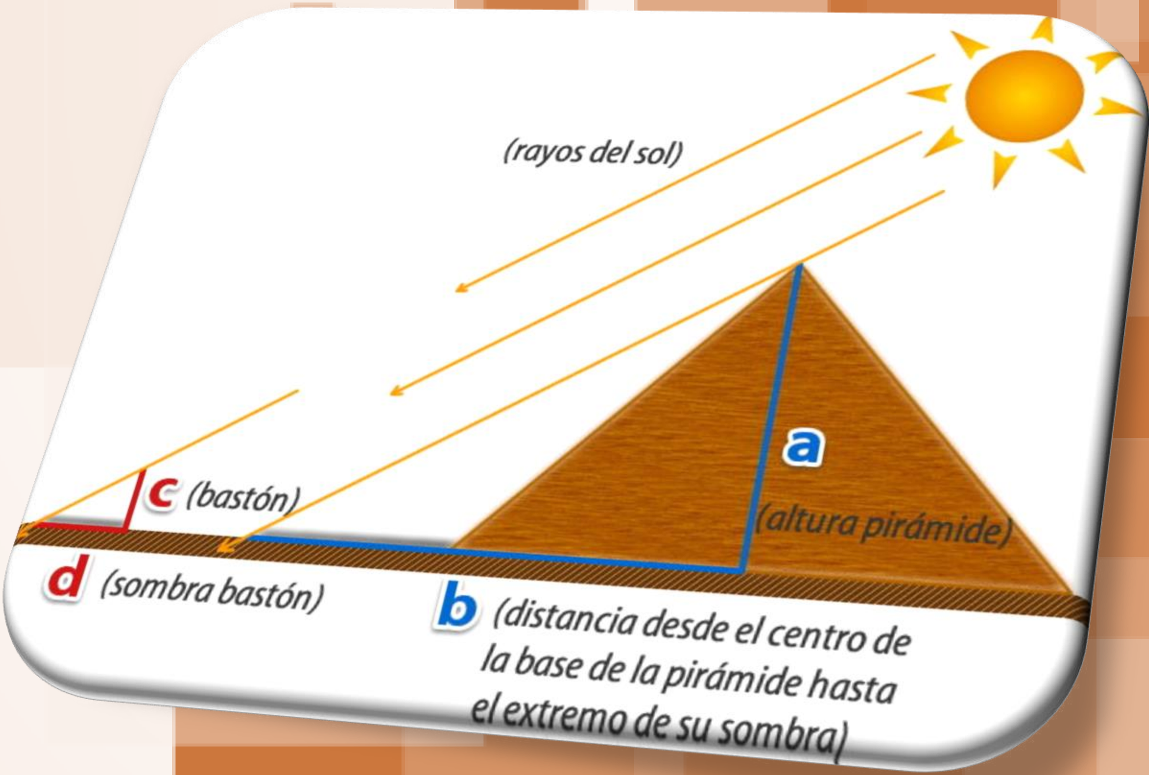
Unidad Didáctica 6

GEOMETRÍA del PLANO y del ESPACIO

4º ESO



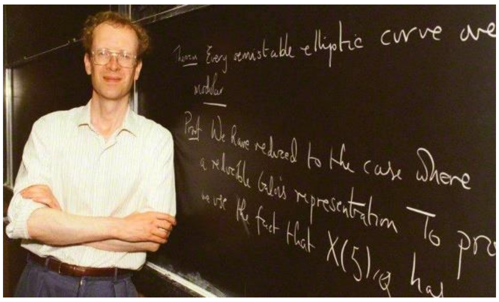
En esta unidad vas a:

1. Conocer y utilizar las fórmulas para calcular longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas.
2. Reconocer figuras semejantes, determinar y distinguir la razón de semejanza entre longitudes, áreas y volúmenes.
3. Conocer y aplicar el teorema de Tales para el cálculo de longitudes desconocidas.
4. Reconocer triángulos semejantes y aplicar la semejanza de triángulos a la resolución de problemas.
5. Determinar datos desconocidos de un triángulo a través de los teoremas de la altura y del cateto.
6. Manejar escalas para hacer representaciones de objetos reales y determinar medidas de forma indirecta.
7. Aplicar los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos asignando las unidades adecuadas.

SUMARIO

6.00.- Lectura Comprensiva

Un enigma sin solución durante 358 años



Hace 7 años, el 15 de marzo de 2016, se entregó el premio Abel, el premio Nobel de matemáticas, a **Andrew Wiles** por haber confirmado una conjetura matemática cuya validez no había podido ser demostrada desde que se propuso en 1642.

Esta conjetura nació de la mano del jurista y matemático **Pierre de Fermat** que, mientras leía su copia del libro '**Arithmetica**', un texto matemático escrito por **Diofanto de Alejandría** en el siglo III a.C., en sus márgenes iba anotando problemas y conjeturas que se le ocurrían sobre la marcha. En los siglos que se sucedieron tras su muerte (1665), otros matemáticos fueron abordando y solucionando cada uno de los problemas que Fermat había garabateado… Hasta que sólo quedó uno por resolver:

"No existe ningún número entero positivo mayor que 2 que satisfaga la ecuación $a^n + b^n = c^n$"

Donde "n" es dicho número, por supuesto. Esta conjetura fue bautizada con el nombre de "el último teorema de Fermat", precisamente porque era la última proposición de este autor que nadie había podido refutar o verificar.

En algún punto de nuestras vidas, todos hemos usado el **teorema de Pitágoras**, la fórmula que relaciona la longitud de los catetos de un triángulo con la longitud de su hipotenusa. Ese es precisamente el caso del teorema de Fermat cuando n=2. Pero, en este caso, la igualdad no tiene ningún misterio, porque sabemos que se cumple para una gran cantidad de combinaciones de números distintas.

Pero, ¿y si n=3? ¿Existe alguna combinación de números que, elevados al cubo, la suma de dos de ellos sea igual al cubo de un tercer número? ¿Y qué pasa con los infinitos exponentes mayores que 3? Pues, según Fermat, no existiría ninguna combinación de números que cumpla esta igualdad con cualquier número entero positivo superior a 2.

