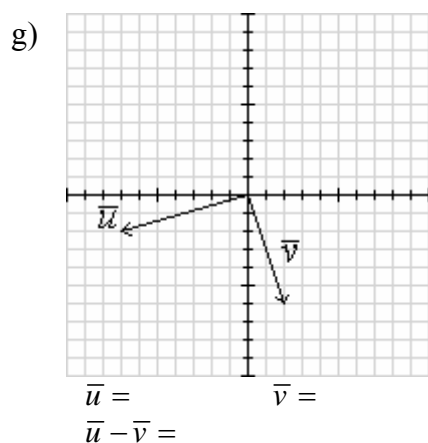
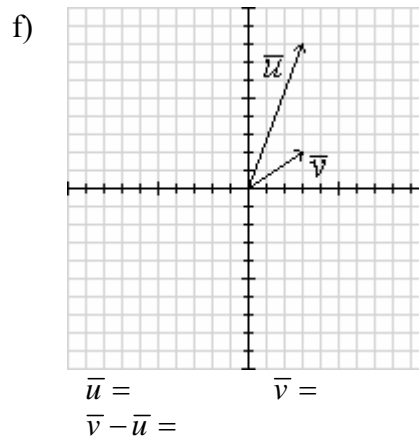
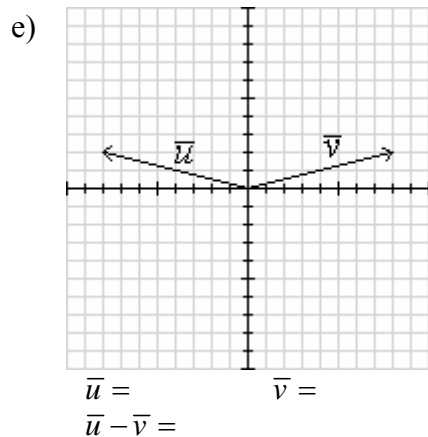
$$\vec{v} - \vec{u} =$$

d)

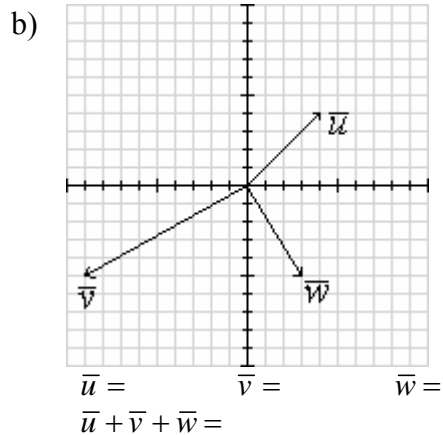
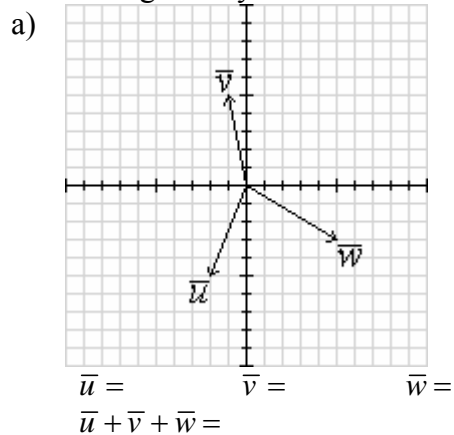


$$\vec{u} = \quad \vec{v} =$$

$$\vec{v} - \vec{u} =$$

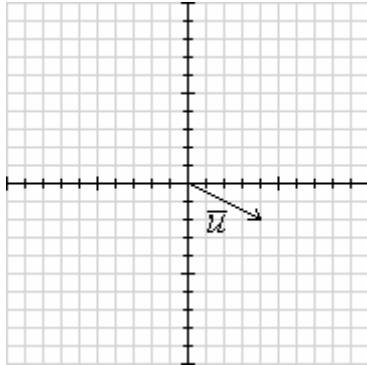


5º Determine gráfica y aritméticamente el vector $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

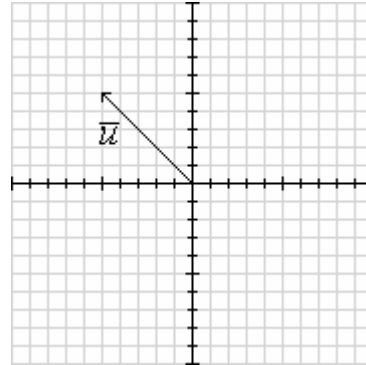


6º Dibuje en los gráficos las siguientes operaciones aritméticas realizadas a los vectores:

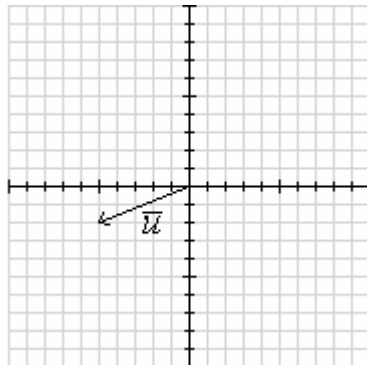
a) $2 \cdot \vec{u} =$



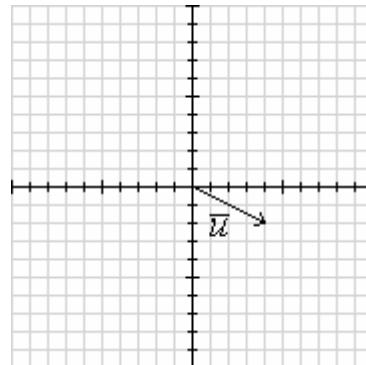
b) $\vec{u} / 5 =$



b) $-\vec{u} =$



c) $-2 \cdot \vec{u} =$



7º Calcula el módulo y el argumento de los siguientes vectores:

a) $\vec{v} = (6, 0)$ b) $\vec{v} = (0, 3)$ c) $\vec{v} = (1, 2)$ d) $\vec{v} = (3, -4)$ e) $\vec{v} = (-2, -1)$

Sol: a) $|\vec{v}| = 6$, $\theta = 0^\circ$; b) $|\vec{v}| = 3$, $\theta = 90^\circ$; c) $|\vec{v}| = \sqrt{5}$, $\theta = 63.43^\circ$;

d) $|\vec{v}| = 5$, $\theta = -53.13^\circ$; e) $|\vec{v}| = \sqrt{5}$, $\theta = 206.56^\circ$.

8º Calcula el vector unitario de los siguientes vectores:

a) $\vec{v} = (6, 0)$ b) $\vec{v} = (0, 3)$ c) $\vec{v} = (1, 2)$ d) $\vec{v} = (3, -4)$ e) $\vec{v} = (-2, -1)$

Sol: a) $(1, 0)$; b) $(0, 1)$; c) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$; d) $\left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$; e) $\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$.

9º Hallar un vector de módulo 10 en la dirección de $\vec{u} = (4, 3)$. **Sol:** $(8, 6)$.

10º Partiendo de los siguientes vectores:

$\vec{u} = (6, 0)$ $\vec{v} = (0, 3)$ $\vec{w} = (1, 2)$ $\vec{r} = (3, -4)$ $\vec{s} = (-2, -1)$

Calcula los siguientes productos escalares:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b) $\vec{v} \cdot \vec{w}$ c) $\vec{s} \cdot \vec{u}$ d) $\vec{r} \cdot \vec{w}$ e) $\vec{r} \cdot \vec{s}$

Sol: a) 0; b) 6; c) -12; d) -5; e) -2.

11º Un vector tiene de módulo 4 y otro vector tiene módulo 5. Si el ángulo formado por los dos vectores es de 60° , calcule el producto escalar de los dos vectores. **Sol:** 10.

- 12° Comprueba que el ángulo formado por los vectores:

$$\vec{u} = (\sqrt{3} + 1, \sqrt{3} - 1) \quad \vec{v} = (\sqrt{3} - 1, \sqrt{3} + 1)$$

Es de 60° .

- 13° Calcula x e y para que los vectores:

$$\vec{u} = (2, y) \quad \vec{v} = (x, 1)$$

Formen un ángulo de 90° . Además, $|\vec{v}| = \sqrt{5}$. **Sol:** $x = \pm 2$, $y = \mp 4$.

- 14° Dados los vectores:

$$\vec{u} = (2, y) \quad \vec{v} = (1, -1)$$

Determina x para que dichos vectores formen un ángulo de 45° . **Sol:** $x = 0$.

- 15° Sabiendo que $\vec{u} = (\sqrt{3}, 1)$ forma un ángulo de 60° con un vector \vec{v} , de módulo igual al módulo de \vec{u} , calcular las componentes de \vec{v} . **Sol:** $\vec{v} = (0, 2)$ y $\vec{v} = (\sqrt{3}, -1)$

- 16° Dados los vectores:

$$\vec{u} = (1, 4) \quad \vec{v} = (6, 2)$$

Determina el ángulo que forma la bisectriz de estos vectores con el eje OX. **Sol:** 57.5° .

- 17° Calcular x de modo que:

$$\vec{u} = (1, x) \quad \vec{v} = (-3, x)$$

Sean ortogonales. **Sol:** $x = \pm\sqrt{3}$.

- 18° Hallar el producto escalar de los vectores $\vec{u} = (6, -4)$ y $\vec{v} = (4, 5)$. **Sol:** -4 .

- 19° Halla $\vec{u} \cdot \vec{v}$ si $\vec{u} = (2, 4)$, $|\vec{v}| = 2$ y el ángulo que forman los vectores \vec{u} y \vec{v} es de 60° .
Sol: 3.16.

- 20° Calcular los ángulos y la longitud de los lados del triángulo ABC, sabiendo que las coordenadas de sus vértices son los puntos A(0, 0), B(1, 3) y C(4, 2).

Sol: $|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = \sqrt{10}$; $|\overline{AC}| = \sqrt{20}$; $\widehat{AB, AC} = \widehat{AC, BC} = 45^\circ$; $\widehat{AB, BC} = 90^\circ$.

- 21° Hallar el área de un triángulo de vértices A(1, 3), B(3, 6) y C(7, 2). **Sol:** 20 u^2 .

- 22° Hallar el producto escalar y el ángulo que forman entre si los vectores:

$$\vec{v} = (3, 4) \quad \vec{w} = (-4, 3)$$

Sol: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$; $\widehat{\vec{u}, \vec{v}} = 0^\circ$.

- 23° Demostrar que los vectores:

$$\vec{v} = (\cos \alpha, -\sin \alpha) \quad \vec{u} = (\sin \alpha, \cos \alpha)$$

son perpendiculares y unitarios.

24° Se tiene los vectores:

$$\vec{u} = (4, 0)$$

$$\vec{v} = (1, 5)$$

Calcular el ángulo que forman entre si los vectores \vec{w} y \vec{r} sabiendo que:

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$$

$$\vec{r} = \vec{u} - \vec{v}$$

Sol: 104.04°.

25° Si \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} son tres vectores de igual módulo y $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, calcular el ángulo que forman entre si \vec{a} y \vec{b} . **Sol:** 120°.

26° Dos vectores \vec{a} y \vec{b} son tales que:

$$|\vec{a}| = 10$$

$$|\vec{b}| = 5\sqrt{6}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = 20$$

Hallar su producto escalar, el ángulo que forman entre ellos y los ángulos que forman cada uno de ellos con el vector suma.

Sol: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 75$; $\widehat{\vec{a}, \vec{b}} = 52.24^\circ$; $\widehat{\vec{a}, (\vec{a} + \vec{b})} = 28.95^\circ$; $\widehat{\vec{b}, (\vec{a} + \vec{b})} = 23.28^\circ$.

27° Calcular los valores de m y n para que los vectores:

$$\vec{u} = \left(-\frac{3}{5}, m \right)$$

$$\vec{v} = \left(n, \frac{5}{9} \right)$$

a) Sean unitarios.

b) Sean ortogonales.

Sol: a) $m = \pm 4/5$, $n = \pm \sqrt{56}/9$; b) $n = m = 0$.

28° Hallar el producto escalar de los vectores:

$$\vec{x} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$$

$$\vec{y} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$$

Sabiendo que \vec{u} y \vec{v} forman 60° y que $|\vec{u}| = 4$ y $|\vec{v}| = 5$. **Sol:** -104.

Ejercicios de rectas:

Resumen de teoría:

Ecuación vectorial.

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$$

$$(x, y) = (x_0, y_0) + (v_x, v_y)t$$

Ecuación paramétrica.

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + v_x t \\ y &= y_0 + v_y t \end{aligned} \right\}$$

Ecuación continua.

$$\frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y}$$

Ecuación punto pendiente.

$$\frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} \rightarrow y - y_0 = \frac{v_y}{v_x} (x - x_0)$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Ecuación explícita.

$$y = mx - mx_0 + y_0 \rightarrow y = mx + n$$

Ecuación implícita:

$$ax + by + c = 0$$

Ecuación de la recta que pasa por 2 puntos:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

Pendiente de una recta:

$$m = -\frac{a}{b} = \frac{v_y}{v_x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Ejercicios de tipos de rectas:

- 1º Encuentra la ecuación vectorial, paramétrica y continua de la recta que pasa por los puntos A = (3, 2) y B = (1, -1).
Sol: $(x, y) = (3, 2) + t(2, 3)$; $\{x = 3 + 2t; y = 2 + 3t\}$; $(x - 3)/2 = (y - 2)/3$.
- 2º Escribe en formas explícita y continua la ecuación de la recta: $2x + 3y = 6$.
Sol: $y = (-2/3)x + 2$; $(x - 3)/3 = y/(-2)$.
- 3º Dada la recta $r: x + 3y + 2 = 0$, en forma implícita, escribirla en forma explícita, continua y vectorial. **Sol:** $y = (-1/3)x - 2/3$; $(x - 1)/3 = (y + 1)/(-1)$; $(x, y) = (1, -1) + t(3, -1)$.
- 4º ¿Cuál es la ecuación paramétrica de la recta que pasa por los puntos P = (2, 1) y Q = (1, -2). ¿Para qué valores del parámetro se obtienen los puntos P y Q y el punto medio de P y Q?. **Sol:** $\{x = 2 + t; y = 1 + 3t\}$; $t = 0$; $t = -1$; $t = -1/2$.
- 5º Dada la recta $r: x + y + 1 = 0$, en forma implícita, escribirla en forma explícita, continua y vectorial. **Sol:** $y = -x - 1$; $(x - 1)/1 = y/(-1)$; $(x, y) = (1, 0) + t(1, -1)$.
- 6º Escribe en forma explícita e implícita la ecuación de la recta $2x + y = 2$.
Sol: $y = -2x + 2$; $2x + y - 2 = 0$.
- 7º Escribe la ecuación paramétrica y continua de la recta: $x + 2y = 4$.
Sol: $\{x = -2t; y = 2 + t\}$; b) $x/(-2) = (y - 2)/1$
- 8º
 - a) ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos A(2, 2) y B(0, 4)?
 - b) Escribe las ecuaciones explícita e implícita de la recta que pasa por los puntos P(1, 4) y Q(2, 3).**Sol:** a) $m = -1$; b) $y = -x + 5$; $x + y - 5 = 0$.

Elementos y características de la recta:

- 9º ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos A(0, 1) y B(3, 4)? **Sol:** $m = 1$.
- 10º ¿Cuál es el vector de dirección y la pendiente de las siguientes rectas?:
a) $y = 3x - 2$. b) $(x - 1)/2 = (y + 2)/4$
Sol: a) $\vec{v} = (1, 3)$; $m = 3$; b) $\vec{v} = (2, 4)$; $m = 2$.

Ejercicios de rectas que pasan por dos puntos:

- 11º Deduce la ecuación de la recta cuyos puntos de intersección con los ejes son A(6, 0) y B(0, -2). **Sol:** $x - 3y - 6 = 0$.
- 12º ¿Pertenece el punto P(3, 3) a la recta que pasa por los puntos A(1, -1) y B(2, 1)? **Sol:** Sí.
- 13º Determina el valor de k para que los puntos A(2, -1), B(1, 4) y C(k , 9) estén alineados.
Sol: $k = 0$.

Rectas paralelas y perpendiculares:

Pendiente en paralelas:

$$m_{\parallel} = m$$

Pendiente en perpendiculares:

$$m_{\perp} = -1/m$$

- 14º Calcula la ecuación de la recta perpendicular a r que pasa por el punto P en los casos:
a) $r \equiv \{x = 2 - 3t; y = 1 + t\}$ P(3, 1) b) $r \equiv \frac{(x-1)}{2} = \frac{y}{3}$ P(0, 5)
c) $r \equiv y = 2x - 1$ P(1, 2) d) $r \equiv 2x - 3y + 2 = 0$ P(0, 0)
Expresar los resultados en forma explícita.
Sol: a) $y = 3x - 8$; b) $y = -\frac{2}{3}x + 5$; c) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$; d) $y = -\frac{3}{2}x$.
- 15º Halla la ecuación de s que es perpendicular a $r \equiv x + y - 1 = 0$ y pasa por el punto A(2, 1).
Sol: $x - y - 1 = 0$.
- 16º Hallar la ecuación de la recta que pasa por B(3, 1) y es paralela a la que pasa por los puntos A(2, 0) y C(2, -1). **Sol:** $y = 1$.
- 17º Hallar la ecuación de la recta perpendicular a la recta $x + y - 1 = 0$ que pasa por el punto A(2, 1). **Sol:** $x - y - 1 = 0$.
- 18º Halla la ecuación de la recta perpendicular a la recta $x + y - 1 = 0$ en el punto de abscisa 3.
Sol: $x - y - 5 = 0$.
- 19º Halla la ecuación de la recta perpendicular al vector $\vec{w}(2, 1)$ y que corta a $y = x - 2$ en el punto de ordenada 3. **Sol:** $2x + y - 13 = 0$
- 20º Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (2, -1) que es paralela a la que pasa por los puntos (2, 0) y (1, 3). **Sol:** $3x + y - 7 = 0$.
- 21º Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas:
 $2x + 3y + 1 = 0$ $x - y - 2 = 0$
y es perpendicular a la recta $3x + 5y = 15$. **Sol:** Pto corte: (1, -1); $5x - 3y + 5 = 0$.

- 22° Halla la ecuación de la recta perpendicular a la $3x - 4y + 1 = 0$ que pasa por el punto $(1, 0)$.
Sol: $4x + 3y - 4 = 0$.

- 24° Calcula el valor de a y b para que las rectas:

$$r_1 \equiv ax - y + 2 = 0$$

$$r_2 \equiv bx + 6y - 9 = 0$$

sean perpendiculares y, además, la segunda pase por el punto $P(1, 1)$. **Sol:** $a = 2$; $b = 3$.

- 25° Calcula el valor de m para que las rectas:

$$r_1 \equiv mx + 2y + 6 = 0$$

$$r_2 \equiv 2x + y - 1 = 0$$

$$r_3 \equiv x - y - 5 = 0$$

Pasen, las tres, por un mismo punto. **Sol:** $m = 0$; $P(2, -3)$.

- 26° Determina m y n sabiendo que la recta $2x + ny = 0$ pasa por el punto $(1, 2)$ y es paralela a la recta $mx - 2y + 3 = 0$. **Sol:** $m = 4$; $n = -1$.

- 27° Dadas las rectas:

$$r_1 \equiv 3x + y - 3 = 0$$

$$r_2 \equiv -2x + ay - 8 = 0$$

Determinar " a " para que formen un ángulo de 45° . **Sol:** $a = 1$.

- 28° Dada la recta $mx - 3y + m - 4 = 0$. Calcular m para que:

a) Dicha recta pase por el punto $(1, -2)$.

b) Dicha recta sea paralela a la recta $(x - 1)/3 = (y - 2)/2$.

Sol: a) $m = -1$; b) $m = 2$.

- 29° Hallar el valor de " a " y de " b " para que las rectas:

$$r_1 \equiv ax + 2y - 8 = 0$$

$$r_2 \equiv 2x + by - 3 = 0$$

se corten en el punto $(2, 1)$. **Sol:** $a = 3$; $b = -1$.

- 30° Los puntos $B(1,4)$ y $C(8,3)$ son vértices de un triángulo rectángulo. Si BC es la hipotenusa, hallar el vértice A , sabiendo que está en la recta $y = x - 1$. **Sol:** $(2,1)$, $(7,6)$.

Ejercicios de distancias entre rectas:

- 31° Calcula la distancia entre las rectas paralelas:

a) $r_1 \equiv x + y - 2 = 0$ y $r_2 \equiv x + y + 1 = 0$

b) $r_1 \equiv y - x + 3 = 0$ y $r_2 \equiv x - y + 2 = 0$

Sol: a) $3/\sqrt{2}$; b) $5/\sqrt{2}$.

- 32° Calcula la distancia entre las rectas paralelas:

$$r_1 \equiv 3x + 4y - 15 = 0$$

$$r_2 \equiv 3x + 4y - 40 = 0$$

Sol: 5.

- 33° Hallar la distancia entre las rectas:

$$r_1 \equiv 12x - 5y + 2 = 0$$

$$r_2 \equiv 12x - 5y + 5 = 0$$

Sol: $3/13$.

- 34° Hallar un punto de la recta $r \equiv x + y - 2 = 0$ que equidiste de los puntos $A(1, 3)$ y $B(1, 1)$.

Sol: $(0, 2)$.

Problemas geométricos con puntos, segmentos y rectas:

- 35° Busca todos aquellos puntos P que estando situados sobre el segmento AB, A(1, 2) y B(4, -1) dividan a este en dos partes de tal forma que una parte sea el doble que la otra.

Sol: P = (2, 1); P' = (3, 0).

- 36° Las coordenadas del punto medio del segmento AB son (2, 1). Calcula las coordenadas del punto A sabiendo que las coordenadas de B son (1, 2). **Sol:** (3, 0).

- 37° Sabiendo que A(2, 4) y C(6, 0). Hallar las coordenadas del punto B de modo que:

$$\overline{CA} = \frac{\overline{CB}}{4}$$

Sol: (3, 3).

- 38° Se tiene el cuadrilátero ABCD con A(3, 2); B(1, -2); C(-1, -1); D(1, 3). Comprueba que es un paralelogramo y calcula su centro y su área. **Sol:** (1, 1/2); A = 10 u².

- 39° Calcula el área del cuadrilátero de vértices A(2,0), B(4,4), C(0,3) y D(-2,-1). **Sol:** 14 u².

- 40° Dados los puntos:

$$A(1, 3) \quad B(5, 7) \quad C(7, 5) \quad D(3, 1)$$

Calcula los puntos medios de sus lados y comprueba que forman un paralelogramo.

Sol: $P_{m,AB} = (3, 5)$, $P_{m,BC} = (6, 6)$, $P_{m,CD} = (5, 3)$, $P_{m,DA} = (2, 2)$.

- 41° Un cuadrado de vértice A en el punto (0, 1) y su centro el punto (2, 1). Calcula las coordenadas de los otros tres vértices. **Sol:** (2, 3), (4, 1), (2, -1)

- 42° De un cuadrado ACBD conocemos 2 vértices opuestos A(1, 2) y B(8, 3) Hallar sus otros dos vértices. **Sol:** C(4, 6), D(5, -1).

- 43° Un cuadrado tiene por vértices contiguos los puntos A(0, 3) y B(2, 5). Calcula sus otros 2 vértices. ¿Cuántas soluciones tiene el problema?

Sol: Dos soluciones: C(2, 1), D(4, 3); C'(-2, 5), D'(0, 7).

- 44° Determina el vértice D del paralelogramo ABCD, sabiendo que A(1, -2); B(3, -1) y C(0, 3). **Sol:** D(-2, 2).

- 45° Sean las rectas:

$$r_1 \equiv 2x + 3y - 4 = 0$$

$$r_2 \equiv x - 2y - 2 = 0$$

$$r_3 \equiv -4x - 6y + 22 = 0$$

$$r_4 \equiv 2x - 4y + 10 = 0$$

¿determinan un paralelogramo? En caso afirmativo calcular sus vértices.

Sol: (-1, 2), (1, 3), (4, 1), (2, 0).

- 46° Dadas las rectas:

$$r_1 \equiv 2x - 3y - 3 = 0$$

$$r_2 \equiv 3x - y - 1 = 0$$

$$r_3 \equiv \{x = 3 - 4t; y = 1 + 2t\}$$

Calcula el área del triángulo que determinan. **Sol:** 5/2.

- 47° Calcula el área del triángulo que tiene sus vértices en los puntos A(1, 4), B(3, -2) y C(-1, 0). **Sol:** 10 u².

Ejercicios de circunferencias, elipses, hipérbolas y parábolas:

Ejercicios de circunferencias.

1º Halla el centro y el radio de las circunferencias:

a) $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 2y = 0$

e) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$

f) $x^2 + y^2 - 10x + 8y + 5 = 0$

g) $2x^2 + 2y^2 - 12x - 16y = 0$

h) $2x^2 + 2y^2 - 2x - 2y + 0.5 = 0$

i) $x^2 + y^2 - 8x = 0$

j) $x^2 + y^2 + 3y = 0$

Sol: a) $C(1, -1)$, $R = 5$; b) $C(0, 1)$, $R = 3$; c) $C(1, 3)$, $R = 2$; d) $C(0, 1)$, $R = 1$;
e) $C(2, -1)$, $R = 3$; f) $C(5, -4)$, $R = 6$; g) $C(3, 4)$, $R = 5$; h) $C(1/2, -1/2)$, $R = 1/2$;
i) $C(4, 0)$, $R = 4$; j) $C(0, -3/2)$, $R = 3/2$.

2º ¿Cuáles de las siguientes expresiones representan circunferencias?

a) $x^2 - y^2 + x + 2y + 5 = 0$

b) $x^2 + y^2 + xy + 3y - 3 = 0$

c) $2x^2 + 2y^2 - 8y - 10 = 0$

d) $x^2 - y^2 - 4x - 4y + 2 = 0$

e) $2x^2 + 2y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$

f) $x^2 + y^2 - 4x - 2y = -1$

g) $x^2 + y^2 - xy + x - 1 = 0$

h) $x^2 - 2y + 4 = -y^2$

Sol: a) No; b) No; c) Sí; d) No; e) Si; f) Si; g) No; h) Si.

3º Halla la ecuación de la circunferencia con centro $C(2, 0)$ y radio 3.

Sol: $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$.

4º Halla la ecuación de la circunferencia con centro $C(-2, 3)$ y radio 4.

Sol: $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$.

5º Encuentre la ecuación de la circunferencia de centro en $C(-3, 2)$ y radio 6.

Sol: $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 23 = 0$.

6º Halla la ecuación de la circunferencia que es tangente al eje de abscisas y cuyo centro es el punto $C(1, 2)$. **Sol:** $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

7º Halla la ecuación de la circunferencia que es tangente al eje de abscisas y cuyo centro es el punto $C(2, 3)$. **Sol:** $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$.

8º Halla la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro tiene por extremos los puntos $A(2, 2)$ y $B(4, -6)$. **Sol:** $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 17$.

9º Halla la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro tiene por extremos los puntos $A(1, 1)$ y $B(3, -1)$. **Sol:** $(x - 2)^2 + y^2 = 2$.

10º Calcula m para que el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 + mx + 4y + 4 = 0$ sea 1. **Sol:** ± 2 .

11º Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(3, 0)$, $B(-3, 0)$ y $C(0, 9)$. **Sol:** $x^2 + (y - 4)^2 = 25$.

12º Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(2, 3), B(0, -1) y C(-1, 0).

Sol: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$.

13º Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(0, 6), B(4, -2) y C(9, 3). Encuentre las coordenadas del centro y el radio. **Sol:** $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$.

14º Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro es C(-1, 3) y pasa por el punto P(-2, 1).

Sol: $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 5$.

15º Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro es (1, -1) y pasa por el punto (3, 2).

Sol: $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 13$.

16º Halla la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto de intersección de las rectas:

$$r_1 \equiv 2x - 3y + 4 = 0$$

$$r_2 \equiv x + y - 3 = 0$$

y su radio es 3. **Sol:** $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$.

17º Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el origen y tiene su centro en el punto común a las rectas:

$$r_1 \equiv x + 3y - 6 = 0$$

$$r_2 \equiv x - 2y - 1 = 0$$

Sol: $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0$.

18º Halla la ecuación de una circunferencia concéntrica a la circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$$

y cuyo radio es 2. **Sol:** $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$.

19º Halla la ecuación de una circunferencia concéntrica a la circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$$

y cuyo radio es 3. **Sol:** $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$.

20º Calcula la longitud de la cuerda que determina la recta $r \equiv x - 3 = 0$ al cortar a la circunferencia $C \equiv x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$. **Sol:** 5.

21º Estudia la posición relativa de las siguientes parejas de circunferencias:

a) $C_1 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$ y $C_2 \equiv x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0$.

b) $C_1 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$ y $C_2 \equiv x^2 + y^2 - 4x - 20y + 64 = 0$.

c) $C_1 \equiv x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ y $C_2 \equiv x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$.

Sol: a) secantes; b) tangentes; c) exteriores.

22º Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(-1, 4) y B(3, 0) y cuyo centro está situado en la recta $r \equiv x + 2y - 5 = 0$. **Sol:** $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 8$.

23º Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(4, 3) y B(-2, 3) y tiene su centro en la recta $r \equiv 2x - y - 1 = 0$. **Sol:** $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 13$.

24° Calcula la longitud de una cuerda determinada por la recta $r \equiv x + y - 4 = 0$ al cortar a la circunferencia $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$. **Sol:** $2\sqrt{2}$.

25° Calcular para qué valores del parámetro "a" la recta $r \equiv 2x + y - a = 0$ es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x = 4$. **Sol:** $a = 7, a = -3$.

26° Dada la circunferencia $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 8$, halla las ecuaciones de las rectas tangentes trazadas desde el punto $P(1, 2)$. **Sol:** $x + y - 3 = 0, x - y + 1 = 0$.

27° Determine los puntos comunes a la circunferencia C y a la recta r :

$$C \equiv x^2 + y^2 = 9 \qquad r \equiv 2x - \sqrt{5}y - 9 = 0$$

Sol: $P(2, -\sqrt{5})$.

28° Calcula las potencias de los puntos $O(0, 0)$; $A(3, 0)$ y $B(4, 0)$ respecto a la circunferencia $x^2 + y^2 - 9 = 0$. Estudia con los signos de la potencia, la posición relativa de dichos puntos respecto a la circunferencia.
Sol: $P(O) = -9 \Rightarrow$ Interior; $P(A) = 0 \Rightarrow$ En la circunferencia; $P(B) = 7 \Rightarrow$ Exterior.

29° ¿Qué posiciones ocupan los puntos $A(-1, 0)$; $B(3, 3)$; $C(2, 2)$; $D(5, -1)$ respecto a la circunferencia: $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$?
Sol: A exterior, B en la circunferencia, C interior, D exterior.

30° Calcula los ejes radicales a las circunferencias:

a) $C_1 \equiv x^2 + y^2 - 4x + 6y - 10 = 0$ y $C_2 \equiv x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 = 0$.
b) $C_1 \equiv x^2 + y^2 - 4 = 0$ y $C_2 \equiv x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$.
c) $C_1 \equiv x^2 + y^2 - 10x - 2y + 1 = 0$ y $C_2 \equiv (x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$.
d) $C_1 \equiv x^2 + y^2 - 6x - 1 = 0$ y $C_2 \equiv x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$.
Sol: a) $3x - 5y + 1 = 0$; b) $4x + 6y - 8 = 0$; c) $4x + 6y + 3 = 0$; e) $4x + 6y + 1 = 0$

31° Dadas las circunferencias:

$$C_1 \equiv x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0 \qquad C_2 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$$

hallar las coordenadas del punto P, que tiene igual potencia respecto de ambas y pertenece a la recta $r \equiv x - y + 2 = 0$. **Sol:** $(1, 3)$.

32° Dadas las circunferencias:

$$C_1 \equiv x^2 + y^2 = 4 \qquad C_2 \equiv x^2 + y^2 - 6x - 8y = 6$$

halla las coordenadas de un punto que tiene igual potencia respecto de las dos circunferencias, y que equidista de los ejes coordenados.

33° Halla la circunferencia circunscrita al triángulo cuyos lados están sobre las rectas:

$$r_1 \equiv x - 2y + 1 = 0 \qquad r_2 \equiv x + 3y - 14 = 0 \qquad r_3 \equiv 2x + y - 3 = 0$$

Sol: $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 10$.

Ejercicios de elipses.

- 1º Encuentra los semiejes, vértices, focos y averigua la excentricidad de las elipses:

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

b) $9x^2 + 25y^2 = 900$

c) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$

d) $16x^2 + 25y^2 = 400$

e) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{5} = 1$

f) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$

Sol: a) $a = 5, b = 3, c = 4, V_a(\pm 5, 0), V_b(0, \pm 3), F(\pm 4, 0), e = 4/5$;

b) $a = 10, b = 6, c = 8, V_a(\pm 10, 0), V_b(0, \pm 6), F(\pm 8, 0), e = 4/5$;

c) $a = 13, b = 12, c = 5, V_a(\pm 13, 0), V_b(0, \pm 12), F(\pm 5, 0), e = 5/13$;

d) $a = 5, b = 4, c = 3, V_a(\pm 5, 0), V_b(0, \pm 4), F(\pm 3, 0), e = 3/5$;

e) $a = 5, b = \sqrt{5}, c = 2\sqrt{5}, V_a(\pm 5, 0), V_b(0, \pm \sqrt{5}), F(\pm 2\sqrt{5}, 0), e = 2\sqrt{5}/5$;

f) $a = \sqrt{3}, b = \sqrt{2}, c = 1, V_a(\pm \sqrt{3}, 0), V_b(0, \pm \sqrt{2}), F(\pm 1, 0), e = 1/\sqrt{3}$.

- 2º Halla la ecuación de la elipse centrada en el origen cuyo eje mayor mide 12 y pasa por el punto (3, 4).

Sol: $\frac{x^2}{36} + \frac{3y^2}{64} = 1$

- 3º Halla la ecuación de la elipse cuya suma de distancias a los focos $F(\pm 8, 0)$ vale 20.

Sol: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$.

- 4º Halla la ecuación de la elipse cuyos focos son $(\pm 1, 0)$ y cuyo eje mayor tiene de longitud 4.

Sol: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

- 5º Halla la ecuación de la elipse cuya distancia focal es 16, su semieje mayor es 17 y su centro es el origen de coordenadas.

Sol: $\frac{x^2}{289} + \frac{y^2}{225} = 1$.

- 6º Halla la ecuación de la elipse cuyo centro es (0, 0), un foco (3, 0) y un vértice es (4, 0)

Sol: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$.

- 7º Determina el dominio y recorrido de la elipse:

$$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{64} = 1$$

Sol: Dom: $[-12, 12]$, Rec: $[-8, 8]$

- 8º Halla la ecuación de la elipse con centro en el origen sabiendo que los radios vectores de un punto P son $r = 4$ y $r' = 6$ y que la distancia focal es 8.

Sol: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

- 9º Hallar la ecuación de la elipse, centrada en el origen, sabiendo que la distancia focal es 6 y que los radio vectores de uno de sus puntos son 2 y 8.

Sol: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

- 10º Halla la ecuación de la elipse centrada en el origen a partir de su excentricidad $e = 0.5$ y distancia focal 1.

Sol: $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{3} = 1$.

- 11º Halla la ecuación de la elipse de centro el origen de coordenadas y que pasa por los puntos (6, 2) y (4, 3).

Sol: $\frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{13} = 1$.

- 12º Hallar el valor de k para que la recta:

$$r \equiv x + y - 4 = 0$$

sea tangente a la elipse:

$$E \equiv x^2 + 3y^2 = 4k.$$

Sol: $k = 3$.

- 13º Halla la ecuación de la recta tangente a la elipse:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

en el punto de abscisa 5. **Sol:** $0y + x - 5 = 0$.

- 14º Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse:

$$x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$$

paralelas a la recta $y = x$. **Sol:** $y = x \pm \sqrt{3}$.

- 15º Hallar la posición relativa de las rectas:

$$r_1 \equiv x - y - 1 = 0$$

$$r_2 \equiv x + y - 1 = 0$$

$$r_3 \equiv x + y + 4 = 0$$

respecto de la elipse:

$$E \equiv 2x^2 + 3y^2 = 11$$

Sol: r_1 : recta secante; r_2 : recta secante; r_3 : recta exterior.

- 16º Hallar el centro, semiejes y focos de la elipse:

$$4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$$

Sol: $C(6, -4)$; semiejes $a = 6$, $b = 4$; $F(6 \pm 2\sqrt{5}, -4)$.

Ejercicios de hipérbolas.

- 1º Determina los valores de a , b , c , la excentricidad, las asíntotas, las coordenadas de los vértices y focos de las siguientes hipérbolas:

a) $9x^2 - 16y^2 = 144$ b) $\frac{y^2}{144} - \frac{x^2}{25} = 1$ c) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$
d) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ e) $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1$ f) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

Sol: a) $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$, $e = 5/3$, $y = \pm 3x/4$, $V(\pm 6, 0)$, $F(\pm 10, 0)$;
b) $a = 5$, $b = 12$, $c = 13$, $e = 13/12$, $y = \pm 12x/5$, $V(0, \pm 12)$, $F(0, \pm 13)$;
c) $a = 6$, $b = 8$, $c = 10$, $V(\pm 6, 0)$, $F(\pm 10, 0)$, $y = \pm 4x/3$, $e = 5/3$;
d) $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, $e = 5/3$, $y = \pm 4x/3$, $V(\pm 3, 0)$, $F(\pm 5, 0)$;
e) $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{8}$, $y = \pm x/\sqrt{3}$, $V(\pm \sqrt{6}, 0)$, $F(\pm \sqrt{8}, 0)$;
f) $a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{5}$, $e = \sqrt{5}/3$, $y = \pm 2x/3$, $V(\pm 3, 0)$, $F(\pm \sqrt{5}, 0)$.

- 2º Calcula los elementos principales de la hipérbola $4x^2 - 9y^2 = 36$.

Sol: $a = 3$, $b = 2$; $c = \sqrt{13}$.

- 3º Escribe la ecuación reducida de la hipérbola en la que uno de los focos es $F(17, 0)$ y uno de los vértices $V(15, 0)$.

Sol: $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{64} = 1$.

- 4º Halla la ecuación de la hipérbola incidente con los puntos $A(4, \sqrt{6})$ y $B(12, 6\sqrt{2})$.

Sol: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$.

- 5º Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por los puntos $(4, 3)$ y $(2, 1)$.

Sol: $2x^2 - 3y^2 = 5$.

- 6º Una hipérbola tiene por asíntotas $y = \pm 2x$ y es incidente con el punto $P(6, 4)$. Halla su ecuación.

Sol: $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{128} = 1$.

- 7º De una hipérbola se conoce $a = 4$ y que el ángulo que forman las asíntotas es 90° . Halla la ecuación de la hipérbola.

Sol: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$.

- 8º Calcula m para que la recta $y = x + m$ sea tangente a la hipérbola:

$$x^2 - 2y^2 = 4$$

Sol: $m = \pm\sqrt{2}$.

- 9º Halla b para que $2x^2 + by^2 = 3$ sea la ecuación de una hipérbola equilátera. **Sol:** $b = -2$.

10º Halla la ecuación de la hipérbola de excentricidad $2\sqrt{2}$ y de distancia focal 12.

Sol: $14x^2 - 2y^2 = 63$.

11º Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto (2, 3) y tiene de distancia focal 4. **Sol:** $3x^2 - y^2 = 3$.

12º Halla la ecuación de la hipérbola horizontal cuya distancia de sus vértices es 9 y la distancia focal es 8. **Sol:** $7x^2 - 9y^2 = 63$.

13º Determina las coordenadas del centro, de los focos, de los vértices, la excentricidad y las asíntotas de las siguientes hipérbolas:

a) $4x^2 - 3y^2 - 8x - 8 = 0$

b) $y^2 - 2x^2 - 4x - 4y = 0$

c) $9x^2 - 4y^2 - 36x - 24y - 36 = 0$

d) $5x^2 - 4y^2 + 10x + 8y - 19 = 0$

Sol: a) $C(1, 0)$, $F(1 \pm \sqrt{7}, 0)$, $V(1 \pm \sqrt{3}, 0)$, $e = \sqrt{21}/3$; $y = \pm(2x - 2)/\sqrt{3}$.

b) $C(-1, 2)$, $F(-1, 2 \pm \sqrt{2})$, $V(-1, 2 \pm \sqrt{3})$, $e = \sqrt{6}/2$; $y = \pm(2x - 2)/\sqrt{3}$;

c) $C(2, -3)$, $F(2 \pm \sqrt{13}, -3)$, $V(4, -3)$, $V'(0, -3)$, $e = 2\sqrt{2}$; $y = \pm\sqrt{2}(x + 1) + 2$;

d) $C(-1, 1)$, $F(2, 1)$, $F'(-4, 1)$, $V(-3, 1)$, $V'(1, 1)$, $e = 3/2$; $y = 1 \pm \sqrt{5}(x + 1)/2$;

14º La distancia focal de una hipérbola es 12, y la curva pasa por el punto P(8, 14). Hallar su ecuación.

Sol: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{252} = 1$.

15º Determina la ecuación reducida de una hipérbola sabiendo que un foco dista de los dos vértices de la hipérbola en 50 y 2.

Sol: $\frac{x^2}{576} - \frac{y^2}{100} = 1$.

16º Hallar la ecuación de la hipérbola que tiene su centro en el origen, un vértice en (6, 0) y por una de sus asíntotas la recta de ecuación $y = 4x/3$.

Sol: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$

17º Partiendo de la ecuación de la hipérbola equilátera $xy = 8$, determina las coordenadas de sus focos, de sus vértices y la ecuación de la hipérbola referida a sus ejes.

Sol: $F(\pm 6\sqrt{2}, \pm 6\sqrt{2})$; $V(\pm 3\sqrt{2}, \pm 3\sqrt{2})$; $x^2 - y^2 = 36$.

18º Una hipérbola equilátera pasa por el punto (4, 1/2). Halla su ecuación referida a sus asíntotas como ejes, y las coordenadas de los vértices y los focos.

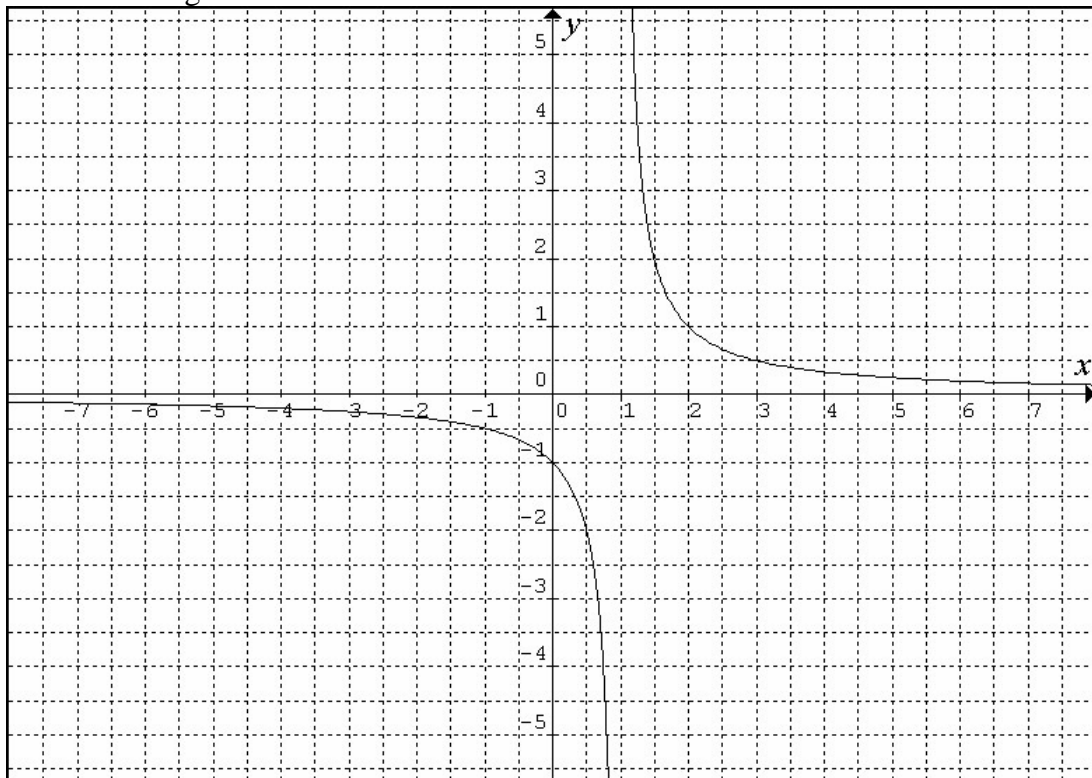
Sol: $xy = 2$; $V(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$; $V(\pm 2, \pm 2)$.

Ejercicios de parábolas.

- 1º Encuentra el vértice, el foco, el eje y la directriz de las siguientes parábolas:
- a) $y^2 = 16x$ b) $y^2 - 4y - 8x + 36 = 0$ c) $x^2 - 4x - 16y + 36 = 0$
d) $y^2 = 4x$ e) $y^2 + x = 0$ f) $x^2 - y = 0$
g) $y^2 + 8y - 6x + 4 = 0$ h) $y^2 + 6y - 8x - 31 = 0$ i) $x^2 + 12x - 4y - 8 = 0$
- Sol:** a) V(0, 0), F(4, 0), eje: $y = 0$, directriz: $x = -4$;
b) V(2, 2), F(4, 2), eje: $y = 2$, directriz: $x = 0$;
c) V(2, 2), F(2, 6), eje: $x = 2$, directriz: $y = -2$;
d) V(0, 0), F(1, 0), eje: $x = 0$, directriz: $x = -1$;
e) V(0, 0), F(-1/4, 0), eje: $y = 0$, directriz: $x = 1/4$;
f) V(0, 0), F(0, 1/4), eje: $y = 0$, directriz: $y = -1/4$;
g) V(-2, -4), F(-1/2, -4), eje: $y = -4$, directriz: $x = -7/2$;
h) V(-5, -3), F(-3, -3), eje: $y = -3$, directriz: $x = -7$;
i) V(-6, -11), F(-6, -11), eje: $x = -6$, directriz: $y = -12$.
- 2º Hallar la ecuación de la parábola de vértice (2, 4) y de directriz $x = 1$.
Sol: $y^2 - 8y - 4x + 24 = 0$.
- 3º Hallar la ecuación de la parábola de foco (6, -2) y de directriz $x = 2$.
Sol: $y^2 + 4y - 8x + 36 = 0$.
- 4º Hallar la de la parábola que tiene de vértice V(0, 0), de eje el de ordenadas y que pasa por el punto (6, -3). **Sol:** $x^2 = -12y$.
- 5º Hallar la ecuación de la parábola que tiene de vértice V(2, 1) y de foco F(4, 1).
Sol: $y^2 - 2y - 8x + 17 = 0$.
- 6º Halla k para que la recta $r \equiv y - 2x + k = 0$ sea tangente a la parábola: $y = 2x^2 - 1$.
Sol: $k = -3/2$.
- 7º Una parábola tiene por vértice V(3, -2) y foco F(3, 0). Halla las ecuaciones del eje, de la directriz y de la parábola. **Sol:** Eje: $x = 3$, Directriz: $y = -4$, Parábola: $(x - 3)^2 = 8(y + 2)$.
- 8º Hallar la ecuación de la parábola que tiene de vértice (2, 3), eje paralelo al eje de ordenadas y que pasa por el punto (4, 5). **Sol:** $x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$.
- 9º Hallar la ecuación de la parábola, de eje paralelo al eje de abscisas, que pasa por los puntos (-2, 1), (1, 2) y (-1, 3). **Sol:** $5y^2 + 2x - 21y + 20 = 0$.
- 10º Halla la ecuación de la parábola de eje vertical que pasa por los puntos A(6, 1), B(-2, 3) y C(16, 6). **Sol:** $x^2 - 24y - 10x + 48 = 0$.
- 11º Escribe la ecuación de la parábola de foco F(1, 0) y directriz $r \equiv x + y = 0$.
Sol: $x^2 + y^2 - 2xy - 4x + 1 = 0$.

Ejercicios de discusión de gráficas de funciones:

1º Partiendo de la gráfica de la función.



Calcule los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

Determinar:

- El dominio y continuidad de la función.
- La derivabilidad de la función.
- El recorrido.
- Las asíntotas verticales y horizontales.
- Los puntos de corte con los ejes.
- El crecimiento y decrecimiento.
- Los máximos y mínimos.
- La concavidad y convexidad.
- La tasa de variación media en el intervalo $[2, 3]$.

Sol:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0.5$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

a) $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$. Discontinua en $x = 1$. Continua en $\mathbb{R} - \{1\}$.

b) Derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$. Las funciones no son derivables en las discontinuidades.

c) Recorrido $\mathbb{R} - \{0\}$.

d) Asíntota vertical en $x = 1$ y asíntota horizontal $y = 0$.

e) Con el eje x no hay puntos de corte, con el eje y hay punto de corte en $(0, -1)$.

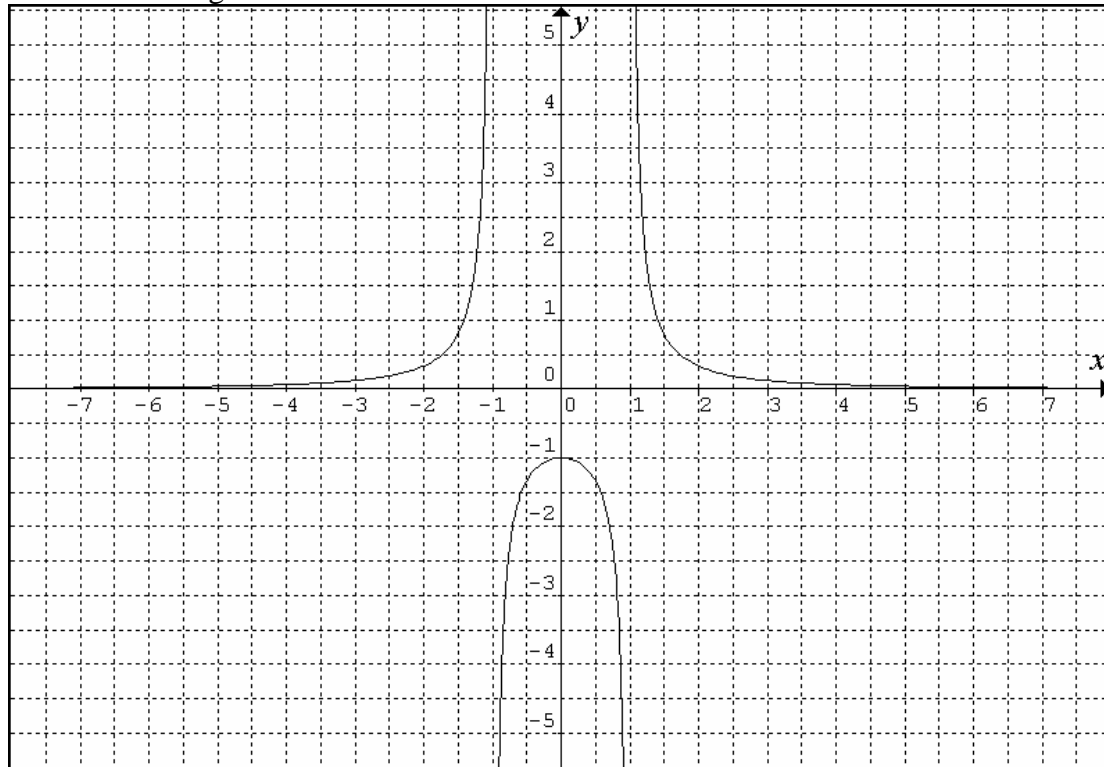
f) Siempre es decreciente, excepto en $x = 1$ en el que la función no está definida.

g) No tiene máximos ni mínimos.

h) \cap Cóncava en $(-\infty, 1)$ y \cup convexa en $(1, \infty)$.

$$i) \text{TVM}[2, 3] = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{0.5 - 1}{3 - 2} = -\frac{1}{2}.$$

2º Partiendo de la gráfica de la función.



Calcule los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

Determinar:

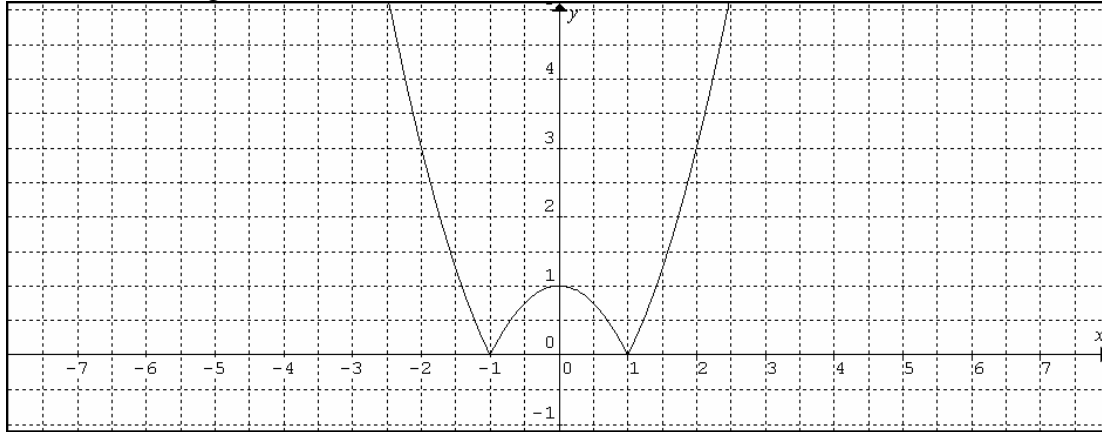
- Dominio y continuidad de la función.
- Derivabilidad de la función.
- Recorrido.
- Asíntotas verticales y horizontales.
- Puntos de corte con los ejes.
- Crecimiento y decrecimiento.
- Máximos y mínimos.
- Concavidad y convexidad.
- Puntos de inflexión.