Pero no basta con decir las cosas para que se hagan realidad. Las proposiciones matemáticas se tienen que poner a prueba para demostrar su validez y, en el caso de Fermat, había que comprobar si es verdad que no existe ninguna combinación que cumpla su igualdad y que, por tanto, tenía razón, o si, por el contrario, sí que existe al menos una combinación que la cumple, lo que demostraría que su afirmación era falsa. Pero, aunque el concepto pueda parecer sencillo, comprobar si Fermat tenía o no razón no era una tarea fácil.

¿Cómo demostrar un teorema?

Básicamente, si quieres comprobar la validez de un teorema matemático de este estilo, tienes dos opciones:

1) Ir probando combinaciones de números hasta encontrar un ejemplo que lo contradiga, con lo que demostrarías con toda seguridad que la proposición de Fermat es falsa.

2) Demostrar usando la lógica matemática si, por el motivo que sea, la afirmación es verdadera o falsa.

A primera vista, podría parecer que el camino más sencillo sería encontrar un ejemplo que refute el teorema de Fermat. Pero hay tener en cuenta que, si el teorema resultara ser verdadero, entonces te pasarías toda la vida metiendo números en la fórmula sin encontrar nunca un ejemplo que lo contradijera.

También podría ocurrir que el teorema fuera incorrecto y que esa combinación de números que lo contradijera sí que existiera, pero que no llegaras a encontrarla nunca porque, al fin y al cabo, no sería más que una de las infinitas combinaciones que no llegarías a probar ni aunque pases toda tu vida computando posibles soluciones con el ordenador más potente que tengas a tu disposición.

Para rematarlo, si al final de tu vida no hubieras descubierto un contraejemplo, ni siquiera demostraría nada, ya que aún te faltarían un número infinito de números con los que probar suerte.

O sea que, teniendo en cuenta estas posibles complicaciones, no es de extrañar que los matemáticos prefieran tomar la segunda ruta.

Mejor usar la lógica

Y eso es precisamente lo que hizo **Andrew Wiles**. Nacido en 1953, Wiles se había encontrado por primera vez con el teorema de Fermat a los 10 años, cuando encontró un libro sobre éste en la librería mientras volvía del colegio. El teorema le fascinó porque, pese a ser tan simple que lo podía entender él mismo con 10 años, era tan complejo que nadie lo había resuelto en sus tres siglos de historia. Muchos matemáticos incluso sostenían que era imposible de resolver.

Wiles sabía que las habilidades matemáticas que tenía en ese momento no le servirían para resolver el teorema, de modo que lo olvidó hasta 1986.

El secreto para resolver este teorema estaba en la geometría, concretamente en la representación matemática de las curvas elípticas y en unas entidades matemáticas llamadas formas modulares, que son unas funciones muy simétricas y abstractas que existen en el plano de los números imaginaros (aquellos que incluyen la raíz cuadrada de –1).

El problema de las curvas modulares 'camufladas'

La cuestión es que, en 1955, dos matemáticos japoneses llamados **Yutaka Tamiyama** y **Goro Shimura** encontraron indicios de que, pese a lo distintas que resultan estas dos formas, todas las curvas elípticas eran en realidad formas modulares 'camufladas'. El problema a la hora de verificar o refutar esta conjetura es que existen infinitas curvas elípticas distintas, así que demostrar que cada una de las infinitas curvas elípticas posibles tiene asociada una forma modular parecía una tarea imposible.

Pero, en 1982, un matemático llamado **Gerhard Frey** propuso que una curva elíptica formada por una supuesta solución a la ecuación del teorema de Fermat, tendría esta forma...

$$y^2 = x\,(x-ap)\,(x+bp)$$

...y, en teoría, esta curva elíptica no debería tener una forma modular asociada.

Obviamente, tan sólo una de las dos conjeturas podía ser cierta: o todas las curvas elípticas tienen una forma modular asociada o existía una curva elíptica, la correspondiente a la ecuación del teorema de

Fermat, que no la tenía. Por tanto, descubrir qué proposición era correcta resolvería indirectamente el último teorema de Fermat: si se encontraba una manera de descubrir si cada una de las infinitas curvas elípticas posibles tiene asociada una forma modular, como Tamiyama y Shimura habían propuesto, no existiría ninguna curva elíptica correspondiente al teorema y, por tanto, se demostraría que el teorema de Fermat era cierto.

Siete años para comparar infinitas curvas

Y lo que hizo Andrew Wiles fue precisamente eso: desarrollar un método matemático que le permitiera comparar las infinitas curvas elípticas con un número infinito de formas modulares... Sin llegar a compararlas una por una, obviamente. Esta tarea le llevó nada menos que 7 años.

En 1993 presentó su demostración que, por supuesto, tenía que pasar primero por el proceso de revisión para comprobar que todo estaba en orden. Pero, en agosto de ese mismo año, se descubrió que su demostración tenía un error en uno de sus apartados. Podéis imaginar cómo le debió sentar la noticia al pobre Wiles.

Wiles pasó un año trabajando en el error y, por suerte, cuando creía que iba a tirar la toalla consiguió solventarlo. En septiembre de 1994 terminó su prueba definitiva por lo que recibió el premio Abel de matemáticas, galardonado con 700.000$.

Fermat: un genio o un 'troll'

Conociendo el esfuerzo y la complejidad de las herramientas matemáticas que han hecho falta demostrar la conjetura de Fermat, tiene aún más cachondeo saber que, en el margen en el que Fermat apuntó su último teorema, también había escrito: "he descubierto una demostración realmente maravillosa de esto, que este margen es demasiado estrecho para contener".

No se sabe si realmente Fermat había encontrado una solución muy sencilla y elegante a su teorema, en el que planteaba que no existía ningún exponente mayor que 2 para el que la igualdad se cumpliera. Sí que ha llegado hasta nuestros días su prueba para el caso concreto de n=4, pero de ahí a que hubiera conseguido demostrar que el teorema no se cumplía para los infinitos valores superiores a 2, hay un buen rato. De hecho, Fermat nunca más volvió a escribir sobre esa supuesta prueba tan maravillosa durante los 30 años siguientes antes de su fallecimiento.

Relatos relativos por Jordi Pereyra. El Confidencial. 13 de marzo de 2016.

Lee nuevamente el texto anterior y responde a las siguientes preguntas:

1.- ¿De qué trata el texto?

2.- ¿Qué te parece el artículo?

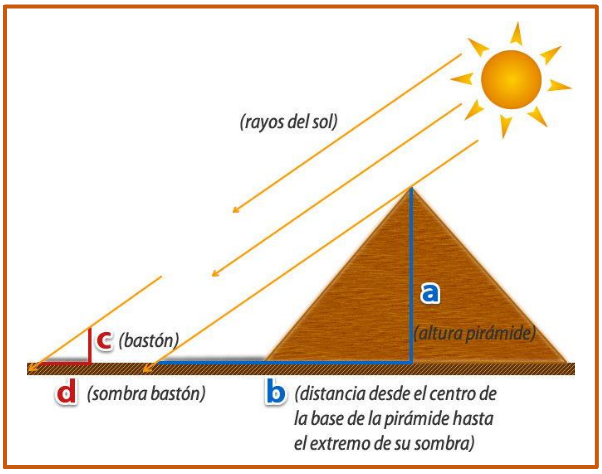
3.- ¿Serías capaz de pasar 7 años de tu vida intentando demostrar un teorema?

4.- ¿Crees que Fermat realmente consiguió demostrarlo?

6.01.- Introducción

Para analizar los orígenes de la semejanza tenemos que remontarnos al periodo 1900-1600 a.C, periodo de esplendor del Imperio Babilónico. Esta civilización alcanzó grandes logros en álgebra pero también en geometría. Los avances más notables en geometría, que precedían el trabajo de los griegos, se produjeron en dos áreas en las que podían conjugar sus conocimientos algebraicos: trabajos sobre el teorema de Pitágoras y sobre los triángulos semejantes.

El estudio de la geometría se origina por las necesidades prácticas de sus pobladores, como la medida de la tierra destinada a la agricultura, construcción de sistemas de drenaje para contrarrestar las inundaciones (babilonios y mesopotámicos), así como, edificios y monumentos emblemáticos, por ejemplo, las pirámides de Keops (egipcios), entre otras. La medida de la tierra de cultivo y las construcciones mencionadas muestran que las culturas antiguas tenían conocimientos sólidos de figuras geométricas. A esta geometría se le conoce como geometría empírica (práctica), por surgir como necesidades cotidianas de las culturas mencionadas. Esta geometría fue retomada por los griegos dándole una orientación de geometría deductiva, basada en una cadena de razonamientos lógicos sustentados por definiciones de objetos geométricos, postulados, axiomas y teoremas.



El primero de los geómetras griegos que desarrolló la geometría con una orientación deductiva fue **Thales de Mileto** y debido a sus aportaciones filosóficas, científicas y matemáticas, lo consideraron como uno de los siete sabios de la antigüedad.

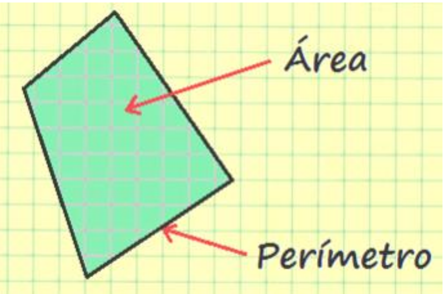
Según la leyenda, Tales descubrió este teorema mientras intentaba calcular la altura de una pirámide. Para ello, el matemático calculó la sombra de la pirámide en el suelo y, con la ayuda de un palo, también la sombra del palo. Así es cómo pudo haber calculado las dimensiones de la pirámide de Egipto. Sin embargo, este teorema ya era conocido por los babilonios y los egipcios. Lo sabemos gracias a una demostración elaborada en el libro Elementos de Euclides sobre la proporcionalidad de áreas de triángulos de igual altura. Sin embargo, Tales se encargó de dar forma en palabras al conocimiento de estos.

El segundo geómetra que realizó aportaciones relevantes al desarrollo de la ciencia fue **Pitágoras,** discípulo de Thales, cuyo teorema hizo avanzar enormemente a la geometría plana.

Aunado a los trabajos realizados por lo geómetras griegos mencionados, se encuentra la aportación del tercer del geómetra griego **Euclides** con el desarrollo de su obra Los Elementos en una colección de 13 tomos, de éstos los seis primeros están dedicados a la geometría deductiva.

6.02.- Perímetros y áreas de figuras planas

Definimos como **figura plana** a cualquier forma que posea dos dimensiones: **longitud y anchura.**

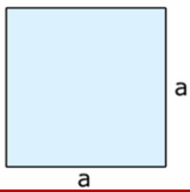


Llamamos **perímetro** a la línea o conjunto de líneas que forman el contorno de una superficie o figura. El **perímetro** de un polígono es igual a la suma de las longitudes de sus lados.

Mientras que el **área** es la medida de la superficie que ocupa dicha figura. El cálculo del área se realiza de forma indirecta, es decir, hay que recurrir a diferentes fórmulas matemáticas para conocerla.