Sol:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1 \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \pm\infty \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \pm\infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

- Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$. Discontinua en $x = \pm 1$. Continúa en $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$.
- Derivable en $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$. Las funciones no son derivables en las discontinuidades.
- Recorrido $(-\infty, -1] \cup (0, \infty)$.
- Asíntotas verticales en $x = 1$ y $x = -1$, asíntota horizontal $y = 0$.
- Con el eje x no hay puntos de corte, con el eje y hay punto de corte en $(0, -1)$.
- Decreciente en $(0, \infty) - \{1\}$ y creciente $(-\infty, 0) - \{-1\}$.
- Tiene un máximo relativo en $(0, -1)$. No hay mínimos.
- \cap Cóncava en $(-1, 1)$ y \cup convexa en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.
- No tiene puntos de inflexión.

3º Partiendo de la gráfica de la función.



Calcule los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

Determinar:

- Dominio y continuidad de la función.
- Derivabilidad de la función.
- Recorrido.
- Asíntotas verticales y horizontales.
- Puntos de corte con los ejes.
- Crecimiento y decrecimiento.
- Máximos y mínimos.
- Concavidad y convexidad.
- Puntos de inflexión.
- La tasa de variación media en los intervalos $[-2, -1]$ y $[0, 1]$.

Sol:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

a) $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$. Continúa en \mathbb{R} .

b) Derivable en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Las funciones no son derivables en los picos.

c) Recorrido $[0, \infty)$.

d) Sin asíntotas.

e) Puntos de corte con el eje x en $(-1, 0)$ y $(1, 0)$. Con el eje y , punto de corte en $(0, 1)$.

f) Decreciente en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ y creciente $(-1, 0) \cup (1, \infty)$.

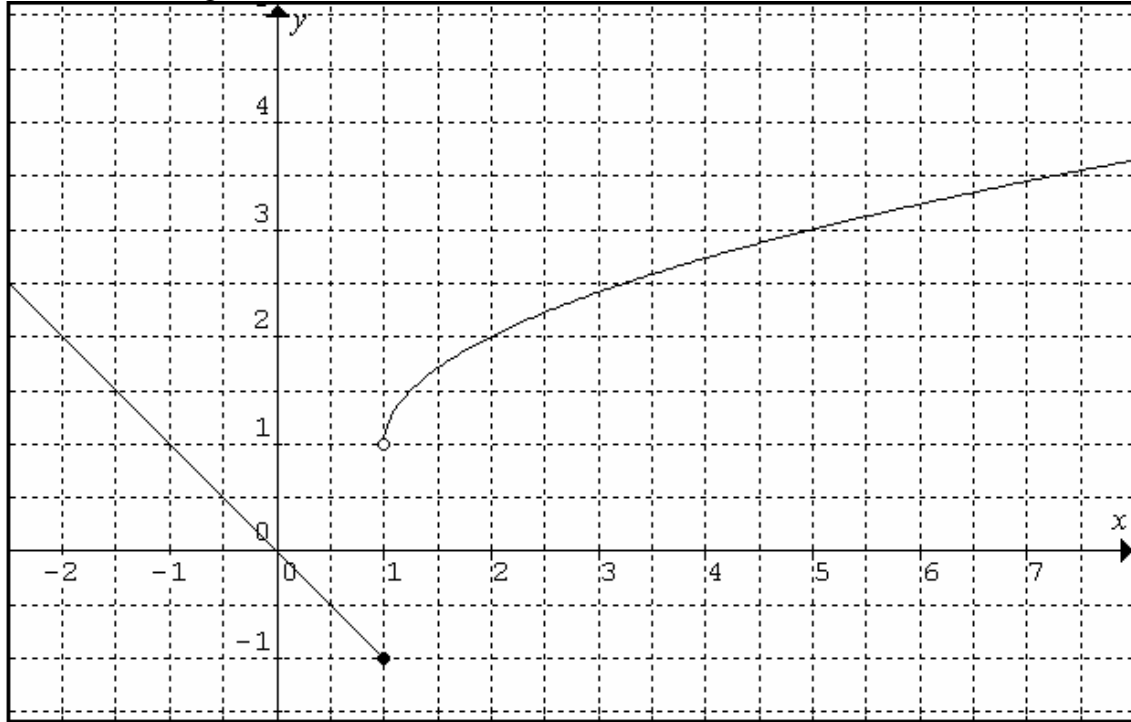
g) Tiene un máximo relativo en $(0, 1)$. Mínimos absolutos en $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

h) \cap Cóncava en $(-1, 1)$ y \cup convexa en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

i) Puntos de inflexión en $x = -1$ y en $x = 1$.

$$j) \text{TVM}[-2, -1] = \frac{f(-1) - f(-2)}{-1 - (-2)} = \frac{0 - 3}{-1 + 2} = -3; \text{TVM}[0, 1] = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{0 - 1}{1} = -1.$$

4º Partiendo de la gráfica de la función.



Calcule los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

Determinar:

- El dominio y continuidad de la función.
- La derivabilidad de la función.
- El recorrido.
- Las asíntotas verticales y horizontales.
- Los puntos de corte con los ejes.
- El crecimiento y decrecimiento.
- Los máximos y mínimos.
- La concavidad y convexidad.
- La tasa de variación media en el intervalo $[2, 5]$ y $[0, 1]$.

Sol:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

a) $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$. Continúa en $\mathbb{R} - \{1\}$.

b) Derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$. La función no es derivable en discontinuidades.

c) Recorrido $[-1, \infty)$.

d) Sin asíntotas verticales u horizontales.

e) Punto de corte con el eje x y el eje y en $(0, 0)$.

f) Decreciente en $(-\infty, 1)$ y creciente $(1, \infty)$.

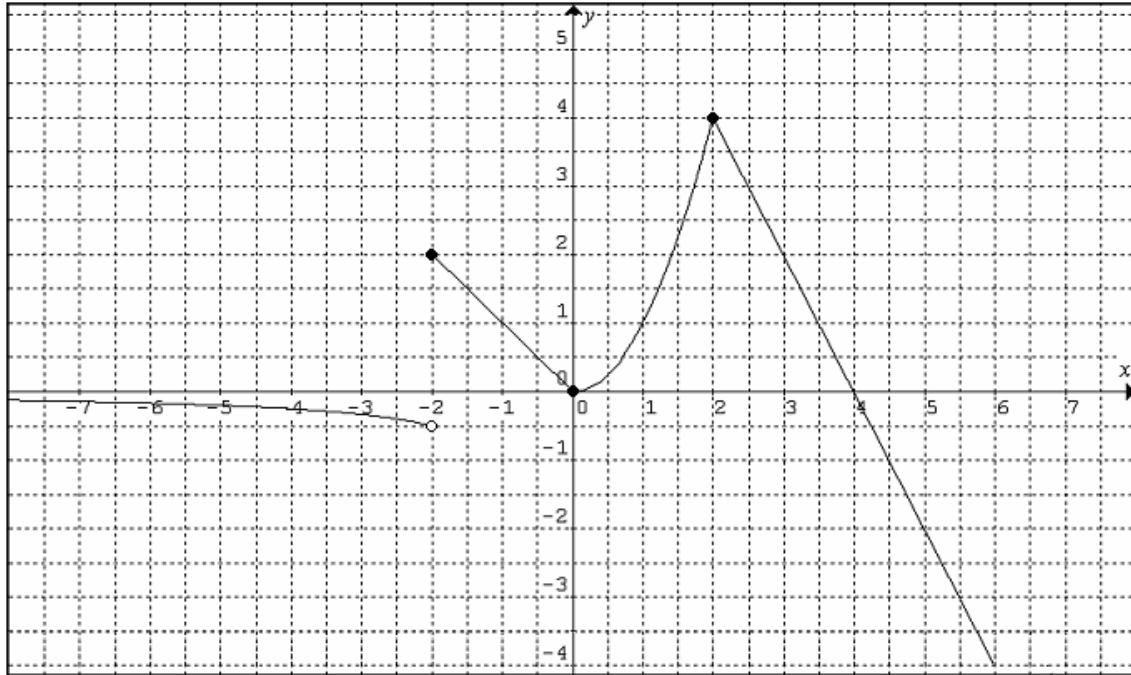
g) Tiene un mínimo absoluto en $(1, -1)$. No hay máximos.

h) \cap Cóncava en $(1, \infty)$.

i) No hay puntos de inflexión.

$$j) \text{TVM}[2, 5] = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{3 - 2}{3} = \frac{1}{3}; \text{TVM}[0, 1] = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{-1 - 0}{1} = -1$$

5º Partiendo de la gráfica de la función:



Calcule los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

Determinar:

- El dominio y continuidad de la función.
- La derivabilidad de la función.
- El recorrido.
- Las asíntotas verticales y horizontales.
- Los puntos de corte con los ejes.
- El crecimiento y decrecimiento.
- Los máximos y mínimos.
- La concavidad y convexidad.
- La tasa de variación media en el intervalo $[0, 2]$ y $[2, 4]$.

Sol:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 0.5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$$

a) Dom $f(x) = \mathbb{R}$. Continúa en $\mathbb{R} - \{-2\}$.

b) Derivable en $\mathbb{R} - \{\pm 2, 0\}$ porque en $x = 0$ hay discontinuidad y en $x = \pm 2$ hay picos.

c) Recorrido $(-\infty, 4]$.

d) Sin asíntotas verticales. Asíntota horizontal en $y = 0$ hacia $-\infty$.

e) Punto de corte con el eje x y el eje y en $(0, 0)$. Punto de corte con el eje x en $(4, 0)$.

f) Decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ y creciente $(0, 2)$.

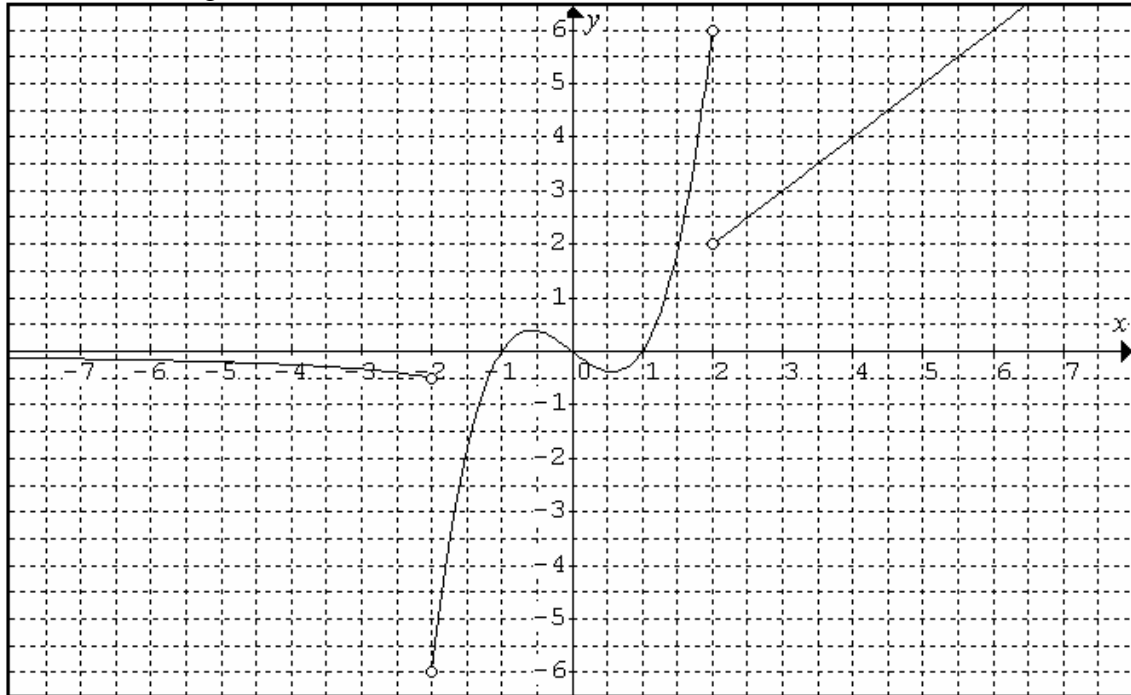
g) Máximo absoluto en $(2, 4)$. Máximo relativo en $(-2, 2)$. Mínimo relativo en $(0, 0)$.

h) \cap Cóncava en $(-\infty, -2)$, \cup convexa en $(0, 2)$

i) No hay puntos de inflexión.

$$j) \text{ TVM}[0, 2] = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{4 - 0}{2} = 2; \text{ TVM}[2, 4] = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{0 - 4}{2} = -2$$

6º Partiendo de la gráfica de la función:



Calcule los siguientes límites:~

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

Determinar:

- El dominio y continuidad de la función.
- La derivabilidad de la función.
- El recorrido.
- Las asíntotas verticales y horizontales.
- Los puntos de corte con los ejes.
- El crecimiento y decrecimiento.
- Los máximos y mínimos.
- La concavidad y convexidad.
- La tasa de variación media en el intervalo $[-1, 1]$ y $[3, 4]$.

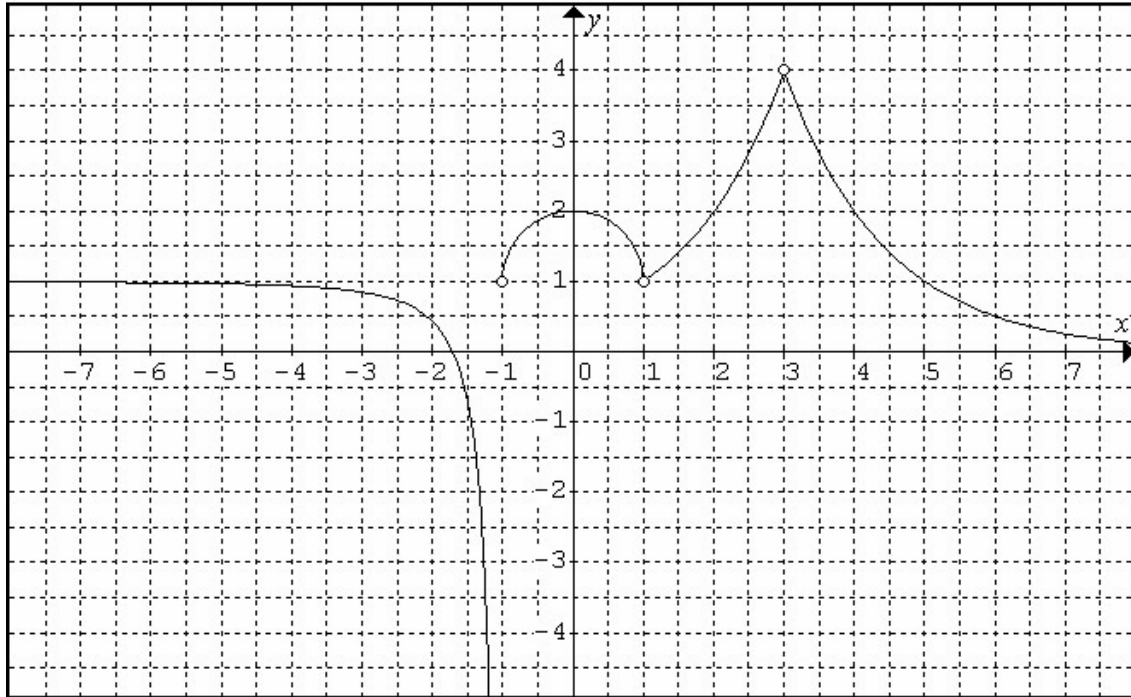
Sol:

$$\begin{array}{llll} \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -0.5 & \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -6 & \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \nexists & \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 6 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 & \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \nexists & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 & \end{array}$$

- $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$. Continua en $\mathbb{R} - \{\pm 2\}$.
- Derivable en $\mathbb{R} - \{\pm 2\}$ porque en $x = \pm 2$ hay discontinuidades de salto finito.
- Recorrido $(-6, \infty)$.
- Sin asíntotas verticales. Asíntota horizontal en $y = 0$ hacia $-\infty$.
- Punto de corte con el eje x y el eje y en $(0, 0)$. Puntos de corte con el eje x en $(\pm 1, 0)$.
- Decreciente en $(-\infty, -2) \cup (-0.6, 0.6)$ y creciente $(-2, -0.6) \cup (0.6, \infty) - \{2\}$.
- Máximo relativo en alrededor de $(-0.6, 0.4)$. Mínimo relativo alrededor de $(0.6, -0.4)$.
- \cap Cóncava en $(-\infty, 0) - \{-2\}$ y \cup convexa en $(0, 2)$.
- Hay punto de inflexión en $x = 0$.

$$j) \text{ TVM}[-1, 1] = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{0 - 0}{2} = 0; \text{ TVM}[3, 4] = \frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = \frac{4 - 3}{1} = 1$$

7º Partiendo de la gráfica de la función:



Calcule los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

Determinar:

- El dominio y continuidad de la función.
- La derivabilidad de la función.
- El recorrido.
- Las asíntotas verticales y horizontales.
- Los puntos de corte con los ejes.
- El crecimiento y decrecimiento.
- Los máximos y mínimos.
- La concavidad y convexidad.
- La tasa de variación media en el intervalo $[4, 5]$.

Sol:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \nexists \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

a) Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{-1, 1, 3\}$. Continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1, 3\}$.

b) Derivable en $\mathbb{R} - \{-1, 1, 3\}$.

c) Recorrido $(-\infty, 4)$.

d) Asíntota vertical en $x = -1$. Asíntota horizontal en $y = 1$ hacia $-\infty$.

e) Punto de corte con el eje x en $(-1.75, 0)$ y con el eje y en $(0, 2)$.

f) Decreciente en $(-\infty, -1) \cup (0, 1) \cup (3, \infty)$ y creciente $(-1, 0) \cup (1, 3)$.

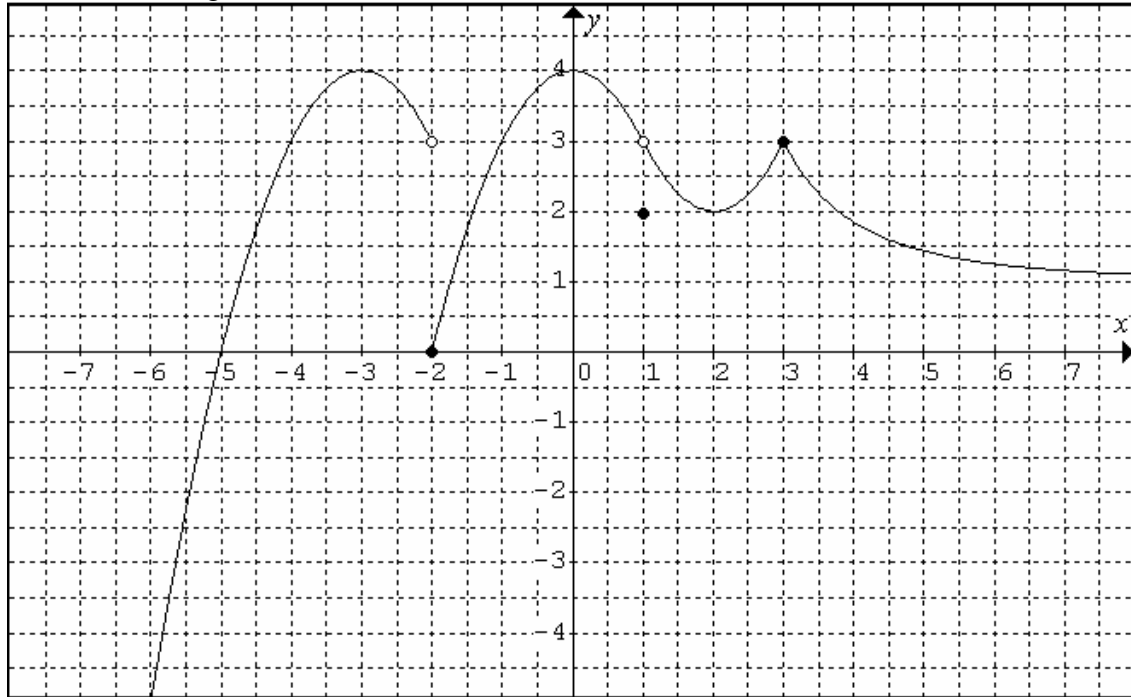
g) Máximo relativo en alrededor de $(0, 2)$. Como la función no existe en $x = 1$ y en $x = 3$, no hay en ellos ningún extremo.

h) \cap Cóncava en $(-\infty, 1) - \{-1\}$ y \cup convexa en $(1, \infty) - \{3\}$.

i) No hay puntos de inflexión.

$$j) \text{TVM}[4, 5] = \frac{f(5) - f(4)}{5 - 4} = \frac{1 - 2}{1} = -1.$$

8º Partiendo de la gráfica de la función:



Calcule los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

Determinar:

- El dominio y continuidad de la función.
- La derivabilidad de la función.
- El recorrido.
- Las asíntotas verticales y horizontales.
- Los puntos de corte con los ejes.
- El crecimiento y decrecimiento.
- Los máximos y mínimos.
- La concavidad y convexidad.
- La tasa de variación media en el intervalo $[2, 3]$.

Sol:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \text{No existe}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

a) $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$. Continua en $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$.

b) Derivable en $\mathbb{R} - \{-2, 1, 3\}$.

c) Recorrido $(-\infty, 4]$.

d) No hay asíntotas verticales. Asíntota horizontal en $y = 1$ hacia ∞ .

e) Punto de corte con el eje x en $(-2, 0)$ y en $(-5, 0)$ con el eje y en $(0, 4)$.

f) Decreciente en $(-3, -2) \cup (0, 2) \cup (3, \infty)$ y creciente $(-\infty, -3) \cup (-2, 0) \cup (2, 3)$.

g) Máximo relativo en alrededor de $(3, 3)$. Máximos absolutos en $(0, 4)$ y $(-3, 4)$.

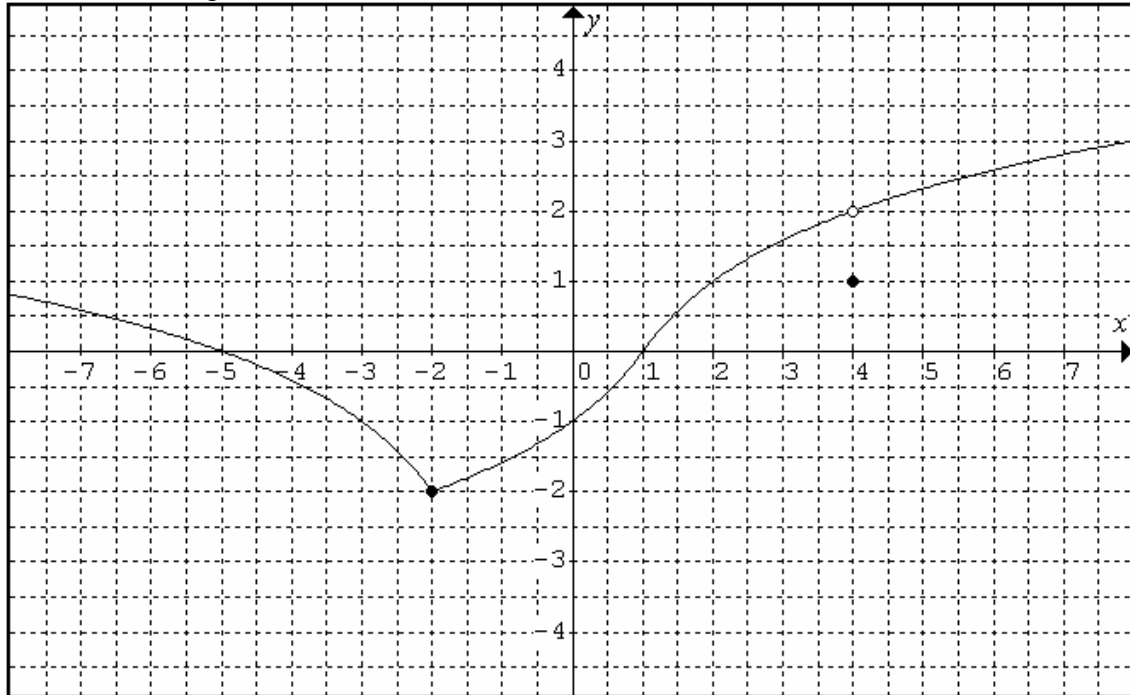
Mínimos relativos en $(-2, 0)$, $(1, 2)$ y en $(2, 2)$.

h) \cap Cóncava en $(-\infty, 1)$ y \cup convexa en $(1, \infty) - \{3\}$.

i) No hay puntos de inflexión.

$$j) \text{ TVM}[2, 3] = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{3 - 2}{1} = 1.$$

9º Partiendo de la gráfica de la función:



Calcule los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

Determinar:

- El dominio y continuidad de la función.
- La derivabilidad de la función.
- El recorrido.
- Las asíntotas verticales y horizontales.
- Los puntos de corte con los ejes.
- El crecimiento y decrecimiento.
- Los máximos y mínimos.
- La concavidad y convexidad.
- La tasa de variación media en el intervalo $[0, 2]$.

Sol:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \cancel{\exists}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

a) $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}$. Continua en $\mathbb{R} \setminus \{4\}$.

b) Derivable en $\mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}$. En $x = -2$ hay un pico, y no hay derivabilidad en picos.

c) Recorrido $[-2, \infty)$.

d) No hay asíntotas.

e) Punto de corte con el eje x en $(1, 0)$ y en $(-5, 0)$ con el eje y en $(0, -1)$.

f) Decreciente en $(-\infty, -2)$ y creciente $(-2, \infty)$.

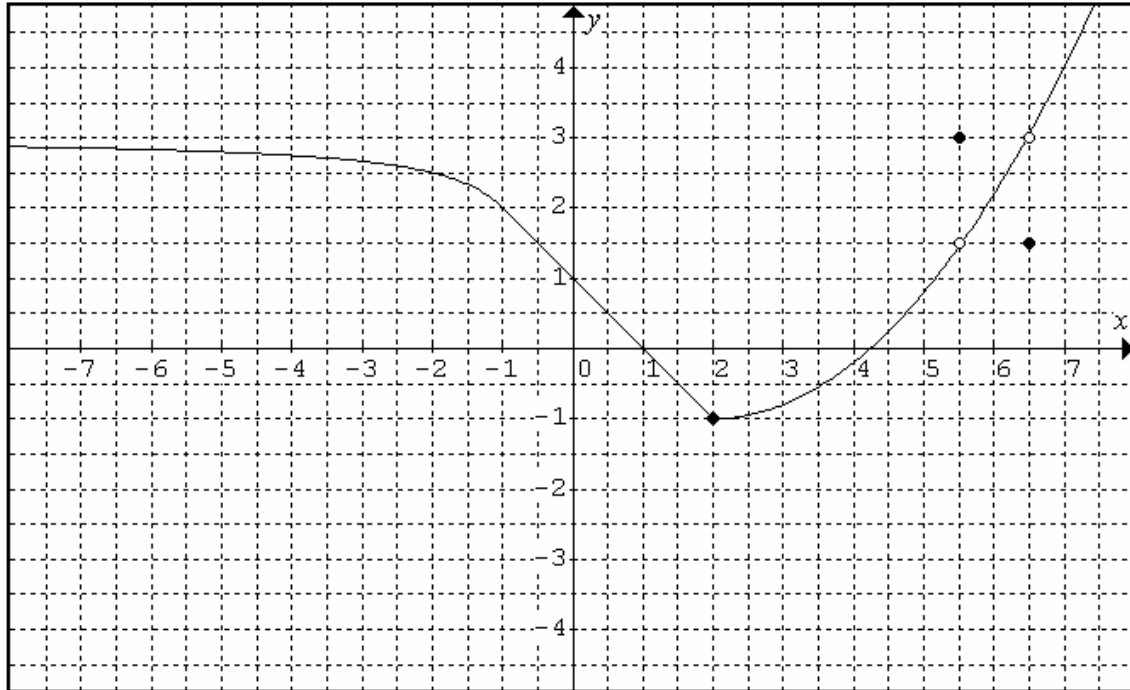
g) Mínimo absoluto en $(-2, -2)$. Mínimo relativo en $(4, 1)$.

h) \cap Cóncava en $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$ y \cup convexa en $(-2, 1)$.

i) No hay puntos de inflexión.

$$j) \text{TVM}[0, 2] = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{1 - (-1)}{2} = 1.$$

10º Partiendo de la gráfica de la función:



Calcule los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{3} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x)} = 0$$

Determinar:

- El dominio y continuidad de la función.
- La derivabilidad de la función.
- El recorrido.
- Las asíntotas verticales y horizontales.
- Los puntos de corte con los ejes.
- El crecimiento y decrecimiento.
- Los máximos y mínimos.
- La concavidad y convexidad.
- La tasa de variación media en el intervalo $[-1, 2]$.

Sol:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{3} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x)} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

- $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$. Continua en $\mathbb{R} - \{5.5, 6.5\}$.
- Derivable en $\mathbb{R} - \{2, 5.5, 6.5\}$. En $x = 2$ hay un pico, y no hay derivabilidad en picos.
- Recorrido $[2, \infty)$.
- Asíntota horizontal en $y = 3$ hacia $-\infty$.
- Punto de corte con el eje x en $(-5, 0)$ y en $(1, 0)$ con el eje y en $(0, -1)$.
- Decreciente en $(-\infty, 2)$ y creciente $(2, \infty) - \{5.5, 6.5\}$.
- Mínimo absoluto en $(2, -1)$ y relativo en $(6.5, 1.5)$. Máximo relativo en $(5.5, 3)$.
- \cap Cóncava en $(-\infty, 2)$ y \cup convexa en $(2, \infty)$.
- No hay puntos de inflexión.
- $\text{TVM}[-1, 2] = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{-1 - 2}{3} = -1$.

Ejercicios de representación de funciones sencillas:

1º Represente las siguientes funciones:

a) $f(x) = x - 1$

b) $f(x) = 2x + 1$

c) $f(x) = 2x - 1$

d) $f(x) = 1 - 2x$

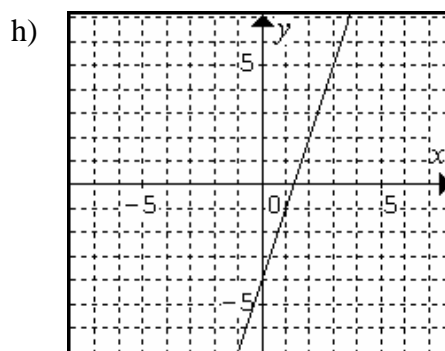
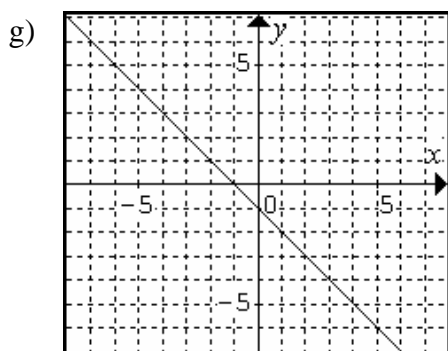
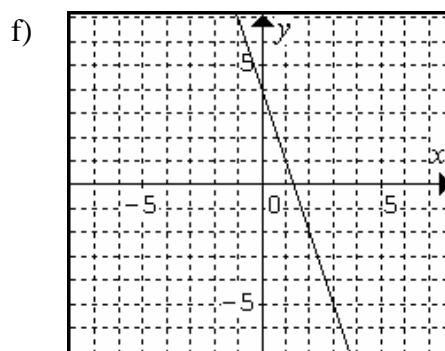
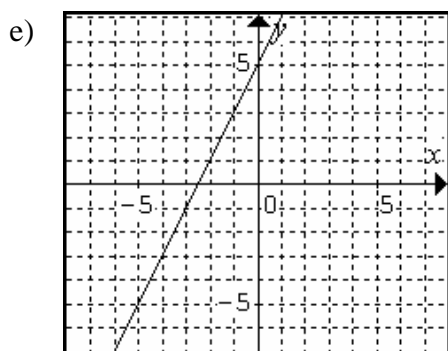
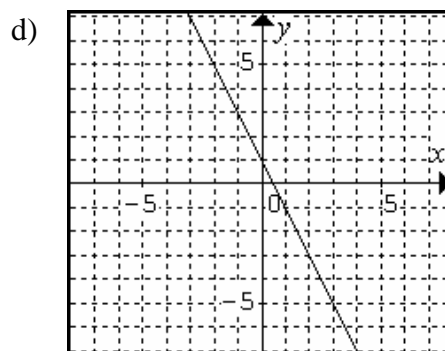
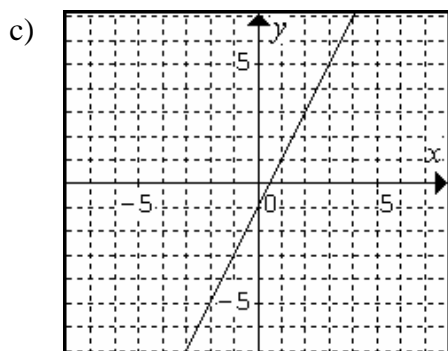
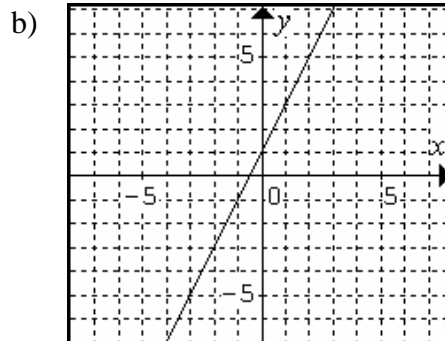
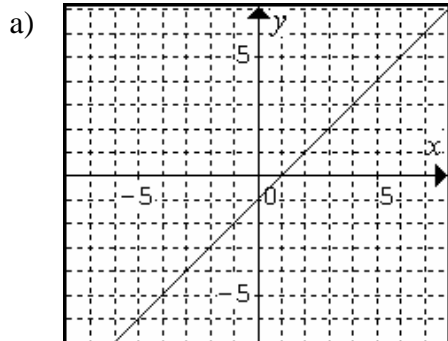
e) $f(x) = 5 + 2x$

f) $f(x) = 4 - 3x$

g) $f(x) = -1 - x$

h) $f(x) = 3x - 4$

Sol:



2º Represente las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 - 1$

b) $f(x) = x^2 - 4$

c) $f(x) = x^2 + 1$

d) $f(x) = 2x^2 - 2$

e) $f(x) = 1 - x^2$

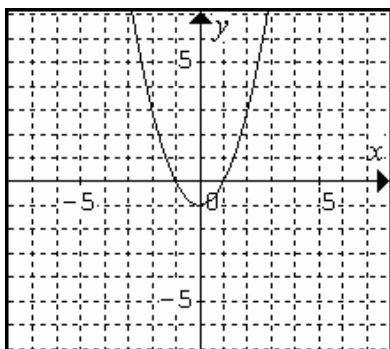
f) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

g) $f(x) = -x^2 - 2x$

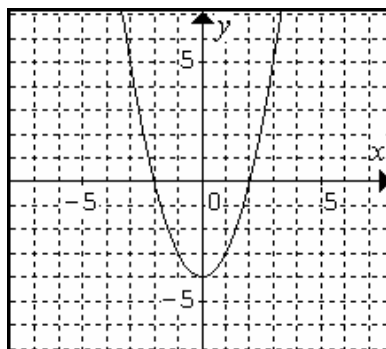
h) $f(x) = 6x - 3x^2$

Sol:

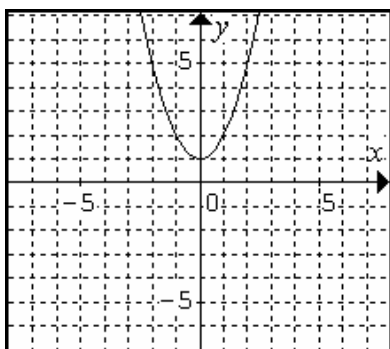
a)



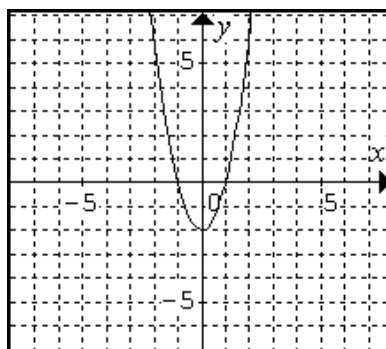
b)



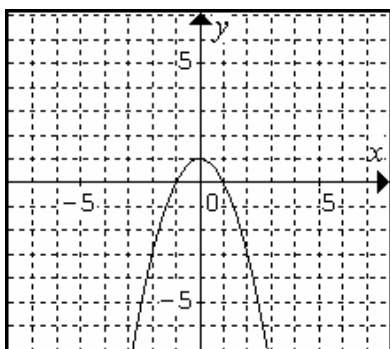
c)



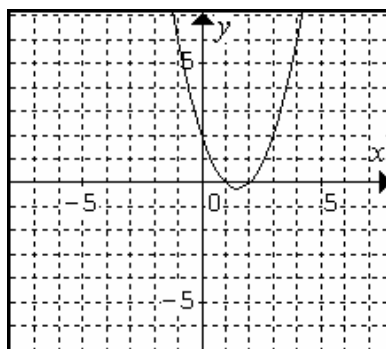
d)



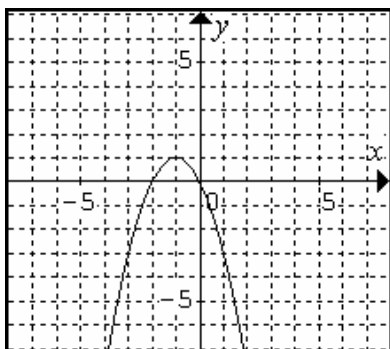
e)



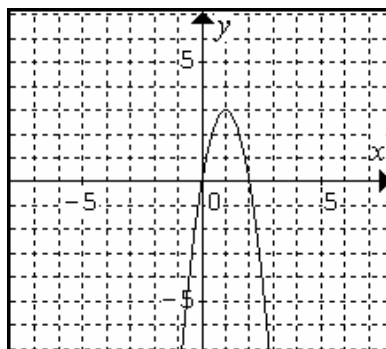
f)



g)



h)



3º Represente las siguientes funciones:

a) $f(x) = (x+1)^2$

b) $f(x) = 4 \cdot (x-2)^2$

c) $f(x) = (x-3)^2$

d) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{2}$

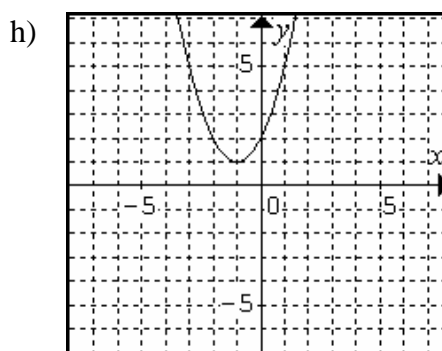
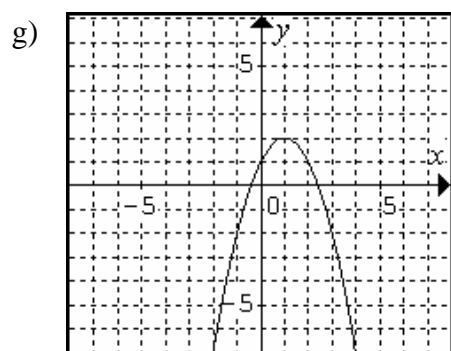
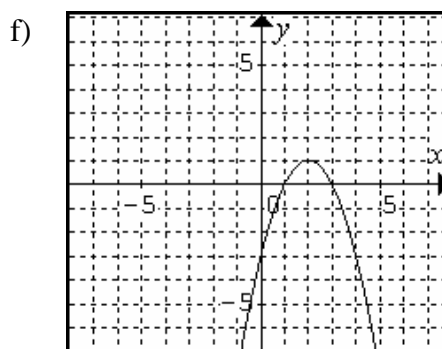
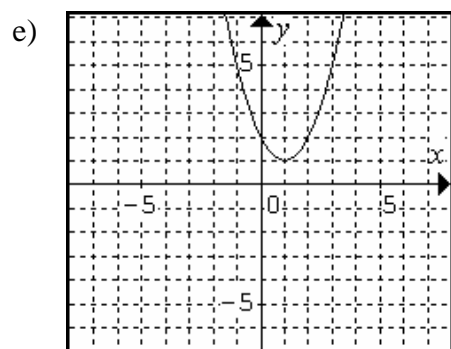
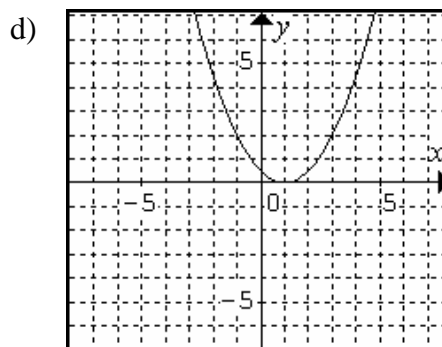
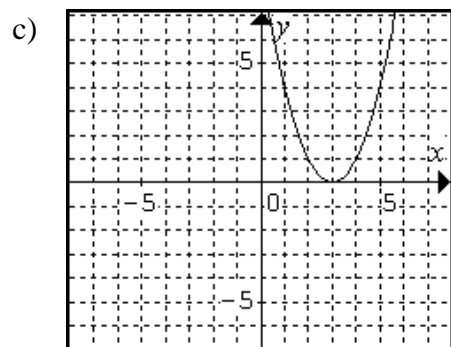
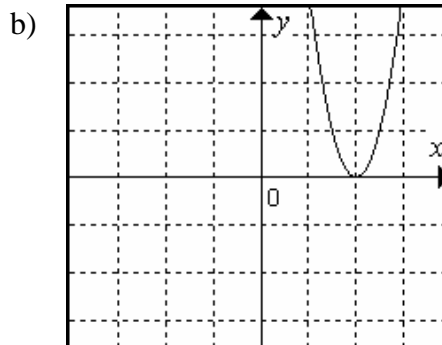
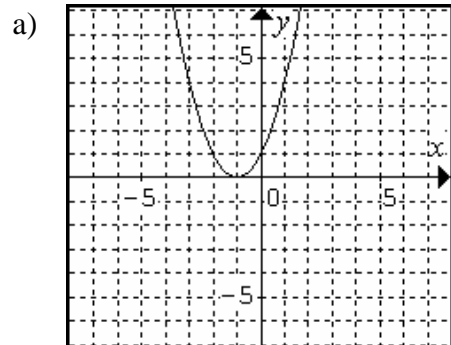
e) $f(x) = (x-1)^2 + 1$

f) $f(x) = 1 - (x-2)^2$

g) $f(x) = 2 - (x-1)^2$

g) $f(x) = 1 + (x+1)^2$

Sol:



4º Represente las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 + 2$

b) $f(x) = x^3 - 1$

c) $f(x) = (x-2)^3$

d) $f(x) = (x+2)^3 - 2$

e) $f(x) = x^3 - 4x$

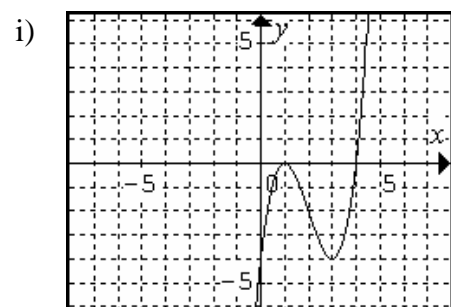
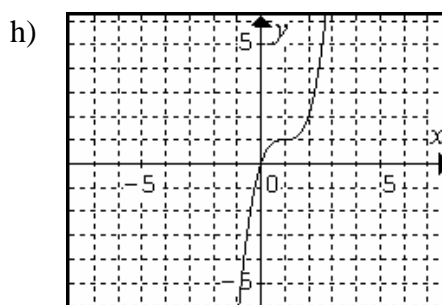
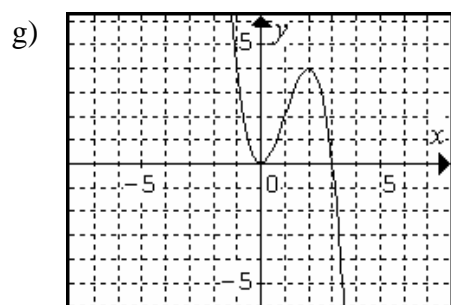
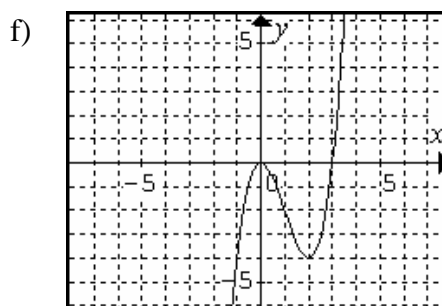
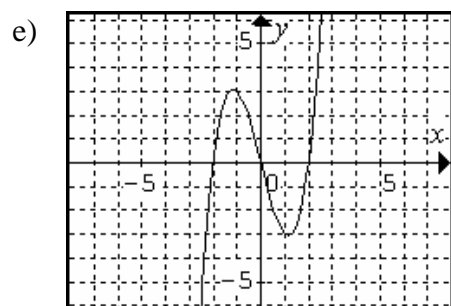
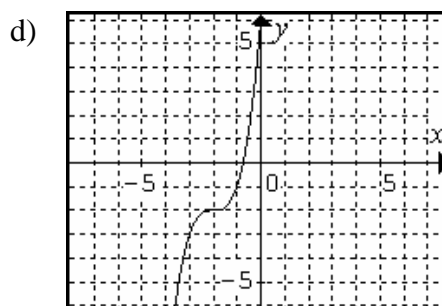
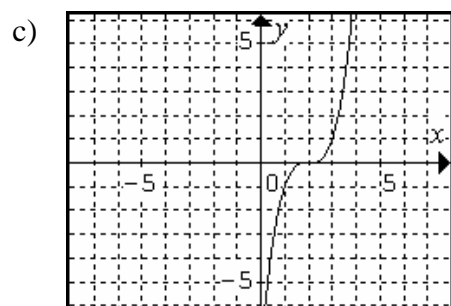
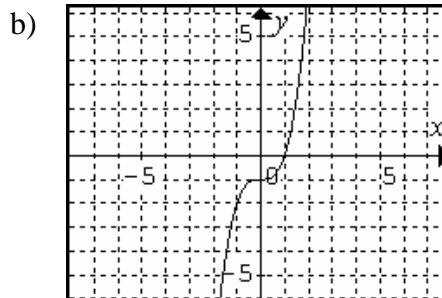
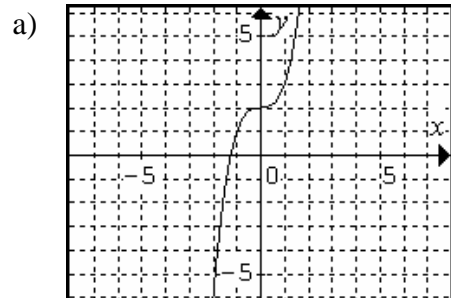
f) $f(x) = x^3 - 3x^2$

g) $f(x) = 3x^2 - x^3$

h) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

i) $f(x) = (x-1)^3 - 3 \cdot (x-1)^2$

Sol:



5º Fijándote en las gráficas que del ejercicio anterior, represente las siguientes funciones:

a) $f(x) = |x^3 + 2|$

b) $f(x) = |x^3 - 1|$

c) $f(x) = |(x-2)^3|$

d) $f(x) = |(x+2)^3 - 2|$

e) $f(x) = |x^3 - 4x|$

f) $f(x) = |x^3 - 3x^2|$

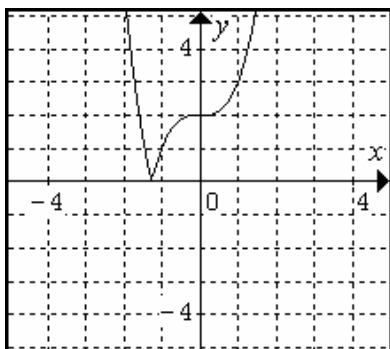
g) $f(x) = |3x^2 - x^3|$

h) $f(x) = |x^3 - 3x^2 + 3x|$

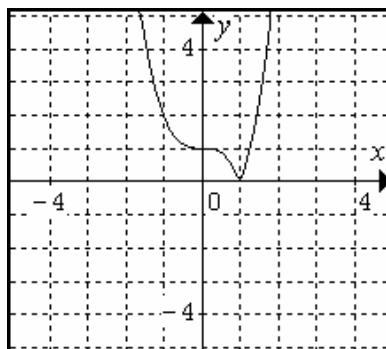
i) $f(x) = |(x-1)^3 - 3 \cdot (x-1)^2|$

Sol:

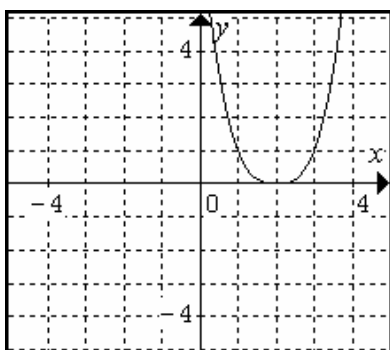
a)



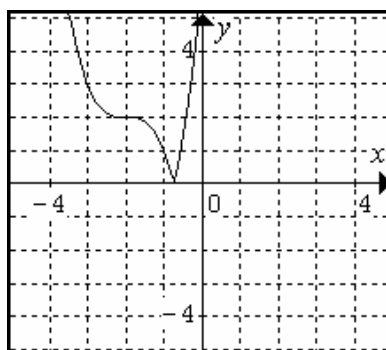
b)



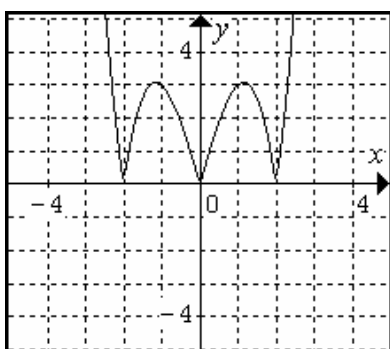
c)



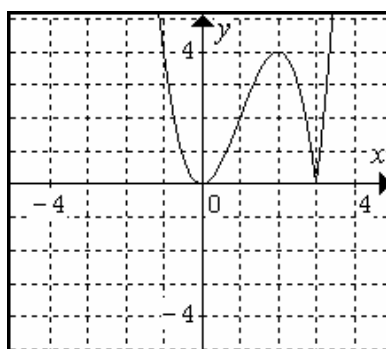
d)



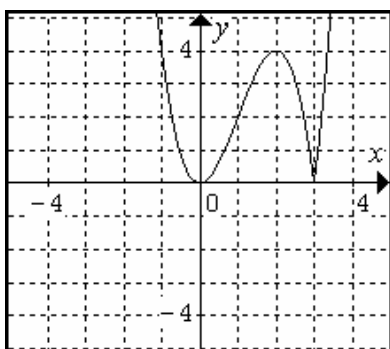
e)



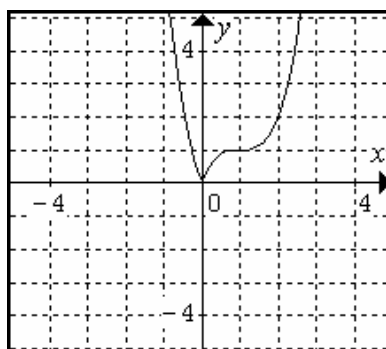
f)



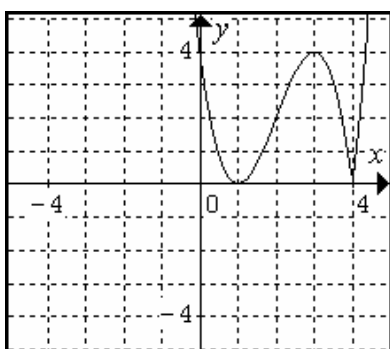
g)



h)



i)