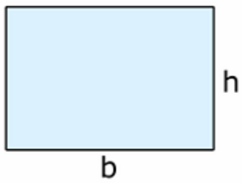
ÁREAS Y PERÍMETROS DE FIGURAS PLANAS

Cuadrado



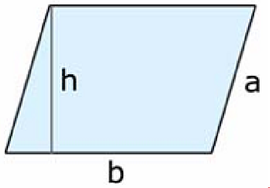
$P=4\cdot a$ | $A=a^2$

Rectángulo



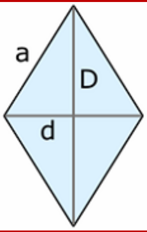
$P=2\cdot(b+h)$ | $A=b\cdot h$

Paralelogramo



$P=2\cdot(a+b)$ | $A=b\cdot h$

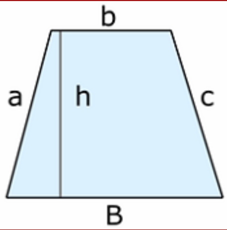
Rombo



$$P=4\cdot a=4\cdot\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2+\left(\frac{D}{2}\right)^2}$$

$$A=\frac{D\cdot d}{2}$$

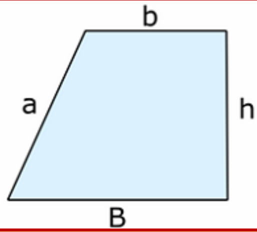
Trapecio



$$P=a+B+c+b$$

$$A=\frac{B+b}{2}\cdot h$$

Trapecio Recto

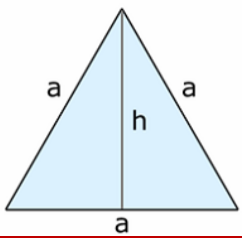


$$P=a+B+h+b$$

$$P=B+b+h+\sqrt{(B-b)^2+h^2}$$

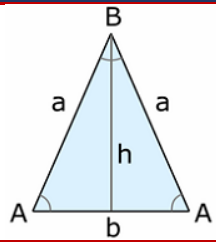
$$A=\frac{B+b}{2}\cdot h$$

Triángulo Equilátero



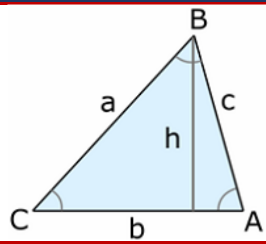
$P=3\cdot a$ | $A=\frac{a\cdot h}{2}$

Triángulo Isósceles



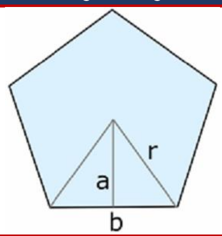
$P=2\cdot a+b$ | $A=\frac{b\cdot h}{2}$

Triángulo Escaleno



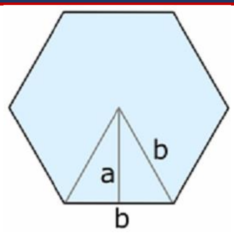
$P=a+b+c$ | $A=\frac{b\cdot h}{2}$

Pentágono Regular



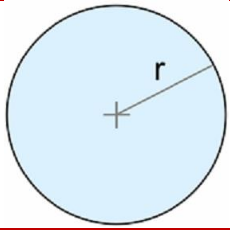
$P=5\cdot b$ | $A=\frac{P\cdot a}{2}$

Hexágono Regular



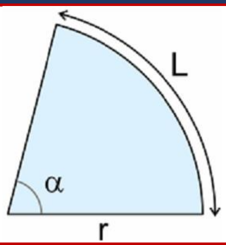
$P=6\cdot b$ | $A=\frac{P\cdot a}{2}$

Círculo



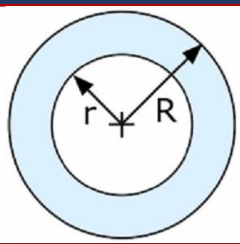
$P=2\cdot\pi\cdot r$ | $A=\pi\cdot r^2$

Sector Circular



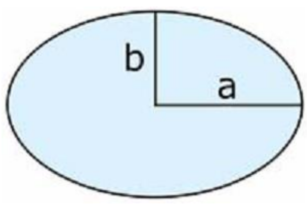
$L=\pi\cdot r\cdot\frac{\alpha}{180}$ | $A=\pi\cdot r^2\cdot\frac{\alpha}{360}$

Corona Circular



$P=2\pi(R+r)$ | $A=\pi(R^2-r^2)$

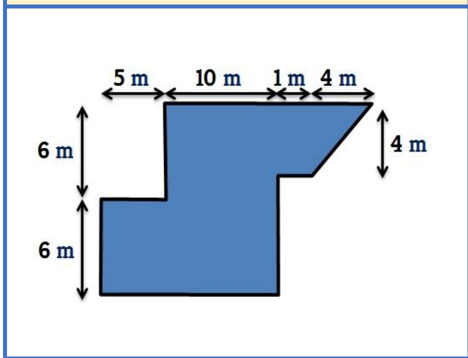
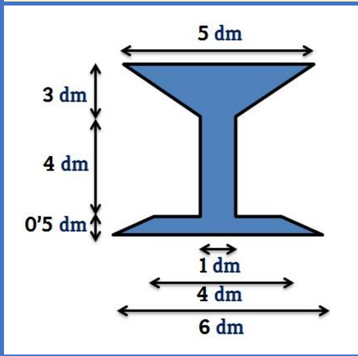
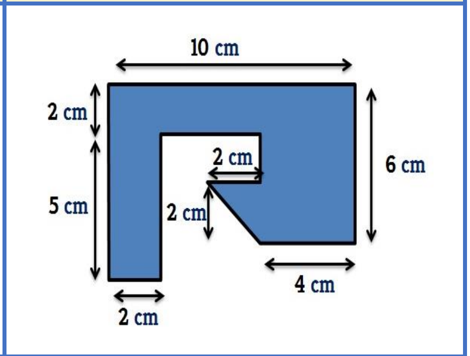
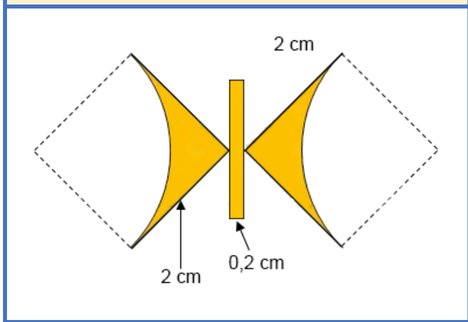
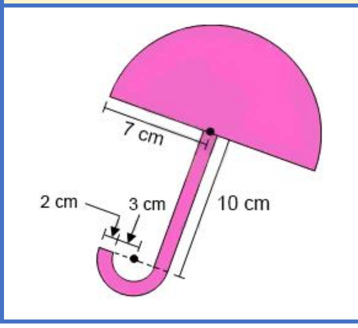
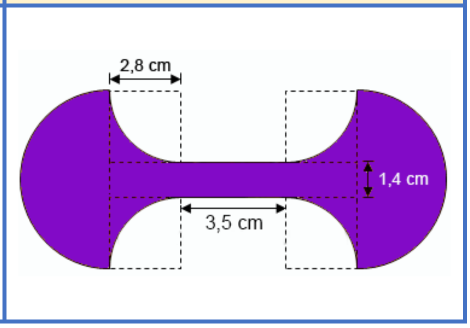
Elipse