5º Represente las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

b) $f(x) = \frac{1}{x-2}$

c) $f(x) = \frac{4}{x+1}$

d) $f(x) = \frac{-1}{x+2}$

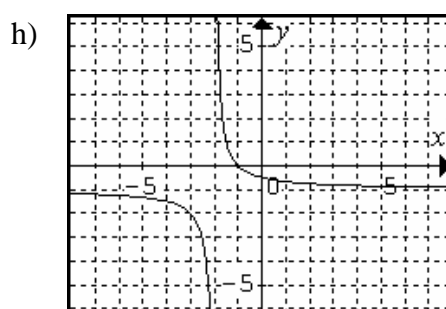
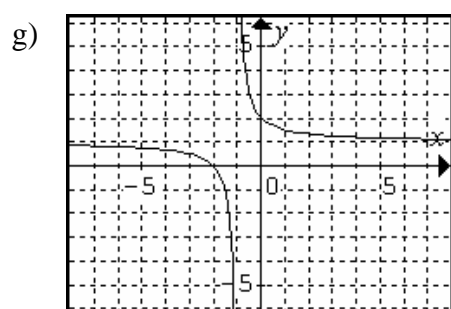
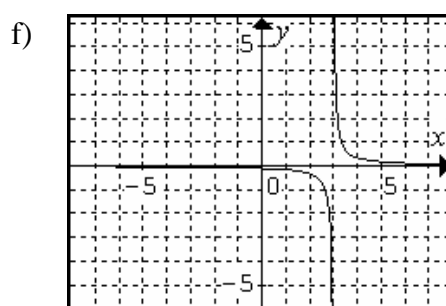
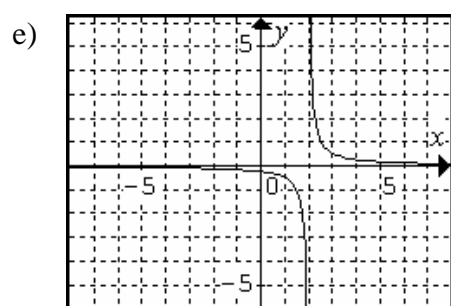
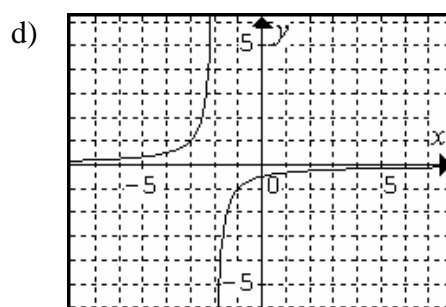
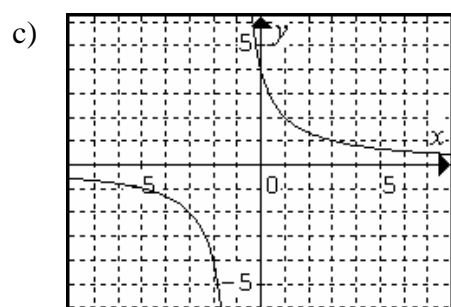
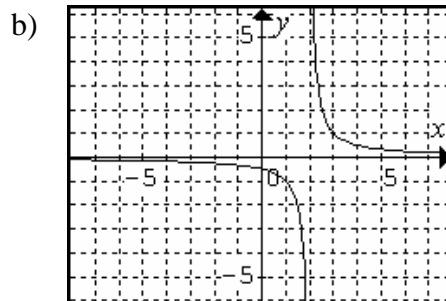
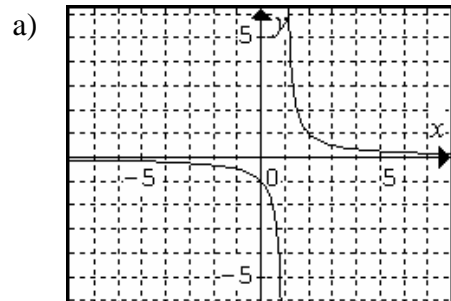
e) $f(x) = \frac{1}{2x-4}$

f) $f(x) = \frac{1}{3x-9}$

g) $f(x) = \frac{1}{x+1} + 1$

g) $f(x) = \frac{1}{x+2} - 1$

Sol:



6º Represente las siguientes funciones:

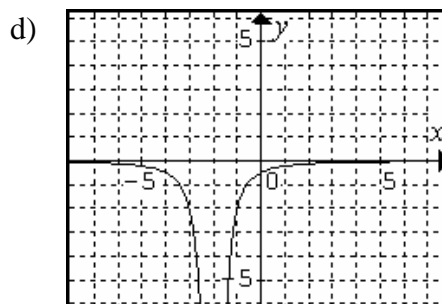
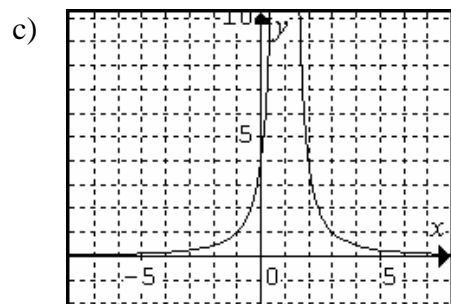
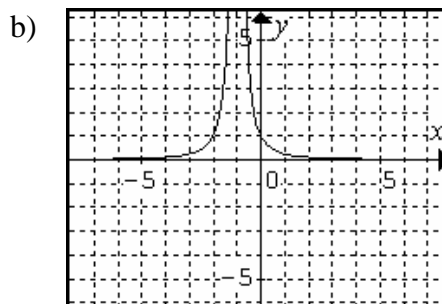
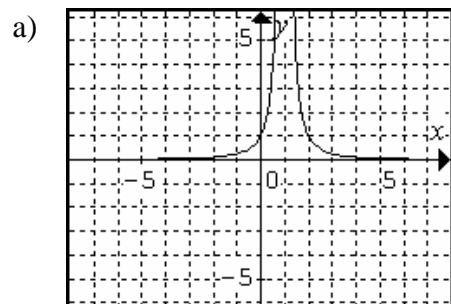
a) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

b) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

c) $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$

d) $f(x) = \frac{-2}{(x+2)^2}$

Sol:



7º Represente las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

b) $f(x) = \frac{1}{(x+3)(x-2)}$

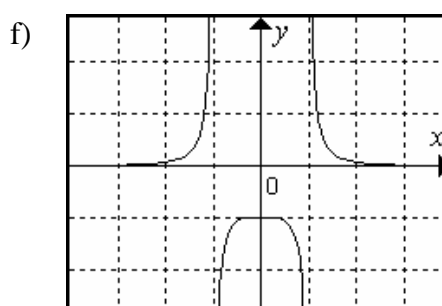
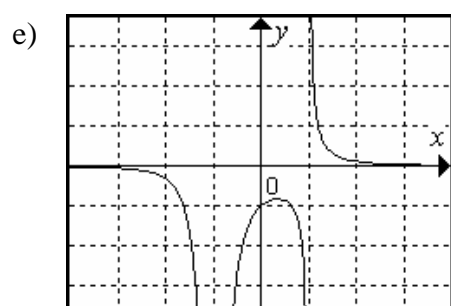
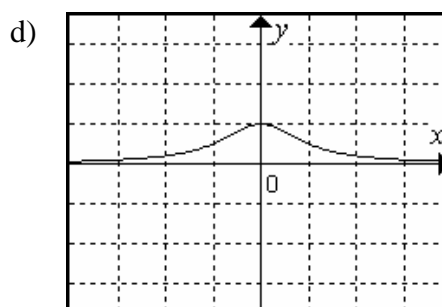
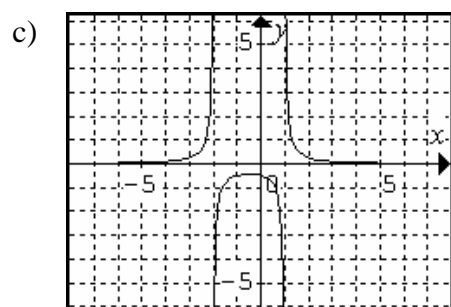
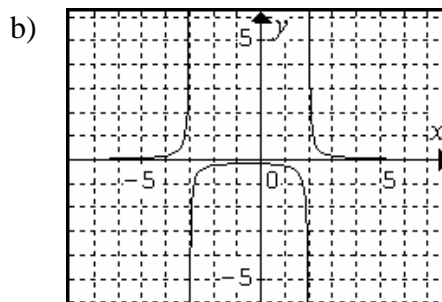
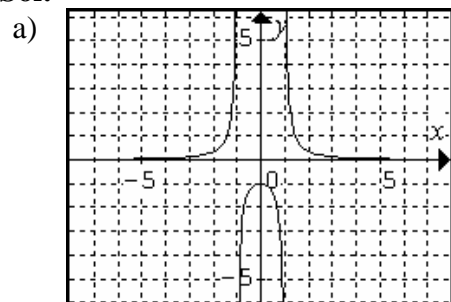
c) $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

e) $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x^2 - 1)}$

f) $f(x) = \frac{1}{x^4 - 1}$

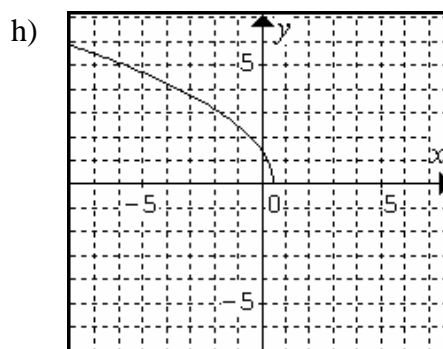
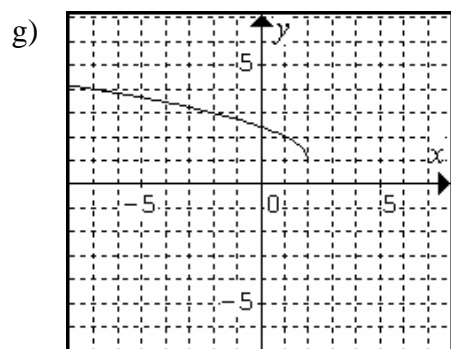
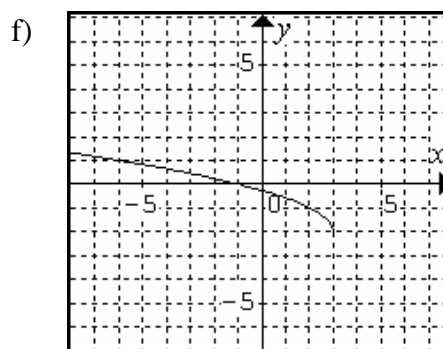
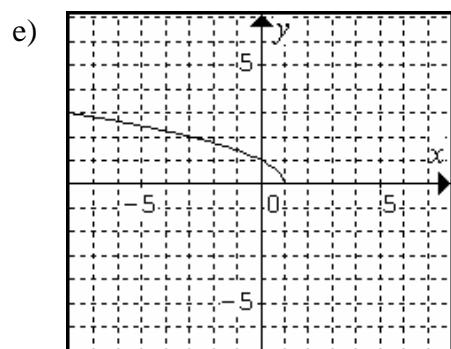
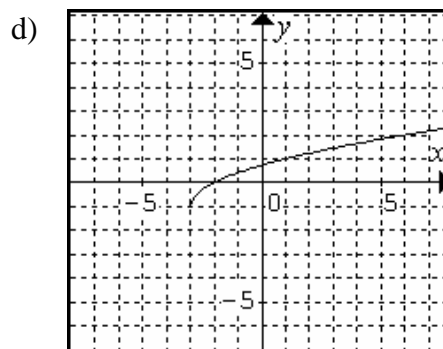
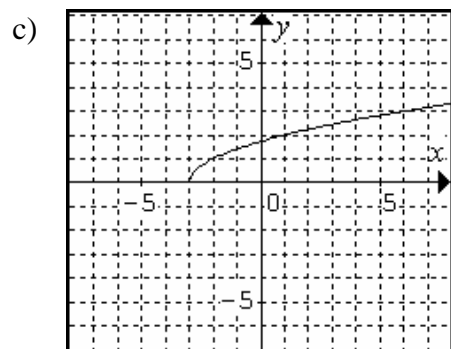
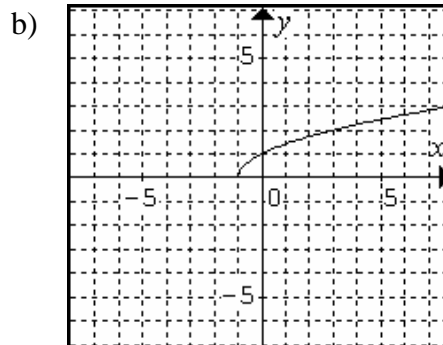
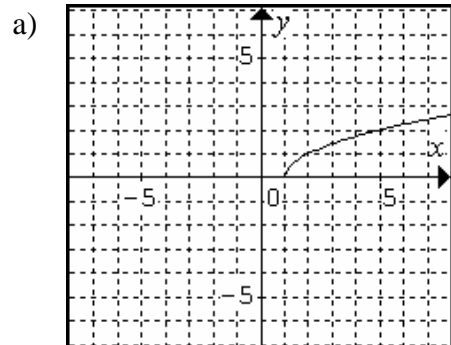
Sol:

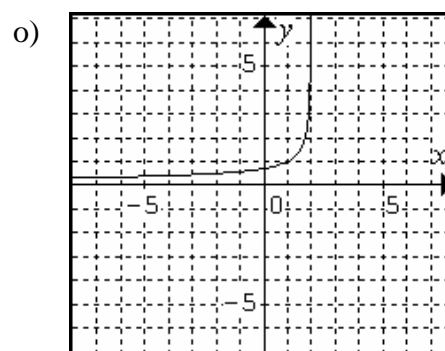
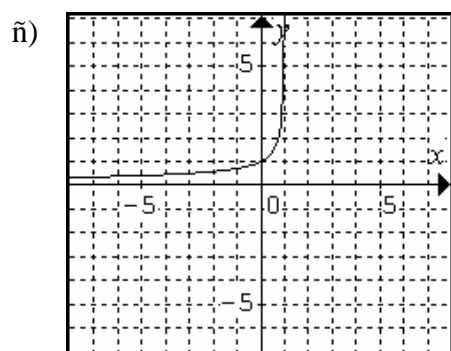
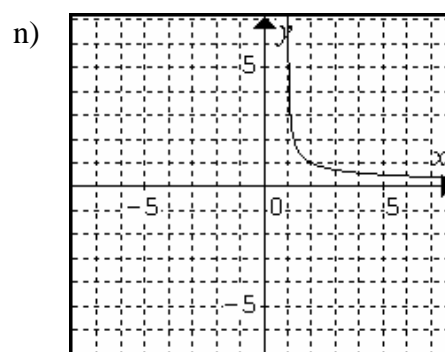
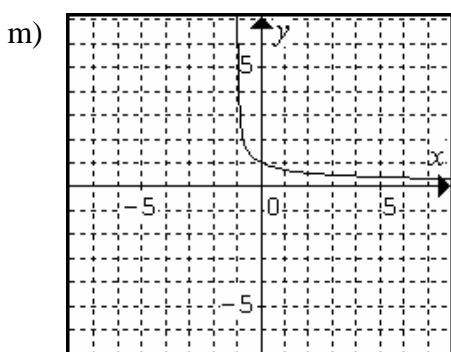
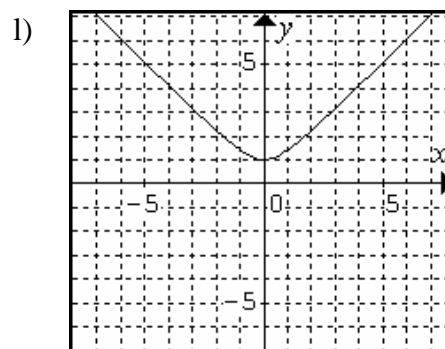
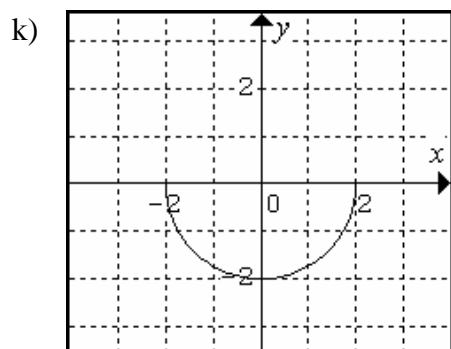
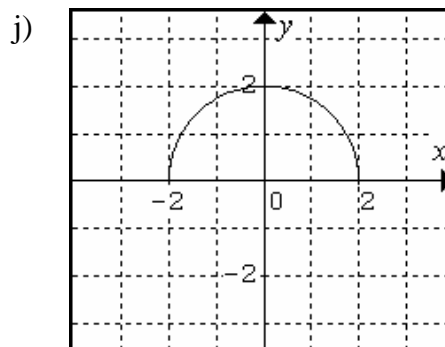
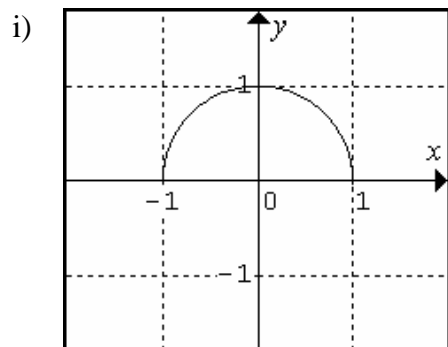


8º Represente las siguientes funciones:

- a) $f(x) = \sqrt{x-1}$ b) $f(x) = \sqrt{x+1}$ c) $f(x) = \sqrt{x+3}$ d) $f(x) = \sqrt{x+3}-1$
 e) $f(x) = \sqrt{1-x}$ f) $f(x) = \sqrt{3-x}-2$ g) $f(x) = \sqrt{2-x}+1$ h) $f(x) = \sqrt{2-4x}$
 i) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ j) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ k) $f(x) = -\sqrt{4-x^2}$ l) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$
 m) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x+1}}$ n) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x-1}}$ ñ) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{1-x}}$ o) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2-x}}$

Sol:





9º Represente las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^{x+1}$

b) $f(x) = e^{x-1}$

c) $f(x) = -e^x$

d) $f(x) = -e^{x-1}$

e) $f(x) = e^{-x}$

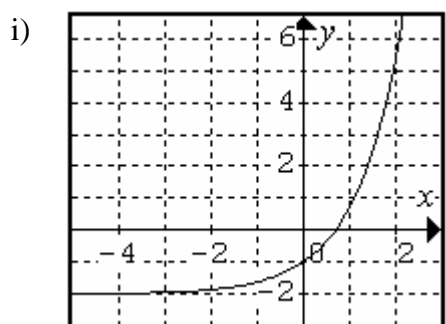
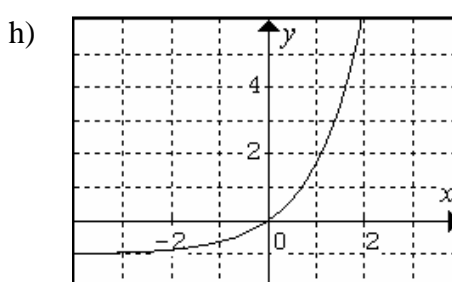
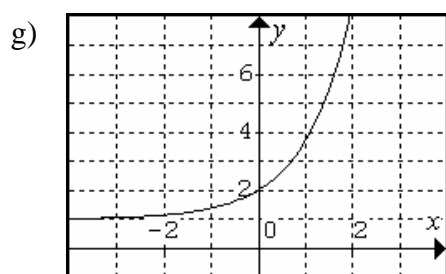
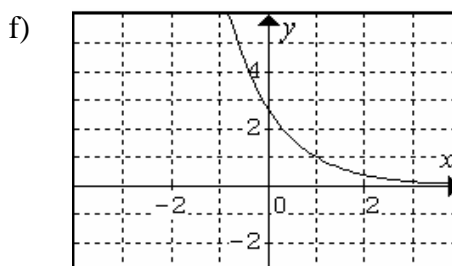
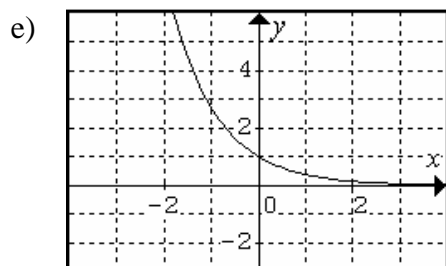
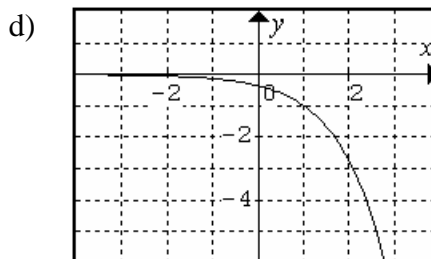
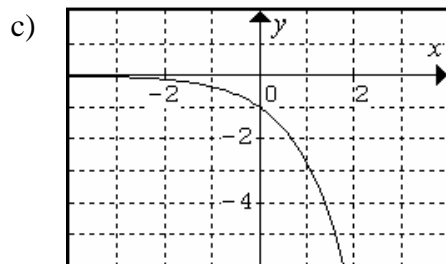
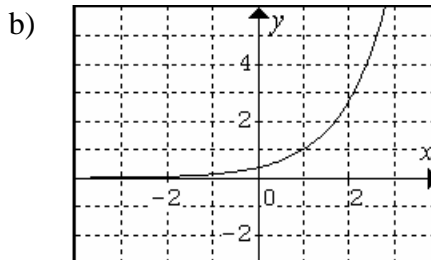
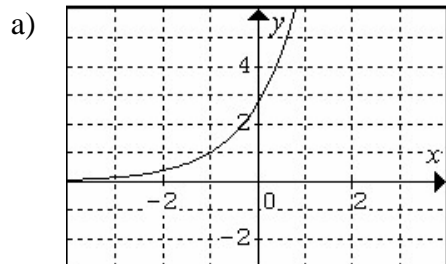
f) $f(x) = e^{-x+1}$

g) $f(x) = e^x + 1$

h) $f(x) = e^x - 1$

g) $f(x) = e^x - 2$

Sol:



10º Represente las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln(x+1)$

b) $f(x) = \ln(x-1)$

c) $f(x) = \ln(x+2)$

d) $f(x) = \ln(x-2)$

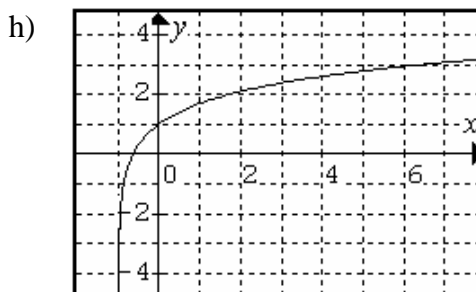
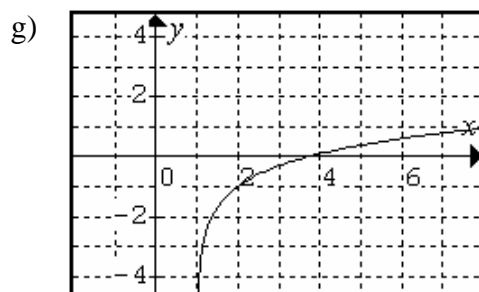
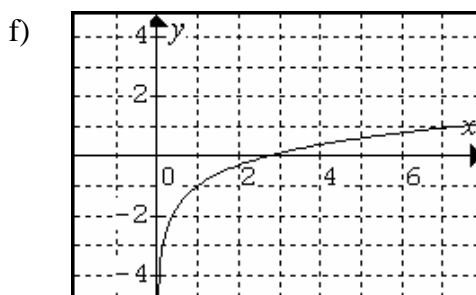
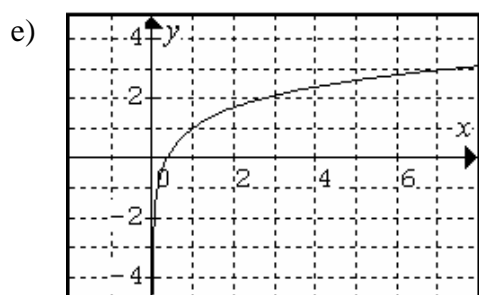
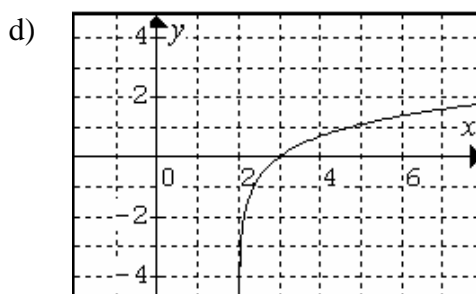
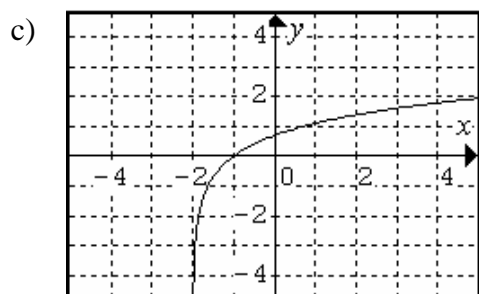
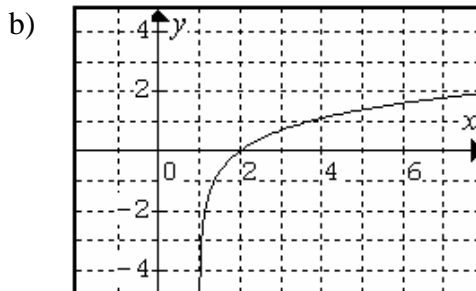
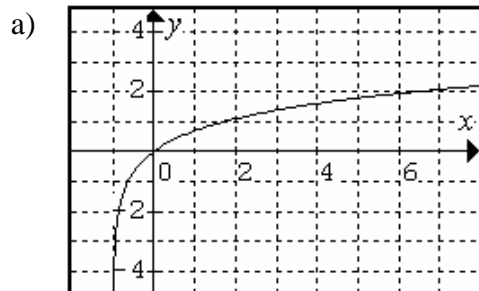
e) $f(x) = \ln(x)+1$

f) $f(x) = \ln(x)-1$

g) $f(x) = \ln(x-1)-1$

h) $f(x) = \ln(x+1)+1$

Sol:



12° Represente las siguientes funciones definidas a trozos:

a) $f(x) = \begin{cases} x-1 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 2x & x \leq 1 \\ -x+3 & x > 1 \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} x & x < -1 \\ x+3 & x \geq -1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ e) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$ f) $f(x) = \begin{cases} x+2 & x < 0 \\ x^2-2 & x \geq 0 \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq -2 \\ 3 & -2 < x < 0 \\ x^2-3x & 0 \leq x \end{cases}$

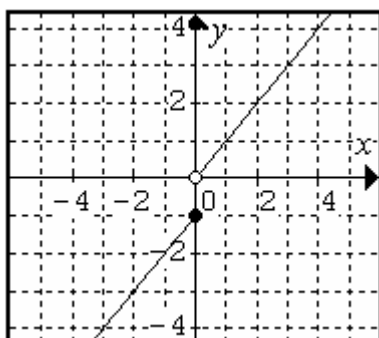
h) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & x \leq -1 \\ 2 & -1 < x < 1 \\ x^2-1 & 1 \leq x \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq -1 \\ 1-x & -1 < x < 2 \\ x^2 & 2 \leq x \end{cases}$

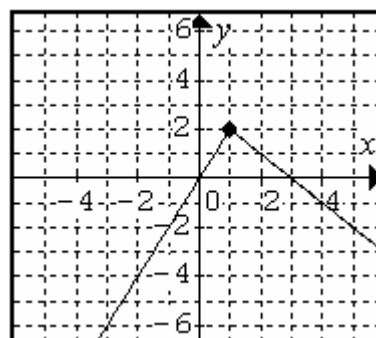
h) $f(x) = \begin{cases} 4-x^2 & x \leq -1 \\ x^2-1 & -1 < x \leq 1 \\ x^2+1 & 1 < x \end{cases}$

Sol:

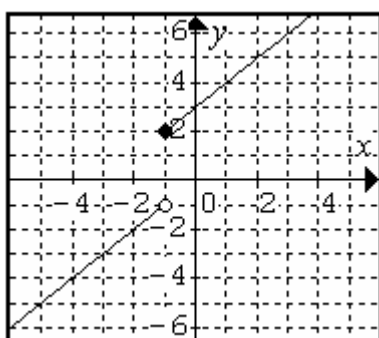
a)



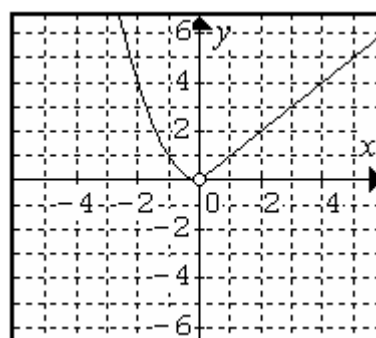
b)



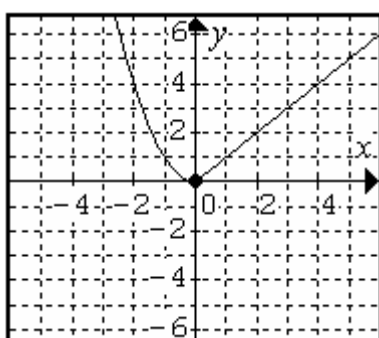
c)



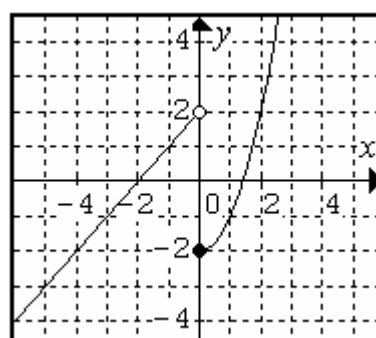
d)



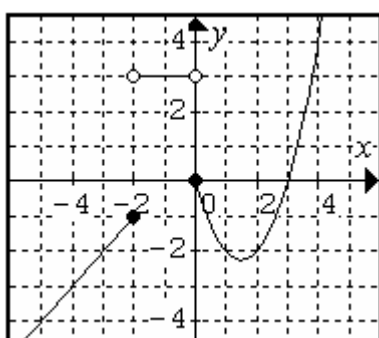
e)



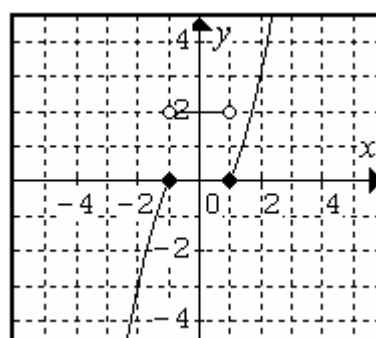
f)



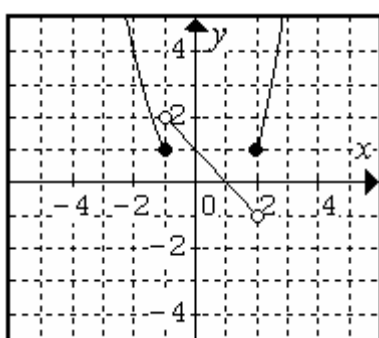
g)



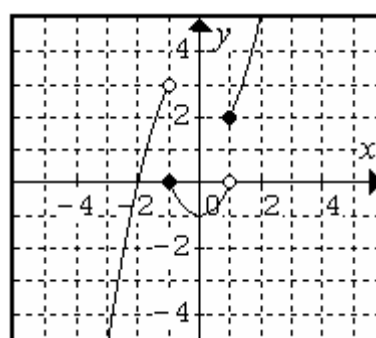
h)



i)



j)



Ejercicios de dominios:

1º Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

b) $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$

c) $f(x) = \frac{x+1}{x+5}$

d) $f(x) = \frac{x+3}{x-4}$

e) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

f) $f(x) = \frac{x}{x^2+2x+1}$

g) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-x}$

h) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$

i) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-1}$

j) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^4-2x^2+1}$

k) $f(x) = \frac{x^2+2x+3}{x^3+3x^2+3x+1}$

l) $f(x) = \frac{1}{(x^2-1) \cdot (x^2-4)}$

Sol: a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$; b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-3\}$; c) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-5\}$;

d) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{4\}$; e) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$; f) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1\}$;

g) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0, 1\}$; h) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$; i) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$;

j) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$; k) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1\}$; l) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{\pm 1, \pm 2\}$.

2º Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

b) $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x+3}$

c) $f(x) = \frac{x^2+5x}{(x+5)^2}$

d) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$

e) $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$

f) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+1}$

g) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x}$

h) $f(x) = \frac{x^3+1}{x+1}$

i) $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$

j) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^4-2x^2+1}$

k) $f(x) = \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2+2x+1}$

l) $f(x) = \frac{(x+1)(x+2)}{(x^2-1) \cdot (x^2-4)}$

m) $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x^2+x-2}$

n) $f(x) = \frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+2x}$

ñ) $f(x) = \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3+3x^2+2x}$

Sol: a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$; b) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$; c) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-5\}$; d) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$;

e) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1\}$; f) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1\}$; g) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$; h) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$;

i) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{3\}$; j) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$; k) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$; l) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1, 2\}$;

m) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$; n) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$; ñ) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0, -2\}$.

3º Determina los valores de a y b para que el dominio de las siguientes funciones sea \mathbb{R} :

a) $f(x) = \frac{x^3+ax+b}{x^2-4}$

b) $f(x) = \frac{x^3+ax^2+bx+6}{x^2+3x+2}$

c) $f(x) = \frac{ax^3+bx^2-x+2}{x^2-x-2}$

Sol: a) $a = 4, b = 0$; b) $a = 6, b = 11$; c) $a = 1, b = -2$.

4º Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x+1}$	b) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$	c) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$
d) $f(x) = \sqrt{-x^2+2x-1}$	e) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$	f) $f(x) = \sqrt{x^2-9}$
g) $f(x) = \sqrt{x^2-5x+6}$	h) $f(x) = \sqrt{x^3+2x-3}$	i) $f(x) = \sqrt[3]{x^3-1}$
j) $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$	k) $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x^2+1}}$	l) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$
m) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2+2x+1}}$	n) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-1}$	ñ) $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x-1}}$
o) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{4-x^2}}$	p) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-2x-3}{x^2-4x-5}}$	q) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+5x+6}{x^2+x}}$

Sol: a) $\text{Dom } f = [-1, \infty)$; b) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$; c) $\text{Dom } f = [-1, 1]$; d) $\text{Dom } f = \{1\}$;
 e) $\text{Dom } f = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$; f) $\text{Dom } f = (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$;
 g) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - (2, 3)$; h) $\text{Dom } f = [1, \infty)$; i) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$; j) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$;
 k) $\text{Dom } f = [2, \infty)$; l) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - (-1, 1]$; m) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - [-2, 2]$;
 n) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$; ñ) $\text{Dom } f = (1, \infty)$; o) $\text{Dom } f = (-2, 1] \cup [1, 2]$;
 p) $\text{Dom } f = (-\infty, 3] \cup (5, \infty)$; q) $\text{Dom } f = (-\infty, -3] \cup [-2, -1) \cup (0, \infty)$;

5º Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \log(x+1)$	b) $f(x) = \log(x^2+1)$	c) $f(x) = \ln(1-x^2)$
d) $f(x) = \ln(-x^2+2x-1)$	e) $f(x) = \log(x^2-4)$	f) $f(x) = \ln(x^2-9)$
g) $f(x) = \ln(x^2-5x+6)$	h) $f(x) = \log(x^3+2x-3)$	i) $f(x) = \log_2(x^3-1)$
j) $f(x) = \log\left(\frac{x-2}{x^2+1}\right)$	k) $f(x) = \frac{x-2}{\ln(x^2+1)}$	l) $f(x) = \log_5\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$
m) $f(x) = \frac{\ln(4-x^2)}{x^2+2x+1}$	n) $f(x) = \frac{1}{\log(x^2+1)-1}$	ñ) $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{1-x}\right)$
o) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{4-x^2}\right)$	p) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2-2x-3}{x^2-4x-5}\right)$	q) $f(x) = \log\left(\frac{x^2+5x+6}{x^2+x}\right)$

Sol: a) $\text{Dom } f = (-1, \infty)$; b) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$; c) $\text{Dom } f = (-1, 1)$; d) $\text{Dom } f = \emptyset$;
 e) $\text{Dom } f = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$; f) $\text{Dom } f = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$;
 g) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - [2, 3]$; h) $\text{Dom } f = (1, \infty)$; i) $\text{Dom } f = (1, \infty)$; j) $\text{Dom } f = (2, \infty)$;
 k) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$; l) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - [-1, 1]$; m) $\text{Dom } f = (-2, 2) - \{-1\}$;
 n) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{3\}$; ñ) $\text{Dom } f = (-2, 1)$; o) $\text{Dom } f = (-2, 1) \cup (1, 2)$;
 p) $\text{Dom } f = (-\infty, 3) \cup (5, \infty)$; q) $\text{Dom } f = (-\infty, -3) \cup (-2, -1) \cup (0, \infty)$.

Ejercicios de composición e inversa de funciones.

1º Sean las siguientes funciones:

$$f(x) = \ln(x+1)$$

$$g(x) = x^2 + x$$

$$h(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

Determinar las siguientes composiciones de funciones:

a) $f(g(x))$

b) $f(f(x))$

c) $f(h(x))$

d) $g(h(x))$

e) $h(f(x))$

f) $f(g(h(x)))$

Sol: a) $f(g(x)) = \ln(x^2 + x + 1)$; b) $f(f(x)) = \ln(\ln(x+1) + 1)$;

c) $f(h(x)) = \ln\left(\frac{1-x^2}{1+x^2} + 1\right)$; d) $g(h(x)) = \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2 + \frac{1-x^2}{1+x^2}$

e) $h(f(x)) = \frac{1-\ln^2(x+1)}{1+\ln^2(x+1)}$; f) $f(g(h(x))) = \ln\left(\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2 + \frac{1-x^2}{1+x^2} + 1\right)$

2º Calcule la inversa de las funciones:

a) $f(x) = \frac{3x+2}{1-x}$

b) $f(x) = \sqrt{2x+3}$

c) $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$

d) $f(x) = \frac{x+5}{2x-2}$

e) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$

f) $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

g) $f(x) = \frac{x-4}{3x-5}$

h) $f(x) = \frac{2x-1}{2x-3}$

i) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

j) $f(x) = \log(x)$

k) $f(x) = (x-1)^3$

l) $f(x) = e^{x+1}$

m) $f(x) = e^{e^x}$

n) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$

ñ) $f(x) = \ln(5x+1)$

Sol: a) $f^{-1}(x) = \frac{2-x}{x+3}$; b) $f^{-1}(x) = \frac{x^2-3}{2}$; c) $f^{-1}(x) = \frac{1-3x}{x-2}$; d) $f^{-1}(x) = \frac{2x+5}{2x-1}$;

e) $f^{-1}(x) = \frac{1+2x}{1-x}$; f) $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-2}$; g) $f^{-1}(x) = \frac{5x-4}{3x-1}$; h) $f^{-1}(x) = \frac{3x-1}{2x-2}$;

i) $f^{-1}(x) = \frac{1}{x} + 1$; j) $f^{-1}(x) = 10^x$; k) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} + 1$; l) $f^{-1}(x) = \ln x - 1$;

m) $f^{-1}(x) = \ln(\ln x)$; n) $f^{-1}(x) = \ln x - 1$; ñ) $f^{-1}(x) = \frac{e^x - 1}{5}$.

Ejercicios de simetrías y tasa de variación media:

1º Determine la simetría (si la hubiese) de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

b) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 7}$

c) $f(x) = x^5 - x^3 + x$

d) $f(x) = \frac{x}{1-x}$

e) $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

f) $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$

g) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

h) $f(x) = \cos x$

i) $f(x) = \sin x$

Sol: a) par; b) impar; c) impar; d) no tiene simetría par ni impar;
e) par; f) no tiene simetría par ni impar; g) par; h) par; i) impar.

2º Calcula la tasa de variación media en el intervalo $[0,2]$ para las funciones:

a) $f(x) = x^3 - x^2 + 3$

b) $f(x) = x^4 + 2x^2 - x$

c) $f(x) = x^2 + 2$

Sol: a) 2; b) 11; c) 2.

Ejercicios de polinomios de interpolación y extrapolación:

1º Sea una función lineal que cumple $f(0) = 1$ y $f(1) = 2$, calcule dicha función y extrapole el valor de esta en $x = 5$. **Sol:** $f(x) = x + 1$; $f(5) = 6$.

2º Calcule una función cuadrática que pasa por los puntos $f(0) = f(2) = 0$ y $f(1) = 2$, y extrapole el valor de esta en $x = -1$. **Sol:** $f(x) = -2x^2 + 4x$; $f(-1) = -6$.

3º Calcule una función cúbica de la que se sabe que:

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = -f(-1) = 1$$

$$f(-3) = -f(3) = -27$$

Extrapolé el valor de esta en $x = 5$ e interpole en $x = 2$.

Sol: $f(x) = x^3$.

4º Obtener el polinomio de interpolación para cierta función $f(x)$ de la que conocemos que:

$$f(-2) = 0$$

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = -1$$

Sol: $f(x) = -\frac{5}{6}x^2 - \frac{7}{6}x + 1$.

5º Obtener el polinomio de interpolación para cierta función $f(x)$ de la que conocemos que:

$$f(-1) = 1$$

$$f(0) = 1$$

$$f(2) = 2$$

$$f(3) = 2$$

Sol: $f(x) = -\frac{5}{12}x^3 + \frac{19}{12}x^2 - 1$.

Ejercicios para aprender a derivar: Derivación de polinomios y series de potencias

Reglas de derivación.

$$f(x) = k \rightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = ax \rightarrow f'(x) = a$$

$$f(x) = ax^n \rightarrow f'(x) = anx^{n-1}$$

$$f(x) = u(x) + v(x) \rightarrow f'(x) = u' + v'$$

Ejemplos:

$$f(x) = 4 \rightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$$

$$f(x) = 3x^2 \rightarrow f'(x) = 6x$$

$$f(x) = x^4 + 4 \rightarrow f'(x) = 4x^3$$

$$f(x) = 3x^5 - x^3 \rightarrow f'(x) = 15x^4 - 3x^2$$

$$f(x) = \frac{x^9}{7} - \frac{x^7}{\sqrt{5}} \rightarrow f'(x) = \frac{9x^8}{7} - \frac{7x^6}{\sqrt{5}}$$

Ejercicios:

1º Derive las siguientes funciones polinómicas:

a) $f(x) = x^3 + 5x^{20} + 2x$

b) $f(x) = \frac{x}{5} + 7x^4$

c) $f(x) = \frac{x^4 - 3x}{4}$

d) $f(x) = x^2 + 4$

e) $f(x) = 6x^7 + 5x^2 + 5$

f) $f(x) = 4x^5 + x^3 + 4$

g) $f(x) = \frac{5x^6}{6} - 3x^5 - 2$

h) $f(x) = \frac{x^4}{4} + x^5 - 2x^2$

i) $f(x) = \pi x^2 + \sqrt{3}x^3$

j) $f(x) = x^{-2} + 4x^{-5}$

k) $f(x) = x^{-1} - x^{-2}$

l) $f(x) = x^{-4} + 2x^{-3}$

m) $f(x) = \frac{5}{x} + \frac{4}{5}$

n) $f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{5}{x^2}$

ñ) $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^{10}}$

Sol:

a) $f'(x) = 3x^2 + 100x^{19} + 2$

b) $f'(x) = \frac{1}{5} + 28x^3$

c) $f'(x) = x^3 - \frac{3}{4}$

d) $f'(x) = 2x$

e) $f'(x) = 42x^6 + 10x$

f) $f'(x) = 20x^4 + 3x^2$

g) $f'(x) = 5x^5 - 15x^4$

h) $f'(x) = x^3 + 5x^4 - 4x$

i) $f'(x) = 2\pi x + 3\sqrt{3}x^2$

j) $f'(x) = -2x^{-3} - 20x^{-6}$

k) $f'(x) = -x^{-2} + 2x^{-3}$

l) $f'(x) = -4x^{-5} - 6x^{-4}$

m) $f'(x) = -5x^{-2}$

n) $f'(x) = -3x^{-4} - 10x^{-3}$

ñ) $f'(x) = -2x^{-3} - 10x^{-11}$

2º Derive, con un poco de ingenio, las siguientes funciones:

a) $f(x) = 7x^{5/4} - 8x^{1/2}$

b) $f(x) = x^{2/3} + 4x^{5/4}$

c) $f(x) = 3x^{1/3} + 4x^{1/4}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2} + \sqrt[5]{x}$

e) $f(x) = -2\sqrt[7]{x^2} + \sqrt[9]{x^2}$

f) $f(x) = \sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{x}}}$

Sol:

a) $f'(x) = \frac{35}{4}x^{1/4} + 4x^{-1/2}$

b) $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} + 5x^{1/4}$

c) $f'(x) = -x^{-2/3} + x^{-3/4}$

d) $f'(x) = 1 + \frac{x^{-4/5}}{5}$

e) $f'(x) = -\frac{4x^{-5/7}}{7} + \frac{2x^{-7/9}}{9}$

f) $f'(x) = \frac{x^{-119/120}}{120}$

Derivación de potencias de funciones

Reglas de derivación:

$$f(x) = au^n \rightarrow f'(x) = anu'u^{n-1}$$

Ejemplos:

$$f(x) = (x^2 + x)^3 \rightarrow f'(x) = (6x + 3)(x^2 + x)^2$$

$$f(x) = (3x + x^2)^{100} \rightarrow f'(x) = 100(3 + 2x)(3x + x^2)^{99}$$

$$f(x) = (x^3 + x^2 + 1)^6 \rightarrow f'(x) = 6 \cdot (3x^2 + 2x) \cdot (x^3 + x^2 + 1)^5$$

$$f(x) = (4x^3 + 5x^2 + 7)^{15} \rightarrow f'(x) = 15 \cdot (12x^2 + 10x) \cdot (4x^3 + 5x^2 + 7)^{14}$$

$$f(x) = \frac{(x^5 + 4x^3 + 6)^{15}}{8} \rightarrow f'(x) = \frac{15 \cdot (5x^4 + 12x^2) \cdot (x^5 + 4x^3 + 6)^{14}}{8}$$

$$f(x) = \frac{(x^3 - 2x)^3}{4} + \frac{(2x^3 - 2)^6}{5} \rightarrow f'(x) = \frac{3 \cdot (3x^2 - 2) \cdot (x^3 - 2x)^2}{4} + \frac{6 \cdot (6x^2) \cdot (2x^3 - 2)^5}{5}$$

Ejercicios:

3º Derive las siguientes funciones con paréntesis:

a) $f(x) = (x + 1)^7$

b) $f(x) = (x^2 + 3x + 5)^3$

c) $f(x) = \left(\frac{x^7}{7} + \sqrt{3}x^3 \right)^4$

d) $f(x) = \frac{(x^4 - 3x^2)^2}{3}$

e) $f(x) = (4x^{7/2} + 3)^{\sqrt{5}}$

f) $f(x) = (x^2 - x^\pi)^e$

g) $f(x) = (2x^3 + 7x)^{-5}$

h) $f(x) = (2x^3 + 3x^{-4} + 2)^7$

i) $f(x) = (x^6 + 3x^4 - 5x)^8$

j) $f(x) = \frac{(x^3 + 7x^2 - 5)^6}{7}$

k) $f(x) = \frac{(5x^4 + 3x^{-2})^5}{12}$

l) $f(x) = \frac{3}{5} \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x} \right)^3$

m) $f(x) = (5x^2 - 3x)^{5/2}$

n) $f(x) = (4x^6 - x)^{7/3}$

Sol:

a) $f'(x) = 7(x + 1)^6$

b) $f'(x) = 3(2x + 3)(x^2 + 3x + 5)^2$

c) $f'(x) = 4 \left(x^6 + 3\sqrt{3}x^2 \right) \left(\frac{x^7}{7} + \sqrt{3}x^3 \right)^3$

d) $f'(x) = \frac{2}{3} (4x^3 - 6x) (x^4 - 3x^2)$

e) $f'(x) = \sqrt{5} (14x^{5/2}) (4x^{7/2} + 3)^{\sqrt{5}-1}$

f) $f'(x) = e(2x - \pi x^{\pi-1}) (x^2 - x^\pi)^{e-1}$

g) $f'(x) = -5 \cdot (6x^2 + 7) (2x^3 + 7x)^{-6}$

h) $f'(x) = 7(6x^2 - 12x^{-5}) (2x^3 + 3x^{-4} + 2)^6$

i) $f'(x) = 8(6x^5 + 12x^3 - 5) (x^6 + 3x^4 - 5x)^7$

j) $f'(x) = \frac{6 \cdot (3x^2 + 14x) \cdot (x^3 + 7x^2 - 5)^5}{7}$

k) $f'(x) = \frac{5(20x^3 - 6x^{-3}) \cdot (5x^4 + 3x^{-2})^4}{12}$

l) $f'(x) = \frac{9}{5} \left(\frac{1}{4} - x^{-2} \right) \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x} \right)^2$

m) $f'(x) = \frac{5}{2} \cdot (10x - 3) \cdot (5x^2 - 3x)^{3/2}$

n) $f'(x) = \frac{7}{3} \cdot (24x^5 - 1) \cdot (4x^6 - x)^{4/3}$

Derivación de raíces cuadradas y raíces de orden superior

Reglas de derivación:

$$f(x) = \sqrt[n]{u} \rightarrow f'(x) = \frac{u'}{n \cdot \sqrt[n]{u}^{n-1}}$$

Ejemplos:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x} \rightarrow f'(x) = \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x}} \qquad f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1} \rightarrow f'(x) = \frac{2x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 3x)^2} \rightarrow f'(x) = \frac{2 \cdot (2x - 3) \cdot (x^2 - 3x)}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 - 3x)^4}}$$

Ejercicios:

4º Derive las siguientes funciones con paréntesis:

a) $f(x) = \sqrt[3]{2x + 4}$

b) $f(x) = \sqrt[10]{x^3 + 10x}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$

d) $f(x) = \sqrt{x + x^2 + x^3}$

e) $f(x) = \sqrt[4]{\sqrt{x} + \sqrt[3]{10x}}$

f) $f(x) = \sqrt[3]{\sqrt{x} + 3x}$

g) $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}$

h) $f(x) = \sqrt[6]{x^5 + \sqrt{x}}$

i) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x}\sqrt{x}}$

j) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

k) $f(x) = \sqrt[5]{\sqrt[3]{x^2 + 1} + 7}$

l) $f(x) = \sqrt[5]{\sqrt[3]{x^2 + 1} + 7}$

Sol:

a) $f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{(2x + 4)^2}}$

b) $f'(x) = \frac{3x^2 + 10}{10 \cdot \sqrt[10]{(x^3 + 10x)^9}}$

c) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$

d) $f'(x) = \frac{1 + 2x + 3x^2}{2\sqrt{x + x^2 + x^3}}$

e) $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{10}{3 \cdot \sqrt[3]{(10x)^2}}}{4 \cdot \sqrt[4]{(\sqrt{x} + \sqrt[3]{10x})^3}}$

f) $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + 3}{3 \cdot \sqrt[3]{(\sqrt{x} + 3x)^2}}$

g) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}} \cdot \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$

h) $f'(x) = \frac{5x^4 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{6 \cdot \sqrt[6]{(x^5 + \sqrt{x})^5}}$

i) $f'(x) = \frac{7}{8\sqrt[8]{x}}$

j) $f'(x) = \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}}$

k) $f'(x) = \frac{\frac{2x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}}}{5 \cdot \sqrt[5]{(\sqrt[3]{x^2 + 1} + 7)^4}}$

Derivación de producto de funciones

Reglas de derivación.

$$f(x) = uv \rightarrow f'(x) = u'v + v'u$$

$$f(x) = u(v(x)) \rightarrow f'(x) = u'(v(x))v'(x)$$

Ejemplos:

$$f(x) = (x^2 - 1)(x + 1) \rightarrow f'(x) = 2x(x + 1) + (x^2 - 1)$$

$$f(x) = (x + 4x^2)(x + 1) \rightarrow f'(x) = (1 + 8x)(x + 1) + (x + 4x^2)$$

$$f(x) = (x + x^7)^5 (x^2 - 1)^7 \rightarrow f'(x) = 5(1 + 7x^6)(x + x^7)^4 (x^2 - 1)^7 + 14x(x^2 - 1)^6 (x + x^7)^5$$

Ejercicios:

5º Derive las siguientes funciones:

a) $f(x) = (x^2 - 1)(x - 1)$

b) $f(x) = x^2(7x^7 + 8)$

c) $f(x) = (x^2)^3(x + 1)$

d) $f(x) = (x - 1)^{-1}(x + 1)$

e) $f(x) = \left(\frac{x}{3} + 1\right)^4 \left(\frac{4x}{3}\right)^3$

f) $f(x) = (x^2 - 3)^{-5}(x - x^2)$

g) $f(x) = (x^{-1} - 2)^{-2}(1 + x^2)$

h) $f(x) = x(x - 1)^2(x - 2)^3$

i) $f(x) = (x^2 + x)(x + 2x^2)(x + 1)$

j) $f(x) = (x^3 + 7x)(x^7 + 5x^2)$

k) $f(x) = \sqrt{x+1} \sqrt[3]{x-1}$

l) $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1} \sqrt{(x+1)^4}$

Sol:

a) $f'(x) = 2x(x - 1) + (x^2 - 1)$

b) $f'(x) = 2x(7x^7 + 8) + 49x^8$

c) $f'(x) = 6x^5(x + 1) + x^6$

d) $f'(x) = -(x - 1)^{-2}(x + 1) + (x - 1)^{-1}$

e) $f'(x) = \frac{4}{3} \left(\frac{x}{3} + 1\right)^3 \left(\frac{4x}{3}\right)^3 + 4 \left(\frac{x}{3} + 1\right)^4 \left(\frac{4x}{3}\right)^2$

f) $f'(x) = -10x(x^2 - 3)^{-6}(x - x^2) + (1 - 2x)(x^2 - 3)^{-5}$

g) $f'(x) = 2x^{-2}(x^{-1} - 2)^{-3}(1 + x^2) + 2x(x^{-1} - 2)^{-2}$

h) $f'(x) = (x - 1)^2(x - 2)^3 + 2x(x - 1)(x - 2)^3 + 3x(x - 1)^2(x - 2)^2$

i) $f'(x) = (2x + 1)(x + 2x^2)(x + 1) + (x^2 + x)(1 + 4x)(x + 1) + (x^2 + x)(x + 2x^2)$

j) $f'(x) = (3x^2 + 7)(x^7 + 5x^2) + (x^3 + 7x)(7x^6 + 10x)$

k) $f'(x) = \frac{(x+1)^{-1/2}}{2} \sqrt[3]{x-1} + \frac{(x-1)^{-2/3}}{3} \sqrt{x+1}$

l) $f'(x) = \sqrt{x^2 + 1}(x + 1)^2 + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2 + 1}}(x + 1)^2 + 2x\sqrt{x^2 + 1}(x + 1)$