$P=\pi(a+b)$ | $A=\pi\cdot a\cdot b$

Piensa y practica

1.- Calcula el perímetro y el área de estas figuras de forma exacta y de forma aproximada a los centímetros:

a)	b)	c)
		
d)	**e)**	**f)**
		

6.03.- Áreas de cuerpos geométricos

Los **cuerpos geométricos** son figuras tridimensionales con **anchura, altura y profundidad** tales como los poliedros, prismas, icosaedros, esferas que podemos clasificar en:

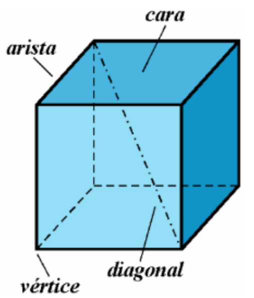
CUERPOS GEOMÉTRICOS

- **POLIEDROS** (cuerpos con caras planas)
  - POLIEDROS REGULARES
  - PRISMAS
  - PIRÁMIDES
- **CUERPOS REDONDOS** (cuerpos con caras curvas)
  - CILINDROS
  - CONOS
  - ESFERAS
  - CUERPOS ESFÉRICOS

6.3.1.- Poliedros

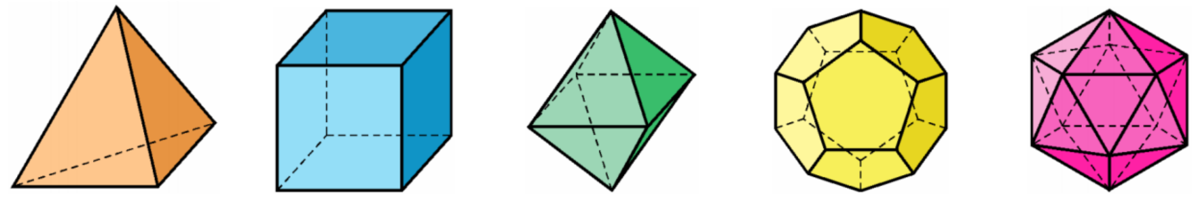
Llamamos **poliedro** a un cuerpo geométrico que está limitado por cuatro o más polígonos.

Los principales elementos de un poliedro son:



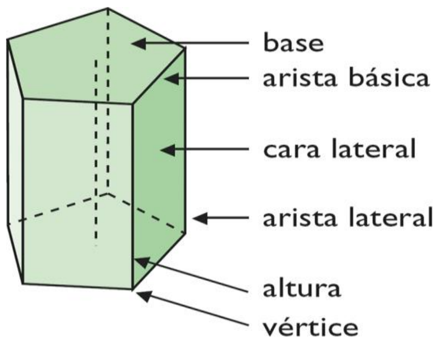
- Caras o polígonos que lo limitan.
- Aristas o lados de las caras.
- Vértices o puntos de corte de las aristas.
- Diagonales o segmentos que unen dos vértices de distintas caras.

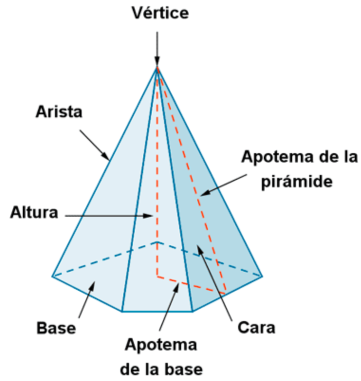
Los **poliedros regulares** son aquellos cuyas caras son polígonos regulares iguales y en cada vértice concurren el mismo número de caras. Sólo existen cinco poliedros regulares:



Tetraedro	*Hexaedro o cubo*	*Octaedro*	*Dodecaedro*	*Icosaedro*
4 caras	6 caras	8 caras	12 caras	20 caras
triángulos equiláteros	cuadrados	triángulos equiláteros	pentágonos	triángulos equiláteros

6.3.2.- Área de prismas y pirámides



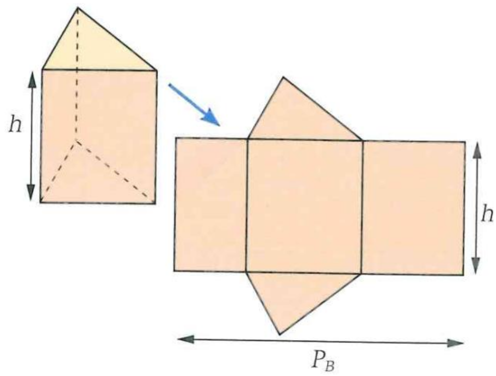


Prisma Regular

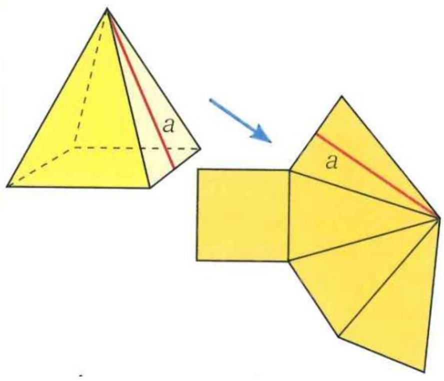
Un **prisma** es un poliedro que tiene dos caras que son polígonos iguales y paralelos entre sí (**bases**), y el resto de las caras (**Caras laterales**) son paralelogramos. La **altura** del prisma es la distancia entre sus bases.