Funciones racionales

Reglas de derivación:

$$f(x) = \frac{1}{v} \rightarrow f'(x) = -\frac{v'}{v^2}$$

$$f(x) = \frac{u}{v} \rightarrow f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

Ejemplos:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \rightarrow f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^{100} + 4x} \rightarrow f'(x) = \frac{2x(x^{100} + 4x) - (100x^{99} + 4)x^2}{(x^{100} + 4x)^2}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 + 1} \rightarrow f'(x) = \frac{2x(x^3 + 1) - 3x^2(x^2 + 1)}{(x^3 + 1)^2}$$

Ejercicios:

6º Derive las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{x^3 - 2x}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^5 - 6x^2}$

c) $f(x) = \frac{1}{(4x - x^2)^3}$

Sol:

a) $f'(x) = -\frac{3x^2 - 2}{(x^3 - 2x)^2}$

b) $f'(x) = -\frac{5x^4 - 12x}{(x^5 - 6x^2)^2}$

c) $f'(x) = -\frac{5 \cdot (4 - 2x)}{(4x - x^2)^5}$

7º Usando las reglas de derivación anteriores derive las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x^3 - 3}{x^2 - 1}$

b) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$

c) $f(x) = \frac{(x+3)^2}{x-2}$

d) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

e) $f(x) = \frac{(x-1)^3}{3x}$

f) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3x}}$

g) $f(x) = \frac{\sqrt{3x}}{x}$

h) $f(x) = \frac{x^i + 1}{x^e - 2}$

Sol:

a) $f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x^2 - 1) - 2x(x^3 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$

b) $f'(x) = \frac{3x^2(x^2 + 1) - 2x^4}{(x^2 + 1)^2}$

c) $f'(x) = \frac{2(x+3)(x-2) - (x+3)^2}{(x-2)^2}$

d) $f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - 2x^3}{(x^2 - 1)^2}$

e) $f'(x) = \frac{9x(x-1)^2 - 3(x-1)^3}{9x^2}$

f) $f'(x) = \frac{1}{3x} \left(\sqrt{3x} - x \frac{3}{2\sqrt{3x}} \right)$

g) $f'(x) = \frac{1}{x^2} \left(x \frac{3}{2\sqrt{3x}} - \sqrt{3x} \right)$

h) $f'(x) = \frac{ix^i(x^e - 2) - ex^e(x^i + 1)}{(x^e - 2)^2}$

8º Demostrar que las siguientes funciones tienen por derivada:

a) $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1} \rightarrow f'(x) = 2x$

b) $f(x) = \frac{x^4 + 3x^3 + x^2}{x^2 + 3x + 1} \rightarrow f'(x) = 2x$

c) $f(x) = \frac{x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x}{x^3 + 2x^2 + x} \rightarrow f'(x) = 1$

h) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + 2x + 1}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

Funciones exponenciales

Reglas de derivación:

$$f(x) = a^u \rightarrow f'(x) = u' a^u \ln a$$

$$f(x) = e^u \rightarrow f'(x) = u' e^u$$

Ejemplos:

$$f(x) = e^{4x+3} \rightarrow f'(x) = 4e^{4x+3}$$

$$f(x) = e^{x^2+3x} \rightarrow f'(x) = (2x+3)e^{x^2+3x}$$

$$f(x) = 2^{x^2} \rightarrow f'(x) = 2x \cdot 2^{x^2} \ln 2$$

$$f(x) = 2^{x^3+5x^2} \rightarrow f'(x) = (3x^2+10x)2^{x^3+5x^2} \ln 2$$

$$f(x) = \sqrt[x+2]{2^x} = 2^{\frac{x}{x+2}} \rightarrow f'(x) = \left(\frac{2}{(x+2)^2} \right) 2^{\frac{x}{x+2}} \ln 2$$

Ejercicios:

9º Usando las reglas de derivación anteriores derive las siguientes funciones:

- a) $f(x) = e^{x^3+2x}$ b) $f(x) = e^{2x+1}$ c) $f(x) = e^{-x^2}$ d) $f(x) = e^{x^7+5x^6+3}$
e) $f(x) = 2^{x^3+2x}$ f) $f(x) = 3^{2x+1}$ g) $f(x) = 4^{-x^2}$ h) $f(x) = \pi^{x^7+5x^6+3}$

Sol:

- a) $f'(x) = (3x^2+2) \cdot e^{x^3+2x}$ b) $f'(x) = 2e^{2x+1}$ c) $f'(x) = -2xe^{-x^2}$
d) $f'(x) = (7x^6+30x^5) \cdot e^{x^7+5x^6+3}$ e) $f'(x) = (3x^2+2) \cdot 2^{x^3+2x} \cdot \ln 2$
f) $f'(x) = 2 \cdot 3^{2x+1} \ln 3$ g) $f'(x) = -2x \cdot 4^{-x^2} \cdot \ln 4$
h) $f'(x) = (7x^6+30x^5) \cdot \pi^{x^7+5x^6+3} \cdot \ln \pi$

10º Derive las siguientes funciones:

- a) $f(x) = e^{x^2} + e^{x+1} + 5$ b) $f(x) = e^{x^2-2x} + 2^x$ c) $f(x) = xe^x + e^x + e$
d) $f(x) = x^4 e^{3x} + xe^{x+1}$ e) $f(x) = \left(\left((e^x)^x \right)^x \right)^x$ f) $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{x} e^{6x+1}}}$
g) $f(x) = 4^x + 7^{x^2+3x}$ h) $f(x) = \left(2^{x^2-3} \right)^x$ i) $f(x) = 10^{e^x}$
j) $f(x) = 4^{x^3} + e^{x^6} + 1$ k) $f(x) = \sqrt[x]{e} + \sqrt[x-2]{2}$ l) $f(x) = e^{\sqrt{x}} + x^e + e^{\sqrt[7]{x}}$

Sol:

- a) $f'(x) = 2xe^{x^2} + e^{x+1}$ b) $f'(x) = (2x-2)e^{x^2-2x} + 2^x \ln 2$
c) $f'(x) = 2e^x + xe^x$ d) $f'(x) = 4x^3 e^{3x} + 3e^{3x} x^4 + e^{x+1} + xe^{x+1}$
e) $f'(x) = 4x^3 e^{x^4}$ f) $f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{x^2} e^{\frac{6x+1}{x}}$
g) $f'(x) = 4^x \cdot \ln 4 + (2x+3) \cdot 7^{x^2+3x} \cdot \ln 7$ h) $f'(x) = (3x^2-3)2^{x^3-3x}$
i) $f'(x) = e^x 10^{e^x} \ln 10$ j) $f'(x) = 3x^2 4^{x^3} \ln 4 + 6x^5 e^{x^6}$
k) $f'(x) = -\frac{e^x}{x^2} - \frac{2^{\frac{1}{x-2}}}{(x-2)^2} \ln 2$ l) $f'(x) = -\frac{5e^x}{e^{2x}} \ln 5 + e \cdot x^{e-1}$

Funciones logarítmicas

Reglas de derivación:

$$f(x) = \log_a u \rightarrow f'(x) = \frac{u'}{u} \log_a e$$

$$f(x) = \ln u \rightarrow f'(x) = \frac{u'}{u}$$

Ejemplos:

$$f(x) = \log_4(8x + x^3) \rightarrow f'(x) = \frac{8 + 3x^2}{8x + x^3} \log_4 e$$

$$f(x) = \ln(3x^4 + 7) \rightarrow f'(x) = \frac{12x^3}{3x^4 + 7}$$

Ejercicios:

11º Usando las reglas de derivación anteriores derive las siguientes funciones:

- a) $f(x) = \ln(3x - 1)$ b) $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$ c) $f(x) = \ln(x^3 - 2x^4)$
 d) $f(x) = \log(6x - 5)$ e) $f(x) = \log(2x^2 - x)$ f) $f(x) = \log(2x^5 - x^{-2})$
 g) $f(x) = \log_2(6x - x^2)$ h) $f(x) = \log_3(3x^2 - x^6)$ i) $f(x) = \log_5(x^2 - 8x)$

Sol:

- a) $f'(x) = \frac{3}{3x - 1}$ b) $f'(x) = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x}$ c) $f'(x) = \frac{3x^2 - 8x^3}{x^3 - 2x^4}$
 d) $f'(x) = \frac{6}{6x - 5} \log e$ e) $f'(x) = \frac{2x - 1}{2x^2 - x} \log e$ f) $f'(x) = \frac{10x^4 + 2x^{-3}}{2x^5 - x^{-2}} \log e$
 g) $f'(x) = \frac{6 - 2x}{6x - x^2} \log_2 e$ h) $f'(x) = \frac{6x - 6x^5}{3x^2 - x^6} \log_3 e$ i) $f'(x) = \frac{2x - 8}{x^2 - 8x} \log_5 e$

12º Derive las siguientes funciones:

- a) $f(x) = \ln\left(\frac{x^3}{5}\right)$ b) $f(x) = x \ln(x + 1)$ c) $f(x) = \ln\left(\frac{x + 2}{x^2}\right)^3$
 d) $f(x) = \frac{1}{\ln \sqrt{x}}$ e) $f(x) = \ln \sqrt{x - 2}$ f) $f(x) = \log_2(x^{\sqrt{7}})$
 g) $f(x) = \log_{50}(\sqrt{4x^3 + 5})$ h) $f(x) = \frac{\ln x}{3^x}$ i) $f(x) = \ln(1 + e^{x^4 + 1})$
 j) $f(x) = e^{1 + \ln x}$ k) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 - x}{x^2 + 4}\right)$ l) $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$

Sol:

- a) $f'(x) = \frac{3}{x}$ b) $f'(x) = \ln(x + 1) + \frac{x}{x + 1}$ c) $f'(x) = \frac{3}{x + 2} - \frac{6}{x}$
 d) $f'(x) = \frac{-2}{x(\ln x)^2}$ e) $f'(x) = \frac{1}{2(x - 2)}$ f) $f'(x) = \frac{\sqrt{7}}{x} \log_2 e$
 g) $f'(x) = \frac{6x^2}{4x^3 + 5} \log_{50} e$ h) $f'(x) = \frac{3^{-x}}{x} - 3^{-x} \ln 3 \cdot \ln x$ i) $f'(x) = \frac{4x^3 e^{x^4 + 1}}{1 + e^{x^4 + 1}}$
 j) $f'(x) = \frac{1}{x} e^{1 + \ln x} = e$ k) $f'(x) = \frac{x^2 + 8x - 4}{(x^2 + 4) \cdot (x^2 - x)}$ l) $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(x) \cdot \ln(\ln x)}$

Funciones trigonométrica

Reglas de derivación:

$$f(x) = \sin u \rightarrow f'(x) = u' \cdot \cos u$$

$$f(x) = \cos u \rightarrow f'(x) = -u' \cdot \sin u$$

$$f(x) = \tan u \rightarrow f'(x) = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

Ejemplos:

$$f(x) = \sin(4x^2) \rightarrow f'(x) = 8x \cos(4x^2)$$

$$f(x) = \cos(x^2) \rightarrow f'(x) = -2x \sin(x^2)$$

$$f(x) = \tan(x^3 - x) \rightarrow f'(x) = \frac{3x^2 - 1}{\cos^2(x^3 - x)}$$

$$f(x) = \tan(\sin(x)) \rightarrow f'(x) = \frac{-\cos x}{\cos^2(\sin(x))}$$

Ejercicios:

13º Usando las reglas de derivación anteriores derive las siguientes funciones:

a) $f(x) = \cos(3x)$

b) $f(x) = \sin(3x^2 - 2)$

c) $f(x) = 4 \sin x - 3 \cos x$

d) $f(x) = \sin(3x + 5)$

e) $f(x) = \cos(\sin x)$

f) $f(x) = \sin(2x^6 + 7)$

g) $f(x) = \tan(x^3 + 2)$

h) $f(x) = \tan(2x^7 + 2x)$

i) $f(x) = \tan(x - \cos x)$

Sol:

a) $f'(x) = -3 \sin(3x)$

b) $f'(x) = 6x \cdot \cos(3x^2 - 2)$

c) $f'(x) = 4 \cos x + 3 \sin x$

d) $f'(x) = 3 \cos(3x + 5)$

e) $f'(x) = -\cos x \sin(\sin x)$

f) $f'(x) = 12x^5 \cdot \cos(2x^6 + 7)$

g) $f'(x) = \frac{3x^2}{\cos^2(x^3 + 2)}$

h) $f'(x) = \frac{14x^6 + 2}{\cos^2(2x^7 + 2x)}$

i) $f'(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos^2(x - \cos x)}$

14º Derive las siguientes funciones y simplifíquelas si fuese posible:

a) $f(x) = \sin(\sqrt{3x^2 - 5x})$

b) $f(x) = \sin^2(x)$

c) $f(x) = 3 \sin^2(2x - 3)$

d) $f(x) = \sqrt[5]{\sin(3x)}$

e) $f(x) = \cos^2(x^3)$

f) $f(x) = \cos^4(3x^4)$

g) $f(x) = \sin(x^2) \cos(x)$

h) $f(x) = \sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}$

i) $f(x) = \tan x \cos x$

j) $f(x) = \sqrt{2 \tan x \sin(2x)}$

k) $f(x) = \sqrt[6]{\tan \sqrt{x}}$

l) $f(x) = \cotan(x)$

Sol:

a) $f'(x) = \frac{6x - 5}{2\sqrt{3x^2 - 5x}} \cos(\sqrt{3x^2 - 5x})$

b) $f'(x) = 2 \sin x \cos x$

c) $f'(x) = 12 \sin(2x - 3) \cos(2x - 3)$

d) $f'(x) = \frac{3 \cos(3x)}{5\sqrt[5]{(\sin(3x))^4}}$

e) $f'(x) = -6x^2 \sin x^3 \cos x^3$

f) $f'(x) = -48x^3 \sin(3x^4) \cos^3(3x^4)$

g) $f'(x) = 2x \cos(x^2) \cos x - \sin(x^2) \sin x$

h) $f'(x) = \frac{-\sin(2x)}{\sqrt{\cos(2x)}}$

i) $f'(x) = \cos x$

j) $f'(x) = 4 \cos(2x)$

k) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} \frac{1}{6\sqrt[6]{(\tan \sqrt{x})^5}}$

l) $f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$

Reglas de derivación:

$$f(x) = \arcsin u \rightarrow f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$f(x) = \arccos u \rightarrow f'(x) = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$f(x) = \arctan u \rightarrow f'(x) = \frac{u'}{1+u^2}$$

Ejemplos:

$$f(x) = \arcsin(x^3) \rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}} \quad f(x) = \arctan(e^{3x}) \rightarrow f'(x) = \frac{3e^{3x}}{1+e^{6x}}$$

$$f(x) = \arccos(e^x + x) \rightarrow f'(x) = -\frac{e^x + 1}{\sqrt{1-(e^x + x)^2}}$$

Ejercicios:

15° Usando las reglas de derivación anteriores derive las siguientes funciones:

- a) $f(x) = \arcsin(x^3)$ b) $f(x) = \arcsin(x+1)$ c) $f(x) = \arcsin(e^{5x})$
d) $f(x) = \arccos(2x^5 + x)$ e) $f(x) = \arccos(e^{3x} + 5x)$ f) $f(x) = \arccos(\ln x)$
g) $f(x) = \arctan(x^2)$ h) $f(x) = \arctan(x^4 + 3x)$ i) $f(x) = \arctan(\ln x)$

Sol:

- a) $f'(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$ b) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(x+1)^2}}$ c) $f'(x) = \frac{5e^{5x}}{\sqrt{1-e^{10x}}}$
d) $f'(x) = -\frac{10x^4 + 1}{\sqrt{1-(2x^5 + x)^2}}$ e) $f'(x) = -\frac{3e^{3x} + 5}{\sqrt{1-(e^{3x} + 5x)^2}}$ f) $f'(x) = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(\ln x)^2}}$
g) $f'(x) = \frac{2x}{1+x^4}$ h) $f'(x) = \frac{4x^3 + 3}{1+(x^4 + 3x)^2}$ i) $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{1+(\ln x)^2}$

16° Derive las siguientes funciones y simplifíquelas si fuese posible:

- a) $f(x) = \arcsin\left(\frac{x+1}{e^x}\right)$ b) $f(x) = e^{\cos x} \arcsin x$ c) $f(x) = \frac{\arcsin(3x-2)}{x}$
d) $f(x) = \arcsin(\arccos x)$ e) $f(x) = \arccos \sqrt{1-\sin^2 x}$ f) $f(x) = \sin^2(\arccos x)$

Sol:

- a) $f'(x) = \frac{-x}{e^x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{e^x}\right)^2}}$ b) $f'(x) = -\sin(x) \cdot e^{\cos x} \arcsin x + \frac{e^{\cos x}}{\sqrt{1-x^2}}$
c) $f'(x) = \frac{\frac{3}{\sqrt{1-(3x-2)^2}} - \arcsin(3x-2)}{x^2}$ d) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\arccos^2 x}}$
e) $f'(x) = 1$ f) $f'(x) = -2x$

Introducción a la combinatoria.

1. Introducción.

La combinatoria es una rama de las matemáticas que estudia colecciones finitas de objetos que satisfacen unos criterios especificados, y se ocupa, en particular, del "recuento" de los objetos de dichas colecciones (combinatoria enumerativa) y del problema de determinar si cierto objeto "óptimo" existe (combinatoria extremal). Nosotros nos centraremos en el estudio de la combinatoria enumerativa.

Se puede considerar que en Occidente la combinatoria surge en el siglo XVII con los trabajos de Blaise Pascal y de Pierre Fermat sobre la teoría de juegos de azar. Estos trabajos, que formaron los fundamentos de la teoría de la probabilidad, contenían asimismo los principios para determinar el número de combinaciones de elementos de un conjunto finito, y así se estableció la tradicional conexión entre combinatoria y probabilidad.



Blaise Pascal
(1623-1662)

2. Principio o teorema del palomar o de Dirichlet.

"Si se reparten n objetos (palomas) en k cajas (nidos), y n es mayor que k , entonces necesariamente alguna de las cajas (nidos) recibe más de un objeto (palomas)." Es decir, imaginémonos que tenemos un palomar con 9 nidos, y que hay un total de 10 palomas que desean ocuparlos, si finalmente todas las palomas terminan metidas en los nidos, esto significa que existe al menos un nido en el que como mínimo hay dos palomas metidas.



A este principio, se le conoce como principio del palomar. No es un teorema que te permita calcular algo concreto, ni tampoco es un teorema que garantice la unicidad de la solución buscada, pues podría haber dos nidos con dos palomas y un nido quedar vacío. El principio del Palomar, a pesar de su simplicidad, usualmente es utilizado para probar la existencia de un número determinado de configuraciones sobre conjuntos finitos. Veamos otros ejemplos:

Ejemplos:

- E1** En una fiesta a la que asisten 400 personas, ¿cuántos de los asistentes, como mínimo, podrían encontrar otra persona en la fiesta que tuviese su mismo día de aniversario?

Solución: Como el número de días que tiene un año es de 365 días y hay un total de cuatrocientas personas, esto significa por el principio del palomar, que al menos existe un día en el que como mínimo dos personas cumplen años.

- E2** Si las personas tenemos un máximo de 100000 pelos en la cabeza y Madrid tiene un millón de habitantes ¿existen dos personas con idéntica cantidad de pelos en sus respectivas cabezas?

Solución: Nuevamente, y según el principio del palomar, el número de Madrileños es mayor que el número de pelos que una persona tiene en la cabeza, luego existen dos personas con idéntica cantidad de pelos en sus cabezas en Madrid.

3. Principios básicos en combinatoria.

El análisis combinatorio, que incluye el estudio de las permutaciones, variaciones y combinaciones, está relacionado con la determinación del número de posibilidades lógicas de que un suceso ocurra. Existen dos principios fundamentales para el cálculo.

Principio de la suma:

Supongamos que un suceso E puede ocurrir de m maneras y un segundo suceso F puede ocurrir de n maneras, y supongamos que ambos sucesos no pueden ocurrir al mismo tiempo. Entonces, los sucesos E o F pueden ocurrir de $m + n$ maneras.

Principio del producto:

Supongamos que un suceso E puede ocurrir de m maneras y, que, independientemente de este suceso, existe otro F que puede ocurrir de n maneras. Entonces las combinaciones de E y F pueden ocurrir de $m \cdot n$ maneras.

Ejemplos:

- E3** Un restaurante tiene en su menú del día cuatro primeros, tres segundos y cinco postres. El restaurante oferta en total: $4 + 3 + 5 = 9$ platos distintos a sus clientes, aquí usamos el principio de la suma. Un cliente que acuda al restaurante y consuma íntegramente la oferta del menú, puede comer de $4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ formas diferentes, estamos usando el principio del producto.
- E4** Una carrera cuenta con 4 grupos de matemáticas, 2 de química y 3 de física en un curso de primero y a horarios distintos. La universidad en total oferta en primero $4 + 2 + 3 = 9$ posibilidades si escogemos un curso de cada, estamos aplicando ahora el principio de la suma. Pero si un alumno debe matricularse en las tres materias, esto significa que puede escoger un total $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ horarios diferentes, estamos aplicando ahora el principio de la multiplicación.

4. El factorial de un número entero.

Para todo número natural n , se llama factorial de n al producto de todos los naturales desde 1 hasta n . Es representado como un número al que se le ha colocado al lado un signo de exclamación, es decir:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad (1)$$

Veamos unos ejemplos.

Ejemplos:

- E5** Calcule el factorial de todos los números del 1 al 9.

Solución: Utilizando la expresión (1):

$$1! = 1$$

$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

$$8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$$

$$9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362880$$

$$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$$

Matemáticamente, se define que el factorial del cero es uno ($0! = 1$).

5. Combinaciones sin repetición.

Una combinación de m objetos tomados de n en n es cualquier selección n de los objetos, sin importarnos el orden. El número de combinaciones sin repetición viene dado por la expresión:

$$C_{m,n} = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} \quad (2)$$

Ejemplo:

E6 ¿De cuantas formas es posible combinar de tres en tres las letras a, b, c y d ?

Solución: Las combinaciones posibles son cuatro:

$$(a, b, c) \quad (a, b, d) \quad (a, d, c) \quad (d, b, c)$$

El orden de las letras da igual, solo hay cuatro formas de combinar las letras. Utilizando la expresión (2):

$$C_{4,3} = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$$

E7 Siete amigos hacen cola para el cine. Al llegar sólo quedan 4 entradas. ¿De cuántas formas podrían repartirse estas entradas para ver la película?

Solución: Se trata de siete elementos tomados de 4 en 4 sin importarnos el orden. Podemos aplicar la expresión (2) para combinaciones:

$$C_{7,4} = \binom{7}{4} = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 7 \cdot 5 = 35$$

E8 ¿De cuantas formas es posible extraer tres cartas de un conjunto de cuarenta?

Solución: No importa el orden de la extracción de las cartas, luego son combinaciones de cuarenta cartas tomadas de tres en tres. Usando la expresión (2):

$$C_{40,3} = \binom{40}{3} = \frac{40!}{3!(40-3)!} = \frac{40!}{3! \cdot 37!} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37!}{3! \cdot 37!} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{3 \cdot 2} = 9880$$

E9 De un grupo de 12 alumnos deben formarse dos equipos de cuatro participantes para que asistan a tres pruebas diferentes. ¿Cuántas clasificaciones distintas pueden realizarse?

Solución: Como no importa el orden, se trata de combinaciones. Hay que formar dos equipos de cuatro personas, para el primero equipo consideraremos combinaciones de 12 personas tomadas de 4 en 4:

$$C_{12,4} = \binom{12}{4} = \frac{12!}{4!(12-4)!} = \frac{12!}{4! \cdot 8!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{4! \cdot 8!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 495$$

El segundo equipo como combinaciones de 8 personas tomadas de 4 en 4:

$$C_{8,4} = \binom{8}{4} = \frac{8!}{4!(8-4)!} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 70$$

Calculamos ahora todas las combinaciones posibles usando el principio del producto:

$$N = C_{12,4} \cdot C_{8,4} = 495 \cdot 70 \cdot 1 = 34650$$

Ejercicios:

- 1º ¿Cuántas comisiones de tres alumnos pueden formarse con los 35 alumnos de una clase?
Sol: 6545.
- 2º Con una baraja de 52 cartas, ¿cuántos grupos diferentes de cinco cartas se pueden hacer?
Sol: 2598960.
- 3º Cuantos equipos de 5 atletas se podrían formar para participar en una competición con los doce atletas mejor preparados? **Sol:** 792.
- 4º En una carrera en la que toman parte 8 caballos se juega una apuesta que consiste en acertar los dos primeros sin tener en cuenta el orden. ¿Cuántas apuestas diferentes pueden jugarse en esa carrera? **Sol:** 28.
- 5º En una liga de baloncesto juegan 20 equipos, todos contra todos dos veces, ida y vuelta. ¿Cuántos partidos se habrán jugado al final de la misma? **Sol:** 380.
- 6º En una empresa de 48 trabajadores, hay que despedir a 6. ¿Cuántas combinaciones de trabajadores se pueden despedir? **Sol:** 12271512.
- 7º Un club de baloncesto dispone de 10 jugadores de los cuales juegan 5 a la vez. ¿Cuántos equipos distintos de 5 jugadores pueden sacar el entrenador para cada partido? **Sol:** 252.
- 8º Suponiendo que existieran 100 elementos distintos en la naturaleza y que cada sustancia estuviese formada por tres exclusivamente, y todos diferentes. ¿Cuántas sustancias distintas tendríamos? **Sol:** 161700.
- 9º En una reunión hay diez personas. ¿Cuántos grupos de tres personas se pueden formar?
Sol: 120.
- 10º Para jugar al dominó, siete fichas hacen un juego. Si el dominó tiene 28 fichas, ¿cuántos juegos diferentes se pueden hacer? **Sol:** 1184040.
- 11º En una línea férrea hay 18 estaciones. Si el tren para en todas las estaciones, ¿cuántos tipos de billetes de viajes distintos de ida y vuelta pueden realizarse entre ellas?
Sol: 153.
- 12º Con solo seis pesas de 1, 2, 5, 10, 20 y 50 g, ¿Cuántas pesadas posibles pueden hacerse?
Sol: 63.
- 13º Un estudiante tiene que contestar 8 de las 10 preguntas de un examen. ¿De cuántas formas diferentes puede contestar? ¿Y si las tres primeras son obligatorias? ¿Y si de las cinco primeras ha de contestar a cuatro? **Sol:** 45, 21, 25.
- 14º Una persona está interesada en contar todos los posibles resultados en el juego de la Lotería Primitiva (49 números del 1 al 49 y debemos elegir 6). ¿Cuántos boletos diferentes debe hacer para tener garantizado que le toque la lotería? **Sol:** 13983816.
- 15º Existen 10 tipos de antiretrovirales contra el VIH. Para evitar resistencias del virus a un tratamiento con solo antiretroviral, se suelen administrar tres al mismo tiempo. ¿Cuántas terapias diferentes de tres antiretrovirales nos es posible diseñar? **Sol:** 120.

6. Combinaciones con repetición.

Es el conjunto de todas las disposiciones distintas que se pueden formar tomando n elementos entre los m , en los que eventualmente pueden aparecer elementos repetidos y con la condición de que dos disposiciones serán distintas si tienen distintos elementos, es decir, no se tiene en cuenta el orden en la disposición. El número de disposiciones se calcula mediante la expresión:

$$CR_{m,n} = \binom{m+n-1}{n} = \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!} \quad (3)$$

Ejemplos:

- E10** Se reparten 3 becas iguales en una clase de 10 alumnos. Los alumnos, pueden optar a más de una beca. ¿De cuantos modos posibles pueden repartirse estas becas entre los diez alumnos?

Solución: Al ser iguales las becas, no es posible darles un orden de importancia, y como un alumno puede optar a más de una beca, estamos ante combinaciones con repetición:

$$CR_{10,3} = \binom{10+3-1}{3} = \frac{(10+3-1)!}{3!(10-1)!} = \frac{12!}{3!9!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$$

- E11** ¿Cuántas fichas tiene el juego del dominó?

Solución: Una ficha de dominó es un rectángulo en el que hay dos partes, en cada una de ellas hay una serie de puntos (de 0 a 6) que indican la puntuación de esa parte.

$$CR_{7,2} = \binom{7+2-1}{2} = \frac{(7+2-1)!}{2!(7-1)!} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{2 \cdot 6!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

- E12** Una urna contiene 7 bolas de colores, dos rojas, dos blancas y tres negras. Calcular todas las combinaciones posibles de tres en tres.

Solución: Desarrollaremos el problema como combinaciones con repetición de tres elementos tomados de tres en tres.

$$CR_{3,3} = \binom{3+3-1}{3} = \frac{(3+3-1)!}{3!(3-1)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

Pero ahora, hay que descontar dos casos, el caso de las tres bolas rojas y el de las tres blancas, pues no podemos sacar de la urna más que dos bolas rojas o dos blancas. Por tanto el número total de casos es de:

$$N = 10 - 2 = 8$$

- E13** Las notas de una clase de 10 alumnos pueden ser, suspenso, aprobado, notable, sobresaliente y matricula de honor. Cuantas combinaciones de notas con los 10 alumnos es posible obtener en esa clase.

Solución: Se trata de combinaciones con repetición de cinco elementos tomados de diez en diez.

$$CR_{5,10} = \binom{5+10-1}{10} = \frac{(5+10-1)!}{10!(5-1)!} = \frac{14!}{10!4!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10!}{10!4!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1001$$

Ejercicios:

- 16º** En una pastelería hay 6 tipos distintos de pasteles. ¿De cuántas formas se pueden elegir 4 pasteles? **Sol:** 126.
- 17º** Calcula cuantos productos de dos factores se pueden formar con los dígitos 2, 3 y 5 si se pudiese repetir factores. **Sol:** 6.
- 18º** En una bodega hay en un cinco tipos diferentes de botellas. ¿De cuántas formas se pueden elegir cuatro botellas? **Sol:** 70.
- 19º** Suponiendo que existieran 100 elementos distintos en la naturaleza y que cada sustancia estuviese formada por tres exclusivamente, pudiendo en una misma sustancia haber elementos repetidos. ¿Cuántas sustancias distintas tendríamos? **Sol:** 171700.
- 20º** Una determinada especie animal se compone de tres razas puras: rojos, blancos y amarillos. Cinco son los genes que determina la tonalidad de su piel, si son AAAAA es raza amarilla pura y si es BBBBB es blanco puro. Si la mezcla fuese AABBB es un amarillo bastante claro. ¿Cuántas mezclas genéticas podemos hacer? **Sol:** 21.
- 21º** En un acuario queremos meter 20 peces. Tras visitar una tienda de acuarios, nos han gustado mucho los neones, las cebras y los guppis. ¿Cuántas combinaciones de peces para nuestro acuario podemos hacer? **Sol:** 1540.
- 22º** Una máquina recreativa de un bar tiene tres ruletas en las cuales hay dibujadas seis frutas diferentes (cerezas, naranjas, kivi, limones, fresas y melones) y dos dibujos más (diamantes y monedas). Se hacen girar las ruletas, hasta que las tres quedan paradas. Calcular cuantos resultados posibles puede darnos la máquina sin importarnos el orden de los mismos. **Sol:** 120.
- 23º** Las notas de una clase de 10 alumnos pueden ser, suspenso, aprobado, notable, sobresaliente y matrícula de honor. Cuántas combinaciones de notas con los 10 alumnos es posible obtener en esa clase si tenemos en cuenta que está prohibido otorgar más de tres matrículas de honor. **Sol:** 671.
- 24º** Una urna contiene 10 bolas de colores: 6 rojas y 4 verdes. Si extraemos 6 bolas de la urna al mismo tiempo, ¿cuántas combinaciones son posibles? **Sol:** 5.
- 25º** Una urna contiene 10 bolas de colores: 4 rojas, 3 verdes y 3 azules. Si extraemos 6 bolas de la urna al mismo tiempo, ¿cuántas combinaciones son posibles? **Sol:** 13.
- 26º** Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $CR_{x,3} = 2 \cdot CR_{x,2}$

b) $CR_{x,4} = 6 \cdot CR_{x,2}$

c) $CR_{x,4} = CR_{x,3} + \frac{7 \cdot CR_{x,2}}{3}$

Sol: a) 4; b) 6; c) 5.

7. Variaciones sin repetición.

Las variaciones sin repetición de m elementos tomados de n en n se definen como las distintas agrupaciones formadas con n elementos distintos, eligiéndolos de entre los m elementos de que disponemos, considerando una variación distinta a otra tanto si difieren en algún elemento como si están situados en distinto orden.

$$V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!} \quad (4)$$

Ejemplo:

- E14** Una urna tiene 8 bolas diferentes. Si vamos sacando bolas de una en una y colocándolas por orden de extracción, calcule el número de posibles extracciones ordenadas si sacásemos 3 bolas mediante este procedimiento.

Solución: No hay repeticiones ya que no se devuelven las bolas a la urna y todas las bolas son diferentes. Como las extracciones son ordenadas (primera, segunda y tercera), tendremos un orden. Esto significa, que estamos ante un problema de variaciones con repetición, por tanto podemos calcular el número posible de extracciones mediante la expresión (4):

$$V_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 336$$

- E15** ¿Cuántos números de tres cifras distintas podemos formar con los números 1, 2, 3, 4 y 5?

Solución: El orden importa porque hablamos de formar números de tres cifras. Se trata pues de variaciones de 5 elementos tomados de 3 en 3. Resolvemos por tanto mediante la expresión (4):

$$V_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$$

- E16** ¿De cuantas formas pueden sentarse 10 personas en un banco si hay 4 sitios disponibles?

Solución: El orden de cómo se sienten las personas nos importa, ya que consideraremos que todos los sitios son diferentes y que es imposible que una persona esté en dos sitios al mismo tiempo. Por tanto, variaciones sin repetición:

$$V_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$$

- E17** Una organización estudiantil tiene que elegir un delegado y un subdelegado. Hay 7 candidatos. ¿Cuántas posibilidades existen para realizar la selección?

Solución: El orden de cómo se elijan los candidatos tomados de dos en dos importa, y no se puede ser delegado y subdelegado al mismo tiempo, es un caso de variaciones sin repetición:

$$V_{7,2} = \frac{7!}{(7-2)!} = \frac{7!}{5!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$$

Ejercicios:

- 27º** Con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ¿cuántos números de tres cifras distintas se pueden hacer? **Sol:** 210.
- 28º** ¿De cuántas formas se pueden sentar tres personas en seis sillas? **Sol:** 120.
- 29º** ¿De cuántas maneras diferentes se pueden repartir tres premios distintos entre Juan, Pedro, María, Alicia y Pilar? **Sol:** 60.
- 30º** Se tienen 7 libros y solo 3 espacios en una biblioteca, y se quiere calcular de cuántas maneras se pueden colocar 3 libros elegidos; entre los siete dados, suponiendo que no existan razones para preferir alguno. **Sol:** 210.
- 31º** Un entrenador de fútbol dispone en la plantilla de su equipo de 7 delanteros de la misma calidad y que pueden actuar indistintamente en los tres puestos de ataque del equipo (izquierda, centro y derecha). ¿Cuántas delanteras distintas podría confeccionar? **Sol:** 210.
- 32º** Se reparten 3 premios distintos en una clase de 10 alumnos. ¿De cuantos modos posibles pueden repartirse estos premios entre los diez alumnos? **Sol:** 720.
- 33º** Una línea de ferrocarril tiene 25 estaciones. ¿Cuántos tipos de billetes diferentes habrá que imprimir si cada billete lleva impresas las estaciones de origen y destino? **Sol:** 600.
- 34º** Un barco tiene diez banderas diferentes para hacer señales y cada señal se forma colocando 4 banderas en un mástil, en orden vertical. ¿Cuántas señales distintas pueden hacer desde el barco? **Sol:** 5040.
- 35º** ¿Cuántos números naturales existen que sean mayores que 5000 y menores que 8000 con todas las cifras diferentes? **Sol:** 1512.
- 36º** El séxtuplo del número de combinaciones que se puede formar con m objetos tomados de 3 en 3 es igual al número de variaciones que se pueden formar con $m - 1$ objetos tomados de cuatro en cuatro. Halla el valor de m , suponiendo que es mayor que cuatro. **Sol:** $m = 6$.
- 37º** La diferencia entre el número de variaciones binarias de m objetos y el de combinaciones binarias de los mismos m objetos es 136. Halla el número de objetos. **Sol:** $m = 17$.
- 38º** En las variaciones sin repetición que podemos formar con las nueve cifras significativas tomadas de tres en tres, ¿cuántas veces está la cifra 7? **Sol:** 168.
- 39º** Resuelve las siguientes ecuaciones:
- a) $V_{x,2} = 20$ b) $V_{x,4} = 20 \cdot V_{x,2}$ c) $V_{x,2} + V_{x-2,2} + V_{x-4,2} = 98$
- d) $V_{x,4} = 20 \cdot V_{x,2}$ e) $2 \cdot V_{x-1,2} - 4 = V_{x+1,2}$
- Sol:** a) 5; b) 7; c) 8; d) 7; e) 7.

8. Variaciones con repetición.

Las variaciones con repetición de m elementos tomados de n en n se definen como las distintas agrupaciones formadas con n elementos que pueden repetirse, eligiéndolos de entre los m elementos de que disponemos, considerando una variación distinta a otra tanto si difieren en algún elemento como si están situados en distinto orden.

$$VR_{m,n} = m^n \quad (4)$$

Ejemplos:

- E18** Una urna tiene 8 bolas numeradas del 1 al 8. Si vamos sacando bolas de una en una, anotando su cantidad y devolviéndolas a la urna antes de la siguiente extracción, calcule el número de posibles combinaciones, ordenadas por extracción, de números que podemos llegar a tener si sacásemos 3 bolas mediante este procedimiento.

Solución: Como las bolas son devueltas a la urna, habrá repeticiones. Como las extracciones son ordenadas (primera, segunda y tercera), tendremos un orden. Esto significa, que estamos ante un problema de variaciones con repetición, por tanto podemos calcular el número posible de extracciones mediante la expresión ():

$$VR_{8,3} = 8^3 = 512$$

- E19** Se reparten 3 premios distintos en una clase de 10 alumnos. Pudiendo un alumno optar a más de un premio. ¿De cuantos modos posibles pueden repartirse estos premios entre los diez alumnos?

Solución: Nos importa el orden de los premios, ya que son distinguibles. Un alumno puede repetir premio, luego se trata de variaciones con repetición:

$$VR_{10,3} = 10^3 = 1000$$

- E20** Una matrícula de coche de un país europeo está formado por 3 letras elegidas entre 27 y 4 números escogidos entre los números comprendidos entre 0 y 9. ¿Cuántos coches se pueden matricular en cada país con este sistema?

Solución: Como el orden de colocación de las letras y los números importa, y como la cantidad de letras y números cogidos es inferior a los totales, hay que hacer por tanto dos problemas de variaciones con repetición, uno para las letras y otro para los números:

Para las letras: $VR_{27,3} = 27^3 = 19683$

Para los números: $VR_{10,4} = 10^4 = 10000$

Multiplicando entre si ahora estas variaciones, obtendremos el número de coches que pueden matricularse en un país con este sistema:

$$VR_{27,3} \cdot VR_{10,4} = 196830000$$

- E21** Resuelve: $VR_{x,2} - V_{x,2} = 17$

Solución: Usando las expresiones (3) y (4) con la ecuación:

$$VR_{x,2} - V_{x,2} = 17 \rightarrow x^2 - \frac{x!}{(x-2)!} = 17 \rightarrow x^2 - \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)!}{(x-2)!} = 17 \rightarrow x^2 - x(x-1) = 17$$
$$x = 17$$

Ejercicios:

- 40º** Cinco jueces de un deporte determinado disponen de una cartulina en la que por un lado hay un 1 y por el otro un 0. ¿Cuántas combinaciones pueden darse? **Sol:** 32.
- 41º** ¿Cuántos resultados diferentes se producen al lanzar 5 dados de distinto color y anotar los resultados de la cara superior? **Sol:** 7776.
- 42º** ¿Cuántos resultados distintos de partidos de fútbol hay que rellenar en las quinielas de fútbol para tener la seguridad de acertar cinco resultados? **Sol:** 243.
- 43º** Si las matrículas de vehículos estuviesen formadas por un número de cuatro dígitos y de dos letras, sin repetirse ninguna (abecedario de 28). ¿Cuántas matrículas distintas se pueden formar? **Sol:** 7560000.
- 44º** Con un punto y una raya (símbolos clásicos del alfabeto Morse) ¿Cuántas señales distintas de 5 dígitos pueden hacerse? **Sol:** 32.
- 45º** Se dispone de siete colores para diseñar una bandera que tiene tres franjas horizontales de igual ancho pero de distinto color.
a) ¿Cuántas banderas se pueden diseñar que no tenga ningún color repetido?
b) ¿Y si se puede repetir los colores?
Sol: a) 210; b) 343.
- 46º** Halla el número mínimo de habitantes que debe tener una ciudad para que sea inevitable que al menos dos habitantes tengan las mismas iniciales de su nombre y dos apellidos. Supón un alfabeto de 28 letras. **Sol:** 21953.
- 47º** En las variaciones con repetición que podemos formar con las nueve cifras significativas tomadas de tres en tres, ¿cuántas veces está la cifra 7? **Sol:** 192.
- 48º** ¿Cuántas quinielas de fútbol (con 15 partidos) hay que rellenar para asegurar un pleno? **Sol:** 14348907.
- 49º** ¿Cuántos resultados diferentes se producen al lanzar 5 dados de distinto color y anotar los resultados de la cara superior? **Sol:** 7776.
- 50º** Las cuatro bases nitrogenadas del ADN son guanina, adenina, citosina y timina. ¿Cuántos genes de 10 bases nitrogenadas podemos formar? **Sol:** 1048576.
- 51º** ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9? Las cifras se pueden repetir. **Sol:** 900.
- 52º** Cuantas palabras de 5 letras podemos formar con 28 letras de un alfabeto. **Sol:** 17210368.
- 53º** El sistema numérico hexadecimal se construye con 16 números {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F}. Cuantos números de tres cifras podemos representar. **Sol:** 4096.

9. Permutaciones sin repetición.

Las permutaciones sin repetición de m elementos se definen como las distintas formas de ordenar todos esos elementos distintos, por lo que la única diferencia entre ellas es el orden de colocación de sus elementos. Básicamente son variaciones de m elementos tomados de m en m .

$$P_m = V_{m,m} = m! \quad (6)$$

Ejemplo:

E22 ¿De cuantas formas pueden colocarse en una fila cinco personas?

Solución: En este ejemplo apreciamos que importa el orden. Se trata de permutar cinco elementos de cinco en cinco, aplicando la expresión (5):

$$P_5 = 5! = 120$$

E23 De cuantas formas pueden ordenarse siete personas, entre las que figuran Juan y Maria, de manera que tanto Juan como María estén colocados uno al lado del otro.

Solución: Este es un problema de permutaciones sin repetición porque el orden importa y porque cogemos m elementos diferentes de m en m . Para resolver este problema, consideraremos que tanto Juan como María forman una sola persona, ya que son inseparables. De esta forma consideraremos que hay solo seis elementos permutando.

$$P_6 = 6! = 720$$

Juan y Maria también pueden permutar entre si, por tanto:

$$P_2 = 2! = 2$$

El número total de permutaciones posibles bajo las condiciones del problema será de:

$$N = P_2 \cdot P_6 = 2 \cdot 720 = 1440$$

E24 ¿Cuál es el número de colocaciones diferentes de 7 libros diferentes en una estantería de modo que tres libros determinados estén siempre separados entre sí?

Solución: Describamos mediante una tabla, el número de separaciones posibles de tres libros:

1º	X	X	X	X	X	X			
2º							X	X	
3º	X	X	X						X
4º				X	X		X	X	
5º	X					X			X
6º		X		X			X		
7º			X		X	X		X	X

En total, diez colocaciones. En cada una de esas colocaciones, podemos permutar de posición tres libros, y en las 4 restantes permutar los cuatro libros restantes.

$$P_3 = 3! = 6$$

$$P_4 = 4! = 24$$

Por el principio del producto, el número de casos totales será:

$$N = 10 \cdot 6 \cdot 24 = 1440$$

Ejercicios:

- 54°** De cuantas formas distintas pueden sentarse cuatro personas alrededor de una mesa.
Sol: 6.
- 55°** En una carrera participan cinco coches. ¿Cuántas clasificaciones se pueden producir al final, si cada uno de los coches emplean distintos tiempos? **Sol:** 120.
- 56°** Un técnico de sonido tiene que unir 6 terminales en 6 conexiones. Si lo hiciera al azar, ¿de cuántas formas diferentes podría completar las conexiones? **Sol:** 720.
- 57°** ¿De cuántas formas pueden sentarse 8 amigos en una fila de 8 butacas numeradas de un cine? **Sol:** 40320.
- 58°** Con las letras de la palabra CINEMA:
- a) ¿Cuántas palabras distintas, tengan sentido o no, se pueden formar?
 - b) ¿Cuántas terminan en A?
 - c) ¿Cuántas empiezan con N?
 - d) ¿Cuántas empiezan con C y terminan en I?
 - e) ¿Cuántas empiezan con vocal?
 - f) ¿Cuántas tienen vocal y consonante alternadas?
- Sol:** a) 720; b) 120; c) 120; d) 24; e) 360; f) 72.
- 59°** Demostrar que:
- $$C_{m,n} = \binom{m}{n} = \frac{V_{m,n}}{P_n}$$
- 60°** Hay que colocar a 5 hombres y 4 mujeres en una fila de modo que las mujeres ocupen los lugares pares. ¿De cuantas maneras puede hacerse? **Sol:** 2880 maneras.
- 61°** ¿Cuántos números distintos de seis cifras se pueden formar con cuatro “2” y cuatro “3”?
Sol: 50.
- 62°** ¿De cuántas maneras pueden alinearse 10 personas, si 3 de ellas deben estar juntas?
Sol: 241920.
- 63°** ¿Cuál es el número de colocaciones diferentes de 8 libros en una estantería de modo que cuatro libros determinados estén siempre separados entre sí? **Sol:** 2880.
- 64°** Cuatro libros distintos de matemáticas, seis distintos física y dos distintos de química han de colocarse en una estantería. ¿Cuántas colocaciones distintas se admiten si los libros de cada materia han de estar juntos? **Sol:** 207360 colocaciones.
- 65°** ¿Cuales de las siguientes expresiones tiene mayor valor: $C_{26,3}$, P_6 , $V_{9,4}$, $VR_{6,4}$? **Sol:** $V_{9,4}$.
- 66°** Resuelve las ecuaciones:
- a) $P_{x+2} = P_3 \cdot P_x$
 - b) $P_x = P_4 - 3P_x$
 - c) $12 \cdot P_x + 5 \cdot P_{x+1} = P_{x+2}$
- Sol:** a) 1; b) 3; c) 5.

10. Permutaciones con repetición.

Es el conjunto de todas las disposiciones distintas que se pueden formar con los m elementos, en los que en cada disposición cada elemento puede aparecer, n_1, n_2, \dots, n_m veces repetido y esto en un orden determinado, con:

$$n_1 + n_2 + \dots + n_m = n \quad n_1, n_2, \dots, n_m \geq 0$$

El número de disposiciones posibles se calcula mediante la expresión:

$$PR_{n;n_1, n_2, \dots, n_m} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_m!} \quad (6)$$

Ejemplos:

E25 Calcular el número de permutaciones posibles que se pueden formar con las letras de las palabras:

- UNUSUAL.
- SOCIOLOGICAL.
- GANAR

Solución: En este ejemplo apreciamos que importa el orden, y además de eso hay repetición de palabras. Se trata de permutaciones con repetición, por tanto, y por cada caso, emplearemos la expresión (6) para contar el número total de permutaciones:

a) En la palabra UNUSUAL, la cantidad de veces repetida cada letra es:

$$n_U = 3 \quad n_A = 1 \quad n_N = 1 \quad n_S = 1 \quad n_L = 1$$

Un total de letras de $n = 7$. El número de permutaciones será por tanto:

$$RP_{7;3,1,1,1,1} = \frac{7!}{3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$$

b) En la palabra SOCIOLOGICAL, la cantidad de cada letra es:

$$n_O = 3 \quad n_A = 1 \quad n_I = 2 \quad n_S = 1 \quad n_L = 2 \quad n_G = 1 \quad n_C = 2$$

Un total de letras de $n = 12$. El número de permutaciones será por tanto:

$$PR_{12;3,1,2,1,2,1,2} = \frac{12!}{3! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 2!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{8} = 9979200$$

b) En la palabra GANAR, la cantidad de cada letra es:

$$n_G = 1 \quad n_A = 2 \quad n_N = 1 \quad n_R = 1$$

Un total de letras de $n = 5$. El número de permutaciones será:

$$PR_{5;1,2,1} = \frac{5!}{1! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

E26 De cuantas formas ordenadas en la parrilla de un programa pueden distribuirse cuatro actuaciones de canto y tres de humor.

Solución: Siete elementos que pueden distribuirse en siete posiciones y de forma ordenada, cuatro de canto y tres de humor, son permutaciones con repetición.

$$n_{\text{canto}} = 4 \quad n_{\text{humor}} = 3$$

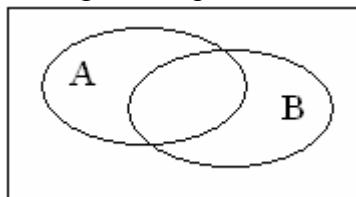
$$PR_{7;4,3} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 35$$

Ejercicios:

- 67°** ¿Cuántas quinielas hay que hacer que tengan cinco 1, cinco 2 y cuatro X? **Sol:** 252252.
- 68°** ¿Cuántas quinielas hay que hacer que tengan trece 1 y una X? **Sol:** 14.
- 69°** ¿De cuántas maneras se pueden ordenar las letras de la palabra AMASAS? **Sol:** 60.
- 70°** ¿De cuántas formas podemos ordenar las letras de la palabra CALABAZA? **Sol:** 1680.
- 71°** ¿Cuál es el número total de permutaciones que pueden formarse con las letras de la palabra MATEMATICA? **Sol:** 151200.
- 72°** ¿Cuántas quinielas diferentes se pueden formar que tengan 8 unos, 3 equis y 4 doses? **Sol:** 225225.
- 73°** Cuatro libros iguales de matemáticas, seis iguales de física y dos iguales de química han de colocarse en una estantería. ¿Cuántas colocaciones distintas se admiten de los libros? **Sol:** 13860 colocaciones.
- 74°** De cuantas maneras se pueden colocarlas figuras blancas (un rey, una dama, dos alfiles, dos torres y dos caballos) en la primera fila del tablero de ajedrez. **Sol:** 5040.
- 75°** ¿Cuántas palabras de 12 letras se pueden formar con la palabra AYUNTAMIENTO, de tal manera que siempre comiencen y terminen por vocal? **Sol:** 13608000.
- 76°** Disponemos en un pequeño frigorífico de una huevera en la que pueden meterse ordenadamente diez huevos. ¿De cuántas formas ordenadas pueden colocarse 7 huevos indistinguibles? **Sol:** 120.
- 77°** Si en un aula hay 10 asientos vacíos y numerados. ¿De cuántas formas ordenadas pueden sentarse 7 alumnos? **Sol:** 60480.

Ejercicios de probabilidad simple y compuesta.