Pirámide Regular

Una **pirámide** es un poliedro que tiene por base un polígono y sus caras laterales son triángulos con un vértice común, llamado **vértice de la pirámide**. La **altura** de la pirámide es la distancia de la base a dicho vértice. Se llama **apotema** a la altura de sus caras laterales.



$$Área = A_{Lateral} + 2 \cdot A_{Base} = P_{Base} \cdot h + 2 \cdot A_{Base}$$



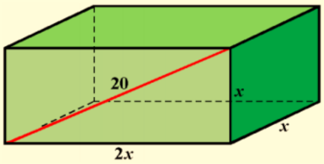
$$Área = A_{Lateral} + A_{Base} = \frac{P_{Base} \cdot a}{2} + A_{Base}$$

Aunque en todos los cuerpos geométricos el área total viene dada por **la suma de las áreas de las bases más las áreas laterales**, en el apartado siguiente, veremos una tabla con todas las fórmulas de las áreas de los cuerpos geométricos más importantes junto con la medida de sus volúmenes.

Ejemplo

1.- Una caja de galletas (con tapa) con forma de paralelepípedo mide lo mismo de largo que de alto y su ancho es doble que el largo. Si la diagonal de una de sus caras más grandes mide 20 cm, encuentra la cantidad de cartón necesaria para su construcción.

Si llamamos x al largo o al alto de la caja, su ancho será 2x:



Para poder calcular el área lateral del paralelepípedo, hemos de aplicar el Teorema de Pitágoras para poder conocer el valor de x:

$$(2x)^2 + x^2 = 20^2 \quad \rightarrow \quad 5x^2 = 400 \quad \rightarrow \quad x^2 = 80 \quad \rightarrow \quad x = 4\sqrt{5}\ cm$$

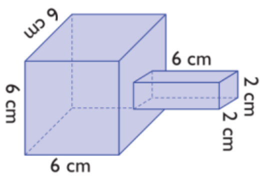
Con esto, ya podemos calcular el área lateral y el área de las bases:

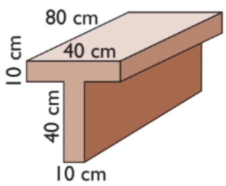
$$\left.\begin{array}{l} A_{Lateral} = 2(2x^2) + 2x^2 = 6x^2 \quad \rightarrow \quad A_{Lateral} = 6\left(4\sqrt{5}\right)^2 = 6 \cdot 80 = 480\ cm^2 \\ A_{Bases} = 2(2x^2) = 4x^2 \quad \rightarrow \quad A_{Bases} = 4\left(4\sqrt{5}\right)^2 = 4 \cdot 80 = 320\ cm^2 \end{array}\right\} \rightarrow \quad A_{Total} = 480 + 320 = 800 cm^2$$

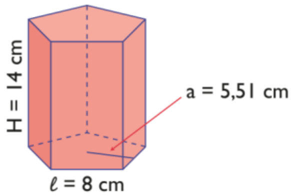
Por tanto, necesitamos 800 cm² de cartón para construir la caja de galletas.

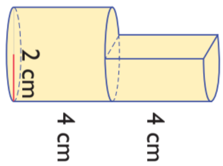
Piensa y practica

2.- Calcula el área total de estas figuras:



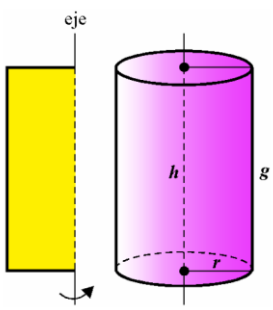
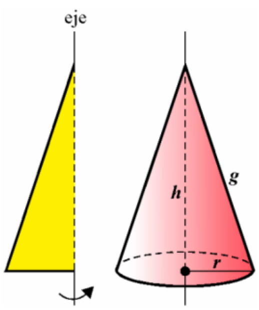
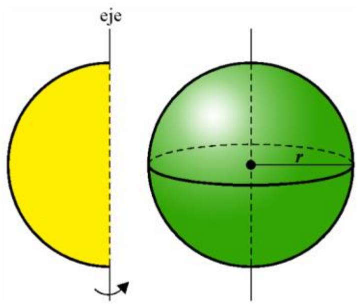


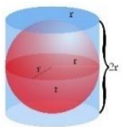




6.3.3.- Área de Cuerpos de Revolución

Los cuerpos de revolución se obtienen al girar una figura plana alrededor de un eje. Los tres cuerpos de revolución más sencillos son el cilindro, el cono y la esfera.

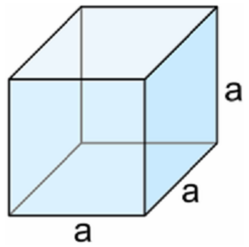
Cilindro	Cono	Esfera
El cilindro es el cuerpo geométrico que se obtiene al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados.	El cono es el cuerpo geométrico que se obtiene al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.	La esfera es el cuerpo geométrico que se obtiene al girar un semicírculo alrededor de su diámetro.
		



El área de una esfera es igual que el área del cilindro que la contiene, ajustándose completamente a ella.