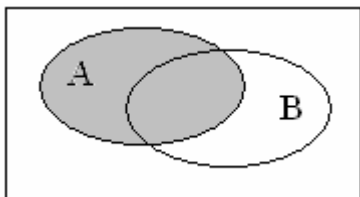
- 1º Hay 87 canicas en una bolsa y 68 son verdes. Si se escoge una, ¿cuál es la probabilidad de que esta sea verde? **Sol:** 0.78.
- 2º ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar al aire dos dados, salgan dos números iguales? **Sol:** 1/6.
- 3º Tenemos una bolsa con nueve bolas numeradas del 1 al 9. Realizamos el experimento que consiste en sacar una bola y anotar el número. Calcula la probabilidad:
- De sacar un número primo.
 - De sacar un número mayor que 8.
- Sol:** a) 5/9; b) 1/9.
- 4º Lanzamos al aire un dado dodecaédrico, es decir un poliedro regular con 12 caras, numeradas del 1 al 12. Calcula la probabilidad de:
- Obtener un 8.
 - Obtener múltiplo de 3.
 - Obtener número primo.
- Sol:** a) 1/12; b) 1/3; c) 1/2.
- 5º De una urna que contiene 8 bolas rojas, 5 amarillas y 7 verdes se extrae una al azar. Calcula:
- Probabilidad de sacar una bola roja.
 - Probabilidad de sacar una bola verde.
 - Probabilidad de sacar una bola roja o amarilla.
 - Probabilidad de sacar una bola amarilla o verde.
- Sol:** a) 2/5; b) 7/20; c) 13/20; d) 3/5.
- 6º En una clase hay 10 alumnas rubias, 20 morenas, 5 alumnos rubios y 10 morenos. Un día sólo asisten 44. Calcúlese la probabilidad de que la persona que falte sea:
- Hombre.
 - Mujer.
 - Hombre rubio.
 - Mujer morena.
 - Hombre moreno o mujer rubia.
 - Hombre rubio o mujer morena.
 - Hombre o mujer.
 - Persona pelirroja.
- Sol:** a) 1/3; b) 2/3; c) 1/9; d) 4/9; e) 4/9; f) 5/9; g) 1; h) 0.
- 7º Dibuja en diagramas de Venn las siguientes probabilidades:



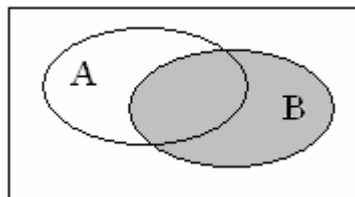
- | | | | |
|------------------------------|------------------------|------------------------------|------------------------------|
| a) $P(A)$ | b) $P(B)$ | c) $P(A \cup B)$ | d) $P(A \cap B)$ |
| e) $P(\bar{A})$ | f) $P(\bar{B})$ | g) $P(\overline{A \cup B})$ | h) $P(\overline{A \cap B})$ |
| i) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ | j) $P(A \cap \bar{B})$ | k) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ | l) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ |

Sol:

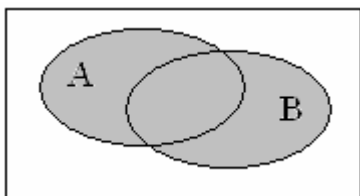
a)



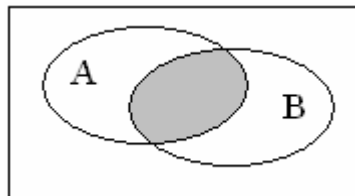
b)



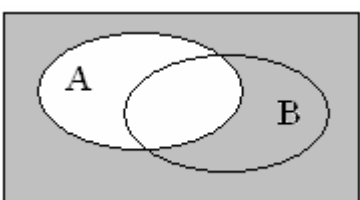
c)



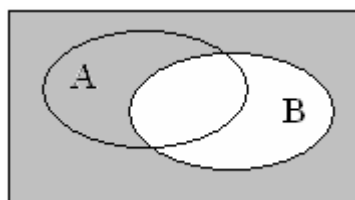
d)



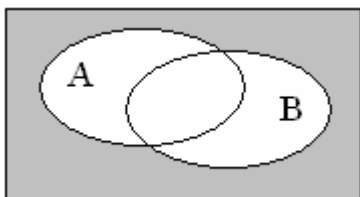
e)



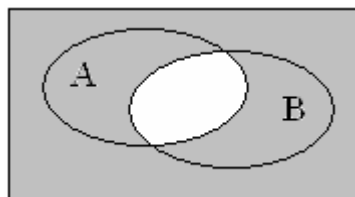
f)



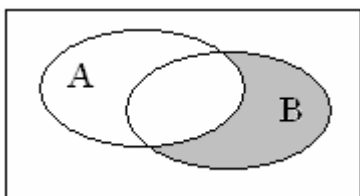
g)



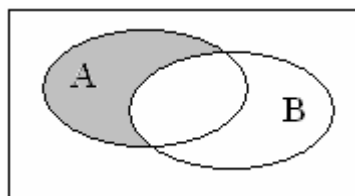
h)



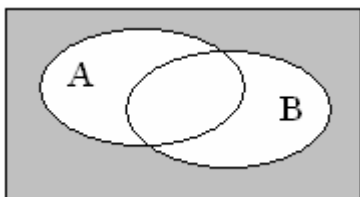
i)



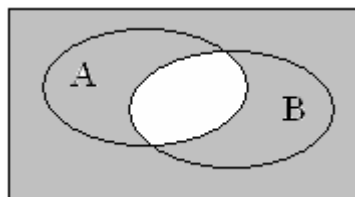
j)



k)



l)



8º Se consideran los siguientes sucesos:

$$P(A) = 0.6$$

$$P(B) = 0.8$$

$$P(A \cap B) = 0.5$$

Calcula:

a) $P(\bar{A})$

b) $P(\bar{B})$

c) $P(\overline{A \cap B})$

d) $P(A \cup B)$

e) $P(\overline{A \cup B})$

f) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

g) $P(A \cap \bar{B})$

h) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

i) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

Sol: a) 0.4; b) 0.2; c) 0.5; d) 0.9; e) 0.1; f) 0.3; g) 0.1; h) 0.1; i) 0.5.

- 9º Sean A y B dos sucesos cualesquiera del mismo espacio de sucesos, tales que:

$$P(A) = \frac{3}{8}$$

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Calcula:

a) $P(\bar{A})$

b) $P(A \cup B)$

c) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

d) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

e) $P(A \cap \bar{B})$

f) $P(\bar{A} \cap B)$

Sol: a) 5/8; b) 5/8; c) 3/4; d) 3/8; e) 1/8; f) 1/4.

- 10º Sean A y B dos sucesos tales que:

$$P(A) = \frac{3}{8}$$

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

Calcula para qué valor de $P(A \cup B)$ los sucesos A y B son independientes. **Sol:** 11/16.

- 11º Sean A y B dos sucesos tales que:

$$P(A \cup B) = \frac{4}{5}$$

$$P(\bar{A}) = \frac{2}{5}$$

$$P(\bar{B}) = \frac{1}{2}$$

a) ¿Son A y B incompatibles?

b) ¿Son A y B independientes?

Sol: a) No son incompatibles; b) Si lo son.

- 12º Sean A y B dos sucesos con probabilidades:

$$P(A) = 0.4$$

$$P(B) = 0.7$$

Determina los posibles valores del máximo y del mínimo de $P(A \cap B)$ y las condiciones en que se consigue cada uno de estos valores. **Sol:** El mínimo es 0 y 0.4 el máximo.

- 13º Sean A, B y C tres sucesos independientes tales que:

$$P(A) = 0.2$$

$$P(B) = 0.8$$

$$P(C) = 0.7$$

Halla las probabilidades de los sucesos siguientes:

a) $P(A \cup B)$

b) $P(A \cup C)$

c) $P(B \cup C)$

Sol: a) 0.84; b) 0.76; c) 0.94.

- 14º Siendo A y B sucesos incompatibles de un cierto espacio tales que:

$$P(A) = 0.2$$

$$P(B) = 0.4$$

Calcular $P(\bar{A} \cap \bar{B})$. **Sol:** 0.4.

- 15º Sean A y B dos sucesos con:

$$P(A) = 0.5$$

$$P(B) = 0.3$$

$$P(A \cap B) = 0.1$$

Calcular:

a) $P(A/B)$

b) $P(A/A \cap B)$

c) $P(A \cap B/A \cup B)$

d) $P(A/A \cup B)$

Sol: a) 0.33; b) 1; c) 0.14; d) 0.71.

- 16º Sean A y B dos sucesos tales que:

$$P(A) = 0.5$$

$$P(\bar{B}) = 0.4$$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.75$$

Calcular:

a) $P(B/A)$

b) $P(\bar{A}/B)$

Sol: a) 0.5; b) 0.58.

- 17º** Se sabe que A y B son dos sucesos cuyas probabilidades son:
 $P(A) = 0.7$ $P(B) = 0.5$ $P(A \cup B) = 0.75$
Calcular $P(B/A)$ y $P(\bar{A} \cap \bar{B})$. **Sol:** a) 0.64, b) 0.25.
- 18º** Un sistema está formado por dos componentes A y B. El sistema funciona si lo hace alguna de las componentes. Si:
 $P(A) = 0.8$ $P(B) = 0.7$ $P(A \cap B) = 0.6$
¿Cuál es la probabilidad de que el sistema no funcione? **Sol:** 0.9.
- 19º** Se dispone de la siguiente información relativa a los sucesos A y B:
 $P(A) = 0.6$ $P(B) = 0.2$ $P(A \cap B) = 0.12$
a) Calcular las probabilidades $P(A \cup B)$ y $P(A/(A \cup B))$.
b) ¿Son incompatibles? ¿Son independientes?
Sol: a) $P(A \cup B) = 0.68$, $P(A/(A \cup B)) = 0.88$; b) Son compatibles e independientes.
- 20º** Sean A y B dos sucesos tales que:
 $P(A) = 0.6$ $P(B) = 0.2$ $P(A \cup B) = 0.7$
a) Calcúlese $P(A \cap B)$ y razónese si los sucesos A y B son independientes.
b) Calcúlese $P(\overline{A \cup B})$.
Sol: a) $P(A \cap B) = 0.1$, los sucesos no son independientes; b) 0.3.
- 21º** Se lanzan dos dados. Calcúlese la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:
a) $A \equiv \{\text{se obtiene 5 en alguno de los dados}\}$.
b) $B \equiv \{\text{se obtiene un doble}\}$.
c) $A \cup B$.
d) $A \cap B$.
Sol: a) 11/36; b) 1/6; c) 4/9; d) 1/36.
- 22º** En un curso, el porcentaje de aprobados en historia (A) es del 60 % y de matemáticas (B) es del 55 %. Sabiendo que $P(B/A) = 0.7$. Hallar $P(A/B)$. ¿Cuál es la probabilidad de que escogido al azar un alumno resulte no haber aprobado ninguna de las dos asignaturas? **Sol:** 0.27.
- 23º** Calcular la probabilidad de sacar exactamente dos cruces al tirar una moneda cuatro veces. **Sol:** 6/16.
- 24º** Con las cifras 1, 2, 3, 4, 5 formamos los números posibles de tres cifras distintas. Si formamos un número al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea par? **Sol:**
- 25º** Un grupo de 10 personas se sienta en un banco. ¿Cuál es la probabilidad de que dos personas fijadas de antemano se sienten juntas? **Sol:** $4.96 \cdot 10^{-6}$.
- 26º** Lanzamos dos monedas al aire (primero una y luego la otra). Calcular la probabilidad de obtener:
a) Una sola cara.
b) Al menos una cara.
c) Dos caras.
Sol: a) 1/2; b) 3/4; c) 1/4.

- 27º** ¿Cuál es la probabilidad de que arrojando un dado tres veces, salga, al menos una vez el seis? **Sol:** 91/216.
- 28º** Calcula la probabilidad de que al tirar dos dados al aire, salga:
- a) Una suma par.
 - b) Una suma mayor que diez.
 - c) Una suma que sea múltiplo de 3.
 - d) Una suma mayor que 6.
 - e) Una suma menor que 10.
 - f) Una suma menor o igual que 10.
 - g) Una suma comprendida entre 6 y 10.
 - h) Dos números impares.
 - i) Al menos un número impar.
- Sol:** a) 1/2; b) 1/12; c) 1/3; d) 7/12; e) 8/9; f) 11/12; g) 5/12; h) 1/4; i) 3/4.
- 29º** Seis personas están sentadas en un banco, calcula la probabilidad de que dos concretas estén juntas. **Sol:** 1/3.
- 30º** En una bolsa hay 7 bolas blancas y 3 negras. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer cuatro bolas a la vez sean las cuatro blancas? **Sol:** 1/6.
- 31º** Tenemos tres dados: uno blanco, otro negro y el tercero rojo. ¿Cuál es la probabilidad de que salga par en el blanco, múltiplo de 3 en el negro y mayor que 3 en el rojo? **Sol:** 1/12.
- 32º** ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer simultáneamente tres cartas de una baraja de 40 cartas, salgan un as y dos cartas iguales entre si. **Sol:** 1/247.
- 33º** ¿Cuál es la probabilidad de que al hacer cuatro extracciones sucesivas en una baraja española, con reemplazamiento, salgan un as, un tres, un tres, y un caballo? **Sol:** $(1/10)^4$.
- 34º** En una baraja española se extraen, simultáneamente, tres cartas. ¿Que probabilidad hay de que salgan dos reyes? **Sol:** 27/1235.
- 35º** En una baraja española:
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que en una extracción simultánea de tres cartas salgan tres oros?
 - b) ¿Y de que salgan la primera copas, la segunda espadas y la tercera oros en tres extracciones sucesivas sin devolución de la carta extraída?
 - c) ¿Y la probabilidad de que salgan las tres de distinto palo extraídas sucesivamente sin devolución?
- Sol:** a) 3/247; b) 25/1482; c) 100/247
- 36º** De una baraja española se extraen dos naipes sucesivamente y sin devolver al mazo. Hallar la probabilidad de extraer:
- a) Dos ases.
 - b) En la primera as y la segunda tres.
 - c) Un as y un tres.
 - d) Dos oros.
 - e) Del mismo palo.
- Sol:** a) 1/130; b) 2/195; c) 4/195; d) 3/52; e) 3/13.

- 37°** Si se tienen dos barajas de 40 cartas cada una, ¿cuál es la probabilidad de que al sacar una de cada baraja salgan dos ases? Y si se mezclan las dos barajas y se sacan de una vez dos cartas, ¿cuál es la probabilidad de que sean dos ases? **Sol:** $1/100$; $7/790$.
- 38°** De una baraja de 40 cartas se extraen 3 cartas sucesivamente: con reemplazamiento y sin reemplazamiento. Hallar en los tres casos las siguientes probabilidades:
- a) Por lo menos una de las cartas es un as.
 - b) las tres son de oros.
 - c) Una sólo sea un oro.
 - d) Ninguna es un as.
 - e) Sean del mismo palo.
- Sol:** a) $271/1000$; $137/494$; b) $1/64$; $3/247$; c) $261/640$; $435/988$; d) $729/1000$; $357/494$; e) $1/16$; $12/247$; $12/247$.
- 39°** De una baraja española se extraen dos naipes sucesivamente y sin devolver al mazo. Hallar la probabilidad de extraer:
- a) Dos ases.
 - b) Un as y un tres.
 - c) La primera un as y la segunda un tres.
 - d) Dos espadas.
 - e) Dos cartas de igual palo.
- Sol:** a) $1/130$; b) $4/195$; c) $2/195$; d) $3/52$; e) $3/13$.
- 40°** En una bolsa hay 10 bolas blancas y 15 negras. Si se hacen tres extracciones seguidas, ¿qué probabilidad habrá de que las 3 bolas sean blancas?
- a) Devolviendo cada vez la bola extraída.
 - b) No devolviéndola.
- Sol:** a) $8/125$; b) $6/115$.
- 41°** Una urna contiene 10 bolas blancas y 5 negras. Se extraen dos bolas al azar sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color? **Sol:** 0.489 .
- 42°** Una urna contiene 3 bolas blancas y 5 bolas negras. Otra contiene 1 blanca y 3 negras. Hallar la probabilidad de que, al extraer una bola de cada urna, ambas sean negras. **Sol:** $15/32$.
- 43°** Una urna contiene 10 bolas blancas, 5 amarillas y 5 negras. Se extrae una bola al azar y se sabe que no es blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que sea negra? **Sol:** 0.5 .
- 44°** En una urna hay 5 bolas rojas, 5 amarillas y 5 negras. Se sacan, sucesivamente 4 bolas, devolviéndolas cada vez. ¿Qué probabilidad existe de que se extraiga igual número de bolas rojas que amarillas? **Sol:** $19/81$.
- 45°** En una bolsa hay 6 bolas blancas y 5 negras. Calcular la probabilidad de extraer:
- a) cuatro bolas a la vez que no sean blancas.
 - b) cuatro bolas blancas.
 - c) cuatro bolas negras.
- Sol:** a) $21/22$; b) $1/22$; c) $1/66$.

- 46º** En una bolsa hay 6 bolas blancas, 3 negras y 9 rojas. Al sacar tres a la vez, determinar la probabilidad de:
- a) Que dos sean blancas.
 - b) Que ninguna sea blanca.
 - c) Que sean de distinto color.
- Sol:** a) 0.22; b) 0.27; c) 0.199.
- 47º** En una urna hay tres bolas blancas y dos negras. Se extrae una bola al azar, se observa su color y se devuelve a la urna. Calcular la probabilidad de que en dos extracciones se obtengan:
- a) Dos bolas negras.
 - b) Una bola de cada color.
 - c) Dos bolas blancas.
- Sol:** a) $\frac{4}{25}$; b) $\frac{12}{25}$; c) $\frac{9}{25}$.
- 48º** Dos urnas tienen las siguientes bolas: la primera, 5 bolas blancas, 5 negras y 5 rojas y la segunda, 3 blancas, 3 negras y 5 rojas. Se traspasa una bola, escogida al azar, de la primera urna a la otra y, a continuación, se extrae una bola de esta urna, que resulta ser roja. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola traspasada fuese blanca? **Sol:** $\frac{5}{16}$
- 49º** Se dispone de tres tipos de urnas, A, B y C. La urna tipo A contienen 5 bolas blancas y 5 negras, la urna tipo B contienen 8 bolas blancas y 2 negras, la urna tipo C contiene 1 bola blanca y 4 negras. Se dispone de 5 urnas del tipo A, 3 del tipo B y 2 del tipo C. Se saca una bola de una urna elegida al azar y resultó ser blanca. Calcular la probabilidad de que la urna elegida sea del tipo B. **Sol:** 0.4528.
- 50º** Tenemos tres urnas: La urna A contiene 2 bolas rojas y 3 amarillas; la urna B contiene 3 bolas rojas y 1 amarilla y la urna C contiene 2 bolas rojas y 4 amarillas. Se escoge una urna al azar y se saca una bola de esa urna. Si la bola es roja. ¿Cuál es la probabilidad de que sea de la urna A? **Sol:** $\frac{24}{89}$.
- 51º** En una caja A, hay 10 bombillas, de las que 3 no funcionan; en otra caja B, hay 8 con 2 fundidas; y en una última caja C hay 12 bombillas de las que 3 son defectuosas. Escogida una caja al azar, de la que se extrae, sin mirar, una bombilla:
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que no funcione?
 - b) Si salió una bombilla fundida, ¿cuál es la probabilidad de que fuese de la caja A?
- Sol:** a) $\frac{4}{15}$; b) $\frac{3}{8}$.
- 52º** Un lote de diez artículos tiene tres defectuosos. Se extraen tres artículos del lote al azar, uno tras otro y sin devolverlos. Calcular la probabilidad de que todos estén bien. **Sol:** $\frac{7}{24}$.
- 53º** De las piezas producidas en una fábrica, el 80% son producidas por una máquina A y el resto por una máquina B. El 10% de las piezas producidas por A son defectuosas, y el 6% de las producidas por B son defectuosas.
- a) Elegida una pieza producida en esa fábrica al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa?
 - b) Se elige al azar una pieza y resulta ser defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producida por la máquina A?
- Sol:** a) 0.092; b) 0.87.

54° El 3% y el 5%, respectivamente, de las piezas producidas por dos máquinas X e Y son defectuosas. Se elige al azar una pieza de las producidas por X y otra de las producidas por Y.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean defectuosas?
- b) ¿Y de que al menos una lo sea?

Sol: 0.0015; 0.0785.

55° El 60% de los habitantes de una ciudad lee el periódico A, el 35% el B y un 15% ambos. Elegido un ciudadano al azar, calcular las probabilidades de:

- a) Sea lector de algún periódico.
- b) No lea la prensa.
- c) Lea sólo el periódico A.
- d) Lea sólo uno de los dos periódicos.

Sol: a) 0.8; b) 0.2; c) 0.45; d) 0.65.

56° Un producto está formado por tres piezas: A, B y C. El proceso de fabricación es tal que la probabilidad de que la pieza A sea defectuosa es 0.03; de que la pieza B sea defectuosa es 0.02; y de que la pieza C sea defectuosa es de 0.01. El producto no funciona si alguna de las piezas es defectuosa.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que el producto no funcione?
- b) Otro producto consta de dos piezas de A y una de B, ¿cuál es la probabilidad de que no funcione?

Sol: a) 0.059; b) 0.078.

57° En una provincia, el 48% de sus habitantes son lectores del diario A, el 55% del B y el 22% de ambos. Si se escoge un ciudadano al azar cuál es la probabilidad de que:

- a) No lea prensa.
- b) Lea sólo el diario A.
- c) Lea sólo uno de los dos diarios.

Sol: a) 0.19; b) 0.26, c) 0.59.

58° La probabilidad de que un estudiante apruebe todas las asignaturas en Junio es 0.4. Halla la probabilidad de que entre 4 estudiantes escogidos al azar:

- a) Ninguno apruebe.
- b) No apruebe más de uno.
- c) Al menos uno apruebe.
- d) Todos aprueben.

Sol: a) 0.1296; b) 0.4752; c) 0.8704; d) 0.0256.

59° El 55% de los alumnos de una clase estudia francés, el 50% inglés y el 15% estudia los dos idiomas. Se elige al azar un estudiante. Calcular la probabilidad de que:

- a) No estudie francés ni inglés.
- b) Estudie francés y no inglés.
- c) Estudie francés si se sabe que estudia inglés.
- d) Estudie inglés si se sabe que estudia francés.
- e) No estudie francés si se sabe que no estudia inglés.

Sol: a) 0.1; b) 0.4; c) 0.3; d) 0.273; e) 0.2.

- 60°** En unos almacenes hay una oferta: al comprar un producto se puede elegir un regalo entre dos (A y B). El 35% de los clientes elige el regalo A, el 25% elige el B y el 40% no compra ese producto. Se sabe, además, que el 80% de los que eligen A, el 40% de los de B y el 20% de los que no compran, son mujeres. Elegido al azar un cliente, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? **Sol:** 0.46.
- 61°** La probabilidad de que un proyectil, lanzado por un cañón, haga blanco en el objetivo es $\frac{1}{2}$. Calcula la probabilidad de que alcance el objetivo si se tiran 4 proyectiles seguidos. **Sol:** $\frac{15}{16}$.
- 62°** En un grupo de 1000 personas hay 400 que saben inglés, 100 que saben alemán y 30 ambos idiomas. Con estos datos, averigua si son independientes o no los sucesos "saber inglés" y "saber alemán". **Sol:** No.
- 63°** En un examen teórico para obtener el carné de conducir se puede hacer el ejercicio correspondiente a cada uno de los tipos de carné A, B y C. Aprueban el examen el 65% de A, el 40% de B y el 25% de C. Se sabe que el 20% se presentan al ejercicio A, el 50% al B y el 30% al C. Elegido un alumno al azar, determina:
- La probabilidad de que se presente al A haya aprobado.
 - Se sabe que ha aprobado. Probabilidad de que se presentase al ejercicio A.
- Sol:** a) 0.13; b) 0.32.
- 64°** Un examen consta de cuatro partes: álgebra, análisis, geometría y probabilidad. La preparación de un alumno es tal que, tiene una probabilidad de 0,6 de aprobar cada parte. ¿Qué probabilidad tiene de suspender si:
- Las partes son eliminatorias;
 - Si llegan dos partes para aprobar;
 - Llega con aprobar una parte.
- Sol:** a) 0.8704; b) 0.1792; c) 0.0256.
- 65°** El 60% de la población de una determinada ciudad lee el periódico A, el 35% el B y un 15% ambos. Elegido un ciudadano al azar, calcular la probabilidad de:
- Ser lector de algún periódico.
 - No leer ninguno.
 - Leer sólo el periódico A.
 - Leer sólo uno de los dos periódicos.
- Sol:** a) 0.8; b) 0.2; c) 0.45; d) 0.65.
- 66°** De un grupo de 100 estudiantes de 2º bachillerato de los que 55 son chicos y 45 chicas, se obtienen las siguientes opiniones respecto de los exámenes de selectividad:

	Alumnos	Alumnas
A favor	11	9
En contra	44	36

Considerando que A es ser varón y B es estar a favor de la selectividad, averiguar:

- Si A y B son independientes.
- Si se selecciona al azar un alumno varón, ¿qué probabilidad hay de que esté a favor de la selectividad?

Sol: a) Si son independientes; b) 0.2.

- 67°** Una empresa posee dos factorías, A y B. En A se produce el 65 % de los productos de la empresa y el resto en B. En A la probabilidad de encontrar artículos defectuosos es del 0.5 % y en B del 1.5 %. Si se elige un artículo y resulta defectuoso, calcula la probabilidad de que proceda de la factoría A. **Sol:** 0.382.
- 68°** Para elegir un jurado se dispone de 5 mujeres y 10 hombres. Se selecciona al azar 6 personas. Se pide:
- a) Probabilidad de que haya 5 mujeres.
 - b) Probabilidad de que haya al menos una mujer.
- Sol:** a) $3.33 \cdot 10^{-4}$; b) $4.66 \cdot 10^{-3}$.
- 69°** Se tienen 2 cajas. Una contiene 4 bolas blancas y 3 negras, la otra tiene 3 blancas y 4 negras. Se elige una caja al azar y se saca una bola. Se pide:
- a) Probabilidad de que la bola sea blanca.
 - b) Probabilidad de que sea negra.
- Sol:** a) 0.5; b) 0.5.
- 70°** Un rosal no está en buen estado y, por tanto, si se riega tiene la misma probabilidad de salvarse que de no salvarse. La probabilidad de que sobreviva si no se riega es 0.25. La probabilidad de no regar el rosal es $\frac{2}{3}$. Si el rosal no se ha salvado, ¿Cuál es la probabilidad de no haberlo regado? **Sol:** 0.75.
- 71°** En una caja de golosinas hay 6 caramelos y 4 chocolatinas. Un niño elige al azar 4 golosinas. Determinar:
- a) Probabilidad de que solo coja chocolatinas.
 - b) Probabilidad de que coja 2 caramelos y 2 chocolatinas.
- Sol:** a) $\frac{1}{210}$; b) $\frac{3}{7}$.
- 72°** Una persona pasa cada mañana por tres semáforos que operan independientemente. La probabilidad de luz roja es 0.4, 0.8 y 0.5 respectivamente para semáforo. Se pide:
- a) Probabilidad de que se encuentren los tres semáforos en rojo.
 - b) Probabilidad de que se encuentre uno en rojo y los otros dos en verde.
- Sol:** a) 0.16; b) 0.34.
- 73°** Una persona cuida de su jardín, pero es bastante distraída y se olvida de regarlo a veces. La probabilidad de que se olvide de regar el jardín es $\frac{2}{3}$. El jardín no está en muy buenas condiciones, así que si se le riega tiene la misma probabilidad de progresar que de estropearse, pero la probabilidad de que progrese si no se le riega es de 0.26. Si el jardín se ha estropeado, ¿cuál es la probabilidad de que la persona olvidara hacerlo? **Sol:** 0.747.
- 74°** En un colectivo de inversores bursátiles, el 20% realiza operaciones vía Internet. De los inversores que realizan operaciones vía Internet, un 80 % consulta InfoBolsaWeb. De los inversores bursátiles que no realizan operaciones vía Internet sólo un 20 % consulta InfoBolsaWeb. Se pide:
- a) Obtener la probabilidad de que un inversor bursátil elegido al azar en este colectivo consulte InfoBolsaWeb.
 - b) Si se elige al azar un inversor bursátil de este colectivo y resulta que consulta InfoBolsaWeb, ¿cuál es la probabilidad de que realice operaciones por Internet?
- Sol:** a) 0.32; b) 0.5.

Ejercicios de estadística descriptiva:

- 1º En una clase de diez alumnos, las notas del examen de matemáticas fueron:

7 4 4 2 4 5 2 8 5 6

Determine la media aritmética, la moda, el primer cuartil, el segundo cuartil o mediana, el tercer cuartil, la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación.

Sol: $\bar{x} = 4.7$; $M_0 = 4$; $1^\circ C = 3$; $M_e = 4.5$; $3^\circ C = 5.5$; $\sigma^2 = 3.41$; $\sigma = 1.85$. $CV = 0.393$

- 2º En una clase de diez alumnos, se mide y se anota la altura de estos en cm:

168 175 173 167 166 179 180 176 172 170

Determine la media aritmética, el primer cuartil, el segundo cuartil o mediana, el tercer cuartil, la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación.

Sol: $\bar{x} = 172.6$; $1^\circ C = 167.5$; $M_e = 172.5$; $3^\circ C = 175.5$; $\sigma^2 = 21.64$; $\sigma = 4.65$; $CV = 0.027$.

- 3º Mediante un péndulo simple, se han realizado diez medidas del valor de la gravedad en la superficie de la tierra, dando los siguientes valores expresados en m/s^2 :

9.82 9.79 9.83 9.78 9.78 9.82 9.81 9.83 9.79 9.85

Determine la media aritmética, el primer cuartil, el segundo cuartil o mediana, el tercer cuartil, la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación.

Sol: $\bar{x} = 9.81$; $1^\circ C = 9.785$; $M_e = 9.815$; $3^\circ C = 9.825$; $\sigma^2 = 0.00052$; $\sigma = 0.023$;
 $CV = 0.0023$.

- 4º En una inspección de consumo, se mide la cantidad de litros de Coca Cola que contiene una botella de 2 L, obteniéndose como resultado lo siguiente:

2.01 2.02 2.01 1.99 2.01 2.02 1.99 1.98 2.00 1.98

Determine la media aritmética, la moda, el primer cuartil, el segundo cuartil o mediana, el tercer cuartil, la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación.

Sol: $\bar{x} = 2.001$; $M_0 = 2.01$; $1^\circ C = 1.985$; $M_e = 2.005$; $3^\circ C = 2.010$; $\sigma^2 = 2.09 \cdot 10^{-4}$;
 $\sigma = 0.0145$; $CV = 0.0072$.

- 5º La siguiente tabla nos muestra las notas medias que sacaron los alumnos que hicieron el examen de Matemáticas Aplicadas a Ciencias Sociales en el instituto I de Las Rozas:

2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
5.69	5.67	4.22	4.58	4.91	4.73	7.45	5.83	5.35

Calcula la media de los datos, la varianza, la desviación típica, la mediana y el coeficiente de variación. **Sol:** $\bar{x} = 5.38$; $M_e = 5.35$; $\sigma^2 = 0.811$; $\sigma = 0.901$; $CV = 0.167$.

- 6º La siguiente tabla nos muestra las notas medias que sacaron los alumnos que hicieron el examen de Matemáticas Aplicadas a Ciencias Sociales en el instituto II de Las Rozas:

2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
3.70	4.78	5.37	3.59	6.03	6.13	5.80	5.72	4.90

Calcula la media de los datos, la varianza, la desviación típica, la mediana y el coeficiente de variación. **Sol:** $\bar{x} = 5.11$; $M_e = 5.37$; $\sigma^2 = 0.806$; $\sigma = 0.898$; $CV = 0.176$.

- 7º La siguiente tabla nos muestra las notas medias que sacaron los alumnos que hicieron el examen de Matemáticas Aplicadas a Ciencias Sociales en el instituto III de Las Rozas:

1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
3.49	3.60	4.93	6.02	5.68	6.96	5.18	6.41	5.80	5.99	5.94	6.35	6.15

Calcula la media de los datos, la varianza, la desviación típica, la mediana y el coeficiente de variación. **Sol:** $\bar{x} = 5.58$; $M_e = 5.94$; $\sigma^2 = 0.995$; $\sigma = 0.997$; $CV = 0.179$.

- 8º La siguiente tabla nos muestra las notas medias que sacaron los alumnos que hicieron el examen de Matemáticas Aplicadas a Ciencias Sociales en el instituto IV de Las rozas:

2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
3.53	3.47	1.32	5.36	6.48	5.84	5.20	5.21

Calcula la media de los datos, la varianza, la desviación típica, la mediana y el coeficiente de variación. **Sol:** $\bar{x} = 4.55$; $M_e = 5.21$; $\sigma^2 = 2.44$; $\sigma = 1.56$; $CV = 0.343$.

- 9º La siguiente tabla nos muestra las notas medias que sacaron los alumnos que hicieron el examen de Matemáticas Aplicadas a Ciencias Sociales entre todos los colegios e institutos de la UCM.

1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
1.28	2.41	2.26	2.58	3.83	3.98	4.34	4.40

2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
4.75	4.36	5.08	5.19	5.15	4.07	4.13

Calcula la media de los datos, la varianza, la desviación típica, la mediana y el coeficiente de variación. **Sol:** $\bar{x} = 3.85$; $M_e = 4.13$; $\sigma^2 = 1.31$; $\sigma = 1.14$; $CV = 0.296$.

- 10º En una ciudad se registraron las temperaturas máximas durante el mes de julio:

32 31 28 29 33 32 31 30 31 31 27
30 32 31 31 30 30 29 29 30 30 31
34 33 33 29 29 31 29 28 30 32 31

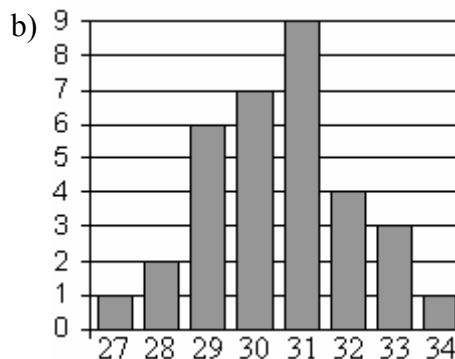
Se pide:

- Elabora una tabla de frecuencias en las que se incluyan: frecuencia absoluta, absoluta acumulada, relativa y relativa acumulada. Agregar a la tabla dos columnas más, una del producto $n_i \cdot x_i$ y otra del producto $n_i \cdot x_i^2$.
- Representa en forma de diagrama de barras la frecuencia absoluta de cada temperatura.
- Calcular la media aritmética, los cuarteles, la mediana, la moda, la desviación típica, la varianza y el coeficiente de variación de Pearson.

Sol:

a)

x_i	n_i	N_i	f_i	F_i	$n_i \cdot x_i$	$n_i \cdot x_i^2$
27	1	1	1/33	1/33	27	729
28	2	3	3/33	3/33	56	1568
29	6	9	6/33	9/33	174	5046
30	7	16	7/33	16/33	210	6300
31	9	25	9/33	25/33	279	8649
32	4	29	4/33	29/33	128	4096
33	3	32	3/33	32/33	99	3267
34	1	33	1/33	33/33	34	1156



- c) $\bar{x} = 30.52$, $1^\circ C = 29$, $Me = 31$, $3^\circ C = 31$, $Mo = 31$, $\sigma = 1.58$, $\sigma^2 = 2.49$, $CV = 0.052$.

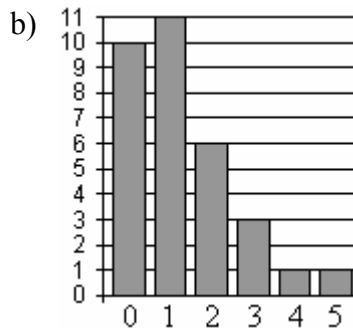
11º El número de hermanos de los alumnos de una clase es el siguiente:

0 1 0 0 3 2 1 4 5 1 0
0 0 1 1 2 0 1 1 1 2 3
2 0 1 1 2 1 3 0 0 2

- Elabora una tabla de frecuencias en las que se incluyan: frecuencia absoluta, absoluta acumulada, relativa y relativa acumulada. También el producto $n_i \cdot x_i$ y el producto $n_i \cdot x_i^2$.
- Representa los datos en un diagrama de barras de frecuencias absolutas.
- Calcular la media, la moda, la mediana, la desviación típica, la varianza y el coeficiente de variación de Pearson.
- ¿Qué porcentaje de alumnos son hijos únicos? ¿Cuántos alumnos tienen más de un hermano?

Sol:

x_i	n_i	N_i	f_i	F_i	$n_i \cdot x_i$	$n_i \cdot x_i^2$
0	10	10	10/32	10/32	0	0
1	11	21	11/32	21/32	11	11
2	6	27	6/32	27/32	12	24
3	3	30	3/32	30/32	9	27
4	1	31	1/32	31/32	4	16
5	1	32	1/32	32/32	5	25



c) $\bar{x} = 1.28$, $Me = 1$, $Mo = 1$; $\sigma = 1.26$, $\sigma^2 = 1.58$, $CV = 0.98$.

d) El 31.25 % son hijos únicos y 11 alumnos tienen más de un hermano

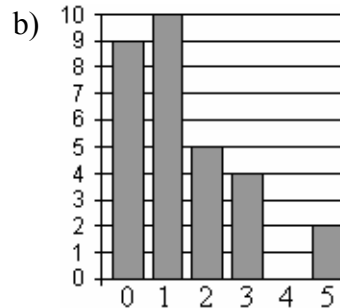
12º El número de goles metidos por partido por un cierto equipo es el siguiente:

0 1 0 2 3 2 1 3 0 0 1 0 1 3 0
1 0 0 1 1 2 1 2 0 1 2 1 5 3 5

- Elabora una tabla de frecuencias en las que se incluyan: frecuencia absoluta, absoluta acumulada, relativa y relativa acumulada. Incorporar también dos columnas una para el producto $n_i \cdot x_i$ y otra para $n_i \cdot x_i^2$.
- Representa los datos en un diagrama de barras de frecuencias absolutas.
- Calcula la moda, la media de goles por partido. La desviación típica, la varianza y el coeficiente de variación de Pearson.
- ¿Qué porcentaje de partidos han metido al menos un gol?

Sol:

x_i	n_i	N_i	f_i	F_i	$n_i \cdot x_i$	$n_i \cdot x_i^2$
0	9	9	9/30	9/30	0	0
1	10	19	10/30	19/30	10	10
2	5	24	5/30	24/30	10	20
3	4	28	4/30	28/30	12	36
4	0	28	0/30	28/30	0	0
5	2	30	2/30	30/30	10	50



c) $\bar{x} = 1.4$, $Me = 1$, $Mo = 1$; $\sigma = 1.38$, $\sigma^2 = 1.9$, $CV = 0.99$.

d) En el 63.3 % han metido por lo menos un gol.

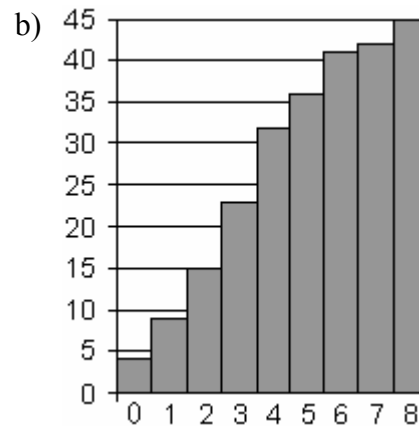
13° En una encuesta sobre vivienda se pregunta, entre otras cosas, cuántas personas viven en la casa, obteniéndose las siguientes respuestas:

4 4 8 1 3 2 1 3 4 2 2 7 0 3 8
0 1 5 6 4 3 3 4 5 6 8 6 2 5 3
3 5 4 6 2 0 4 3 6 1 2 1 0 4 4

- Elabora una tabla en la que se recojan las cuatro frecuencias. Incorporar también dos columnas una para el producto $n_i \cdot x_i$ y otra para $n_i \cdot x_i^2$.
- Dibuja con los datos un polígono de frecuencias absolutas acumuladas.
- Calcula la moda, la media de goles por partido. La desviación típica, la varianza y el coeficiente de variación de Pearson.
- ¿Qué porcentaje de viviendas está ocupado por más de cinco personas? ¿En cuántas de ellas no vive nadie?

a)

x_i	n_i	N_i	f_i	F_i	$n_i \cdot x_i$	$n_i \cdot x_i^2$
0	4	4	4/45	4/45	0	0
1	5	9	5/45	9/45	5	5
2	6	15	6/45	15/45	12	24
3	8	23	8/45	23/45	24	72
4	9	32	9/45	32/45	36	144
5	4	36	4/45	36/45	20	100
6	5	41	5/45	41/45	30	180
7	1	42	1/45	42/45	7	49
8	3	45	3/45	45/45	24	192



c) $\bar{x} = 3.51$, $1^\circ C = 2$, $Me = 3$, $3^\circ C = 5$; $Mo = 4$; $\sigma = 2.17$, $\sigma^2 = 4.69$, $CV = 0.62$.

d) Un 20% de las viviendas están ocupadas por mas de 5 personas.

14° En un colegio, se hace un examen de matemáticas a una clase. La distribución de notas es la siguiente:

Grupo A	Nota	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	f_i	0	1	2	6	7	6	4	3	2	1	1

Grupo B	Nota	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	f_i	0	1	3	6	10	8	3	2	1	0	0

Halla la media, primer cuartil, segundo cuartil o mediana, tercer cuartil, moda, desviación típica y coeficiente de variación para las notas de ambas clases.

Sol: GA: $\bar{x} = 4.88$; $1^\circ C = 3$; $Me = 5$; $3^\circ C = 6$; $Mo = 4$; $\sigma^2 = 4.23$; $\sigma = 2.06$; $CV = 0.421$.

GB: $\bar{x} = 4.26$; $1^\circ C = 3$; $Me = 4$; $3^\circ C = 5$; $Mo = 4$; $\sigma^2 = 2.31$; $\sigma = 1.52$; $CV = 0.357$.

Regresión lineal:

- 1º Esta es la distribución bidimensional de una nube de puntos:

x	0	1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	10
y	0	2	2	4	3	6	4	5	7	7	9	10

Calcula:

- Las medias, desviaciones típicas marginales y covarianza de esta distribución.
- Determina el coeficiente de correlación lineal.
- Determina la recta de regresión lineal.

Sol: a) $\bar{x} = 4.92$, $\bar{y} = 4.92$, $\sigma_x = 3.04$, $\sigma_y = 2.87$, $\sigma_{xy} = 8.33$; b) $r = 0.95$;

c) $y = 0.90 \cdot x + 0.49$.

- 2º Las notas obtenidas por cinco alumnos en Matemáticas y Economía son:

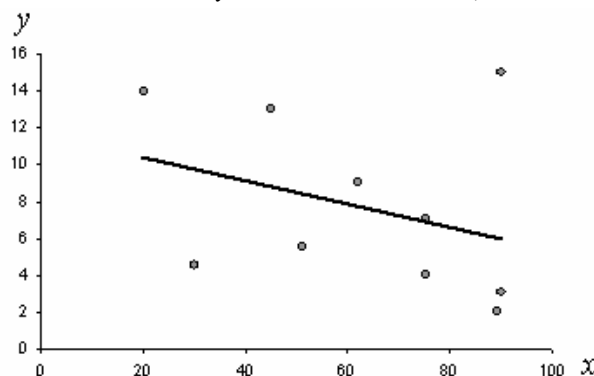
Matemáticas	6	4	8	5	3.5
Economía	6.5	4.5	7	5	4

Determina si existe una buena correlación lineal entre las notas en matemáticas y en economía. En caso afirmativo, calcule una recta de regresión lineal y estime cual sería la nota obtenida en economía por un alumno que saque un 7 en matemáticas. **Sol:** Hay buena correlación ($r = 0.961$); $E = 0.695 \cdot M + 1.715$; $E(7) = 6.58$.

- 3º Unos investigadores han estudiado la correlación entre *obesidad* y la *respuesta individual al dolor*. La obesidad se mide como porcentaje sobre el peso ideal (x). La respuesta al dolor se mide utilizando el umbral de reflejo de flexión nociceptiva (y), que es una medida de sensación de punzada. Se obtienen los siguientes datos:

x	89	90	75	30	51	75	62	45	90	20
y	2	3	4	4.5	5.5	7	9	13	15	14

Represente los datos, determine su recta de regresión lineal y represéntela. Determine además el coeficiente de correlación lineal. ¿Guarda relación por tanto la obesidad con la respuesta individual al dolor? **Sol:** $y = -0.063x + 11.64$; $r = -0.334$. No hay relación.



- 4º Mantener el vacío es difícil en la Tierra debido a la presión atmosférica. Tenemos un recipiente cerrado, pero los cierres no son perfectos se observa en seguida un aumento de la presión, lo cual sugiere una entrada de aire. La siguiente tabla nos muestra el aumento de la presión con respecto al tiempo:

$p(\text{mbar})$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$t(\text{s})$	0	6	37	68	104	140	172	206	242	280

Determinar la recta regresión lineal de la presión frente al tiempo. Calcule también el coeficiente de correlación, el cual es clave para poder afirmar si ciertamente existe una correlación lineal entre el ascenso y el tiempo. **Sol:** $p = 0.0305 \cdot t + 0.6712$, $r = 0.996$.

- 5º La policía tiene situada en una carretera rectilínea de veinte kilómetros unos seis radares de velocidad, cada uno situado a 4 km de distancia. El problema para medir la velocidad, reside en que los coches son alertados por un GPS de la localización de los radares, con lo cual frenan en las proximidades del radar y no son multados. No obstante, la colocación de los radares permite estimar mediante regresión lineal la velocidad promedio de un conductor en dicho trayecto. Un coche multado, pasó por los radares de la siguiente forma:

	1º radar	2º radar	3º radar	4º radar	5º radar	6º radar
Recorrido (m):	0	4000	8000	12000	16000	20000
Tiempo (s):	0	95	205	315	420	560

Por cinemática sabemos que:

$$r(t) = r_0 + v \cdot t$$

De esta forma, podemos relacionar la pendiente de la recta de regresión con la velocidad media del vehículo. Calcule por tanto su velocidad en km/h, y estime el coeficiente de correlación lineal. Dato: 3.6 km/h = 1 m/s. **Sol:** 129.3 km/h, 0.9985.

- 6º Un conjunto de datos bidimensionales (x, y) tiene coeficiente de correlación $r = -0.9$, siendo las medias de las medias marginales $\bar{x} = 1$, $\bar{y} = 2$. Se sabe que una de las cuatro ecuaciones siguientes corresponde a la recta de regresión de y frente a x :

1ª) $y = -x + 2$ 2ª) $3x - y = 1$ 3ª) $2x + y = 4$ 4ª) $y = x + 1$

Seleccionar razonadamente esta recta. **Sol:** Como el coeficiente es negativo no es posible que sean ni la segunda recta ni la cuarta. Por otra parte, como la primera no admite como solución las medias marginales y la tercera si, entonces la solución es la tercera.

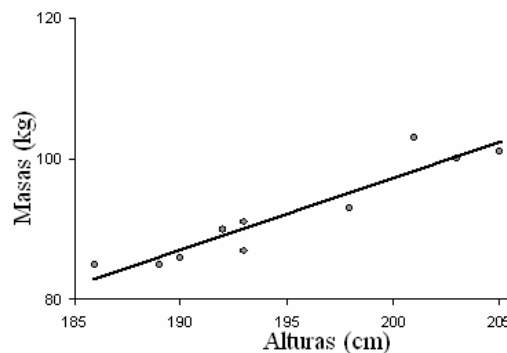
- 7º Las estaturas y masas de diez jugadores del Real Madrid de baloncesto son:

Alturas (cm)	X	186	189	190	192	193	193	198	201	203	205
Masas (kg)	y	85	85	86	90	87	91	93	103	100	101

Calcula:

- Las medias y desviaciones típicas marginales.
- La covarianza.
- El coeficiente de correlación lineal. ¿Es buena correlación?
- En caso de ser buena correlación, determine la recta de regresión lineal y dibújela junto con los puntos.

Sol: a) $\bar{x} = 195$, $\bar{y} = 92.1$, $\sigma_x = 6.07$, $\sigma_y = 6.56$; b) $\sigma_{xy} = 37.6$; c) $r = 0.944$, es buena correlación; d) $y = 1.02 \cdot x - 107.14$.



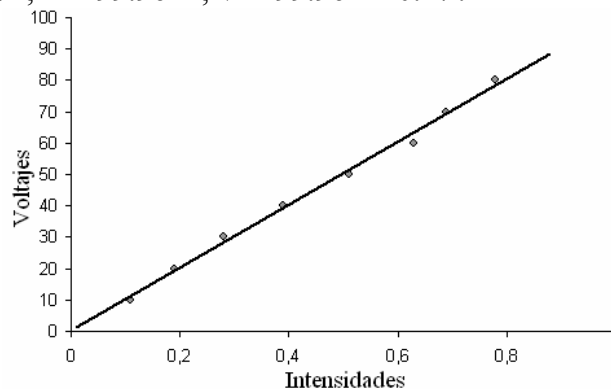
- 8º La ley de Ohm es una ley física que relaciona la intensidad que circula por un circuito, con la diferencia de potencial al que está sometido. De dicha ley, surge el concepto de resistencia eléctrica, y guarda una relación lineal de tipo:

$$V = RI$$

Se hace un experimento consistente en medir el valor de R pero variando voltaje e intensidad, el resultado es la siguiente tabla de valores:

I (Amperios)	0.11	0.19	0.28	0.39	0.51	0.63	0.69	0.78
V (Voltios)	10	20	30	40	50	60	70	80

Mediante el coeficiente de correlación lineal, verifique si el experimento que hemos realizado satisface la ley de Ohm o no. En caso afirmativo, determine el valor de la resistencia del circuito (que le vendrá dado en Ohmios Ω) mediante un ajuste por mínimos cuadrados. Realice un gráfico representando los puntos y la recta de regresión lineal. **Sol:** $r = 0.9974$; $R = 99.96 \Omega$; $V = 99.96 \cdot I + 0.27$.



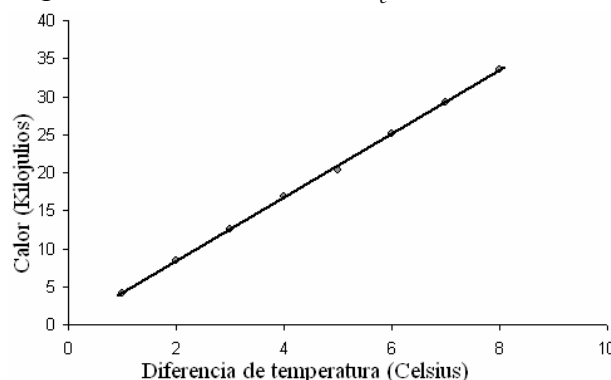
- 9º Se ha diseñado un experimento físico con el que se pretende la medida del calor específico del agua. Para ello se le suministra a un kilogramo de agua cantidades conocidas de calor Q y se observa el incremento de su temperatura ΔT , obteniéndose la siguiente tabla:

Q (Kilojulios)	4.2	8.4	12.5	16.9	20.4	25.1	29.3	33.6
ΔT (Celsius)	1	2	3	4	5	6	7	8

Mediante el coeficiente de correlación lineal, verifique si el agua cumple una ley de calentamiento lineal como esta:

$$Q = M \cdot c_e \cdot \Delta T$$

Donde M es la masa de agua, 1 kg, y c_e es el calor específico del agua. Calcule el calor específico del agua calculando la pendiente de la recta de regresión lineal. Represente los puntos y recta de regresión. **Sol:** $r = 0.9998$; $c_e = 4.186$.



MATEMÁTICAS DE 4º ESO - Opción A

EJERCICIOS DE REPASO

A.- NÚMEROS ENTEROS Y RACIONALES

1.- Calcula:

a) $-5 + 4 \cdot 12 - (-3) : 3$ b) $6 + 2 \cdot (10 + 3 \cdot 4 - 25)$ c) $-7 - (-3) + 4 : (12 - 7 \cdot 2)$

d) $2^3 - 4^2 + 10 : (7 - 2)$ e) $17 - 5 \cdot [-5 + 4^2 + (-2)^3]$ f) $(-1)^4 - 5^2 + 18 : (-6) - (-6)$

g) $(-3)^3 : (12 - 3) + 3 - 2 \cdot (-6 + 1)$ h) $14 - 6 \cdot [-5 - 12 + 3 \cdot (-7 + 1) - (-3 + 2)^2]$

2.- Ordena las siguientes fracciones y represéntalas:

a) $\frac{5}{2}, \frac{12}{5}, \frac{9}{4}$ b) $\frac{7}{3}, \frac{-5}{2}, \frac{-8}{5}, \frac{11}{6}$ c) $\frac{7}{4}, \frac{-6}{5}, \frac{5}{7}, \frac{13}{12}$

3.- Calcula las siguientes expresiones:

a) $\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2} \right) - \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5} \right)$ b) $\frac{5}{9} + \frac{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{5} \right)$

c) $\frac{7}{5} : \left(1 - \frac{2}{3} \right) - \left(\frac{-4}{5} \right) \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{3}$ d) $\left(\frac{2}{3} - \frac{7}{5} + \left(\frac{-5}{6} \right) \right) : \left(\frac{-4}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \right)$

e) $2 - 5 \cdot \left[\frac{1}{3} - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4} \right) \right]$ f) $(2 - 5) \cdot \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4} \right) \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4} \right) \right]$

g) $\frac{5}{6} : \left(\frac{1}{2} - 2 \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2} \right) + 1 \right) - 3 \cdot \left(\frac{-1}{2} \right)^2$ h) $\frac{5}{6} : \left(\left(\frac{1}{2} - 2 \right) \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2} \right) + (1 - 3) \cdot \left(\frac{-1}{2} \right)^2 \right)$

B.- PROBLEMAS DE NÚMEROS RACIONALES.

1.- Un alumno se lamenta de que en su clase de matemáticas han aprobado 2 de cada 3. Su amigo le contesta que no se queje, que en su clase han aprobado 3 de cada 7. ¿Dónde hay más aprobados?

2.- Un depósito está lleno y contiene 3000 litros de agua. Primero, hemos vaciado los $\frac{3}{8}$ del depósito. ¿Cuántos litros son estos $\frac{3}{8}$?, ¿Cuántos litros quedan?.

*Luego hemos extraído 900 litros más. ¿Cuántos litros de agua quedan ahora?, ¿qué fracción del depósito queda?

3.- Una motorista recorre 90 km en tres cuartos de hora y otro recorre 60 km en media hora. ¿Cuál es más rápido?

4.- Para obtener una mezcla de 750 grs. de pintura utilizamos $\frac{3}{8}$ de color azul, $\frac{1}{5}$ de color blanco y el resto de color verde. ¿Cuántos gramos de cada color contiene la mezcla?, ¿qué fracción corresponde al color verde?

5.- En un congreso internacional $\frac{3}{8}$ de los asistentes son europeos, la tercera partes asiáticos y el resto africanos. Hay 49 asistentes africanos. ¿Cuántos congresistas hay?

6.- Un ciclista debe recorrer una cierta distancia en 4 días. El primer día recorre $\frac{3}{5}$ del total. El segundo día recorre 50 km. El tercer día recorre $\frac{2}{3}$ de lo que le queda aún. Por último, el cuarto día recorre 30 km. ¿Cuántos km. recorrerá el ciclista en estos cuatro días?, ¿cuántos km. recorre cada día?, y ¿qué fracción del total representa lo que recorren cada día?

7.- Un chico de 3º ESO dispone de una cantidad de dinero a principio de curso. Gasta $\frac{1}{5}$ en material escolar a principio de curso. Luego gasta 200 € en ropa. Finalmente gasta $\frac{1}{4}$ de lo que le queda en regalos para su familia. Después de todos estos gastos le quedan 150 €. ¿De cuánto dinero disponía en un principio?, ¿Cuánto gasta en cada momento?

8.- Compro a plazos una moto que vale 1400 €. Primero hago un pago de 200 €, después pago $\frac{1}{4}$ de lo que me queda por pagar, y luego $\frac{2}{3}$ de lo que aún me queda por pagar.

a) ¿Cuánto he pagado en cada momento?

b) ¿Cuánto me queda por pagar todavía?

9.- a) El 30 % de los 550 alumnos y alumnas del instituto cursan Bachillerato. ¿Cuántos alumnos no cursan Bachillerato?, ¿qué porcentaje de alumnos será?

b) Los $\frac{3}{10}$ de los 550 alumnos y alumnas del instituto cursan Bachillerato. ¿Cuántos alumnos no cursan Bachillerato?, ¿qué fracción de alumnos representan?.

10.- Pedro y Carlos van de excursión. El primer día recorren $\frac{2}{5}$ del trayecto, el segundo día $\frac{1}{3}$ y el tercer día el resto, que son 24 km. Calcula la fracción que supone el recorrido del tercer día y el total del trayecto de la excursión.

11.- Tres amigos quieren montar otro negocio. Para ello, el primero pone $\frac{2}{3}$ del capital total. El segundo $\frac{1}{4}$ del resto. Si en total ponen 24.000 €. ¿Cuánto pone cada uno?, ¿qué fracción aporta el tercero?

12.-Quiero comprarme un ordenador que cuesta 1.100 € y le voy a proponer un trato al informático. Primero le aplicamos una subida al ordenador del 30 % y luego le aplicamos un descuento del 30 %. ¿Aceptará el informático mi propuesta?, ¿por qué?.

13.- En un rally, un coche debe recorrer 150 km. en varias etapas. En la primera etapa el coche recorre $\frac{2}{5}$ del total. En la segunda etapa el coche recorre 30 km. ¿Qué distancia lleva recorrida el coche en las dos primeras etapas?. ¿Qué fracción del total ha recorrido?

14.- Una persona tiene 10.000 € en el banco. Primero gasta $\frac{2}{5}$ del total. Luego gasta $\frac{1}{4}$ del dinero que le queda. ¿Cuánto dinero ha gastado en total?¿Qué fracción del total representa?

15.- Sabemos que el 35% de los alumnos poseen ordenador en casa. Si hay un total de 196 alumnos con ordenador. ¿Cuántos alumnos hay en el instituto?

16.- Quiero comprarme la Play Station 2, pero vale 260 €, así que decido esperarme a las rebajas. En rebajas cuesta 221 €. ¿Cuál ha sido el porcentaje de descuento que han aplicado?

17.- Un trabajador pasa a cobrar 231 semanales después de que su jefe le subiera el sueldo un 5%. ¿Cuánto cobraba antes de que se le aplicara la subida?

18.- Una camiseta costaba 30 €. Primero le aplican una subida del 20%. Después le aplican un 10 de subida de la cantidad que resulta. Finalmente le aplican un 30% de descuento. ¿Cuánto cuesta ahora la camiseta?, ¿Cuál ha sido el porcentaje de descuento?

19.- Tres hermanos se reparten una herencia de 2530 € de forma que el mayor recibirá el triple que el menor y el mediano recibirá la mitad que el mayor. ¿Qué cantidad se lleva cada uno?

20.- El 5% de los presupuestos va destinado a la Comunidad Valenciana. Aquí se destina un 30% en obras y un 20% en sueldos a funcionarios. Si sobre finalmente 15 millones de euros, ¿a qué cantidad ascienden los presupuestos del Estado?

21.- ¿Cuánto hemos de pagar por una bicicleta si tiene un precio de 350 €, pero nos hacen un descuento del 12%?.

22.-¿Cuál era el precio de venta de una mochila si hemos pagado 30,6 € con un descuento del 15 %?.

20.- Una máquina, trabajando 8 horas diarias, tarda 3 días en fabricar 6000 botellas. En la empresa tienen un pedido urgente de 15000 botellas y ponen la máquina a trabajar 10 horas diarias. ¿Cuántos días tardarán en fabricar el pedido?

Idea: ¿Cuántas botellas se fabrican en una hora?

21.- Formo parte de un grupo de amigos que estamos recogiendo dinero para hacernos el disfraz de carnaval. En el grupo somos 6, y hemos puesto una media de 8 € por persona. Si yo he puesto 10 €, ¿Cuál es el media de euros de las otras cinco personas?

C. POTENCIAS Y NOTACIÓN CIENTÍFICA

1.- Simplifica:

$$\begin{array}{lllll}
 \text{a) } 5^0 & \text{b) } (-5)^2 & \text{c) } -5^2 & \text{d) } (-3)^{-4} & \text{e) } (-3)^{-5} \\
 \text{f) } 2^5 \cdot 2^3 \cdot 4 & \text{g) } (2^3)^4 \cdot 8^2 & \text{h) } -4^2 \cdot (-3)^3 \cdot 6^4 & \text{i) } (12^2)^3 \cdot 3^3 \cdot 4^{10} & \text{j) } \frac{-4^5 \cdot 10^3 \cdot (-5)^3}{(-50)^2} \\
 \text{k) } \frac{(2^4)^5 \cdot 10^3}{25} & \text{l) } \frac{2^{-3} \cdot 12^4 \cdot 9}{8^2 \cdot 27} & \text{m) } \frac{18^{-1} \cdot 20^{-3} \cdot 16^{10}}{9^{-5} \cdot 15^4} & \text{n) } \frac{(-3)^5 \cdot 15^{-4} \cdot 10}{25^{-3} \cdot 9^5} \\
 \text{ñ) } \left(\frac{6}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^{-4} & \text{o) } \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 : \left(\frac{1}{3} - 1 + \frac{3}{5}\right)^{-3} & \text{p) } \left(3 - \frac{5}{6}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)^{-1} \\
 \text{q) } \left(\frac{5}{7} + 1\right)^{-2} \cdot \left(\frac{5}{8} - 1\right)^4 & \text{r) } \left(\frac{5}{2} - 1\right)^5 : \left[\left(\frac{4}{3} - 1\right)^2\right]^{-4} & \text{s) } \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{8}\right)^{-5}\right]^2 \cdot (3^4)^{-3}
 \end{array}$$

2.- Intercala un decimal de cada tipo (exacto, periódico, puro y mixto, e irracional):

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) Entre } 2'6 \text{ y } 2'\widehat{68} & \text{b) Entre } 1'23\widehat{7} \text{ y } 1'238 & \text{c) Entre } 1'34\widehat{5} \text{ y } 1'34\widehat{5}
 \end{array}$$

3.- Calcula pasando a fracción (Clasifica cada uno de los números decimales).

$$\begin{array}{llll}
 \text{a) } 3'12\widehat{5} - \frac{5}{9} : \frac{10}{7} & \text{b) } 12'444 : 1'\widehat{68} & \text{c) } 5'1\widehat{3} : 2 - 5'13 & \text{d) } 31'4\widehat{5} : 1'11
 \end{array}$$

4.- Calcula en notación científica:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a) } (4'2310^4) : (3 \cdot 10^{-15}) & \text{b) } (3 \cdot 10^{-5} + 2 \cdot 10^{-6})^2 & \text{c) } (1'5 \cdot 10^{-3})^2 : (5 \cdot 10^{-10}) \\
 \text{d) } (3 \cdot 10^{-7})(5'1 \cdot 10^3)(4 \cdot 10^{-12}) & \text{e) } (2 \cdot 10^{-3})^2 - (5'1 \cdot 10^{-5})^2 & \text{f) } 2'14 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^6 \\
 \text{g) } 5'84 \cdot 10^{-8} + 4'7 \cdot 10^{-5} & \text{h) } 2 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^3 & \text{i) } (2'6 \cdot 10^{-8})^2 + 4'7 \cdot 10^{-15} \\
 \text{j) } 9'34 \cdot 10^{-2} + \frac{3'12 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 10^{-3}} & \text{k) } \frac{3'18 \cdot 10^7 - 7'5 \cdot 10^6}{1'8 \cdot 10^{-11} + 2 \cdot 10^{-9}} & \text{l) } 6 \cdot 10^{-4} - \frac{3 \cdot 10^{-4} + 4 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-1}}
 \end{array}$$

D. NÚMEROS REALES

1.- Agrupa las siguientes raíces cuando sea posible:

a) $\sqrt{2} - 4\sqrt{8} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$ b) $7\sqrt[3]{16} + \frac{\sqrt[3]{2}}{2} - 4\sqrt[3]{\frac{2}{27}}$ c) $\frac{3\sqrt[3]{3}}{2} + \frac{\sqrt[3]{24}}{5}$

8.- Simplifica las siguientes expresiones:

a) $4\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}$ b) $\sqrt{12} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{2}$ c) $\sqrt{10} : \sqrt[4]{8}$
d) $\sqrt{32} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{81}} \cdot \sqrt[4]{64}$ e) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{2^7} \cdot 3}\right)^5 \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{2 \cdot 5^9}{3^7}}\right)$ f) $\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[4]{2^{-3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$

9.- Racionaliza las siguientes expresiones algebraicas:

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ c) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ d) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
e) $\frac{1}{\sqrt[5]{6}}$ f) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ g) $\frac{6}{\sqrt[5]{3^3}}$

E.-ÁLGEBRA

1.- Traduce al lenguaje matemático

1. El triple de un número menos tres unidades.
2. El triple de un número menos la cuarta parte del mismo número.
3. El doble del resultado de sumarle al triple de un número cinco unidades.
4. La mitad del resultado de restarle al doble de un número cinco unidades.
5. El 45% de un número
6. El precio de un pantalón aumentado en un 30%
7. El cuadrado de la diferencia de dos números
8. El producto de dos números consecutivos
9. El cubo de un número menos otro diez unidades mayor.

2.- Indica cuál es el grado de los siguientes monomios y di cuáles son semejantes:

a) $5x^2$ b) $-4x^2y$ c) 5 d) $-7xy^2$ e) $4!xy$ f) $-2x^2z$
g) $\frac{-4}{3}xy^3$ h) $-xy^2$ i) x^2y j) $\frac{xy}{7}$ k) $\frac{-3}{5}x$ l) $\frac{1}{9}x^2$

3.- Expresa en forma de producto, utilizando las identidades notables:

a) $25x^2 + 20x + 4$

b) $9x^4 - 12x^2 + 4$

c) $100x^4y^2 - 121$

d) $\frac{4}{9}x^2 - 4x + 9$

e) $\frac{y^2}{64} + 25 - \frac{5y}{4}$

f) $\frac{36x^6}{49} - \frac{12y^3}{7} + 1$

4.- Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado:

a) $1 + \frac{1-x}{8} = \frac{2(5-x)}{6}$

b) $\frac{x-9}{3} - \frac{4-3x}{4} = \frac{2x+3}{3}$

c) $\frac{x-3}{4} - \frac{3}{2} \cdot \frac{5x-.7}{6} = 2$

d) $\frac{3(2x-1)}{4} - \frac{5(1-x)}{3} = \frac{5x}{6}$

e) $(x-2)^2 - 5x = x^2 - 6$

f) $(x+1)^2 = (x-1) \cdot (x+1)$

5.- Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $(5-x) \cdot (x+3) = 1$

b) $x^2 - 5x = -6$

c) $x^2 - (x-1)(x+3) = -x^2 + 7x - 17$

d) $\frac{x^2+1}{2} - \frac{3x+1}{3} = \frac{1}{3}$

e) $\frac{2(x^2-1)}{3} - \frac{5x^2-2x}{4} = \frac{3x-3x^2}{6}$

f) $(x-1)(x+5) = 0$

g) $\frac{x(x-3)}{6} + 1 = \frac{x}{3}$

h) $\frac{-3 \cdot (x+1) + (x+2)(x+3)}{4} = \frac{11x+2}{6}$

i) $\frac{7x+4}{4} - \frac{2x^2+5x+3}{10} = 1$

j) $3x \cdot (1-2x) - (4x^2-1) = 0$

k) $3x(1+x) - 2(x^2-1) = 3$

6.- Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado (sin fórmula):

a) $2x^2 - 50 = 0$

b) $x^2 - \frac{7}{2}x = 0$

c) $(x-1) \cdot (2x-3) = 3$

d) $(2x-1)^2 = 5 - 4x$

7.- Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 5x + 2$

b) $-2x^5 + 2x^4 + 18x^3 - 18x^2$

c) $-x^4 + 25x^2$

d) $3x^3 - x^2 - 7x + 5$

e) $-3x^3 + 18x^2 - 33x + 18$

f) $2x^4 - 16x$

g) $3x^4 + 3x^3 - 18x^2$

h) $-2x^5 + 14x^3 + 12x^2$

i) $2x^5 - 2x^3 - 24x$

8.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x+1}{x-1} - 1 = \frac{1}{x}$

b) $x + \frac{1}{x+1} = \frac{2x+7}{x+1}$

c) $\frac{x-1}{3x+1} = \frac{-1}{2x-1}$

d) $\frac{3}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$

e) $\frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} = \frac{x-1}{x}$

f) $1 + \frac{x-2}{x-1} - \frac{1}{2} = \frac{4}{x+1}$

9.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{x^2 + x - 2} - 2x = 4$ b) $(2x+1) \cdot (\sqrt{x} - x) = 0$ c) $(2x^2 - 50) \cdot (\sqrt{x-1} + 3 - x) = 0$

d) $4 - \sqrt{x-1} + x = 2x + 1$ e) $2\sqrt{x+3} - 2x + 1 = x + 2$ f) $\sqrt{(x+3) \cdot (x+4)} = x - 1$

g) $2\sqrt{4x+1} + 3\sqrt{x+3} = 0$ h) $\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x+8} = 0$ i) $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} = 1$

10.- Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 3x - 5y = 8 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 6y = 4 \\ -2x + y = -5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x + 10y = 12 \\ 5x + 7y = -3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2y - 4 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x + 3y = 24 \\ \frac{3y}{4} - \frac{x}{6} = \frac{5}{2} \end{cases}$ f) $\begin{cases} \frac{2x-1}{3} - \frac{y}{6} = \frac{1}{4} \\ 7 \cdot (4y+5) - 2x = -8 \end{cases}$ g) $\begin{cases} 5 \cdot (2-x) + 8y = 3 \\ 3x + 3 \cdot (2y-2) = 9 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2(3x-4) + 5y - 2 = 7y \\ \frac{3 \cdot (x-2)}{4} + \frac{y-3}{2} = -1 \end{cases}$ i) $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2 \\ 2(3x-1) - 4(y-x) = 6 \end{cases}$ j) $\begin{cases} 5 + 2 \cdot (x-3) = 5y \\ 4x - 10y = 3 \end{cases}$

11.- Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x - y = 5 \\ x \cdot y = -6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + x \cdot y = 1 \\ x^2 - x \cdot y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ x - 2 = y \end{cases}$ e) $\begin{cases} (x-y)^2 = 16 \\ x + y = 16 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ x \cdot y = 0.5 \end{cases}$

12.- Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} > 3 - \frac{x}{6}$ b) $\frac{2x-1}{3} + \frac{x+1}{3} < 2x-2$
 c) $\frac{x}{3} + \frac{x+2}{5} > x-1$ d) $\frac{x-1}{3} - \frac{x-4}{2} < \frac{x+4}{2} - 3$
 e) $\frac{x+1}{3} - \frac{x-2}{5} > 1 + \frac{x-1}{15}$ f) $\frac{x-2}{5} - \frac{3x+1}{2} < \frac{x}{2} - 3x$

13.- Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{3} + x < 4 \\ \frac{x}{2} - \frac{x}{3} > 0 \end{array} \right. & \text{b)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-4}{2} + \frac{x+2}{3} \leq 2 \\ \frac{x}{3} - \frac{x}{2} \leq 1 \end{array} \right. & \text{c)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{2x-2}{5} \leq 0 \\ \frac{3x+9}{3} \geq 0 \end{array} \right. \\ \text{d)} \left\{ \begin{array}{l} x-3 < 0 \\ \frac{2x-8}{3} \geq 0 \end{array} \right. & \text{e)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{3} - \frac{x}{2} \geq 1 \\ (x+1)^2 - x^2 \leq 1 \end{array} \right. & \text{f)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-3}{x} \geq \frac{2}{5} \\ \frac{x-2}{2} + \frac{x+2}{3} \leq 3 \end{array} \right. \end{array}$$

14.- Calcula las dimensiones de un rectángulo de perímetro 10 cm y área 6 cm².

15.- Halla dos enteros consecutivos tal que la diferencia de sus cuadrados sea 9.

16.- Un padre desea repartir entre sus dos hijos 100€. Al hijo mayor le quiere dar 20€ más que al pequeño. ¿Cuánto corresponderá a cada hijo?

17.- Calcula dos números sabiendo que la suma de sus inversos es 5 y que el inverso de su diferencia es 6.

18.- La diagonal de un rectángulo mide 13 cm. y su área 60 cm². Calcula las dimensiones del rectángulo.

19.- Un cine dispone de dos tipos de entradas: de adulto a 6€ y de niño a 5€. Se vendieron una tarde 100 entradas, obteniéndose en taquilla 560€. ¿Cuántas entradas se vendieron de cada tipo?

20.- En una reunión hay el doble número de mujeres que de hombres. El número de niños es la mitad que el de adultos. Sabiendo que en total hay 36 personas, calcula el número de hombres, mujeres y niños.

21.- A un concierto de música rock asisten 3000 personas. Las localidades de asiento cuestan 22€ y las demás 12. Si la recaudación fue de 57.000 euros, ¿cuántas personas asistieron al concierto sentadas y cuántas de pie?

22.- Tenemos 60 € en billetes de 5 € y de 10 €. Sabiendo que el número de billetes de 5€ es el cuádruple (cuatro veces) del número de billetes de 10€, averigua cuántos billetes tenemos de cada clase.

23.- En un corral hay conejos y gallinas. En total hay 58 cabezas y 168 patas. ¿Cuántos conejos y gallinas hay en el corral?

24.- En una lucha entre moscas y arañas intervienen 42 cabezas y 276 patas. ¿Cuántos luchadores había de cada clase?

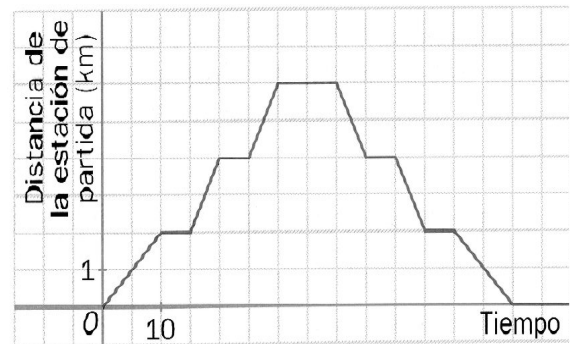
25.- Un poste tiene enterrada una quinta parte de su longitud que mide 1,50m. Hallar la longitud total del poste.

- 26.- Una botella y su tapón valen 0'20 €. La botella vale 8 céntimos más que el tapón. Calcular cuánto vale la botella y cuánto el tapón.
- 27.- Los visitantes anuales del Museo del Prado y Reina Sofía suman 2'5 millones. Si al primer museo van un 50% más que al segundo. ¿Cuántas personas visitan cada museo?
- 28.- Hallar dos números, sabiendo que su diferencia es 22 y que el mayor es triple del menor.
- 29.- Fran que venía del cine con su novia nos dice: "No he podido invitarla, pero he pagado 2€ más que ella. En total les ha costado el cine 12€, ¿Cuánto pago cada uno?
- 30.- Calcular las dimensiones de un rectángulo de 20 m. de perímetro, sabiendo que la altura es el doble de la base.
- 31.- Un palo se halla clavado bajo tierra $\frac{1}{3}$ de su longitud, sus $\frac{2}{5}$ partes quedan dentro del agua y restan en el aire 90 cm. Calcular la longitud total del palo.
- 32.- Un padre tiene triple edad que su hijo. Si el padre tuviera 30 años menos y el hijo 8 más, los dos tendrían la misma edad. Averiguar la edad de cada uno.
- 33.- Un vendedor dispone de 80 helados, unos cuestan a 50 céntimos y los otros a 1€. Vendiendo todos los helados recauda 67'50€. ¿Cuántos vende de cada clase?
- 34.- El perro de Alex tiene hoy 12 años menos que él. Dentro de cuatro años, Alex tendrá el triple de la edad de su perro. ¿Cuál es la edad de Alex y la de su perro?.
- 35.- Un comerciante tiene dos clases de café: el primero a 6 €/kg y el segundo a 9 €/kg. ¿Cuántos kilos debe tomar de cada clase para obtener una mezcla de 10 kg a 7'20 €/kg?
- 36.- ¿Puedes averiguar cuál es mi paga mensual sabiendo que la mitad, más la quinta parte, más la décima parte de la paga es igual a los cuatro quintos de dicha paga más 100 €?
- 37.- Pepe cobra 300€ más que Juan, pero este año a Juan le suben un 20% el sueldo y así los dos cobrarán lo mismo. ¿Cuánto cobraba cada uno?
- 38.- Una madre reparte los caramelos de una bolsa entre sus tres hijos. Al primero le da la mitad de los caramelos más uno. Al segundo, la mitad de los que quedan más uno; al tercero, la mitad de los restantes más uno. De esta manera reparte todos los caramelos. ¿Cuántos caramelos había en la bolsa y cuántos le corresponden a cada uno?

F. FUNCIONES

1.- La siguiente gráfica nos indica la distancia de la estación central en función del tiempo transcurrido en la trayectoria de un autobús Bigastro-Orihuela-Bigastro.

- ¿A cuántos kilómetros dista Orihuela de Bigastro?. ¿Cuántos tiempo tarda el bus?
- ¿Cuánto dura cada parada?
- ¿Qué significa el decrecimiento de la función?
- Halla TVM[5,30], ¿qué significa?



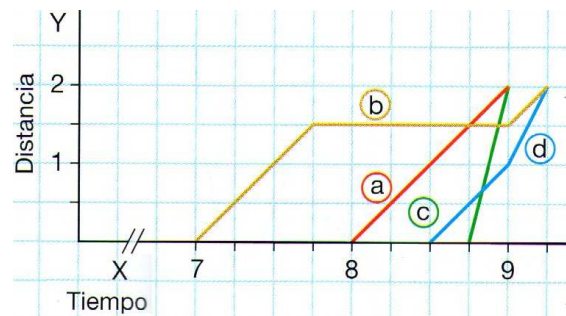
2.- Observa la gráfica correspondiente a la rentabilidad de una empresa a lo largo del año y responde:

- ¿En qué meses los gastos igualan a los ingresos?
- ¿En qué meses la empresa fue rentable?
- Estudia el crecimiento y decrecimiento de ambas gráficas. ¿En qué meses se alcanzan los máximos y mínimos relativos en ambas gráficas?



3.- Las siguientes gráficas distancia-tiempo corresponden a cuatro vecinos que el día de la patrona subieron a la ermita desde la plaza del pueblo. Relaciona la gráfica con los vecinos:

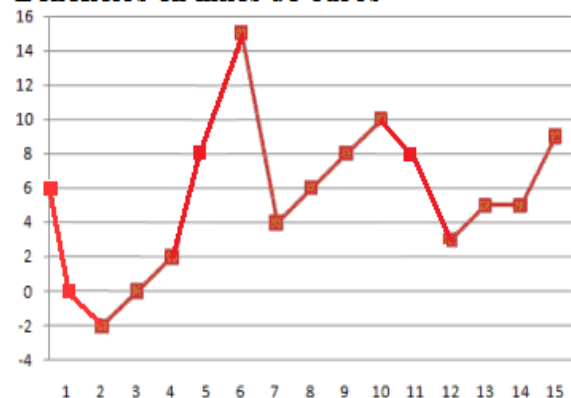
- Juan: subió en moto.
Isabel: fue caminando y se detuvo a descansar.
Arturo: empezó andando y acabó corriendo.
Marta: realizó el ascenso andando a una velocidad constante.



4.- La siguiente gráfica relaciona los beneficios de una empresa en función de los meses de funcionamiento que lleva.

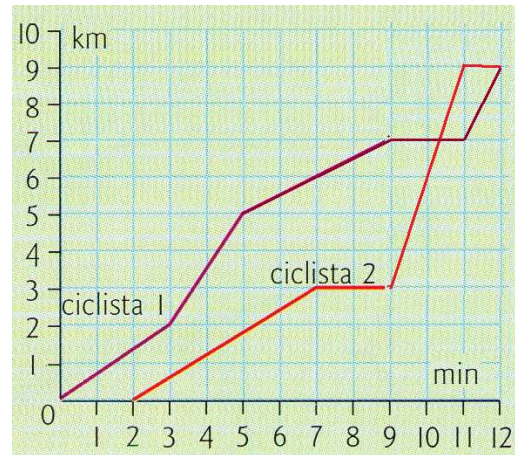
- Halla los ingresos en su comienzo.
- ¿En qué mes tiene mayores beneficios?. ¿cuánto gana ese mes?
- Hay un momento en el que empieza a tener pérdidas. ¿cuántos meses dura esta crisis y en qué mes empieza?
- Si queremos ganar 8000€ por lo menos, ¿en que meses lo conseguimos?
- Describe el crecimiento, decrecimiento, máximo y mínimos...
- Halla TVM[6,7], ¿qué significa?

Beneficios en miles de €uros



5.- La siguiente gráfica relaciona espacio recorrido por dos ciclistas en función del tiempo.

- ¿Han salido los dos al mismo tiempo? En caso negativo, indica la diferencia.
- ¿Cuántos kilómetros recorrió cada uno de ellos?
- ¿Se ha parado alguno de ellos?. En caso afirmativo, ¿en qué minuto y cuánto tiempo?
- ¿Adelanta algún ciclista al otro?. ¿En qué momento?
- ¿Cuál fue la velocidad máxima de cada ciclista?



6.- Paula ha estado enferma. Durante el día, se le ha tomado la temperatura cada hora, obteniendo los resultados en la tabla adjunta. Se pide:

- Representación gráfica de la función.
- ¿En que intervalos sube la temperatura y en cuáles decreciente?
- ¿Cuál es la temperatura máxima y a qué hora se alcanza?, ¿y la mínima?
- Halla TVM[11,15], ¿qué significa?

Hora	Temperatura
8	38,5
9	39
10	38
11	37,5
12	37
13	37
14	38
15	39
16	38
17	36,5
18	37
19	38
20	40
21	39

7.- Juan tiene en sus manos los dos contratos de dos compañías de teléfono. Halla la ecuación de la recta que nos proporciona el coste de una llamada en función de los minutos que dura la llamada. ¿A partir de cuántos minutos nos conviene cambiar de compañía?



8.- De un manantial mana agua de una forma irregular. La siguiente gráfica representa el caudal de agua que fluye desde las 4 a.m. hasta las 9 p.m.

- ¿A qué hora del día es más abundante el caudal?
- ¿En qué puntos de la gráfica alcanza máximo y mínimos relativos? Interpreta el resultado.



- ¿En que intervalos la gráfica de la función es creciente y en cuáles decreciente?
- ¿Cuántos $\text{litros} / \text{cm}^3$ fluyen a las 8 de la mañana?, ¿y a las 13 horas?
- ¿En que momento del día fluyen exactamente $90 \text{ litros} / \text{cm}^3$?

9.- Calcula la pendiente y tres puntos por los que pasan las siguientes rectas:

* Posteriormente, representa dichas rectas.

a) $y = 3x + 1$ b) $y = \frac{3x-1}{2}$ c) $y = -x + 0'2$ d) $2x - y = 5$

10.- De las siguientes rectas dadas por su ecuación, indica cuáles son paralelas. Razona la respuesta.

a) $y = -5x - 7$ b) $y + 2x - 4 = 0$ c) $y = -2x$ d) $y = \frac{-15x + 5}{3}$

11.- Halla la ecuación de las siguientes rectas:

- a) Tiene pendiente 2 y pasa por el punto (-1,5).
- b) Corta al eje X en $x=-1$ y tiene pendiente $-1/2$.
- c) Pasa por los puntos (-1,-4) y (1,-2).
- d) Pasa por los puntos (0,5) y paralela a la recta $2x+y-6=0$.
- e) Pasa por el punto (4,0) y paralela al eje X.
- f) Corta al eje Y en $y=4$ y paralela a la recta $3y = -x + 1$.
- g) Paralela a la recta $y = x + 4$ que pasa por el origen (0,0).
- h) Pasa por el punto (-1,-5) y es paralela a la recta AB; siendo A(0,1) y B(-2,5).
- i) Paralela a la recta $y = 2x - 7$, y de ordenada en el origen 1.

12.- Calcula la ecuación de la parábola, $y = ax^2 + bx + c$, que pasa por los puntos (0,2), (1,0) y (-1,6).

13.- Calcula la ecuación de la parábola, $y = ax^2 + bx + c$, que pasa por los puntos (0,2), (3,5) y la abscisa del vértice es $x = 1$.

14.- Calcula la ecuación de la parábola, $y = ax^2 + bx + c$, que corta al eje de abscisas en $x=2$, y tiene su vértice en el punto (0,-4).

15.- Calcula a, b y c para que $y = ax^2 + bx + c$ pase por (0,0) y tenga un vértice en (3,2)

16.- En el camino de vuelta del instituto a casa una alumno se encuentra a la altura del Hiperber (100m del instituto) y anda a una velocidad de 2'5 metros por segundo.

- a) Halla la función (ecuación de recta) que nos relaciona distancia al instituto con el tiempo transcurrido.
- b) ¿A qué distancia del instituto estará a los 2 minutos?
- c) ¿Cuánto tiempo invierte en llegar a casa si su casa está a 432 metros del instituto?

17.- Un técnico de electrodomésticos de Orihuela cobra 9€ por ir al domicilio, más 8€ por cada hora de trabajo. Sin embargo, uno de Bigastro cobra sólo 12€ por cada hora trabajada. Halla la ecuación de la recta que calcula el coste en función del tiempo de trabajo de los dos técnicos. Posteriormente, calcula:

- a) Si el técnico de Orihuela nos cobra 61€, ¿cuántas horas ha trabajado?
- b) Si el técnico de Bigastro nos cobra 42€, ¿cuántas horas ha trabajado?
- c) A partir de cuántas horas de trabajo me conviene contratar al técnico oriolano.

18.- Una oficina A de alquiler de coches cobra 12€ por día. Otra oficina B cobra una cantidad fija de 20€ más 5€ por día. Halla las ecuaciones de las rectas que calculan el coste en función de días de alquiler. ¿A partir de cuántos días conviene cambiar de oficina?

19.- Para comprar varias consolas PSP tengo dos posibilidades. Hacer el pedido por Ebay, con un coste de 160€ cada PSP, más un gasto fijo de 100€ por el envío desde Hong-Kong, o comprarlo en Bigastro por 150€ más un 20% de IVA por cada PSP.

- Halla la ecuación de la recta que nos da el coste en función de las PSP compradas.
- Si pagamos 1220€ en el Ebay, ¿cuántas PSP he adquirido?
- ¿A partir de cuántas consolas me sale más barato el pedido por Ebay?

20.- El beneficio obtenido por la producción y venta de x artículos viene dado por la función: $B(x) = -x^2 + 320x - 6000$. Se pide:

- Representa gráficamente esta función.
- ¿A cuánto asciende el beneficio de la empresa si no produce artículos?
- Determina el número de artículos que hay que producir y vender para que el beneficio sea máximo.
- Determina cuántos artículos se deben producir y vender, para que la empresa empiece a tener ganancias.
- ¿A partir de cuántos artículos empezará a tener pérdidas de nuevo la empresa?

21.- María ha estado enferma la semana pasada. La evolución de su temperatura en función del día de la semana viene dada por la $f(x) = 0,5x^2 - 3x + 37$. Se pide:

- ¿Qué temperatura tuvo el martes?, ¿y el lunes?
- ¿Qué día de la semana alcanza la temperatura máxima?, ¿qué temperatura tuvo?

22.- Desde la línea de triples un jugador de baloncesto lanza la pelota y la encesta. La altura de la pelota en función de los segundos transcurridos, x , viene dada por la función $f(x) = -x^2 + 4x + 2$. Se pide:

- ¿Desde qué altura lanza la pelota el jugador?
- ¿Dónde alcanzará la pelota la altura máxima?. ¿Cuál será dicha altura?
- Si encesta a los 3 segundos, ¿a qué altura está la canasta?

23.- Desde la terraza del instituto lanzamos un pelotazo que acaba dando en el larguero de la portería de fútbol sala. La altura de la pelota en función de los segundos transcurridos, x , viene dada por la función $f(x) = -x^2 + 2x + 10,5$. Se pide:

- La altura del instituto.
- ¿Dónde alcanzará la pelota la altura máxima?. ¿Cuál será dicha altura?
- Si encesta a los 4 segundos, ¿a qué altura está la canasta?

24.- El beneficio esperado de una empresa, en millones de euros, viene dado por la

función: $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 7x & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ 10 & \text{si } 5 \leq x \leq 8 \end{cases}$, donde x representa el tiempo

transcurrido en años.

- Representa gráficamente la función
- Explica cómo es la evolución del beneficio esperado durante esos 8 años y calcula cuándo el beneficio es de 12 millones de euros.

25.- Vamos a una excursión y en la agencia nos cobran 300€, vayamos los que vayamos.

- ¿Cuánto pagaremos cada uno si sólo vamos 20?, ¿y si vamos 60?
- Construye una tabla en la que se relacionen las variables cantidad de personas-precio.
- ¿Te atreves a dar una fórmula que nos permita saber cuánto pagaremos en función del número de personas que vamos a la excursión(x)?
- Dibuja la gráfica de la función anterior. ¿Qué ocurrirá si vamos muchísimos?

26.- Lanzamos verticalmente un cohete. La altura y (en metros) a la que se encuentra en cada instante x (en segundos) viene determinada por la función: $y = -t^2 + 100t$.

- Dibuja la gráfica de la función
- Indica cuál es su dominio
- ¿Cuánto tiempo pasará para que alcance su altura máxima? ¿Cuál será esa altura máxima?
- ¿En qué instante de tiempo estará el cohete a una altura de 900 metros?

27.- Representa las siguientes funciones y comenta sus propiedades:

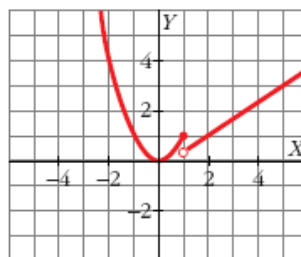
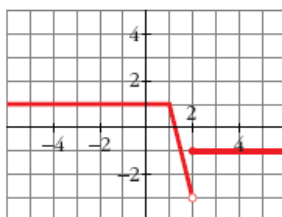
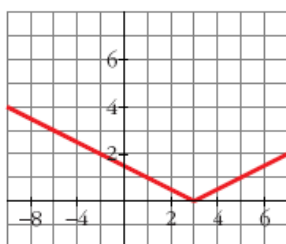
a) $f(x) = x^2 - 5x + 4$ b) $f(x) = x^2 - 4x + 6$ c) $f(x) = -0.5x^2 + 2x + 5$

c) $f(x) = \frac{2}{x-1}$ d) $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ e) $f(x) = \frac{3x-1}{2x-1}$ f) $f(x) = 2^{3x}$

d) $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{si } x < 1 \\ -2x+4 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 3x-11 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ e) $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \leq -1 \\ -x+4 & \text{si } -1 < x < 2 \\ 3x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

a) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < -1 \\ 2x^2-4x-5 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2-4 & \text{si } -2 < x < 3 \\ 2x-1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

28.- Estudia las siguientes gráficas y escribe su expresión analítica correspondiente.



G. ESTADÍSTICA

Ejercicio nº 1.-

Al preguntar a 20 individuos sobre el número de libros que han leído en el último mes, hemos obtenido las siguientes respuestas:

3	2	3	2	1	3	4	2	4	3
4	3	1	3	2	2	5	2	3	3

- a) Elabora una tabla de frecuencias.
- b) Representa gráficamente la distribución.

Ejercicio nº 2.-

En un grupo de 30 personas hemos medido la estatura, en centímetros, de cada una de ellas, obteniendo los siguientes resultados:

160	163	165	164	162	168	175	167	159	160
161	164	167	168	154	163	164	167	164	165
166	168	165	167	169	164	150	166	147	170

- a) Elabora una tabla de frecuencias, agrupando los datos en intervalos de la forma que creas más conveniente.
- b) Representa gráficamente la distribución.

Ejercicio nº 3.-

Hemos ido apuntando la edad de cada uno de los componentes de un grupo de 30 personas, obteniendo estos datos:

24	3	29	6	5	17	25	24	36	42
30	16	14	12	8	4	8	37	32	40
37	26	28	15	17	41	20	18	27	42

- a) Haz una tabla de frecuencias.
- b) Representa gráficamente la distribución.

Ejercicio nº 4.-

Se ha preguntado a las alumnas y a los alumnos de una clase de 4º ESO por el tiempo que tardan en llegar desde su casa hasta el instituto. Las respuestas se recogen en esta tabla:

TIEMPO (MINUTOS)	[0, 5)	[5, 10)	[10, 15)	[15, 20)	[20, 25)
Nº ALUMNOS/AS	10	6	9	3	2

Calcula la media y la desviación típica de esta distribución.

Ejercicio nº 5.-

En un examen de matemáticas realizado en 4º A de ESO, la nota media ha sido 5,2, con una desviación típica de 2,3. En la clase de 4º B, con el mismo examen, se ha obtenido una nota media de 7,4 y una desviación típica de 3. Calcula el coeficiente de variación en los dos casos y compara la dispersión en ambos grupos.

Ejercicio nº 6.-

Un grupo de atletas ha obtenido las siguientes puntuaciones en una prueba deportiva que se valoraba de 0 a 5 puntos:

PUNTUACIÓN	1	2	3	4	5
Nº DE ATLETAS	4	4	12	18	12

Calcula Me , Q_1 , Q_3 y p_{10} .

Ejercicio nº 7.-

Midiendo el tiempo de duración, en horas, de un determinado tipo de pilas eléctricas, hemos obtenido los siguientes datos:

26 37 38 42 47 31 43 41 36 46
40 45 42 25 44 37 39 33 42 57

a) Elabora una tabla de frecuencias.

b) Representa gráficamente la distribución.

Ejercicio nº 8.-

Midiendo el peso, en kilogramos, de los niños y las niñas de un determinado grupo, todos ellos de la misma edad, hemos obtenido los siguientes resultados:

PESO (kg)	[10, 13)	[13, 16)	[16, 19)	[19, 22)	[22, 25)
Nº DE NIÑOS/AS	6	50	32	9	3

a) Calcula la media y la desviación típica.

b) En cuanto al peso, ¿es un grupo homogéneo o es disperso?

Ejercicio nº 9.-

Anotando la última cifra que ha salido en un sorteo que se realiza diariamente, hemos obtenido los siguientes resultados:

ÚLTIMA CIFRA	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nº DE VECES	28	35	28	29	45	32	37	45	25	61

Calcula Me , Q_1 , Q_3 y p_{90} .

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

NÚMEROS REALES

1.- Del conjunto N (números naturales) Escribir los impares del 4.567 al 2.667

2.- Del conjunto de N (números naturales) completar 20 números a partir de:

8.165 8.157 8.144 ----- ----- ----- ----- -----
----- ----- ----- ----- ----- ----- ----- -----
----- ----- ----- -----

3.- Del conjunto N (números naturales) completar con 20 números a partir de:

45.616 45.609 45.602 ----- ----- ----- ----- -----
----- ----- ----- ----- ----- ----- ----- -----
----- ----- ----- -----

4.- Del conjunto N (números naturales) completar con 20 números a partir de:

561.009 560.997 560.985 ----- ----- ----- -----
----- ----- ----- ----- ----- ----- -----
----- ----- ----- ----- ----- ----- -----

5.- Del conjunto N (números naturales) escribir 10 números de 5 cifras cada uno que la suma sea en cada uno 47

----- ----- ----- ----- -----
----- ----- ----- ----- -----

6.- Del conjunto N (números naturales) escribir 10 de 7 cifras que la suma de cada uno sea 68 (no se pueden repetir)

----- ----- ----- ----- -----
----- ----- ----- ----- -----

7.- Del conjunto N (números naturales) escribir 15 números de 4 cifras que la suma de cada uno sea 24

----- ----- ----- ----- ----- ----- -----
----- ----- ----- ----- ----- ----- -----

8.- Del conjunto Z^+ escribir del 7 al 120. Siguiendo el modelo:

7 12 17 -----

9.- Del conjunto Z escribir del - 350 al 760 siguiendo el modelo:

- 350 -346 - 342 -----

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

10.- Del conjunto \mathbb{Z}^+ ordenar por orden creciente:

6 12 3 7 5 2 128 143 216 145 167 290 51 23 11

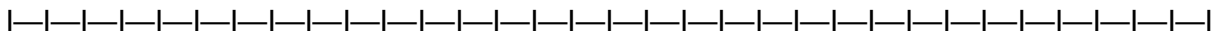
11.- Del conjunto \mathbb{Z} escribir del -13 al 41

12.- Del conjunto \mathbb{Z} escribir del -17 al 53 (sólo impares)

13.- Del conjunto \mathbb{Z} escribir del -29 al 67 (pares)

14.- Representar del conjunto \mathbb{Z} sobre la recta:

-5 -4 9 -7 -1 6 3 5 -12 7



15.- Dibujar la recta y representar del conjunto \mathbb{Z} :

-13 18 -12 6 7 3 -5 -8 9 13

16.- ¿De estos números racionales cuáles son decimales exactos?

$$\begin{array}{cccc} -\frac{2}{5} = & \frac{-3}{7} = & \frac{4}{-5} = & \frac{-7}{9} = \\ -\frac{21}{19} = & \frac{35}{-18} = & -\frac{22}{18} = & \end{array}$$

17.- De los siguientes números racionales indicar si el residuo es exacto:

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{4}{5} = & \frac{2}{7} = & \frac{8}{11} = & \frac{-4}{5} = & -\frac{2}{5} = & -\frac{1}{8} = & \frac{-2}{5} = \\ \frac{8}{-17} = & \frac{-9}{25} = & & & & & \end{array}$$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

18.- De los números racionales indicar si tienen decimales limitados o ilimitados:

$$\frac{6}{7} = \quad -\frac{8}{11} = \quad \frac{4}{6} = \quad \frac{2}{9} = \quad \frac{8}{13} = \quad -\frac{21}{13} =$$

$$-\frac{45}{48} = \quad -\frac{25}{16} =$$

19.- Calcular la fracción generatriz:

$$0,25 = \quad 0,45 = \quad 1,24 = \quad 6,5 = \quad 9,27 =$$

$$6,1\overline{6}1 = \quad 6,2\overline{16} = \quad 2,16\overline{4} =$$

20.- Calcular la fracción generatriz:

$$0,65 = \quad 0,24 = \quad 0,375 = \quad 2,4 = \quad 6,1\overline{8}3 =$$

$$4,1\overline{6}13 = \quad 61,5 = \quad 61,4 =$$

$$21,6\overline{45} = \quad 35,6\overline{32} = \quad 5,6\overline{134} = \quad 4,56\overline{7} =$$

$$9,3\overline{6}14 = \quad 81,6\overline{21} =$$

21.- Ordenar los números racionales:

$$\frac{4}{5} \quad -\frac{1}{7} \quad -\frac{2}{9} \quad -\frac{2}{3} \quad \frac{-3}{5} \quad \frac{-1}{6} \quad \frac{6}{11} \quad -\frac{3}{7} \quad -\frac{1}{6}$$

22.- Ordenar los números racionales:

$$\frac{6}{7} \quad -\frac{2}{4} = \quad \frac{3}{4} \quad -\frac{6}{11} \quad -\frac{7}{5} \quad -\frac{8}{9} \quad \frac{-6}{13} \quad \frac{5}{13} \quad \frac{4}{7} \quad -\frac{1}{6}$$

23.- Ordenar los números racionales:

$$\frac{4}{5} \quad \frac{-1}{3} \quad -\frac{5}{9} \quad -\frac{2}{11} \quad \frac{3}{-8} \quad -\frac{11}{7} \quad -\frac{8}{13} \quad -\frac{6}{13}$$

24.- ¿Qué números son irracionales?

$$\sqrt{4} = \quad \sqrt{7} = \quad \sqrt{9} = \quad \sqrt{21} = \quad \sqrt{11} = \quad \sqrt{16} = \quad \sqrt{35} =$$

$$\sqrt{27} =$$

25.- ¿Cuáles son irracionales?

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

$$6 - \sqrt{7} = \quad 8 + \sqrt{6} = \quad \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \quad \frac{4 + 1\sqrt{3}}{6} =$$
$$3\sqrt{7} = \quad 5\sqrt{8} =$$

26.- Representar gráficamente los números irracionales:

$$\sqrt{5} = \quad \sqrt{6} = \quad \sqrt{7} = \quad \sqrt{11} = \quad \sqrt{3} =$$

27.- Representar gráficamente los números irracionales:

$$3 + \sqrt{2} = \quad 7 + \sqrt{5} = \quad -6 + \sqrt{11} = \quad 3 + \sqrt{12} =$$
$$2 + \sqrt{6} = \quad 1 + \sqrt{8} =$$

28.- Indicar si son: números naturales, enteros, racionales e irracionales:

$$\begin{array}{ccccccccccc} -125 & -251 & 67 & 79 & \frac{-3}{5} & \frac{4}{7} & -\frac{6}{7} & 1 & -\sqrt{3} & & \\ & \sqrt{11} & & -2,46183 & & 108 & 216 & -129 & \frac{-4}{7} & 2,5 & \\ & & -\frac{3}{7} & -3,56 & & & & & & & \end{array}$$

Naturales

Enteros

Racionales

Irracionales

29.- Ordenar sobre la recta de más pequeño a más grande:

$$\sqrt{5} \quad -\frac{9}{7} \quad \sqrt{15} \quad -\frac{4}{11} \quad -3,56 \quad \sqrt{7} \quad \sqrt{21} \quad -9,7$$

30.- Ordenar sobre la recta de más grande a más pequeño:

$$-6 \quad \sqrt{13} \quad \sqrt{17} \quad -\frac{4}{11} \quad -\frac{3}{11} \quad -\frac{6}{11} \quad -4,3 \quad -2,75 \quad \sqrt{23}$$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

31.- Representar los intervalos:

$$(-1, -4) \quad (-2, 5) \quad (3, 5) \quad (2, -7) \quad (-1 - 2)$$

32.- Representar los intervalos:

$$(-5, 1) \quad (-6, 3) \quad (-3, 4) \quad (-2, 4) \quad (-5, 2)$$

33.- Hacer la aproximación decimal por defecto y exceso

$$\sqrt{6} = \quad \quad \quad \sqrt{3} = \quad \quad \quad \sqrt{7} =$$

$$\sqrt{11} = \quad \quad \quad \sqrt{2} =$$

34.- Resolver la aproximación decimal por defecto y exceso de los números racionales:

$$-\frac{6}{5} = \quad \quad \quad \frac{13}{-5} = \quad \quad \quad \frac{18}{-7} =$$

$$\frac{21}{6} = \quad \quad \quad \frac{35}{13} =$$

35.- Hacer la operación decimal por defecto o exceso:

$$-\frac{21}{8} = \quad \quad \quad \frac{20}{11} = \quad \quad \quad \frac{41}{23} =$$

$$\frac{24}{19} = \quad \quad \quad \frac{-45}{37} =$$

36.- Hacer el redondeo hasta las milésimas:

$$2,46938 = \quad \quad \quad 64,6169 = \quad \quad \quad 47,2165 =$$

$$47,6497 = \quad \quad \quad 21,8765 =$$

37.- Hacer el redondeo hasta las diezmilésimas:

$$1,96185 = \quad \quad \quad 2,76476 = \quad \quad \quad 3,81045 =$$

$$3,24615 = \quad \quad \quad 2,14516 =$$

38.- Expresar el valor absoluto de:

$$|1,6| = \quad \quad \quad |-2,73| = \quad \quad \quad |8,125| = \quad \quad \quad |-6,45| = \quad \quad \quad |9,41| =$$

39.- Expresar el valor absoluto:

$$|-3,4| = \quad \quad \quad |4,1| = \quad \quad \quad |-3,8| = \quad \quad \quad |6,3| = \quad \quad \quad |7,26| =$$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

40.- Calcular el 5% de:

$0,18 =$

$1,469 =$

$3,456 =$

$8,006 =$

$0,000416 =$

41.- Calcular el 0,75% de:

$4,6 =$

$24,3 =$

$81,5 =$

$0,0008 =$

$4,36 =$

42.- Calcular:

$$\text{a) } 6 \cdot 10^2 + 3 \cdot 5^2 - 2 \cdot 7^3 + 8^2 \cdot 10 =$$

$$\text{b) } 7 \cdot 8^2 - 9 \cdot 3^4 + 4 \cdot 7^2 - 3 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^2 - 5 \cdot 8^3 =$$

43.- Calcular:

$$\text{a) } -3[(1+6):5] - [(-8+13-7)] + [(-4-7+19)] =$$

$$\text{b) } [(18+15)(-7+9)(-7+8)](-3+8) =$$

44.- Calcular:

$$\text{a) } [(-5+1-6) - (4+9-7) + (8-6+11)](-4+9) =$$

$$\text{b) } -[-(5+13-9) + (6-3+9) - (7+8+13)]: [(-3+9) + (4+5)] =$$

45.- Calcular:

$$\text{a) } [(4+8-7):(-3)] - [(8+6+7) + (7+1-9) - (-13+1+14)] =$$

$$\text{b) } [8+11(4+6+1) - (7+5-3)] + [(8+1-5) + (6-8+1)]: (-6) =$$

46.- Resolver:

$$\text{a) } \frac{4}{7} + \frac{3}{4} \left[-\frac{1}{8} + 7 - \frac{5}{9} \left(\frac{1}{5} + \frac{4}{7} - \frac{3}{8} \right) + \left(\frac{4}{5} - 7 \right) \right] =$$

$$\text{b) } \left[\left(\frac{4}{3} + \frac{1}{6} + \frac{3}{7} \right) : \left(\frac{4}{7} + 3 \right) \right] * \left[\left(\frac{3}{5} + 3 - \frac{4}{7} \right) : \left(\frac{4}{9} - \frac{1}{8} \right) \right] =$$

47.- Resolver:

$$\text{a) } -3 \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{7} \right) - \left[\left(-\frac{4}{9} + 8 - \frac{5}{7} \right) \left(\frac{3}{5} * \left(-\frac{7}{9} \right) \right) \right] \left(\frac{1}{3} \right) =$$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & \left(\frac{4}{7} + \frac{1}{5} \right) + \left[\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4} \right) - \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{6} \right) \right] \\ & \text{-----} = \\ & \left[- \left(\frac{3}{5} \right) \left(\frac{1}{4} \right) \right] : \left(\frac{2}{7} \right) \end{aligned}$$

48. Resolver las operaciones con números decimales:

a) $8,9 - 3,7 + 18,3 =$

b) $4,25 + \frac{3}{4} : 0,9 =$

49.- Resolver las operaciones con números decimales:

a) $26,95 - 18,37 + 45,67 =$

b) $1,9 - 7,8 + \frac{4}{5} * 3,7 =$

50.- Resolver de tres maneras diferentes:

a) $\frac{8,5 * 475}{31} =$

b) $\frac{475 * 165}{120} =$

51.- Resolver de tres maneras diferentes:

a) $\frac{518 * 130}{112} =$

b) $\frac{424 * 130}{45} =$

52.- Resolver con calculadora científica:

a) $6^{-7} =$

b) $9^{-11} =$

c) $6^{-13} =$

d) $15^{-4} =$

e) $21^{-7} =$

53.- Expresar en forma de base 10:

a) $0,00000005 =$

b) $0,00006 =$

c) $0,0000007 =$

d) $0,003 =$

e) $0,00008 =$

54.- Expresar en forma de potencia de base 10:

a) $0.003.10^{-3} =$

b) $0,004.100^{-3} =$

c) $0,0006.100^{-6} =$

d) $0,3^{-3}.0,0009^{-4} =$

e) $0,0003^{-4}.0,05^{-5} =$

55.- Resolver con calculadora:

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

a) $(27.100^7):(4,25.100^{-4})=$

b) $(4,756:100^{-5})^4 =$

c) $(121.100^2):(3,09^2.10^{-7})=$

d) $(18,9.10^6):(1,29.100^{-2})=$

e) $(8,45^3.100^{-7})=$

f) $(4,1.100^3):(2,1.10^{-4})(3,6.100^3)=$

56.- Un campo en forma cuadrada de perímetro 453,67 m. Fue dividido entre parcelas por cada una de ellas se tienen que pagar 8,5 euros por cada m². ¿Cuánto deberá pagar cada parcelista?