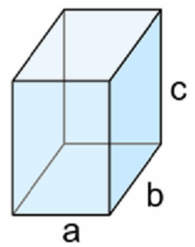
ÁREAS Y VOLÚMENES DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

Cubo



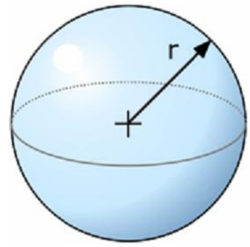
$A_{Lat} = 6a^2$ | $V = a^3$

Ortoedro



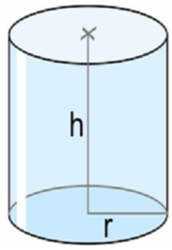
$A_{Lat} = 2(a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c)$ | $V = a \cdot b \cdot c$

Esfera



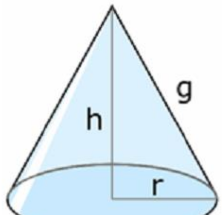
$A_{Lat} = 4 \cdot \pi \cdot r^2$ | $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

Cilindro



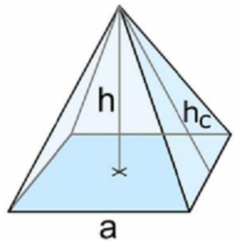
$$A_{Lat} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$
$$A_{Total} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (r + h)$$
$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Cono



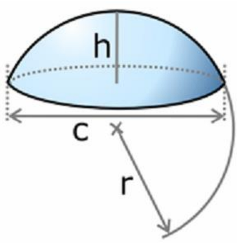
$$A_{Lat} = \pi \cdot r \cdot g \qquad g = \sqrt{h^2 + r^2}$$
$$A_{Total} = \pi \cdot r \cdot (r + g)$$
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$$

Pirámide



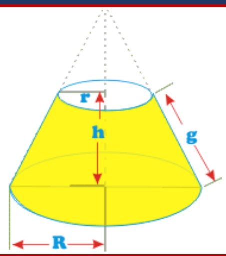
$$A_{Lat} = \frac{Perímetro_{Base} \cdot h_c}{2}$$
$$A_{Total} = A_{lat} + A_{Base}$$
$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h$$

Casquete



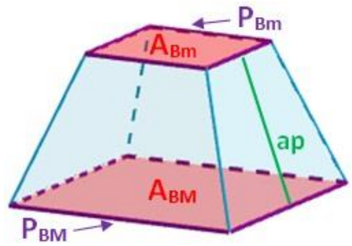
$$A_{Lat} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = \frac{\pi}{4}(c^2 + 4h^2)$$
$$A_{Base} = \frac{\pi \cdot c^2}{4} \qquad r = \frac{h}{2} + \frac{c^2}{8h}$$
$$V = \pi \cdot h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right) = \frac{\pi}{6} \cdot h \left(\frac{3c^2}{4} + h^2\right)$$

Tronco de cono



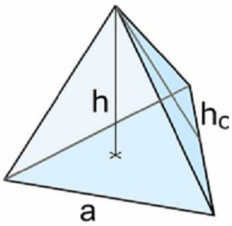
$$A_{Lat} = \pi \cdot (R + r) \cdot g$$
$$A_{Total} = \pi \cdot \left[(R + r) \cdot g + R^2 + r^2\right]$$
$$V = \frac{\pi \cdot h (R^2 + r^2 + R \cdot r)}{3}$$

Tronco de pirámide



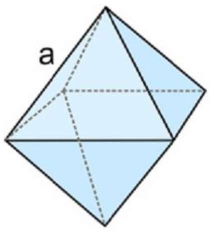
$$A_{Lat} = \frac{(P_{BM} + P_{Bm}) \cdot ap}{2}$$
$$A_{Tot} = \frac{(P_{BM} + P_{Bm}) \cdot ap}{2} + A_{BM} + A_{Bm}$$
$$V = \frac{h\left(A_{BM} + A_{Bm} + \sqrt{A_{BM} \cdot A_{Bm}}\right)}{3}$$

Tetraedro



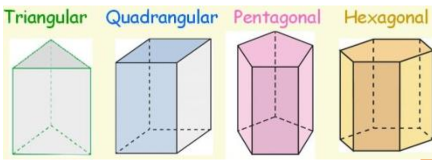
$A = \sqrt{3} \cdot a^2$ | $V = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot a^3$

Octaedro



$A = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot a^2$ | $V = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot a^3$

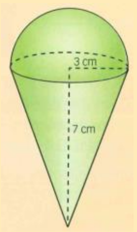
Prismas Rectos



$A = 2A_{base} + n \cdot A_{lat}$ | $V = A_{base} \cdot h$

Ejemplo

2.- Calcula el área de la siguiente figura:



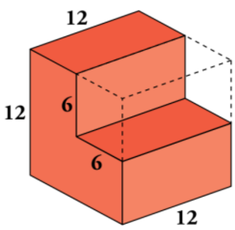
La figura está formada por un cono y una semi esfera, así que para calcular su área, calcularemos el área lateral del cono, y el área de una semiesfera:

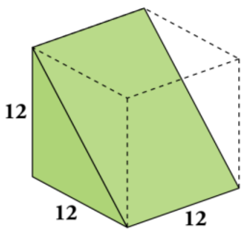
$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{Lateral de lcono}} = \pi \cdot r \cdot g = 3\cdot\pi\cdot\sqrt{3^2+7^2} = 3\pi\sqrt{58}\ cm^2 \\ A_{\text{Semi Esfera}} = \frac{2}{3}\cdot\pi\cdot r^3 = \frac{2}{3}\cdot\pi\cdot 3^3 = \frac{2}{3}\cdot\pi\cdot 27 = 18\pi\ cm^2 \end{array}\right\} \rightarrow A_{Total} = 3\pi\sqrt{58} + 18\pi = 128{,}33\ cm^2$$

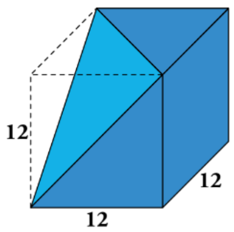
Por tanto, el área de la figura es de casi 130 cm².

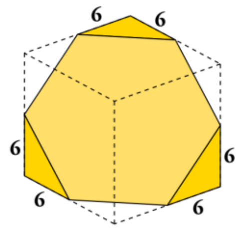
Piensa y practica

3.- Calcula el área de estos poliedros obtenidos a partir de un cubo de 12 cm de arista: Sol: a) 792; b) 636; c) 773; d) 619









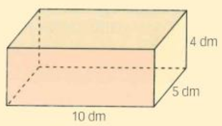
6.04.- Volúmenes de Cuerpos geométricos

El volumen de un cuerpo es la cantidad de espacio que encierra su superficie. Para calcularlo nos ayudaremos de las fórmulas vistas con en la página anterior.