57.- Calcular el área de un hexágono regular de 3,5 cm de lado: El resultado con 4 cifras decimales

58.- Resolver y comprobar con la calculadora:

a) $(5,8.100^{-2})-(9.100^{-5})=$

b) $(8,9:10^{-3})5=$

c) $\frac{(11.100^{-5})(11,1.100^6)}{9,1.10^3} =$

d) $\frac{(6,7.100^{-3})(4.10^2)}{2^3.100^{-2} + 0,08^2} =$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

POTÈNCIAS Y RAÍCES

1.- Dividir las potencias:

a) $\frac{a^7}{a^3} =$

b) $\frac{c^8}{c^4} =$

c) $\frac{y^8}{y^2} =$

d) $\frac{e^{11}}{e^9} =$

e) $\frac{x^6}{x^5} =$

2.- Dividir las potencias:

a) $\frac{18^4}{18^2} =$

b) $\frac{21^7}{21^5} =$

c) $\frac{24^4}{24^4} =$

d) $\frac{19^{11}}{19^3} =$

e) $\frac{28^5}{28^4} =$

3.- Expresar en forma de potencia de exponente negativo:

a) $\frac{1}{4^2} =$

b) $\frac{1}{b^5} =$

c) $\frac{1}{z^5} =$

d) $\frac{1}{6^3} =$

e) $\frac{1}{5^4} =$

4.- Expresar en forma de potencia de exponente negativo:

a) $\frac{1}{8^4} =$

b) $\frac{1}{7^3} =$

c) $\frac{1}{2^4} =$

d) $\frac{1}{9^3} =$

e) $\frac{1}{13^4} =$

5.- Calcular:

a) $10^4 \cdot 10^{-7} =$

b) $10^4 \cdot 10^{-5} =$

c) $\frac{(-7)^3}{(-7)^2} =$

d) $\frac{8^4}{8^2} =$

e) $\frac{(-4)^6}{(-4)^4} =$

6.- Calcular:

a) $\left[\left(\frac{1}{3} \right)^{-3} \right]^{-2} =$

b) $\left[\left(\frac{-2}{-7} \right)^4 \right]^{-2} =$

c) $\left[\left(\frac{-12}{-12} \right)^3 \right]^2 =$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

$$d) \left[\left(\frac{15}{15} \right)^{-2} \right]^4 =$$

$$e) \left[\left(\frac{-1}{-1} \right)^3 \right]^{-2} =$$

7.- Calcular y ordenar de más pequeño a más grande:

$$(-0,9)^3; (0,9)^4; 0,9^{-4}; 0,9^{-5}; 0,9^6; 0,9^{-2} =$$

8.- Calcular y ordenar de más grande a más pequeño:

$$(-0,4)^{-3}; (-0,4)^3; (0,4)^{-2}; (-0,4)^{-5}; (0,4)^5$$

9.- Calcular:

$$a) \left(\frac{1}{7} \right)^3 : \left(\frac{2}{9} \right)^2 =$$

$$b) \left(\frac{4}{5} \right)^4 : \left(\frac{1}{7} \right)^2 =$$

$$c) \left(\frac{1}{4} \right)^3 : \left(\frac{3}{8} \right)^2 =$$

$$d) \left(\frac{4}{5} \right)^4 : \left(\frac{2}{7} \right)^3 =$$

$$e) \left(\frac{5}{7} \right)^9 : \left(\frac{2}{7} \right)^3 =$$

10.- Calcular:

$$a) \left(\frac{3}{4} \right)^{-2} : \left(\frac{2}{7} \right)^{-3} =$$

$$b) \left(\frac{-3}{8} \right)^{-3} : \left(\frac{-5}{9} \right)^{-2} =$$

$$c) \left(\frac{1}{5} \right)^{-2} : \left(\frac{3}{4} \right)^{-3} =$$

$$d) \left(\frac{1}{8} \right)^{-4} : \left(\frac{2}{5} \right)^{-3} =$$

$$e) \left(\frac{4}{7} \right)^{-2} : \left(\frac{6}{11} \right)^{-3} =$$

11.- Se parte de un animalito con 300.000 células: Su vida dura 60 días. ¿Cuántas células tenía al final de su vida sin mutarse ninguna?

12.- De la progresión: $5^0 \ 5^1 \ 5^2$. Encontrar el primer término que sea más grande que 10.000

14.- Dada la progresión $7^0 \ 7^1 \ 7^2$. Encontrar el primer término que sea más grande que 500.000

15.- Dada la progresión $13^0 \ 13^1 \ 13^2$. Encontrar el primer término que sea más grande que 1.000.000

16.- De la progresión $25^0 \ 25^1 \ 25^2$. Encontrar el primer término que sea más grande que 900.000

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

17.- Encontrar las progresiones siguientes:

a) 4 16 256 Hasta 10 -----

b) 5 25 125 Hasta 10 -----

c) 9 81 -----

d) 8 64 -----

e) 7 49 -----

f) 11 121 -----

g) 6 36 -----

18.- Calcular las progresiones 5 en cada una;

a) $\frac{1}{4}; \frac{1}{16}; -; -; -; -; -$

b) $\frac{1}{5}; \frac{1}{25}; -; -; -; -; -$

c) $\frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}; -; -; -; -; -$

d) $\frac{1}{6}; \frac{1}{36}; -; -; -; -; -$

e) $\frac{1}{9}; \frac{1}{81}; -; -; -; -; -$

f) $\frac{1}{11}; \frac{1}{121}; -; -; -; -; -$

19.- Anotar en forma científica las equivalencias;

a) 2 g ----- Kg = ----- T ----- mg

b) 6 cg ----- g ----- Kg ----- T

b) 7 cg ----- Kg ----- Tm ----- mg

20.- Un insecto pesa 60 cg. ¿Cuántos Kg de estos insectos pesan 12.000? (en notación científica)

21.- Un insecto pesa 2mg. ¿Cuántos Kg pesan 500.000 insectos iguales) (notación científica)

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

22.- Expresar en forma de potencia:

$$a) {}^5\sqrt{b^2} =$$

$$b) {}^4\sqrt{b^2} =$$

$$c) {}^7\sqrt{c^6} =$$

$$d) {}^8\sqrt{z^6} =$$

$$e) {}^3\sqrt{d^2} =$$

23.- Expresar en forma de potencia:

$$a) {}^7\sqrt{5^2} =$$

$$b) \sqrt{6^3} =$$

$$c) {}^3\sqrt{4^2} =$$

$$d) {}^6\sqrt{3^4} =$$

$$e) {}^5\sqrt{9^3} =$$

24.- Realizar las operaciones siguientes y expresar el resultado en forma de potencia de exponente positivo

$$a) \frac{(-5)^{-9}}{(-5)^{-2}} =$$

$$b) \frac{-11}{(-11)^{-5}} =$$

$$c) \frac{9^{-6}}{9} =$$

$$d) \frac{-4^{-2}}{-4^3} =$$

$$e) \frac{9^0}{9^{-2}} =$$

25.- Realizar las operaciones siguientes y expresar el resultado en forma de potencia de exponente positiva:

$$a) (4^3)^{-3} =$$

$$b) [(6^2)^{-3}]^5 =$$

$$c) [(-1)^{-4}]^{-4} =$$

$$d) [(-6)^{-2}]^4 =$$

$$e) (-7)^{-6} =$$

26.- Calcular:

$$a) \frac{3^2 \cdot 3^{-5} \cdot 3^4}{3^{-5} 3^{-1} \cdot 3^2} =$$

$$b) \frac{(8^{-2})^4 \cdot (8^{-2})}{(8)^{-3} \cdot 8^4} =$$

$$c) \frac{(-4^3)^{-4} \cdot 4^3 \cdot 4^{-2}}{(-4)(4^{-2})^3} =$$

27.- Realizar las operaciones con potencias de fracción:

$$a) \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{-4} =$$

$$b) \left(\frac{7}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^0 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^1 =$$

$$c) \left(\frac{4}{5}\right)^{-4} \cdot \left[\left(\frac{4}{5}\right)^3\right]^{-4} : \left(\frac{4}{5}\right)^{-4} =$$

$$d) \left(\frac{4}{7}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^{-2} =$$

$$e) \left(\frac{-4}{9}\right)^{-3} \cdot \left[\left(\frac{4}{7}\right)^3\right]^{-4} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^{-3} =$$

$$f) \left(\frac{3}{8}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^7 =$$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

28.- Estimar el orden de magnitud de los segundos que ha vivido una persona de 20 años

29.- ¿Cuántos habitantes por m^2 , un país que tiene 350 millones de habitantes y la superficie 525.234,7 Km^2 ?

30.- Expresar en forma de raíz las potencias siguientes:

a) $3^{\frac{2}{3}} =$

b) $.7^{\frac{3}{8}} =$

c) $(-8)^{\frac{3}{4}} =$

d) $-9^{-\frac{3}{5}} =$

e) $13^{-\frac{2}{3}} =$

31.- Sumar las raíces dadas:

a) $2\sqrt{5} + 7\sqrt{5} =$

b) $\frac{2}{3}\sqrt{3} + \sqrt{3} =$

c) $\sqrt{5} - 6\sqrt{5} + 2\sqrt{5} =$

d) $4\sqrt[4]{7} - 8\sqrt[4]{7} + 3\sqrt[4]{7} =$

32.- Expresar como potencia de base 5

a) $\sqrt[5]{625} =$

b) $\sqrt[3]{81} =$

c) $\sqrt[4]{\frac{4}{9}} =$

33.- Simplificar:

a) $.^{18}\sqrt{3^4} =$

b) $\sqrt[6]{27a^3} =$

c) $\sqrt[9]{81} =$

d) $\sqrt[4]{27^3 x^6 b^{30}} =$

e) $.^3\sqrt{18b^3 c^3 d^6} =$

34.- Resolver en notificación científica:

a) $((6,5)10^3)(8,6.10^6) =$

b) $((11,1)10^6)(9,5^3.10^{-5}) =$

c) $(12,4.10^2)(8,3.10^{-3}) =$

d) $(8,7.10^{-5})(13,4.10^4) =$

e) $(13,1.10^4):(2,7.10^{-4}) =$

f) $(7.10^{-6}):(8,9.10^{-3}) =$

..

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

g) $(13.2.10^{-4})(3.1.10^{-7}) =$

h) $(8.9.10^{-7})(4.6.10^4) =$

35.- Calcular el resultado de potencias de potencia:

a) $(7^2)^4 =$

b) $(11^3)^2 =$

c) $(13^3)^4 =$

d) $(15^3)^2 =$

e) $(16^2)^3 =$

36.- Calcular en forma de una potencia. Si es posible simplificar

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^3 =$

b) $\left(\frac{4}{9}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^3 =$

c) $\left(\frac{-4}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 =$

d) $\left(\frac{3}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{6}{11}\right)^3 =$

37.- Calcular en forma de una sola potencia. Si es posible simplificar:

a) $\left[\left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^3\right] =$

b) $\left[\left(\frac{2}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^2\right]^3 =$

c) $\left[\left(3\frac{4}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^3\right]^2 =$

d) $\left[\left(2\frac{4}{9}\right)^2 \cdot \left(5\frac{1}{9}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^4\right]^3 =$

38.- Escribir en forma de una sola potencia:

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

$$a) \left(-3 + \frac{1}{4} - \frac{3}{8}\right)^3 =$$

$$b) \left(\frac{-3}{5} - \frac{4}{7} - \left(\frac{1}{9}\right)^6\right)^2 =$$

$$c) \left[\left(\frac{-1}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right)^2\right] + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{7}\right)^2 =$$

$$d) \left[\left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(\frac{4}{7}\right)^2\right]^{-3} =$$

39.- Expresar el resultado en positivo:

$$a) \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} =$$

$$b) \left(-\frac{4}{9}\right)^3 =$$

$$c) \left(-\frac{1}{8}\right)^{-4} =$$

$$d) \left(\frac{3}{5}\right)^{-3} =$$

$$e) \left(\frac{4}{7}\right)^{-4} =$$

$$f) \left(\frac{-3}{8}\right)^{-5} =$$

$$g) \left(\frac{-1}{9}\right)^{-2} =$$

$$h) \left(\frac{2}{7}\right)^{-4} =$$

$$i) \left(\frac{3}{4}\right)^{-5} =$$

$$j) \left(\frac{-3}{7}\right)^{-2} =$$

40.- Calcular:

$$a) \cdot (4+b)^2 \cdot (5+b)^{\frac{2}{3}} \cdot (5+b)^{\frac{1}{4}} =$$

$$b) \cdot (-3 \cdot c \cdot 4^2)^{\frac{2}{3}} =$$

$$c) \cdot \left[\left(\frac{b}{5}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{4}} =$$

$$d) (-3 \cdot c \cdot d^3)^{\frac{2}{5}} =$$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

$$e) \left[\left(\frac{c}{8} \right)^{\frac{4}{5}} \right]^{\frac{2}{3}} =$$

$$e) \left[\left(\frac{c}{8} \right)^{\frac{4}{5}} \right]^{\frac{2}{3}} =$$

41.- Calcular:

$$a) \frac{\sqrt{5^2} \cdot \sqrt{2^3}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{6^2} \cdot \sqrt[3]{8^3}} =$$

$$b) \frac{\sqrt{2^4} \cdot \sqrt{5^3} \cdot \sqrt[3]{6^5}}{\sqrt[4]{8^3} \cdot \sqrt[3]{2^6} \cdot \sqrt[2]{6^2}} =$$

42.- Racionalizar

$$a) \frac{8\sqrt{2}}{6} =$$

$$b) \frac{9 - \sqrt{3}}{7} =$$

$$c) \frac{7 - 2\sqrt{8}}{6} =$$

$$d) \frac{3 - 7\sqrt{2}}{5} =$$

43.- Racionalizar:

$$a) \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} =$$

$$b) \frac{2\sqrt{5} + 7}{\sqrt{5} + 3} =$$

$$c) \frac{4\sqrt{5} - 6}{\sqrt{2} - 4} =$$

$$d) \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{5}}{2\sqrt{4} - \sqrt{5}} =$$

$$e) \frac{3\sqrt{2} + 7}{2\sqrt{3} + 2} =$$

44.- Racionalizar:

$$a) \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{5}} =$$

$$b) \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3} - 2} =$$

$$d) \frac{\sqrt{5} - \sqrt{7}}{2\sqrt{5} + \sqrt{3}} =$$

$$d) \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - 2\sqrt{7}} =$$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

$$e) \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{\sqrt{7}} =$$

45.- Racionalizar:

$$a) \frac{8}{\sqrt{3}} =$$

$$b) \frac{11}{2\sqrt{3}} =$$

$$c) \frac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{3}} =$$

$$d) \frac{3\sqrt{8}}{5\sqrt{3}} =$$

$$e) \frac{2\sqrt{3} + 4}{\sqrt{5 + 7\sqrt{3}}} =$$

$$f) \frac{\sqrt{3} + 4\sqrt{5}}{2\sqrt{7} + 6} =$$

$$g) \frac{4\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} + 3\sqrt{2}} =$$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

EXPRESIONES ALGÈBRÁICAS

1.- ¿Cuál es el grado de los polinomios

a) $6x^5 + 7x^3 + 8x^2 + 6$

b) $7x^5 + 6x^4 + 8x^2 + 11$

c) $12x^6 - 2x^5 - 4x^2 - 8$

d) $2x^{11} - 8x^6 - 2x + 6x^3 + 7x^2 - 5$

2.- Del número 1 ordenar los polinomios en orden decreciente

3.- Del número 1 calcular el valor numérico de los polinomios $x = -3$

4.- Escribir 3 polinomios de cinco factores completo

5.- Escribir 3 polinomios de 4 factores incompleto

6.- $P(x) = 4x^6 - 2x^5 - 7x^2 - 2x - 7$

$Q(x) = 5x^5 - 4x^3 - 2x - 6$

Calcular $p(x) + Q(x)$ $p(x) - Q(x)$ $P(x)Q(x) =$

7.- Con los polinomios calcular:

$R(x) = 8x^4 + 5x^3 - 2x^2 - 5x - 7$

$S(x) = -5x^3 + 2x^2 - 3x + 6$

$T(x) = -8x^6 - 7x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 8$

$R(x) + S(x) =$ $R(x) + T(x) - S(x) =$

$R(x) - S(x) + T(x) =$ $[R(x) \cdot S(x)] - 7(x) =$

8.- Con los polinomios. Calcular:

a) $F(x) = 8x^6 - 4x^2 - 5x + 6$

b) $G(x) = -4x^5 - 2x^3 - 9x^2 - 7$

c) $H(x) = 6x^3 + 2x^2 - x - 6$

d) $I(x) = -7x^7 - 2x^4 - 6x^3 + 2x - 6$

$F(x) + G(x) - I(x) =$ $[I(x) \cdot H(x)] + H(x) =$ $[I(x) - H(x) + G(x) =$

9.- Con los polinomios calcular:

$G(x) = \frac{3}{5}x^4 - 2x^3 - x - 5$

$H(x) = \frac{4}{7}x^3 - \frac{2}{5}x^2 - \frac{4}{7}x - 6$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

$$I(x) = \frac{3}{8}x^5 - 2x^3 - \frac{2}{9}x^2 - \frac{1}{4}x - 8$$

$$G(x) - H(x) =$$

$$H(x) \cdot G(x) =$$

$$G(x) + I(x) - H(x) =$$

$$[G(x) - I(x)]H(x) =$$

10.- Dividir los polinomios:

$$a) (6x^3 - 2x^2 - 6x - 5) : (2x^2 - 4x - 3) =$$

$$b) (8x^4 - 3x^3 - 7x^2 - 6) : (2x^2 - 5x + 6) =$$

$$c) (8x^6 - 5x^4 - 2x^3 - 2x + 6) : (4x^4 - 3x^2 - 5x - 6) =$$

$$d) (12x^6 - 4x^5 - 3x^2 - 2x - 5) : (3x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 5) =$$

11.- Encontrar el cociente y residuo

$$a) (x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 6) : (x - 6) =$$

$$b) (x^6 - 3x^5 - 5x^2 - 8x - 2) : (x - 8) =$$

$$c) (7x^5 - 2x^4 - 3x^2 - 8x) : (x - 4) =$$

$$d) (9x^8 - 2x^5 - 4x^3 - 2x - 6) : (x - 5) =$$

$$e) (5x^4 - 3x^2 - 5x - 7) : (x - 6) =$$

12.- ¿Cuáles son los múltiplos de?

$$a) (2x - 1)(5x + 2) =$$

$$b) (5x - 6)(4x - 3) =$$

$$c) (4x + 1)(2x - 7) =$$

$$d) (2x + 6)(x - 3) =$$

$$e) (4x - 7)(2x - 5) =$$

$$f) (3x + 5)(x - 6) =$$

$$g) (2x + 6)(x - 7) =$$

13.- ¿Darán divisiones exactas?

$$a) (4x^3 - 2x^2 - 2x - 1) : (2x - 1) =$$

$$b) (5x^2 - 2x - 8) : (5x - 3) =$$

$$c) (8x^5 - 4x^4 - 2x^3 - 2x) : (2x^2 - 2) =$$

$$d) (6x^4 - 2x^2 - x - 2) : (3x^2 - 4) =$$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

e) $(12x^3 - 6x^2 + 2x - 6) : (3x - 2) =$

14.- Calcular el resto

a) $(8x^4 - 3x^2 - 5x - 1) : (x - 5) =$

b) $(3x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 6) : (x - 4) =$

c) $(4x^5 - 2x^3 - 5x^2 - 4x - 3) : (x + 3) =$

d) $(2x^5 - 4x^2 - x + 5) : (x - 6) =$

e) $(4x^3 - 2x^2 - 2x + 6) : (x - 3) =$

16.- Factorización:

a) 65 y 85

b) 275 y 60

c) 218 y 725

d) 475 y 824

e) 4278 y 3600

f) 3300 y 3125

17.- Factorizar los polinomios:

a) $3x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 6x - 4$

b) $3x^3 + 8x^2 - 6x$

c) $x^5 - 2x^3 - 4x - 1$

d) $2x^2 - 6x - 4$

.e) $9x^6 - 5x^4 - 2x^2 - 5x - 1$

18. Descomponer los polinomios:

a) $x^4 - 6$

b) $6x^2 - 12x$

c) $x^2 - 2x - 6$

d) $x^4 - 2x^2 - 5x - 6$

e) $x^5 - 2x^3 - 2x^2 - 4x$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

FRACCIONES ALGEBRAICAS

1.- ¿Cuáles son racionales?

$$\frac{4}{7}$$

$$0,25$$

$$-36$$

$$-\frac{2}{7}$$

$$-\frac{3}{8}$$

$$\sqrt{16}$$

$$\sqrt{55}$$

2.- ¿Qué números son racionales?

$$\frac{1}{6}$$

$$-0,08$$

$$-\frac{1}{9}$$

$$\frac{-3}{8}$$

$$\sqrt{5}$$

$$\sqrt{7}$$

3.- ¿Cuáles son fracciones algebraicas?

$$a) \frac{3}{4x-6} =$$

$$b) \frac{3x^2-7}{4x^2-8} =$$

$$c) \frac{x^4+2x+6}{2x-5y} =$$

$$d) \frac{3x^2-5x+6}{2x-5y} =$$

4.- ¿Cuáles son expresiones algebraicas?

$$a) \frac{7}{8}$$

$$b) \frac{3x^2}{6x-3} =$$

$$c) \frac{5x+9}{2x-7y} =$$

$$d) \sqrt{215}$$

5.- ¿Qué pares son equivalentes?

$$a) \frac{x-1}{x^2+2} y \frac{x^3-4}{x^4-x^2-x} =$$

$$b) \frac{8x+9}{2x-7} y \frac{3x+6}{2x^2-6} =$$

6.- Simplificar si es posible

$$a) \frac{120}{45} =$$

$$b) \frac{260}{135} =$$

$$c) \frac{245}{700} =$$

$$d) \frac{1155}{860} =$$

7.- Simplificar si es posible:

$$a) \frac{525}{475} =$$

$$b) \frac{600}{735} =$$

$$c) \frac{275}{750} =$$

$$d) \frac{1275}{2712} =$$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

8.- Simplificar si es posible

$$a) \frac{x^2 - x - 6x + 7}{x^3 + 2x + 3x + 8} =$$

$$b) \frac{x^4 + 2x - 8}{2x^2 + 16} =$$

$$c) \frac{x^5 + x^3 - 8x - 20}{x^3 + 3x^2 + 12} =$$

$$d) \frac{x^3 + x^2 - 4}{x^3 - x^2 - 4} =$$

9.- Simplificar si es posible:

$$a) \frac{6y^4 - 2y^2 - 7}{5y^2 - 2y - 14} =$$

$$b) \frac{3y^7 - 2y^3 - 8}{4y^6 - 4y - 12} =$$

$$c) \frac{12y^5 - 2y^4 - 3y}{7y^4 - 4y^2 + 2y} =$$

$$d) \frac{8z^3 - 2z + 8}{4z - 6} =$$

10.- Reducir a mínimo común denominador

$$a) \frac{x^2 - 7x}{2x^2 - 5} y \frac{4x^2 - 8}{x - 6} =$$

$$b) \frac{7x^3 - 2x^2 - 6}{8x - 2x + 5} y \frac{6x^3 - 4x - 3}{5x - 3} =$$

$$c) \frac{7y^5 + 2}{6y - 8} y \frac{6y^3 + 8y - 3}{2y^2 - 6y + 8} ((=))$$

$$d) \frac{5z^3 + 8z^2 - 6}{2z^2 + 8z - 3} y \frac{4z - 6}{8z - 16} =$$

11.- Sumar las fracciones algebraicas

$$a) \frac{x+3}{x-2} + \frac{2x}{x+7} =$$

$$b) \frac{x^3 + 4}{x+6} y \frac{x-3}{x^3 + x^2 + 4} =$$

$$c) \frac{2x+5}{x^3 + x + 7} + \frac{2x+6}{x^3 + x^2 + 4} =$$

$$d) \frac{y+2+6y^2}{2y+7} + \frac{.3y+4+7y^2}{y-3} =$$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

12.- Sumar las fracciones algebraicas:

$$a) \frac{2x^4}{x^3 - 2x^2 - 7} + \frac{x+4}{3x^3 + 4x^2 - 5} =$$

$$b) \frac{z^5 + z^2 + 6}{z^5 + 4z^2 + 3z} + \frac{z^2 - 3z + 6}{z^2 + 4z + 3} =$$

$$c) \frac{y^3 - 2y^2 - 6}{2y^2 - 5y + 3} + \frac{y^2 + y - 4}{y - 3} =$$

$$d) \frac{y^6 + 4y^3 - y^2}{y^3 + y^2 + 3} + \frac{y^3 - 2y - 5}{y - 6} =$$

13.- Restar las fracciones algebraicas:

$$a) \frac{a^5 - a^3 - a^2 - 6}{a^3 - 3a^2 - 2a} - \frac{5a^2 - 3a - 6}{a^2 - a + 3} =$$

$$b) \frac{x-2}{x+1} - \frac{4x}{2x-7} =$$

$$c) \frac{b-4}{b^2-3} - \frac{b-8}{b^2+b-4} =$$

$$d) \frac{5y^4}{y^3 - y^2 - 4} - \frac{y-6}{y^2 + 4y + 7} =$$

14.- Restar las fracciones algebraicas

$$a) \frac{y^4 + 6y^2 - 2y + 9}{y^3 + 2y^2 - 7y - 6} - \frac{2y}{y^3 - 2y + 3} =$$

$$b) \frac{z+6}{z^3 + 2z + 8} - \frac{3z^2}{z^2 - 4z - 3} =$$

$$c) \frac{(y+5)(y-6)}{(y^3 - y^2 - 4)(y+1)} - \frac{y^3 + 3y - 4}{y^3 - 3y^2 - y + 5} =$$

$$d) \frac{y^6 - 2y^3 - 5}{2 - y^3} - \frac{2y^2 - 3y}{2y - 6} =$$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

15.- Multiplicar las fracciones algebraicas

$$a) \frac{3x}{2x+2} \cdot \frac{2x-1}{2x+3} (=)$$

$$b) \frac{y^3+6}{y^2-3} \cdot \frac{3y^2}{4-3y} (=)$$

$$c) \frac{2z+4}{z^2+6} \cdot (2z-4) =$$

$$d) \frac{a^5-2a^2-6a+13}{a^4-2a+7} \cdot \frac{a^4-7}{a-8} =$$

16.- Multiplicar las fracciones algebraicas:

$$a) \frac{y^5+4y^3-2y^2-7}{y^3-y^2+12} \cdot \frac{2y^3+8y^2-7}{y^2+4y-18} =$$

$$b) \frac{y^4-7y^3-6y-+8}{y^2-y+4} \cdot \frac{2y^2-7y}{-2y} =$$

$$c) \frac{z^3-5z^2+3z-9}{z^2-z-4} \cdot \frac{2z-4}{4-5y} =$$

$$d) \frac{8a^6-6a^4-7a^3-6a^2-6}{8a} \cdot (2a^3+3a-6) =$$

17.- Dividir las expresiones algebraicas:

$$a) \frac{5}{y-3} : \frac{y-5}{y-4} =$$

$$b) \frac{b^3+6}{b+4} : \frac{2+5y}{2y-7} =$$

$$c) \frac{2z-5}{z+6} : \frac{9z+6}{2+7} =$$

$$d) \frac{y^4-3}{y-4} : \frac{2+5y}{2y-7} =$$

18.- Dividir las fracciones algebraicas

$$a) (y^2-4) : \frac{2y^6+6}{y^3-8} =$$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

$$b) \frac{z^5 + z^2 - 4}{z^3 - 4z - 4} : \frac{6z^2 - 2z}{z^2 + 8} =$$

$$c) \frac{b^6 - b^4 - 3b^3 - b}{b^2 - 6b + 8} = \frac{4b^2 - 3b - 7}{b - 9} (=)$$

$$d) \frac{2y^4 - 3y^3 - 2y^2 - 6}{5y^3 2y^2 6} : (3y^3 - 2y^2 + 4) =$$

19.- Calcular las potencias

$$a) \left(\frac{3a+5}{7} \right)^2 =$$

$$b) \left(\frac{6x^2}{4x^3} \right)^2 =$$

$$c) \left(\frac{3y^2 + 3}{4y^2} \right)^4 =$$

$$d) \left(\frac{4y^2 - 8}{2y + 2} \right)^2 =$$

20.- Calcular las potencias:

$$a) \left(\frac{5x^2 - 6}{3x^2} \right)^2 =$$

$$b) \left(\frac{4z^2 - 8}{4z^2} \right)^5 =$$

$$c) \left(\frac{7x^3 + 8}{8x - 5} \right)^2 =$$

$$d) \left(\frac{6y^3 - 2}{16y} \right)^2 =$$

21.- Calcular las operaciones combinadas:

$$a) \frac{2a}{a^3} + \frac{4}{2a+2} + 7 =$$

$$b) \frac{2b}{b^2-4} + \frac{4}{2b+2} + \frac{5b-3}{b^2b+4} =$$

$$c) \frac{2c}{c} + \frac{4c^2+6}{c-7} + \frac{2c}{3c^2+4} =$$

22.- Calcular las operaciones combinadas:

$$a) \frac{3}{b} + \frac{2b+5}{\frac{4}{b}} =$$

$$b) .$$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

$$\text{b) } \frac{6}{2y} + \frac{2y+6}{5} =$$

$$\text{c) } \left(\frac{4y^2}{4+7} + \frac{2y+5}{y^3-2y+7} = \right)$$

$$\text{d) } 6x + \frac{3x-4}{2x} =$$
$$\frac{\quad\quad\quad}{\frac{5}{3x-8}} =$$

$$\text{e) } \frac{3y}{2y+7} + \frac{3-\frac{6y}{y+7}}{8} =$$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

ECUACIONES

1.- Calcular el MCD y MCM de

a) 360 y 175

b) 210 y 1125

c) 465 y 670

2.- Calcular el MCD Y MCM de

a) 735, 240 y 885

b) 290, 515 y 735

c) 414, 2709 y 924

2.- Calcular el MCD y MCM de

a) 735, 240 y 985

b) 290, 515 y 735

c) 414, 2700 i 824

3. Calcular el MCD por divisiones sucesivas de.

60 y 25

920 y 45

39 y 210

4.- Calcular el MCD por divisiones sucesivas

60 y 75

210 y 245

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

36, 45 y 24

5.- Calcular el MCM por múltiplos comunes

60 y 90

23 y 45

65 35 y 70

27,45 y 60

23 y 45

65,35 y 70

27, 45 y 60

6.- Calcular las expresiones de primer grado con un incógnita

$$6x = 36$$

$$2x + 6 = 14$$

$$3x - 15 = 27$$

$$3x + 9 = 18$$

$$5x - 15 = 25$$

7.- Calcular las expresiones de primer grado con una incógnita:

$$2x = 12 - 18$$

$$4x - 10 = 36$$

$$6x = 18 - 24$$

$$20 - 8x = 24 - 36$$

$$3x - 21 = 45$$

8.- Resolver las ecuaciones de primer grado

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

$$x - 9 = 13$$

$$x + 6 = 21$$

$$6x = -54$$

$$6x = 60$$

$$14x = 72$$

$$6x = 42$$

$$x - 18 = 28$$

9.- Resolver las ecuaciones de primer grado:

$$2x + 12 = 6$$

$$-3x + 24 = 48$$

$$3x - 18 = 6x - 18$$

$$4x - 24 = -2x + 36$$

$$5x - 45 = 10x + 35$$

10.- Resolver las ecuaciones de primer grado

$$a) 2(x - 4) = 4(x + 8)$$

$$b) 16 - (2x + 8) = 24$$

$$c) 5 - (15 - x) = 25$$

$$d) 6 - (5 - 2x) = 13$$

$$e) 8 - (4x - 8) = -13$$

$$f) 4(x - 13) = -5(x + 8)$$

11- Calcular las ecuaciones de primer grado:

$$a) \frac{x}{18} = 6$$

$$b) \frac{-2x}{6} = 24$$

$$c) \frac{x}{7} = 21$$

$$d) \frac{-2x}{8} = 16 - 32$$

$$e) \frac{x-2}{9} = 54$$

12.- Calcular las ecuaciones de primer grado:

$$a) \frac{2x+2}{5} = \frac{2x-6}{3} = 0$$

$$b) \frac{2x+4}{5} - \frac{x-2}{6} = 2$$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

$$c) 2x - \frac{2x+6}{4} = 6$$

$$d) \frac{2x}{6} + \frac{2x+4}{8} - \frac{2x+6}{18} = 6$$

$$e) \frac{2x}{4} + \frac{2x-2}{6} - \frac{2x+10}{8} = 2$$

$$f) \frac{2x+2}{10} - \frac{2x+6}{12} = 0$$

$$g) \frac{2x-4}{12} - \frac{2x+2}{6} + \frac{2x-2}{4} = 0$$

$$h) \frac{2x+2}{16} - \frac{2x-2}{12} + \frac{2x+6}{10} = 2$$

14.- Resolver las siguientes ecuaciones de primer grado

$$a) \frac{2x+10}{4} = \frac{4x+6}{4}$$

$$b) \frac{4x-2}{6} = \frac{8x+4}{10}$$

$$c) \frac{2x+2}{12} - \frac{2x+6}{8} = -2$$

$$d) \frac{4x}{2} + \frac{2x+4}{16} = \frac{2x+14}{2}$$

$$e) \frac{4x+2}{30} - \frac{2x-4}{18} = 0$$

$$f) \frac{6x+4}{10} - 14 = 4x - \frac{2x+2}{4}$$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

- 14.- Dos ciudades distan 630 Km entre ellas. A las 5 de la madrugada sale de la ciudad A hacia la B con una velocidad de 90 Km/h. A la misma hora y en sentido inverso sale otro a 70 Km/h. ¿A qué hora se encontrarán y a qué distancia de las ciudades A y B coincidirán?
- 15.- Una persona se gastó los $\frac{4}{7}$ del dinero que tenía y después $\frac{3}{4}$ de lo que le quedaba. Al final le quedaron 75 euros. ¿Cuánto dinero tenía al principio?
- 16.- Un comerciante tenía dos clases de arroz, la primera a 2,1 euros/kg y la segunda de 2,6 euros/kg. ¿Cuántos Kg de cada clase debe poner para obtener 80 Kg de mezcla a 2,8 euros Kg?
- 17.- Se tienen dos trozos de plata uno de 0,450 g de alinaje y otro de 0,600 g. Qué peso
- 18.-
- 19.- Un reloj marca las doce en punto. ¿A qué hora entre las 12 y la 1. ¿Se superpondrán las agujas?
- 20.- Un reloj marca las 5 en punto. ¿A qué hora por primera vez un ángulo recto?
- 21.- Una persona preguntó a otra cuantos años tenía, si el cuádruplo de los años que tendré de aquí cuatro años le restas el doble que tenía hace cuatro años sabrás los años que tenía. ¿Cuántos años tiene?

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

- 22.- Un padre reparte un terreno entre sus hijos. Al mayor le entrega la cuarta parte más 25 Ha. Al segundo la quinta parte más 15 Ha. Y al tercero el resto.
¿Cuál es la extensión de la finca?
¿Qué parte de la finca correspondió a cada uno?
- 23.- Un poste está enterrado los $\frac{4}{9}$ de su longitud y la parte saliente 5 m ¿Cuál es la longitud del poste?
- 24.- Un comerciante vendió 25 artículos de la clase A y 18 de la clase B por un total de 260,5 euros
¿Cuál es el precio de cada artículo si se sabe que uno de la clase B vale 3 veces más que uno de la clase A?
- 25.- Un señor hizo un viaje en coche, gastando 60 litros de gasóleo. El viaje lo hizo en tres etapas. En la primera gastó los $\frac{3}{4}$ de lo que tenía en el depósito, en la segunda los $\frac{2}{5}$ de lo que le quedaba y en la tercera el resto
¿Cuántos litros cabían en el depósito?
- ¿Cuántos litros gastó en cada etapa?
- ¿Cuántos Km recorrió en cada etapa si el consumo fue de media 6,2 l por cada 100 Km?
- 26.- Una señora salió con 75 euros en el monedero y volvió a casa con 12,5 euros. En la carnicería gastó el triple que en la pescadería y en la frutería 15 menos que en la pescadería ¿Cuánto gastó en cada tienda?

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

27.- Repartieron 2.500 euros entre tres personas A, B y C de manera que entre A y B cobren conjuntamente el triple que C y A cobre 150 euros más que B. ¿Cuánto recibió cada uno?

28.- Dos personas se encuentran a 12 Km de distancia. Las dos hacen el camino que las separa en sentido contrario. Una a una velocidad de 5 Km/h y la otra a 5,5 Km hora: ¿A cuántos Km se encontrarán del punto de partida?

29.- Resolver gráficamente las ecuaciones de primer grado:

a) $y = 3x - 1$

b) $3x + y = 2$

c) $2x + 3y = 5$

d) $x + y = 3$

e) $2x - y = 6$

f) $x - 4y = 5$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

Todos los valores deben ser - 3 - 2 - 1 0 1 2 3

30.- Representar gráficamente las ecuaciones de primer grado:

a) $y = 3x - 1$

b) $3x + y = 2$

c) $2x + 3y = 5$

d) $x + y = 3$

e) $2x - y = 6$

f) $x - 4y = 5$

Valores - 3 - 2 - 1 0 1 2 3

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

40.- Resolver las ecuaciones incompletas:

a) $6x^2 = 36$

b) $2x^2 = -16$

c) $3x^2 = 81$

d) $-4x^2 = -64$

e) $5x^2 = 25$

f) $5x^2 = -25$

g) $-4x^2 = -64$

h) $2x^2 = 800$

41.- Resolver por igualación y sustitución una ecuación de primer grado con dos incógnitas:

$x = 5$ $Y = -3$

42.- Resolver por sustitución y reducción un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas:

$x = 3$ $y = 7$

43.- Resolver por igualación y sustitución un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas:

$x = 5$ $y = -2$

44.- Resolver por igualación y sustitución un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas:

$x = 2$ $y = -5$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

45.- Resolver por igualación y sustitución un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas:

$$x = 1 \qquad y = -8$$

46.- Resolver por igualación y sustitución un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas:

$$x = -2 \qquad y = -3$$

47.- Resolver por igualación, sustitución y reducción el sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

$$x = 4 \qquad y = -2$$

48.- Resolver un sistema de ecuaciones de primer grado con tres incógnitas

$$x = 2 \qquad y = 3 \qquad z = -2$$

49.- Resolver un sistema de ecuaciones de primer grado con tres incógnitas. Hallando x y z y resolver por sustitución:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 2z &= \\ -x + 4y - z &= \\ -3x + 5y - 2z &= \end{aligned}$$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

50.- Resolver un sistema de ecuaciones de primer grado con tres incógnitas. Hallando x y z resolviendo por reducción

$$\begin{aligned}6x + 2y - z &= \\4x - 3y + z &= \\-3x + 2y - 2z &= \end{aligned}$$

51.- Resolver por reducción:

$$\begin{aligned}2x + 3y &= 23 \\2x - 3z &= -4 \\2y - 4z &= -6\end{aligned}$$

52.- Resolver por sustitución:

$$\begin{aligned}x - 2y &= 4 \\2x - 2 &= 7 \\3z - 2y &= 11\end{aligned}$$

53.- Resolver por igualación:

$$\begin{aligned}3x + 2y &= 9 \\5y - 2z &= -3 \\2x + 3z &= -4\end{aligned}$$

54.- Resolver por sustitución:

$$\begin{aligned}2x + y - 2z &= 6 \\2x + 8y + 2z &= 20 \\7x - y + 6z &= 9\end{aligned}$$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

55.- Resolver por reducción:

$$\begin{aligned} -2x - 5y + z &= 23 \\ 5x - 2y - 3z &= 21 \\ 6x + 3y - z &= 31 \end{aligned}$$

56.- Representar gráficamente:

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 2x + 3y &= 5 \end{aligned}$$

Valores: - 3 -2 - 1 0 1 2 3

57.- Representar gráficamente:

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 3x + 2y &= 7 \end{aligned}$$

Valores - 3 - 2 - 1 0 1 2 3

58.- Representar gráficamente:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ 4x + 3y &= 5 \end{aligned}$$

Valores para x y - 3 - 2 - 1 0 1 2 3

59.- Representar gráficamente:

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= -4 \\ x + 3y &= 17 \end{aligned}$$

Valores para x y - 3 - 2 - 1 0 1 2 3

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

60.- Representar gráficamente:

$$\begin{aligned}2x - 3y &= 6 \\ x + 2y &= 11\end{aligned}$$

Valores para x y - 3 - 2 - 1 0 1 2 3

61.- Resolver gráficamente:

$$\begin{aligned}x - 3y &= - 10 \\ 2x + y &= - 3\end{aligned}$$

Valores x y - 3 - 2 - 1 0 1 2 3

62.- Resolver las ecuaciones de segundo grado incompletas:

a) $12x^2 = 36$

b) $8x^2 = 72$

c) $5x^2 = 125$

d) $2x^2 = 96$

e) $3x^2 = 300$

f) $3x^2 = - 300$

g) $3x^2 = 75$

h) $6x^2 = - 144$

i) $2x^2 = - 96$

63.- Resolver las ecuaciones de segundo grado incompletas:

a) $9x^2 - 36x = 0$

b) $49x^2 - 147x = 0$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

c) $4x^2 + 2x = 0$

d) $8x^2 - 72x = 0$

e) $4x^2 - 16x = 0$

f) $5x^2 - 125x = 0$

g) $6x^2 + 72x = 0$

h) $7x^2 - 49x = 0$

l) $2x^2 - 96x = 0$

j) $5x^2 - 125x = 0$

k) $5x^2 - 125x = 0$

l) $25x^2 - 625x = 0$

64.- Resolver las ecuaciones de segundo grado incompletas:

a) $9x^2 - 36x = 0$

b) $49x^2 - 147x = 0$

c) $8x^2 - 72x = 0$

d) $4x^2 + 2x = 0$

e) $6x^2 + 72x = 0$

f) $5x^2 - 125 = 0$

g) $7x^2 - 49x = 0$

h) $2x^2 - 98x = 0$

i) $12x^2 - 144x = 0$

j) $25x^2 - 625x = 0$

65.- Resolver las ecuaciones de segundo grado completas:

a) $35x^2 + 9x - 2 = 0$

b) $x^2 - 2x - 8 = 0$

c) $4x^2 - 11x - 3 = 0$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

d) $4x^2 + 13x + 3 = 0$

e) $2x^2 - 3x + 1 = 0$

f) $2x^2 - 11x + 5 = 0$

66.- Resolver las ecuaciones de segundo grado completas:

a) $x^2 - 13x + 92 = 0$

b) $x^2 - 3x + 15 = 0$

c) $x^2 - 6x + 8 = 0$

d) $2x^2 - 7x + 3 = 0$

e) $5x^2 - 14x - 3 = 0$

f) $7x^2 - 7x + 12 = 0$

67.- Resolver las ecuaciones de segundo grado conocidas las raíces (resultados)

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

a) $x_1 = 3$ $x_2 = 15$

b) $x_1 = 4$ $x_2 = 8$

c) $x_1 = -1$ $x_2 = 6$

d) $x_1 = 4$ $x_2 = 7$

e) $x_1 = 4$ $x_2 = 5$

f) $x_1 = 16$ $x_2 = 5$

68.- Resolver las ecuaciones de segundo grado conociendo los resultados (raíces)

a) $x_1 = 8$ $x_2 = \frac{-1}{3}$

b) $x_1 = \frac{3}{5}$ $x_2 = -3$

c) $x_1 = -3$ $x_2 = \frac{3}{4}$

d) $x_1 = 5$ $x_2 = -\frac{1}{4}$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

$$\text{e) } x_1 = \frac{1}{6} \qquad x_2 = -\frac{5}{7}$$

$$\text{f) } x_1 = 4 \qquad x_2 = \frac{3}{8}$$

69.- Resolver las ecuaciones bicuadradas;

$$\text{a) } x^4 - 12x^2 - 36 = 0$$

$$\text{b) } x^4 - 16x^2 - 225 = 0$$

$$\text{c) } x^4 - 25x^2 + 144 = 0$$

$$\text{d) } x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

$$\text{e) } x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

$$\text{f) } x^4 - 82x^2 + 81 = 0$$

70.- Resolver las ecuaciones irracionales:

$$\text{a) } \sqrt{3x+1} = 2x+5$$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

b) $\sqrt{2x+5} - 2 = 3x$

c) $\sqrt{2x} = 14 - 3x$

d) $5\sqrt{2x-3} + 12 = 3x - 3$

71.- Resolver las ecuaciones irracionales

a) $\sqrt{2x+1} - \sqrt{3x+5} = 3$

b) $3\sqrt{2x} = \sqrt{x-24} + 3$

c) $\frac{2}{5}\sqrt{2x+5} = \frac{\sqrt{2x+7}}{3}$

d) $3\sqrt{x+6} = \sqrt{2x-13} + 7$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

72.- Resolver los sistemas de ecuaciones:

a)
$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 8 \\ 2x^2 + y^2 &= 9 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x - y &= 2 \\ x^2 + 3y^2 &= 57 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 7x + y &= 38 \\ 2x^2 - 6y^2 &= -29 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 4x + 7y &= 29 \\ 2x^2 - 6y^2 &= -46 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} x + y &= 7 \\ 2x^2 - y &= 29 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} 2x^2 + 5y^2 &= 53 \\ x^2 - 3y^2 &= -23 \end{aligned}$$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

g) $\frac{2}{3}x^2 + 2y^2 = 10$

$$2x^2 - \frac{3}{2}y^2 = 42$$

h) $x + y = 1$
 $\frac{x^2 + 3y^2}{3} = 7 ?$

i) $2x + 3y = 4$
 $2x^2 + xy - y^2 = 44$

73.- Hay un número que cuando le suman 7 y se multiplica la suma por el número que resulta de restarle 15, da 432 ¿Cuál es el número?

74.- Una fracción con denominador 5 que si se le suma se obtiene la fracción 17/9. ¿Cuál es la fracción?

75.- Dos números naturales se diferencian en 7 unidades y la suma de sus cuadrados es 1.361 ¿Cuáles son los números?

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

76.- El número de diagonales de un polígono convexo es de 27. ¿De qué polígono se trata?

77.- La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 11 cm y la diferencia entre los catetos es de 5 cm ¿Cuánto mide cada uno de ellos?

78.- El cuadrado de un número menos su triplo – 2. Calcular este número

79.- Un triángulo rectángulo su perímetro mide 320 m y el área 5.100 m². Hallar las dimensiones de los lados

80.- El perímetro de un rectángulo mide 32 cm y el área 62 cm². Calcular las dimensiones

81.- Un depósito en forma de cilindro de altura 150 dm su volumen es de 3.500 dm³. Calcular en Dam² ¿Qué cantidad de material se necesita para hacer una tapadera?

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

GEOMETRIA

- 1.- Calcular El número de lados de un polígono regular con 17 diagonales
- 2.- Calcular el número de lados de un polígono regular con 29 diagonales
- 3.- Calcular el número de diagonales y la suma de los ángulos de un eneágono
- 4.- Calcular el número de diagonales y la suma de los ángulos de un dodecágono
- 5.- Calcular el número de diagonales y la suma de los ángulos de un polígono de 16 lados
- 6.-Un polígono de 28 lados ¿Cuántas diagonales tiene?
- 7.- Un polígono de 21 lados ¿Cuántas diagonales tiene?
- 8.- Dibujar un pentágono regular de 3 cm de lado
- 9.- Dibujar un hexágono regular de 2 cm de lado
- 9.- Dibujar un hexágono regular de 4 cm de radio
- 10.- Dibujar un triángulo equilátero de 3 cm de lado trazando las alturas y las bisectrices
- 11.- Un triángulo rectángulo de catetos 7 y 9 cm. Calcular la hipotenusa

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

- 12.- Un triángulo rectángulo de catetos 15 y 17 cm. Calcular la hipotenusa
- 13.- La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 16 cm y un cateto 9 cm. Calcular el otro
- 14.- La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 21 cm y un cateto 15 cm. Calcular el otro
- 15.- La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 24 cm y un cateto 19 cm. Calcular el otro
- 16.- Los catetos de un triángulo rectángulo isósceles miden 18 cm. ¿Cuánto medirá la hipotenusa?
- 17.- Los catetos de un triángulo rectángulo isósceles miden 9 cm cada uno. ¿Cuánto la hipotenusa?
- 18.- Calcular el área de un hexágono regular de 7 cm de radio
- 19.- Calcular el área de un hexágono regular de 4 cm de lado
- 20.- Calcular la apotema de un hexágono regular de 7 cm de lado
- 21.- Calcular el lado de un cuadrado de 400 cm^2 área
- 22.- La diagonal de un rombo mide 32 cm y un lado 25 cm. Calcular la otra diagonal
- 23.- El lado de un rombo mide 32 cm y una diagonal 38 cm. Calcular el área
- 24.- Un rectángulo de lados 18 y 21 cm. Calcular la diagonal
- 25.- La diagonal de un rectángulo mide 34 cm y un lado 24 cm. Calcular el perímetro y el área

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

- 26.- El lado de un triángulo equilátero mide 7cm. Calcular el área
- 27.- El perímetro de un triángulo equilátero mide 36 cm. Calcular el área
- 28.- Las diagonales de cuadrado cada una mide 12 cm. ¿Cuánto medirá el lado?
- 29.- En un triángulo rectángulo las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 5 y 8 cm. Hallar la altura correspondiente a la hipotenusa
- 30.- En un triángulo rectángulo las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 6 y 9 cm. Hallar la altura correspondiente a la hipotenusa.
- 31.- La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 7 cm y la proyección de uno de los catetos sobre la hipotenusa 5 cm. ¿Cuánto mide la proyección sobre este cateto?
- 32.- Calcular los dos catetos en que sus proyecciones sobre la hipotenusa son 4 y 6 m
- 33.- Dibujar el segmento de media proporcional de los segmentos de longitudes 4 y 6 cm b)
3 y 4 cm
- 34.- Calcular el perímetro de un triángulo isósceles, en que el lado desigual mide 20 cm y la altura correspondiente al lado desigual mide 14 cm
- 35.- Calcular el área de un triángulo isósceles, su lado desigual mide 21 cm y la altura correspondiente mide 29 cm

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

- 36.- Un trapecio isósceles los lados paralelos miden 25 y 35 m y la altura 8 m. Calcular el perímetro. Se quiere cerrar el recinto con una valla con postes a cada 3 m y alambre con cinco vueltas en todo el recinto. Precio de cada poste 53,5 euros y el de alambre 4,5 euros/m
- 37.- Calcular el área en dm^2 de bases de 67 y 45 cm y altura 17 cm
- 38.- Calcular la altura de un trapecio de bases 35 y 42 cm y el área 245 cm^2
- 39.- ¿Cuánto mide el área de un círculo de longitud de circunferencia 261,3 cm
- 40.- Calcular el área de un sector circular de radio 80° y radio 5 cm
- 41.- Calcular el área de un segmento circular de radio 8 cm y 60° y altura del triángulo 5 cm
- 42.- Hallar el área de una corona circular de radios 35 y 27 cm.
- 43.- Un trapecio circular del área del círculo grande mide 35 cm y el pequeño 23 cm, y los grados 80° . Calcular el área del trapecio
- 44.- Construir un heptágono regular inscrito en una circunferencia de 3 cm de radio
- 45.- Un cateto de un triángulo isósceles rectángulo mide 18 cm y la proyección sobre la hipotenusa 13 cm. Calcular la hipotenusa y el otro cateto

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

- 46.- Un triángulo rectángulo de proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa 7 y 13 cm. Calcular la altura y los catetos
- 47.- En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 20 cm, y un cateto 9 cm. Calcular el otro cateto y la altura
- 48.- Las diagonales de un rombo miden 16 y 25 cm. Calcular el perímetro y el área
- 49.-El círculo menor de una corona tiene 525 cm^2 de área. La circunferencia exterior tiene una longitud de 745 cm. Calcular el área de la corona
- 50.- Calcular la longitud real de un segmento de 9,8 cm de longitud en un mapa a escala 1.5000
- 51.- La base de un edificio en forma hexagonal regular tiene una superficie de 4.200 m^2 y la distancia desde el centro a la mitad del lado es de 27 m. ¿Cuál es la longitud de cada una de las seis manzanas?
- 52.- Un edificio de forma irregular para construir un Centro de Salud los lados miden 50, 120,25, 18, 30 y 90 m. ¿Cuánto valdrá el terreno si cuesta a 345 euros m^2 ?

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

ÁREA Y VOLUMEN DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

- 1.- Buscar en un planisferio las coordenadas de las siguientes ciudades: Sevilla, Madrid, Oslo, Barcelona, París, Roma, Bagdad, Pekín, Atenas, Nueva Cork, Miami

2. Calcular el valor de la diagonal de un ortoedro de aristas 3cm, 5cm y 6 cm

- 3.- Calcular el valor de la diagonal de un prisma con aristas 12 cm, 15 cm y 17 cm

- 4.- Calcular la altura de un cono de generatriz 21 cm y radio 13 cm

- 5.- Calcular la generatriz de un cono de radio 6 cm y altura 9,3 cm

- 6.- La arista de un cubo mide 6 cm. ¿Cuál será el área de la cara del cubo y el volumen?

- 7.- La arista de un cubo es 4 cm. ¿Cuál es su perímetro?

- 8.- Una caja de zapatos mide 35, 21 y 23 cm. ¿Cuál será el perímetro, el área total y el volumen?

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

- 9.- Se quiere engañar un regalo con ubicado en una caja de 40, 20 y 22 cm. ¿Cuál será la cantidad de cinta necesaria si debe llevar a más un lazo de 30 cm?
- 10.- Un poliedro convexo de 8 caras y 10 vértices ¿Cuántas aristas tiene?
- 11.- Un poliedro de 12 caras y 16 vértices ¿Cuántas aristas tiene?
- 12.- Calcular el área lateral se una pirámide regular triangular de lado de la base 7 cm y apotema lateral 15 cm
- 13.- Calcular el área total de área lateral 135 dm^2 y área de la base 70 dm^2
- 14.- Una pirámide regular de altura 12 cm y lado de la base 5cm. Calcular la apotema de la cara
- 15.- Una pirámide regular de lado de la base 21 cm y la apotema de la cara 22 cm. Calcular la altura
- 16.- Calcular la diagonal de un cubo de 5 cm de arista
- 17.- Calcular la diagonal de un cubo de 7 cm de arista
- 18.- Un prisma de aristas básicas 12 y 7 cm, altura de la cara 18 cm. Calcular la diagonal
- 19.- Un prisma de aristas básicas 6 y 8 cm. Altura de la cara 18 cm. Calcular la diagonal

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

20.- Un cono de radio 9 cm y altura 17 cm. Calcular la generatriz

21.- Un cono de diámetro 12 cm, generatriz 19 cm. Calcular la altura

22.- Un cono de radio 8 cm, la altura los $\frac{9}{7}$ del radio de la base. Calcular la generatriz

23.- Calcular el área de un cubo de 4 cm de arista

24.- Calcular el área de un ortoedro de 9 cm de arista

25.- Calcular el área de un ortoedro de 9 cm de arista

26.- Calcular el área de un icosaedro de arista 7 cm

27.- Calcular el área de un dodecaedro de apotema 5 cm y arista 5,4 cm

28.- Calcular el área de un icosaedro de 3 cm de arista

29.- Hallar al área de un dodecaedro de apotema 5 cm y arista 4,2 cm

30.- Calcular el área de un tetraedro de arista 4 cm

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

- 31.- Calcular el área de un tetraedro de arista 3,2 cm
- 32.- Calcular el área lateral y total de un prisma recto regular de base triángulo equilátero de arista 4 cm y altura de la cara 17 cm
- 33.- Calcular el área lateral y total de un prisma hexagonal regular de arista de la base 3 cm y altura de la cara 8 cm
- 34.- Calcular al área lateral y total de una pirámide triangular, arista de la base 4 cm y altura de la base 5 cm y la apotema 11 cm
- 35.- Calcular el área lateral y total de un tronco de pirámide hexagonal: aristas de las bases 9 y 7 cm y la apotema 15 cm
- 36.- Calcular el área lateral de un tronco de pirámide rectangular de apotema 15 cm; la base mayor de la base 5 cm y diagonal 9 cm y la menor lado 3 y diagonal 5,8 cm
- 37.- Calcular el área lateral y total de un tronco de pirámide de apotema 18 cm y las bases triángulos equiláteros de 5 y 6 cm de lado
- 38.- (dibujar la figura colocar los datos y resolver) Un tronco de pirámide en forma de depósito de apotema 4,5 m y las bases dos cuadrados de 3 y 5 m de lado. El precio de la pintura 125 euros por 4 m^2 . La mano de obra 25 euros/hora por 3 operarios a 22 horas cada uno ¿Cuál será el precio?

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

- 39.- (dibujar el cono a escala 1/10) Hallar el área lateral y total y circunferencia de la base 35 cm y altura 9,7 cm
- 40.- (Dibujar el cono a escala 1/100) y calcular el área latera y total de altura 125 cm y àrea de la base 567 cm²
- 41.- Dibujar un cilindro a escala 1/25) área lateral y total de bases 7 cm de radio y altura 24 cm
- 42.- Dibujar un cilindro a 1/50 de bases. Calcular el área lateral circunferencia de las bases 75,3 cm y la altura 34 cm
- 43.- Calcular el área lateral y total de un cilindro de diámetro de las bases 18 cm y arista de la cara 31 cm
- 44.- Hallar el área lateral y total de un tronco de cono de radio de las bases 49 y 60 cm y la generatriz 25 cm (Dibujar a escala de 1/25)
- 45.- Calcular el área lateral de un tronco de cono de radio bases 6 y 4 cm y generatiz 12 cm
- 46.- Calcular el volumen de un prisma hexagonal de arista de la base 5 cm y altura de la cara 23 cm

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

- 47.- Calcular el volumen de un prisma inclinado rectangular de lados de la base 7 y 9 cm y la altura 15 cm
- 48.- Hallar el volumen de un cilindro de circunferencia de la base 45 cm y altura 55 cm
- 49.- ¿Cuál será el volumen de una pirámide hexagonal de 5 cm de arista básica y altura de la pirámide 35,9 cm?
- 50.- Calcular el volumen de una pirámide triangular regular de base un triángulo equilátero de perímetro 35 cm y altura de la pirámide 59,4 cm
- 51.- Calcular el volumen de una pirámide cuadrangular de arista básica 12 cm y altura 45 cm 2,2 cm
- 52.- Calcular el perímetro de una pirámide hexagonal regular área de la base 275 cm^2 y volumen 867 cm^3
- 53.- Calcular el volumen de una pirámide cuadrangular de lado de la diagonal de la base 12,2 cm y altura 29 cm
- 54.- Calcular el volumen de un cono de generatriz 23 dm y altura 29 dm
- 55.- Calcular el volumen de un cono de radio de la base 7 cm y generatriz 23 cm
- 56.- Calcular el volumen de una esfera de 3 cm de radio

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

57.- Calcular el volumen de una esfera de 15 cm de radio

58.- La circunferencia de la Tierra es de 40.000 Km:Calcular

a) Superficie de la tierra

b) Volumen

59.- Calcular el y de un de un huso esférico que comprende 25° de arco y radio 8 cm

60.-Calcular el área de un huso esférico que comprende 40° de arco y radio 7 cm

61.- Calcular el área de una esfera de 8 cm de radio y el área del huso esférico que comprende 42° sobre la superficie esférica

62.- Un cilindro de 8 cm de radio y 12 de altura, encima hay una cúpula de generatriz 4 m. ¿Cuál cereal volumen total?

63.- Una tienda de campaña de forma triangular de larga 7m y altura 1,7 m . La base 3,5 m y la altura 7m. Calcular el volumen y el área total.

64.- ¿Cuánto miden las aristas de un tetraedro y de un octaedro, si el área de cada uno es de 360 cm^2

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

65.- Calcular el área de un cubo de 13 cm de diagonal

66.- Calcular la arista y la diagonal de un cubo de 65 cm^2 de área

67.- La base de un prisma recto es un rectángulo de 35 cm de altura; las bases miden 15 y 20 cm. Calcular el área lateral y total del prisma, si su altura es de 35 cm.

68.- La base de una pirámide recta es un rectángulo de lado 20 cm y la diagonal 27 cm. Calcular el área lateral y total de la pirámide si la altura es de 35 cm

69.- Calcular el área lateral de:

a) Un cilindro de 4 cm de radio y 9 de generatriz

b) Un cono de radio 7 cm y 9 de generatriz

c) Un cono de radio 7 cm y 11 de altura

70.- Calcular el área de los poliedros regulares siguientes:

a) tetraedro 6 cm de arista

b) octaedro 7 cm de arista

c) Cubo 3 cm de arista

d) Icosaedro 8 cm de arista

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

e) Dodecaedro de 2,1 cm de arista y 1,3cm de apotema

71.- Calcular el área y volumen de un tubo en forma de cilindro de 35 mm de sección y de largo 9 cm

72.- Calcular el área y volumen de una torre cilíndrica rematada por un cono: cilindro de diámetro 3 m, altura 8 m y la generatriz del cono 2,5 m

73.- Se quiere pintar la cúpula de un edificio de 8 m de radio; si por cada 2 m^2 , se gasta un litro de pintura al precio de 45 euros los botes de tres litros. ¿Cuánto costará?

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

FUNCIONES ALGEBRAICAS

1.- Confeccionar la tabla:

Precio de un libro 35,3 euros de 2 3 4 5 6

2.- Hacer el gráfico del número 1

3.- Confeccionar la tabla:

Consumo de un avión una hora 250 l 2 horas 3 horas 4 horas 5 horas 6 horas

4.- Hacer el gráfico del número 3

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

2

- 5.- El alquiler de una bicicleta es de 0,2 euros cada cuarto de hora hasta dos horas
a) Confeccionar la tabla de valores y representar gráficamente esta función

- 6.- El precio de un litro de aceite es de 3,25 euros

Confeccionar la tabla de 2 l 3 l 5 l 7 l 15 l

Hacer la gráfica

- 7.- El precio de un m^3 de agua es un precio fijo de 1,2 euros más 0,5 euros por cada 2 m^3 . Se gastaron 17 m^3

a) ¿Cuál será el coste total?

b) Hacer la gráfica

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

c) ¿Será una función lineal o afin?

8.- Un animal tiene un coste físico de 8 euros, cada 200 gramos tienen un coste de 0,35 euros y comió 4 Kg y medio

a) ¿Cuál fue el coste total?

b) Hacer el gráfico

c) ¿Será una función lineal?

9.- ¿Cuáles son funciones?

a) $Y = x^2$

b) $y = x^2 + 1$

c) $y = -x^2 + 4$

10.- ¿Cuáles son funciones?

a) $Y = 4x^2 + 3$

b) $y = -2x^2$

c) $y = x^2 - 2$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

11.- Representar gráficamente

a) $-2x^2$

b) $y = (x + 2)^2$

c) $y = (x - 4)^2$

Valores de x -3 -2,5 -2 -1,5 -0,5 0 1 1,5 2, 2,5 3

12.- Representar las parábolas:

a) $Y = -2x^2$

b) $y = 2x^2$

c) $-3x^2$

d) $4x^2$

valores x -3 -2,5 -2 -1,5 -1 -0,5 0 1 1,5 2 2,5 3

13.- Escribir el vértice de

$y = x^2 - 2$

$y = x^2 - 3$
 $Y = \frac{1}{2}x^2 + 2$

$y = 2x^2 + 3$
 $y = -4x^2 + 3$

Valores de x -2,5 -2 -1,5 -1 -0,5 0 0,5 1 1,5 2 2,5

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

14.- Encontrar:

a) Los puntos de intersección de la parábola con los ejes de coordenadas

c) El vértice de cada parábola

$$Y = x^2 - 4x + 3$$

$$Y = x^2 - 4x$$

$$Y = x^2 - 2x + 6$$

$$Y = 2x^2 + 5x$$

$$Y = x^2 + 3x + 2$$

$$Y = x^2 - 3x$$

Por si son necesarios los valores:

- 2,5 - 2 - 1,5 - 1 - 0,5 0,5 1 1,5 2 2,5

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

15.- Representar gráficamente la parábola

$$y = -2x^2 + 3x - 1$$

Valores - 3 - 2 - 1,5 - 1 - 0,5 0,5 1 1,5 2 2,5

¿Cuál es su vértice?

16.- Encontrar el vértice y tres puntos más:

$$y = x^2 - x + 4$$

$$Y = 2x^2 - 3x + 1$$

$$Y = 3x^2 + 2x + 1$$

$$Y = 2x^2 - 3x + 1$$

$$Y = -3x^2 - 2x + 2$$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

Valores los habituales

17.- Localizar el vértice, los puntos de intersección con el eje x de simetría de las parábolas

$$y = 1/2 x^2$$

$$Y = 1/2x + 4$$

$$Y = 1/2x^2 - 2$$

$$Y = 3x^2 - 2$$

$$Y = 2x^2 + 3$$

18.- Calcular numérica y gráficamente las funciones de velocidad y tiempo

Velocidad Km/h	45	50	55	60	65	70
Tiempo (h)	25,4					

19.- Un transportista percibe por cada 5 Kg 0,95 euros

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

¿Cuál será el precio final 7 8 15 20 25 y 50 Kg
Representación gráficamente

20.- Un camión cisterna cargado con agua potable por cada 50 litros 0,9 euros. La capacidad es de 24.000 litros
Hacer el gráfico correspondiente a 75, 125 200 1000 1500 8000 12000 y 20000

21.- El precio de alquiler de una bicicleta es de 7 euros por día la quieren tener 5 días, el precio por cada 25 Km es 0,95 euros. Construir el gráfico calculado sobre 250 km

22.- Representar gráficamente las siguientes funciones de segundo grado:

a) $y = 2x^2 + 2x + 1$

b) $y = \frac{3}{4}x^2 + 2x - \frac{1}{4}$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

c) $y = -2x^2 + 6x + 12$

d) $y = 3x^2 - 5x$

e) $y = x^2 - 2x + 3$

f) $y = 3x^2 - 1$

23.- Representar gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = 5/x$

b) $2xy - 5$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

c) $xy - 5$

24.- ¿Qué funciones algebraicas corresponden a primer grado y cuáles a segundo grado?

a) $y = 5x$

b) $y = 3x - 7$

c) $y = 2x^2 - 3$

d) $y = 2x^2 - 4$

e) $y = 2x + 7$

f) $y = 3x^2 - 2x$

25,. Indicar la pendiente de la recta y la ordenada en cada una de las funciones siguientes

a) $y = 2x - 1$

b) $y = 2x$

c) $y = 2x + 6$

d) $y = 3x$

e) $y = -3$

f) $-x + 3$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

26.- Resolver numérica y gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones

a) $y = x + 4$
 $y = 2x^2 - 3x + 1$

b) $y = 2x^2 + 3x + 1$
 $y = -\frac{2}{3}x^2 + 2x - 2$

c) $y = \frac{3}{4}x^2 - 2x - 7$
 $Y = 3x^3 - 3$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

d) $y = 3x^2 - 4x - 5$

$$Y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$$

27.- Un Kg de alubias de cierta calidad costó 4,5 euros

- a) Construir una tabla de valores y representar gráficamente la función que relaciona el número de Kg con el importe

- b) Encontrar la función algebraica de la función

28.- Determinar la representación gráfica a cada una de las funciones de primer grado

a) $y = 3x - 1$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

b) $y = \frac{2}{3}x - 5$

c) $y = 5x + 3$

d) $y = -\frac{2}{3}x$

e) $y = 3x + \frac{3}{4}$

29.- Resolver gráficamente las inecuaciones:

a) $x^2 - 4x - 3 > 0$

b) $2x^2 + x + 2 \geq 0$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

c) $2x^2 - 3x \geq 2$

d) $4x^2 - x - 2 \geq 2$

e) $x^2 + 25 \leq 0$

f) $x^2 + 4x^2 > 0$

30.- Representar gráficamente

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

$$\text{a) } y = \frac{7}{x}$$

$$\text{b) } y = \frac{-3}{2x}$$

$$\text{c) } y = \frac{3}{5x}$$

$$\text{d) } y = \frac{5}{7x}$$

$$\text{e) } Y = \frac{-7}{3x}$$

31.- Si a un cuadrado se aumentan 8 cm sus lados paralelos se obtiene un rectángulo . Calcular el área del cuadrado en función del lado x del cuadrado

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

El director de un circo estima que si cobra la entrada a 25 euros podría contar con 800 espectadores que podría bajarlas 2,5 euros por cada 150 espectadores. Calcular las ganancias obtenidas en función a la bajada de precio

33.- Dibujar la gráfica de $f(x) = x^2 - 2x - 3$

Valores - 3 - 2 - 1 0 1 2 3

34.- Determinar los cortes ejes de las parábolas siguientes

Hallar el dominio de definición de las funciones

a) $y = \frac{1}{x^2 + 3} =$

b) $\frac{x+2}{\sqrt{x}} =$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

35.- Resolver las funciones:

a) $y = -5x + 2$

b) $(x^2 - 3)^2 =$

c) $y = -\frac{2}{5}x$

d) $y = -5x^2$

35.- Representar gráficamente la función:

$$y = \frac{4}{7}x + 3 =$$

36.- Representar la gráfica de la siguiente función:

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

$$y = -3x + 2$$

37.- Representar gráficamente:

$$y = \frac{-3x + 2}{2x^2 - 3}$$

38.- Con 500 m de valla se quiere acotar un recinto rectangular aprovechando una pared

a) x es uno de los lados de la valla

b) Construir la finca que dé el área del recinto

39.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(-2, 3)$ y cuya pendiente es $\frac{3}{5}$

40.- Representar gráficamente la función

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

$$f(y) = 3x^2 - 5x$$

41.- Un tonel vacío con capacidad para 50 litros pesa 6350 gramos . Escribir la función que dé el peso total según la cantidad de líquido que contiene en litros

42.- Hallar el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{2}{2x^2 - 3} =$

b) $y = \sqrt{2x + 1} =$

43.- Obtener la gráfica de la función:

$$f(x) = \frac{2x^2}{3} - 3x + 2$$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

44.- Hallar el dominio de de definición de las funciones:

a) $y = \frac{3x - 2x}{x} =$

b) $y = \sqrt{4x - 2} =$

45.- El precio de establecimiento de llamada telefónica es 0,13 euros; se habló un total de 9 minutos 43 segundos por importe total de 4,25 euros. Hallar la función que nos dé el precio total de la llamada en segundos

46.- Representar gráficamente la función:

$$y = -2x + 3x + 2$$

47.- Sabiendo que $20^{\circ} \text{C} = 60,7^{\circ} \text{F}$, obtener la ecuación que $100^{\circ} \text{C} = 140^{\circ} \text{F}$ que permita traducir temperatura a $^{\circ} \text{C}$ y $^{\circ} \text{F}$

48.- Un motorista sale de ruta llegando a una zona de descanso para comer y después volver a casa

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

1 hora 80 Km 2ª hora 85 Km 3ª 90 Km 4ª 75 Km (comida y descanso de 45 minutos)
5ª 80 Km 6ª 95 Km y 6ª 85 Km

a) Confeccionar la tabla con los valores correspondientes

b) ¿Cuántos Km de su casa dista para comer?

c) Cuando decide regresar ¿Cuánto tiempo tarda?

d) ¿Cuántos Km recorrió entre ida y vuelta?

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

PROBABILIDAD

1.- Hacer:

$F = [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 34]$

a) Ser múltiplo de 2

b) Ser divisible entre 2

c) Ser mayor que 20 (pares)

d) Ser menor que 10

e) Ser mayor que 10 y divisible entre 3

2.- En dos dados ¿Cuántos impares Hay?

3.- Dadas las palabras: binomio peligro

¿Cuál es la \cup [

¿Cuál es la \cap [

4.- En la baraja de cartas española: ¿Cuál es la probabilidad que la primera carta que se extraiga sea un as?

5.- En la baraja de cartas española. ¿Cuál es la probabilidad que las dos primeras cartas que se extraigan sean dos ases?

6.- De la baraja de cartas española. ¿Cuál es la probabilidad que en la primera extracción sea un cuatro de espadas?

7.- De la baraja de cartas española ¿Cuál es la probabilidad que las tres primeras que se extrai-

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

gan sumen 15

8.- De la baraja francesa. ¿Cuál es probabilidad que la primera que se extraiga sea el tres de picas?

9.- De la baraja francesa: ¿Cuál es la probabilidad que en la primera extracción al azar que sean dos cartas que sumen 7 y sean tréboles y picas?

10.- ¿Cuándo los sucesos son incompatibles?

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

1.- Representar gráficamente las funciones:

a) $f(x) = -3$

b) $f(x) = 2x$

c) $f(x) = x + 4$

d) $f(x) = 2x^2 - 3$

e) $f(x) = 2x^2 - 2x + 6$

f) $f(x) = x^2 - 4x + 1$

g) $f(x) = -3x^2 - 4x - 1$

Valores $x = -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$

2.- Representar gráficamente las funciones cuadráticas:

a) $y = 2x^2 - 3$

b) $y = 3x^2 - 5x$

c) $y = 4x^2 - 3x + 1$

c) $y = 4x^2 - x - 1$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

3.- Considerando la función exponencial $f(x) = 2^x$ calcular

a) $f(5)$

b) $f(-3)$

c) $f\left(\frac{4}{5}\right)$

d) $f\left(-\frac{4}{5}\right)$

4.- Una función exponencial tiene por imagen del 3, el 33. ¿Cuál es la base?

5.- Considerando la función logarítmica $f(x) = \log_2 x$ calcular

a) $f(5)$

b) $f(25)$

c) $f(53)$

d) $f(75)$

e) $f(85)$

6.- Considerando la función logarítmica $f(x) = \log_5$

a) $f(35)$

b) $f(7)$

c) $f(95)$

d) $f(81)$

e) $f(125)$

7.- Representar gráficamente las funciones siguientes indicando las características

a) $y = \log x$

b) $y = \log \frac{1}{15} x$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

c) $y = n \times$

8.- Resolver las funciones exponenciales

a) $2^x = 16$

b) $5^x = 125$

d) $3^x = 64$

9.- Calcular los logaritmos

a) $\log_{1/2} = 0,25 = y$

b) $\log_5 125 = y$

10.- Calcular los logaritmos

a) $\log 0,03 = y$

b) $\text{Log } \frac{1}{e^5}(y)$

11.- Calcular los logaritmos

a) $\text{Log } 0,005 = y$

c) $\log 34,5 = y$

12.- Calcular las operaciones con logaritmos

a) $\log_a(x.y) =$

b) $\log_2 5.6 =$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

13.- Efectuar las operaciones de logaritmos:

a) $\text{Log}_a \left(\frac{x}{y} \right) =$

b) $\log_2 \frac{4}{7} =$

14.- Efectuar las operaciones de logaritmos

a) $\log a(x^n) =$

b) $\log_2 \left(\frac{3}{7} \right) =$

15.- Efectuar las operaciones

a) $\log_2 (\sqrt[4]{7}) =$

b) $\log_2 5 = \frac{\log_4 7}{\log_4 3} =$

16.- Calcular el valor x

a) $\log_2 18 = x$

b) $\log 5^{\frac{4}{5}}(x)$

17.- Calcular el valor x

a) $\log_{1/3} 0,55 = x$

b) $\log_5 \sqrt[4]{7} = x$

18.- Calcular el valor x

a) $\log_2 3/4 = x$

b) $\log_x 100 - 5$

19.- Calcular el valor x

a) $\log_5 x^4 = 7$

b) $\text{Log } 0,004$

20.- Calcular

a) $\text{Log } \sqrt[5]{11}$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

b) $\text{Log } 8$

21.- Calcular

a) $\log 3,45$

b) $\log 0,235$

22.- Calcular los logaritmos de las expresiones

a) $\ln \frac{x^2 y(n+p)}{n+p} =$

b) $\log_5 \frac{c^2 + d^2}{c.d} =$

23.- Calcular

a) $3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}} =$

b) $5\sqrt{5\sqrt{5}} =$

24.- Expresar los logaritmos decimales de los siguientes números en función de $\log 2$

$2 \quad 8 \quad 1/32 \quad 1/64$

$0,45 \quad 0,65 \quad 0,345 \quad 0,0786$

$\sqrt{5} \quad \sqrt{11} \quad \sqrt{\frac{1}{4}} \quad \sqrt{\frac{1}{81}}$

25.- Calcular

$\text{Log}_{\frac{\sqrt{5}}{2}} (\sqrt{6}) = x$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

PROBABILIDAD

1.- $F = [1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30]$

a) Ser múltiplo de 3

b) Ser divisible entre 2

c) Ser mayor que 20

d) Ser menor que 10

f) Ser impar y divisible entre 3

2.- En dos dados: ¿Qué probabilidad hay

a) que en la primera tirada al azar salgan dos 6?

3.- Dadas las palabras: binomio peligro

¿Cuál es la \cup ?

¿Cuál es la \cap ?

4.- La baraja de cartas española ¿Cuál es la probabilidad que la primera carta que se extraiga sea un as?

5.- La baraja de cartas española. ¿Cuál es la probabilidad que las dos primeras cartas sean dos ases?

6.- La baraja de cartas española ¿Cuál es la probabilidad que en la primera extracción sea una jota de bastos?

7.- La baraja española: ¿Cuál es la probabilidad que en la primera salgan dos cartas y sumen 15?

8.- De la baraja francesa. ¿Cuál es la probabilidad que en la primera extracción sea el as de picas?

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

- 9.- De la baraja francesa. ¿Cuál es la probabilidad que en la primera extracción sean dos cartas sumen 7 y sean tréboles picas?
- 10.- ¿Cuándo dos sucesos son incompatibles?
- 11.- Definir que es una probabilidad condionada
- 12.- En el bombo de la lotería 7/39 están los números del 1 al 39. Para la combinación ganadora se extraen 7 bolas
- a) Para obtener la combinación ganadora cuántas probabilidades son necesarias
 - b) Obtener una combinación que contenga 3 números de la ganadora
- 13.- Una empresa quiere adquirir un determinado número de acciones, piden asesoramiento a 5 expertos para que asesoren si es favorable la compra de acciones. La actitud de los cinco es: 0,4; 0,7; 0,2; 0,8; 0,5
- a) Probabilidad que al menos uno de ellos aconseje la compra
 - b) Probabilidad que ninguno aconseje la compra
- 14.- Un mayorista tiene una cartera de 1.200 clientes que realizan pedidos regularmente o en forma esporádica y según efectúen el pago al contado o crédito. Al contado lo realizan 700 clientes y 350 a crédito, esporádicos al contado 100 y a crédito 50
- a) ¿Son independientes los sucesos comprar a crédito y comprar regularmente
- 15.- Una empresa de selección de personal entre los solicitantes un 25% está cualificado para el trabajo que se pide, de los cuales un 20% tenía estudios universitarios, un 30% formación profesional y un 50% bachiller. Entre los no cualificados un 40% universitarios un 40% formación profesional y un 20% bachiller
- a) ¿Qué porcentaje de estos estudiantes se encontraban en bachillerato y estaban preparados para el empleo solicitado?
 - b) ¿Entre los estudiantes universitarios que solicitaron empleo, que tanto por ciento no estaba preparado para los puestos de trabajo que solicitaba?

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

16.-Una bolsa con 8 bolas blancas y 6 negras extraen al azar, y sucesivamente y sin remplazamiento dos bolas:

¿Cuál es la probabilidad que las bolas extraídas sean blancas

Si la segunda bola resultó ser negra. ¿Cuál sería la probabilidad que la primera también fuera negra?

17.- En una empresa los trabajadores un 35% utilizaban el transporte público y el 65% el vehículo propio: Calcular la probabilidad de que seleccionando al azar resulte ser usuario de transporte público y utilice el restaurante. Justificar la respuesta

18.- Una urna contiene 3 monedas de 50 céntimos de euro y 4 de un euro cada una. Otra contiene 7 monedas de 50 céntimos y 5 de un euro. Se elige una urna al azar y se extrae una moneda ¿Cuál es la probabilidad que la moneda extraída sea de euro?

19.- En una residencia de tercera edad el 40% son hombres y el 35% mujeres. El 45% de los hombres y el 50% de las mujeres participan alguna vez en actividades lúdicas del centro. Si se escoge un anciano o ancianos al azar. Calcular la probabilidad que haya participado alguna vez en las actividades de la Residencia.

20.- En un albergue de verano con 290 residente. 90 de los cuales participan en alpinismo y 100 de los restantes senderismo. Calcular:

a) Practican alpinismo

b) Practican alpinismo sabiendo que practican senderismo

c) Practican senderismo y alpinismo

d) Practican senderismo y no alpinismo

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

e) Practican senderismo

21.- De un grupo de amigos el 30% va al fútbol y el 55% al baloncesto
Si se coge un al azar que vaya al fútbol y al baloncesto

22.- La bola del casino consta de 37 bolas del 0 al 36. Completar las preguntas:

a) Obtener un número impar > 25 (probabilidad) 350 partidas

b) Obtener un número par < 30 (probabilidad) 500 partidas

c) Obtener un número $>$ que 15 (probabilidad) 600 partidas

d) que salga el 0 (probabilidad) 300 partes

ESTADÍSTICA

1.- Completar el cuadro de los pares de zapatos que hay en un almacén

NUMERO de pares	F.absoluta	F.relativa	Tanto por ciento
35	15		
36	300		
37	650		
38	1100		
39	1300		
40	1200		
41	550		
42	400		
43	250		
44	125		
45	75		
46	50		
47	25		
Total			

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

2.- Hacer el diagrama de barras del número 1 (frecuencia absoluta y número de pares)

3.- Del número 1 hacer el diagrama de barras de los tantos por ciento

4.- Del número 1. Hacer diagrama de sectores (de los pares de zapatos)

5.- Se hizo un encuesta a diferentes sectores sociales

Sector social	F. absoluta	F. relativa	Tanto por ciento
solteros	245		
casados	368		
Viudos/as	256		
separados	125		
Divorciados	71		

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

Parejas estables	45		
Otros	35		
Total			

6.- Hacer el diagrama de barras del número 5 (sector social y frecuencia absoluta)

7.- Diagrama de barras del número 5 (sector social y tanto por ciento)

8.- Del número 3 hacer el diagrama de sectores (número de individuos de cada sector social)

9.- De las notas de un grupo de alumnos

Intervalos	F. absoluta	F. relativa	Tanto por ciento
(0, 1)	4		
(1,1- 2)	7		
(2,1-3)	5		
(3,1-4)	2		

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

(4,1-5)	6		
(5,1-6)	2		
(6,1-7)	2		
(7,1-8)	3		
(8,1-9)	2		
(9,1-10)	2		
Total			

10.- Hacer el histograma de los porcentajes

11.- Del número 9 hacer el diagrama de sectores

12.- Por una variable estadística que toma cuatro variables 0,35, 0,45, 0,11 y 0,09 (frecuencias relativas) ¿Qué porcentajes corresponden?

13.- Una encuesta; la frecuencia de una variable fue 0,234 y la frecuencia absoluta 65. ¿Cuál fue el número de observaciones?

15. Se encuestó a 4000 personas de las cuales van a pie el 65%, autobús el 13,5% en metro el 16% y en coche el 6%. ¿Cuál es la frecuencia absoluta de cada variable?

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

16.- Del número 15 hacer el diagrama de barras

17.- Los 30 alumnos de una clase de un mes al otro han variado en peso

165	160	405	330	420	210
390	220	400	250	200	240
250	300	180	245	255	295
300	250	300	270	265	200
300	250	315	325	210	250

(gramos)

Hacer un histograma desde 160 hasta 460 con ampliación de 20

18.- Una muestra a 2.000 personas sobre el número de televisores completar la tabla

Número de televisores	Fa	Fr	%
0		0,15	
1	720		
2		0,156	
3	60		
4	20		
5			
Total			

Completar la tabla

¿Qué tanto por ciento de casas tiene más de dos televisores?

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

19.- .- Calcular la media aritmética de las temperaturas

16º 21º 19º 23º 27º 19º 25º 17º 16º 21º 20º

20.- Del número 19 la moda

21.- Calcular la media de las siguientes notas:

5 6 2 1 9 7 3 10 2 1 5 5 5 6

22.- Hallar del número 21 la mediana y la moda

23.- Calcular la media aritmética ponderada de los pares (566 al 674)

24.- Del número 23 la moda

25.- Del numero 24 457 al 537 (impares) la mediana

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

26.- Calcular las temperaturas medias, la moda y la mediana de los años 2002 y 2003

AÑO	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Enero	0	- 0,4	-08	- 1,2	- 1,3	0,1	- 2,1	1,1	1,3	1,4
Febrero	- 0,3	- 1,2	- 1,4	- 0,8	1,1	1,3	2	1,5	-0,7	1,4
Marzo	2,5	3,1	3,5	4,7	2,5	3,1	2,7	1,9	1,8	4,3
Abril	5,2	5,7	6,4	5,7	6,1	7,2	5,3	4,2	4,9	6,1
Mayo	11,9	11,5	10,3	11,8	9,7	11	11,3	10,9	8,4	11,2
Junio	13,5	12,9	13,7	13,8	14	13,6	12,3	13,1	12,4	14,8
Julio	16,2	16,5	15	14,6	17,4	18,4	15,3	16,6	18,2	16,5
Agosto	17,	18,6	17,5	18	19	18,3	16,5	17,9	19	19,3
Septiembre	15,2	15,5	12,3	12,6	14,2	15,1	14,4	16,1	15,2	14,3
Octubre	12	11,5	14,1	11,4	12,3	12,1	10,5	12,5	13	12,5
Noviembre	7,1	5,4	4,6	4,8	5,3	6,2	7,1	5,3	4,8	3,4
Diciembre	1,5	1,3	0,9	0,4	0,9	1,3	2,5	1,9	2,1	1,7

27.- En un entrenamiento de balonmano con 11 jugadores el número de goles fue:

Número 6	5 goles	número 7	3 goles	número 8	7 goles
Número 9	6 goles	número 10	4 goles	número 11	6 goles
Número 12	1 gol	número 13	5 goles	número 14	4 goles
Número 15	2 goles	número 16	9 goles		

Al día siguiente en otro entrenamiento con los mismos jugadores y número el número de goles fue

Número 6	3 goles	número 7	5 goles	número 8	4 goles
Número 9	7 goles	número 10	6 goles	número 11	1 gol
Número 12	3 goles	número 13	4 goles	nombre 14	7 goles
Número 15	4 goles	número 16	5 goles		

Hacer dos histogramas

28.- Del número 28 la mediana y la moda

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

29.- Del número 28 la desviación media

30.-Del número 28 la desviación típica

31.- Un test hecho a 250 personas tienen de nota media 6,7: las chicas obtuvieron 7,1 y los chicos 6,2. Calcular el número de chicos y chicas

32.- El volumen medio de exportaciones de una empresa tiene una media mensual de 800,000 euros de exportaciones. Con una desviación típica de 120.000 euros

La misma empresaresa vende al mercado interior mensualmente 750.000 euros con un desviación

Típica de 115.000 euros. ¿Cuál es el mercado más estable?

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

33.- Las exportaciones de una empresa durante el primer semestre fue:

	exportaciones	desviación típica
enero	250.000 euros	15.000 euros
febrero	175.000 euros	34.000 euros
marzo	225.000 euros	22.000 euros
abril	450.000 euros	60.000 euros
mayo	225.000 euros	33.000 euros
junio	123.000 euros	34.000 euros

Las ventas al mercado interior fueron:

	Ventas	desviación típica
Enero	260.000 euros	44.000 euros
Febrero	345.000 euros	72.000 euros
Marzo	175.000 euros	55.000 euros
Abril	234.000 euros	12.000 euros
Mayo	330.000 euros	25.000 euros
Junio	256.000 euros	33.000 euros

¿Qué mercado es más estable?

34.- Para contar el número aproximado de animales que hay en una granja se cogen 160 y después se vuelven a dejar

a dejar; se vuelven a sacar 210 y resulta que hay marcados 30. ¿Cuántos Había en total?

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

VECTORES

1.- El vector $\xrightarrow{z} = CD = (3,5)$ tiene el origen en el punto B(5,-3) determinar

a) Las coordenadas del extremo D

b) El módulo del vector posición del punto D

c) La distancia del punto C al punto D

2.- Dados los puntos Z(4,5) y Y(3,-2) encontrar los componentes cartesianos el módulo de los dos vectores que los determinan: Representar gráficamente y comparar el módulo, la dirección y el sentido

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

- 3.- Dados los puntos A(1,3) y B(-2,4), encontrar los componentes cartesianos, el módulo de los dos vectores que lo determinan. Representar gráficamente el módulo, la dirección y el sentido
- 4.- Dados los puntos X(6,4) y V(2,-5) encontrar los componentes cartesianos, el módulo de los dos vectores. Representar gráficamente el módulo, la dirección y el sentido. Que distancia del punto X al punto V y del punto V al punto X
- 5.- Dados los puntos M(-7,3) y N(-3,1) en encontrar los componentes cartesianos, el módulo de los dos vectores: representar gráficamente el módulo, la dirección y el sentido. ¿Qué distancia del punto M al punto N y del punto N al punto M?
- 6.- Determinar los componentes cartesianos y el módulo de los vectores:
- a) $\vec{x} = \vec{CD}$ con C(1,4) y D(-3,5)
 - b) $\vec{y} = \vec{EF}$ con E(4,-6) y F(-3,5)
 - c) $\vec{z} = \vec{AB}$ con A(3,-2) y B(1,-3)
 - d) $\vec{m} = \vec{GH}$ con G(4,-6) y H(-3,-2)
- 7.- Encontrar el valor de los componentes cartesianos de los vectores:
- a) $\vec{s} = (2,5)$, si $|\vec{t}| = 5$
 - b) $\vec{a} = (c,-3)$, si $|\vec{a}| = \sqrt{6}$
 - c) $\vec{b} = (-5,a)$, si $|\vec{b}| = 11$
 - d) $\vec{o} = (3,m)$, si $|\vec{o}| = 5\sqrt{7}$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

8.- Considerar un vector posición del punto S(4,-5); determinar los componentes cartesianos del vector que tiene la misma dirección, el mismo módulo, pero sentido contrario al vector \overrightarrow{p} al origen de coordenadas ¿Qué punto da? En caso de que este punto sea S determinar los componentes de su vector de posición

9.- Dados los vectores $\overrightarrow{c} = (-3,4)$ y $\overrightarrow{d} = (-4,7)$, calcular y comprobar gráficamente

a) $\overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}$ b) $\overrightarrow{c} - \overrightarrow{d}$ c) $-\overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}$ d) $-\overrightarrow{c} - \overrightarrow{d}$

10.- Dos vectores $\overrightarrow{y} = (2,4)$ y $\overrightarrow{z} = (-3,2)$ calcular y comprobar gráficamente

a) $\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}$ b) $-\overrightarrow{y} - \overrightarrow{z}$ c) $\overrightarrow{y} - \overrightarrow{z}$ d) $-\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}$

11.- Considerando los vectores $\overrightarrow{n} = (-3,4)$ y $\overrightarrow{\tilde{n}} = (3,-7)$

a) representarlos gráficamente

b) Comparar la dirección, el sentido y el módulo

c) Calcular el vector suma y representarlo gráficamente

d) Comprobar que se verifica: $|\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}| = |\overrightarrow{y}| + |\overrightarrow{z}|$ ¿Por qué sucede?

12.- Escribir dos vectores que tengan la misma dirección y sentido opuesto

Comparar el módulo del vector suma con con la suma de los módulos de los dos vectores

13.- A partir de los vectores $\overrightarrow{t} = (5,-3)$, $\overrightarrow{u} = (4,-3)$, $\overrightarrow{v} = (-7,5)$, calcula

a) $\overrightarrow{t} + \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ b) $\overrightarrow{t} - \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$

c) $-\overrightarrow{t} + \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ d) $\overrightarrow{t} - \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

14.- Considerando los vectores $\vec{c} = (-3, 5)$ y $\vec{d} = (-4, -1)$, determinar analíticamente y gráficamente los componentes del vector $\vec{d} = -4 \cdot \vec{c}$.

15.- Indicar cuales de los pares de vectores siguientes tienen la misma dirección. En caso que la tengan, expresar uno de ellos como a un producto de un número por el otro vector

16.- Indicar que pares de vectores siguientes tienen la misma dirección. En caso de que uno de ellos tenga la misma dirección, expresar uno de ellos como producto de un numero por el otro vector

a) $\vec{d} = (3, 5)$ y $\vec{e} = (5, 2)$

b) $\vec{o} = (3, -4)$ y $\vec{p} = (4, -7)$

c) $\vec{x} = (-2, 5)$ y $\vec{z} = \left(-\frac{4}{5}, -3\right)$

d) $\vec{f} = \left(\frac{4}{7}, -\frac{2}{3}\right)$ y $\vec{g} = \left(-3, \frac{6}{7}\right)$

e) $\vec{r} = \begin{pmatrix} \\ - \end{pmatrix}$

e) $\vec{r} = \left(-\frac{4}{5}, \frac{5}{9}\right)$ y $\vec{s} = \left(\frac{2}{5}, -7\right)$

17.- Considerando los vectores $\vec{r} = \left(-3, -\frac{2}{5}\right)$ determinar:

a) El vector unitario de la misma dirección y sentido

b) El vector de módulo 7 de la misma dirección y sentido

c) El vector unitario de la misma dirección y sentido

d) El vector de la misma dirección y sentido contrario y de módulo 3

18.- Determinar la ecuación vectorial, y las ecuaciones paramétricas, la ecuación continua y la ecuación explícita de la recta que pasa por los puntos B(3, -2) y C(-3, 5)

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

18.- Si el vector $\vec{r} = (3, -6)$ es un vector director de una recta, también lo es el vector $\vec{s} = (6, -5)$ ¿Por qué?

19.- A partir de dos vectores directores de dos rectas paralelas, deducir que han de tener la misma pendiente

20.- Dibujar la recta paralela a BC que pasa por el punto P(3,6). Escribir la ecuación

21.- Indicar la pendiente y encontrar el ángulo de inclinación de cada una de las rectas:

a) $Y = \frac{5}{4}x$

b) $\frac{2x-2}{2} = \frac{y+5}{-3}$

c) $(x, y+2) = k \cdot (2, -5)$ para todo el valor de k

d) $y = -2x + 3$

22.- Dados los puntos C(-2,5). D(4,-1) y E(6,-4)

a) Escribir la ecuación explícita de la recta que pasa por el punto C i por el punto D

b) Encontrar la ecuación de la recta del apartado anterior que pase por E

c) Hacer el dibujo correspondiente

23.- Escribir una ecuación explícita de la recta que pasa por el origen y tiene un ángulo de inclinación de 65° y hacer el dibujo

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

TRIGONOMETRÍA

- 1.- La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 15 cm y uno de los catetos 7. Calcular el otro cateto y los ángulos agudos de este triángulo

- 2.- Uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo mide 40° y la hipotenusa 11 cm. Resolver el triángulo

- 3.- El perímetro de un triángulo rectángulo mide 55 cm y la hipotenusa 33 cm. Resolver

- 4.- La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 12 cm y uno de los ángulos agudos la tercera parte del otro: Resolver el triángulo

- 5.- Resolver los siguientes triángulos rectángulos
 - a) cateto opuesto 5 cm, ángulo agudo de la hipotenusa con el cateto contiguo 50°

 - b) Hipotenusa 11 cm y ángulo agudo contiguo a la hipotenusa y cateto 60°

 - c) Ángulo agudo 40° y el cateto contiguo al ángulo agudo 8 cm

- 6.- Un cateto de un ángulo agudo mide 9 cm y uno de los ángulos agudos 50° Resolver el triángulo

- 7.- Una escala forma un ángulo de 50° con tierra, y el pie se encuentra situado a 3,5 m de la pared ¿Cuál es la longitud de la escala?

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

- 8.- Una escala con el ángulo de la pared forma un ángulo de 55° y la longitud de la escala es 5,7 m. ¿Qué distancia separa la base de la escala con el pie de la pared?
- 9.- Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 18 cm y el seno $\hat{\alpha} = \frac{2}{7}$ calcular los catetos
- 10.- Si $\cos \hat{\alpha} = 0,60$ calcular b y a cateto igual a 9 cm
- 11.- $\text{Tg } \hat{\alpha} = 1,45$; calcular la hipotenusa y el lado contiguo a la tangente cateto opuesto 15 cm
- 12.- Determinar las razones trigonométricas del ángulo β de cateto contiguo 5 cm e hipotenusa 7 cm
- 13.- Calcular los valores x e y de los triángulos rectángulos:
- a) Seno $\hat{\alpha} = 0,75$ hipotenusa 12 cm
 - b) Coseno $\hat{\alpha} = 0,75$ cateto contiguo 4 cm. Hallar la hipotenusa y el otro cateto
- 14.- Un triángulo rectángulo $\text{tg } \hat{\alpha} = 0,55$ Cateto opuesto al ángulo $\hat{\alpha}$ 7 cm Determinar la hipotenusa y el ángulo agudo contiguo a $\hat{\alpha}$
- 15.- En un triángulo rectángulo, la altura correspondiente a la hipotenusa la divide en dos segmentos que miden 13 y 8 cm. Determinar:
- a) El valor de la altura
 - b) Los catetos del triángulo

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

c) El área del triángulo, considerando las dos base diferentes y las alturas correspondientes

16.- Si $\cos \theta = 3/8$, calcular seno y tg

17.- Se sabe que el seno de $\frac{4}{13}$. ¿Cuál es el valor coseno θ y de la tg θ

18.- La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 9 cm y el cateto 4 cm. Dibujar el ángulo agudo tal que $\text{seno} \theta = 0,4$ ¿Cuánto mide este ángulo?

19.- Un triángulo rectángulo los dos catetos miden 15 y 8 cm. ¿Cuánto miden sus ángulos?

20.- Dibujar un ángulo agudo θ tal que $\cos \frac{5}{9}$ ¿Cuánto mide este ángulo?

21.- La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 12 cm y uno de los catetos 8 cm. ¿Cuánto miden los ángulos agudos de este triángulo?

22.- ¿Cuánto miden los ángulos agudos del triángulo rectángulo del ejercicio 21?

23.- Completar:

Seno	20°	34°	36°	41°	46°	52°	65°	86°
------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Coseno								
--------	--	--	--	--	--	--	--	--

Tangente								
----------	--	--	--	--	--	--	--	--

23.- Completar las igualdades;

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

$$\text{seno } \hat{\alpha} = \frac{6}{11}$$

$$\text{coseno } \hat{\alpha} = 1,8$$

$$\text{tangente } \hat{\alpha} = 6,7$$

$$\text{coseno } \hat{\alpha} = 0,034$$

$$\text{tangente } \hat{\alpha} = 78,2$$

$$\text{seno } \hat{\alpha} = \frac{\sqrt{13}}{5}$$

- 24.- Un helicóptero se mantiene en el aire estacionado: Dos observadores situados por una distancia de 600 m y situados en la misma vertical que el helicóptero, lo ven con ángulos de 42° y 56° respectivamente. ¿A qué altura está el helicóptero?
- 25.- Un árbol de 13 m de altura proyecta una sombra de 8 m. ¿Cuál es la inclinación de los rayos del sol respecto a la horizontal en aquel momento?
- 26.- Calcular el área de un octógono regular inscrito en una circunferencia de 2,5 cm de radio.
- 27.- Desde cierto punto se observa la parte más alta de un árbol bajo un ángulo de 50° , si se retrasa la posición en 25 m en la dirección adecuada. El ángulo es de 35° . ¿Cuál es la altura del árbol?
- 28.- Un avión que está a punto de aterrizar, desciende 3.560 m en recorrer una distancia de 24,5 Km. ¿Cuál es el ángulo $\hat{\alpha}$ con el que desciende este avión?
- 29.- Calcular el área de un rombo de 15 cm de lado y uno de sus ángulos 40°
- 30.- Un edificio proyecta una sombra de 5,6 m cuando los rayos de sol forman con la horizontal un

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

ángulo de 55° . ¿Cuál es la altura del edificio?

31.- Los catetos de un triángulo rectángulo miden 9 y 14 cm. Calcular la razones trigonométricas de sus ángulos agudos

32.- Construir un triángulo rectángulo sabiendo que al tangente de uno de sus ángulos agudos es $\frac{4}{5}$

33.- Desde un faro se observa un barco con un ángulo de depresión de 30° ; el barco se aproxima 900 m al faro. El ángulo pasa a ser 37° ¿Cuál es la distancia que separa el barco del faro en la segunda observación?

34.- Representar e indicar a qué cuadrante pertenecen los ángulos al primer giro en caso que sea necesario

a) 145°

b) -85°

c) 510°

d) 150°

e) -345°

f) 2000°

g) -987°

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

SUCESIONES NUMÉRICAS

1.- Calcular la suma de los 200 primeros números naturales pares

2.- Calcular la suma de los 151 primeros números naturales impares

3.- Si n representa un número natural cualquiera $3n$ representa un número impar. ¿Cómo se representa un número par?

4.- Considerando las sucesiones siguientes. En cada caso escribir 4 sucesiones

a) 1, 4, 9 -----

b) 20, 25-----

5.- Considerando la sucesión el término general de la cual se expresan por: $a_n = \frac{4n}{n^2 + 1}$

a) Escribir los 7 primeros términos de una sucesión y los que ocupan entre 60 y 300

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

- b) Escribir los primeros 7 términos de una sucesión y los que ocupan entre 120 y 200

Con la fórmula $a_n = \frac{2n}{n^2 + 1}$

- 6.- El primer término de una progresión aritmética es 7 y la diferencia es 3. Calcular a_{15}
- 7.- El primer término de una progresión aritmética es 3 y la diferencia es 5 Calcular a_9
- 8.- El primer término de una progresión aritmética es 4. y la diferencia 3. Calcular a_{16}
- 9.- Considerando la sucesión de de los múltiplos de 5. ¿Forman una progresión aritmética?
¿Cuál es la diferencia? Pertenece 215 a esta sucesión? ¿Qué lugar ocupa?
- 10.- Considerando la sucesión de los múltiplos de 3. ¿Forman una progresión aritmética?
¿Cuál es la diferencia? ¿Pertenece 96 a esta sucesión? ¿Qué lugar ocupa?
- 11.- Interpolar cuatro números entre 15 y 29 de manera que los ocho formen una progresión aritmética
- 12.- Calcular la suma de los 150 primeros múltiplos de 7
- 13.- Calcular la suma de los 120 primeros múltiplos de 3
- 14.- El término octavo de una progresión geométrica es $\frac{2}{3}$ calcular a_{11}
- 15.- El término de razón 3 de una progresión geométrica es 2 Calcular a_{12}

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

- 16.- El producto de tres términos de una progresión geométrica de razón $\frac{4}{5}$ es 3, escribir los términos de la razón
- 17.- Una progresión geométrica tiene por razón 2 y el primer término es 7. escribir la expresión del término general. Calcular a_{18}
- 18.- El cuarto término de una progresión geométrica es 10000 y la razón 10. Calcular el segundo término
- 19.- Escribir la 12 primeras potencias de 3. Forman progresión geométrica?
- 20.- Escribir las 20 primeras potencias de 9. Forman progresión geométrica?
- 21.- Interpolar 5 números entre 4 i 456 de manera que siete términos formen una progresión geométrica
- 22.- Interpolar 7 números entre 67 y 520 de manera que 8 términos formen una progresión geométrica
- 23.- Encontrar la fracción generatriz del decimal periódico $0,1\overline{6}$
- 24.- Encontrar la fracción generatriz del decimal periódico $2,1\overline{23}$
- 25.- Encontrar la fracción generatriz del decimal periódico $5,23\overline{47}$
- 26.- Encontrar la suma de los 9 primeros términos de una progresión geométrica que tiene $a_1= 3$ y $a_3= 48$
- 27.- En una progresión geométrica de razón 5, $a_9 = 575$ Calcular la suma de los 5 primeros términos.
- 28.- Escribir cinco términos más que siguen a cada una de las sucesiones siguientes:

EJERCICIOS MATEMATICAS. ESO. CUARTO CURSO.

a) $-5, -4, -2, 1, 5, 20, 26$ -----

b) $0, 10, 21, 33, 46, 60$ -----

29.- El primer término de una progresión aritmética es 5 y la diferencia -5. ¿Cuál es el término octavo?

30.- Escribir el término que falta a la sucesión

1 5 6 11 ----- 18

.

i

EJERCICIO 1 : En un grupo de personas hemos preguntado por el número medio de días que practican deporte a la semana. Las respuestas han sido las siguientes:

4 2 3 1 3 7 1 0 3 2 6 2 3 3 4 6 3 4 3 6

- Haz una tabla de frecuencia absoluta, relativa y porcentajes.
- Media, desviación media, varianza y desviación típica.
- Representa en diagrama de barras.

EJERCICIO 2: Las notas obtenidas en un examen de matemáticas realizado en una clase de 4º ESO han sido las siguientes:

4 5 7 5 8 3 9 6 4 5 7 5 8 4 3 10 6 6 3 3

- Haz una tabla de frecuencia absoluta, relativa y porcentajes.
- Media, desviación media, varianza y desviación típica.
- Representa en diagrama de barras.

EJERCICIO 3: En un instituto se ha realizado una encuesta a los alumnos de 2º de ESO para saber cuáles son los libros que más les gusta leer, y así poder comprar nuevos libros para la biblioteca.

Los resultados son los que se muestran en el siguiente diagrama de sectores. Completa la siguiente tabla y, después, contesta a las preguntas que se te plantean:

Tipo de libro	Alumnos	Grados
Poesía	3	<input type="text"/> °
Terror	24	<input type="text"/> °
Aventuras	30	<input type="text"/> °
Misterio	21	<input type="text"/> °
Teatro	12	<input type="text"/> °
Total	<input type="text"/>	

EJERCICIO 4 : Calcula los siguientes **sucesos** y sus **probabilidades** al lanzar un dado:

- a) $A = \{ \text{par} \}$ b) $B = \{ \text{múltiplo de tres} \}$ c) $C = \{ \text{mayor que cuatro} \}$
d) $D = \{ \text{número primo} \}$ e) $E = \{ \text{impar} \}$ f) $F = \{ \text{menor que cuatro} \}$
g) $A \cup C$ h) $B \cup E$ i) $D \cap F$ j) $C \cap B$

EJERCICIO 5 : Halla la probabilidad de que, al lanzar al aire dos monedas, salga:

- a) Dos caras b) Dos cruces c) Primero una cara y luego una cruz
d) Una cara y una cruz

EJERCICIO 6 : Busca la probabilidad de que, al arrojar al aire tres monedas, salga:

- a) Tres caras
b) Dos caras y una cruz

EJERCICIO 7: Tenemos una urna con 6 bolas rojas y 8 verdes. Sacamos una bola al azar, observamos el color y la volvemos a introducir en la urna. Sacamos una segunda bola y observamos su color. Calcula la probabilidad de obtener:

- a) Dos bolas rojas.
b) Dos bolas de distinto color.

EJERCICIO 8: Un juego consiste en tirar un dado y lanzar una moneda simultáneamente. Ganaremos si conseguimos sacar un número impar en el dado y una cara en la moneda.