Ejemplo

3.- Calcula el volumen del cofre del tesoro de dimensiones 4 dm de alto, 10 dm de largo y 5 dm de ancho y cuya tapadera tiene una altura de 2,5 dm.

La figura está formada por un ortoedro y medio cilindro, así que calcularemos el volumen de cada un por separado y los sumaremos:



Ortoedro

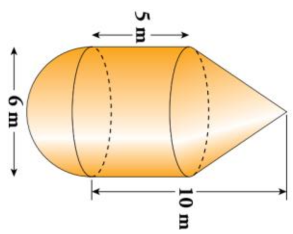
Cilindro

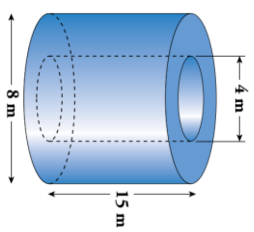
$$\left.\begin{array}{l} V_{Ortoedro} = A_{baso}\cdot h = 10\cdot 5\cdot 4 = 200\ dm^3 \\ V_{\text{Semi Cilindro}} = \frac{\pi\cdot R^2\cdot h}{2} = \frac{\pi\cdot 2{,}5^2\cdot 10}{3} = 98{,}17 dm^3 \end{array}\right\} \rightarrow V_{Total} = 200 + 98{,}17 = 298{,}17\ dm^3$$

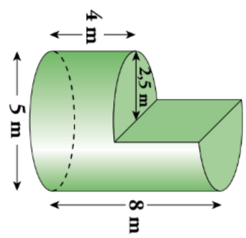
Por tanto, el volumen del cofre es de casi 300 dm³.

Piensa y practica

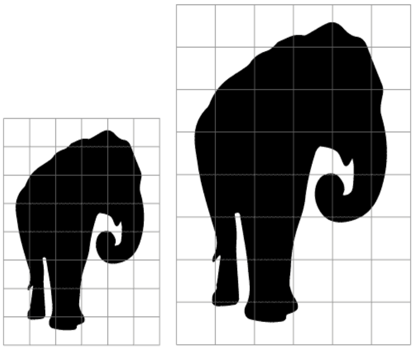
4.- Calcula el área y el volumen de los cuerpos: Sol: a) A=205,74; V=207,35; b) A=648,9; V=565,5; c) A=71,05; V=117,8







6.05.- Figuras semejantes



Como podemos ver, los dos elefantes de la izquierda son iguales, salvo en el tamaño. Los dos tienen la misma forma, por tanto, decimos que **son semejantes.**

Dos **figuras distintas son semejantes** cuando solo difieren en su tamaño. En tal caso, los segmentos correspondientes son proporcionales. Es decir, cada longitud en una de ellas se obtiene multiplicando la longitud correspondiente en la otra por un número fijo, llamado **razón de semejanza, k.**

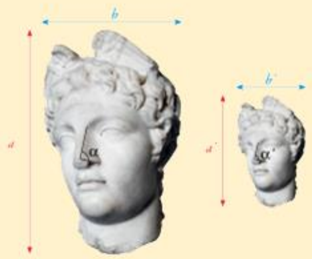
En dos figuras semejantes se cumple que:

- Un ángulo medido en la primera **es igual** al ángulo correspondiente en la segunda.
- Una proporción en la primera **es igual a** la proporción correspondiente en la segunda.

Dos figuras son semejantes si las longitudes de sus lados son proporcionales y sus ángulos son iguales.

Ejemplo

4.- Razona si las figuras siguientes son semejantes



En estas dos cabezas:

- Los ángulos trazados en la nariz, α y α' son iguales.
- La razón, a/b, entre el largo y el ancho de la primera figura es la misma que la razón a'/b' en la segunda:

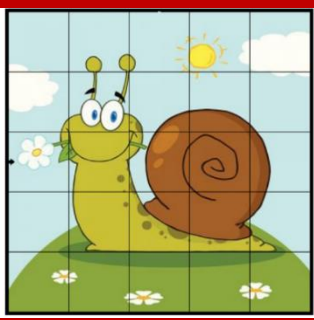
$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=k$$

5.- Si la razón de semejanza entre las dos cabezas es 0,4 y la mayor mide b=3 cm de ancho y a=5 cm de alto, ¿Cuáles son las dimensiones de la cabeza pequeña?

$$\frac{a'}{5}=0{,}4 \quad\rightarrow\quad a'=5\cdot 0{,}4=2\ cm \qquad\qquad \frac{b'}{3}=0{,}4 \quad\rightarrow\quad b'=3\cdot 0{,}4=1{,}2\ cm$$

Por tanto, la cabeza pequeña mide 2 cm de alto por 1,2 cm de ancho

Gracias a la **constante de proporcionalidad** podemos comprender como funciona una fotocopiadora a la hora de ampliar o reducir una imagen, simplemente multiplica por la constante de proporcionalidad.

Reducción	Original	Ampliación
		
Dimensiones 1 x 1 cm	Dimensiones 2 x 2 cm	Dimensiones 4 x 4 cm
Reducción : $k=\frac{1}{2}=0{,}5$		Ampliación : $k=\frac{4}{2}=2$

Piensa y practica

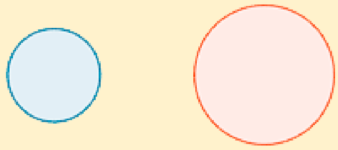
5.- Dos cuadrados semejantes tienen una razón de semejanza de 0,8. El área del menor es de 16 cm^2. ¿Cuál es el lado del cuadrado mayor? Sol: 5 cm

6.5.1.- Relación entre las áreas y los volúmenes de dos figuras semejantes

- Si la **razón de semejanza** de dos figuras es **k**, entonces la **razón de sus áreas** es k^2.

Ejemplo

5.- Si el radio del círculo rojo (grande) es 1,5 veces el del azul (pequeño), calcula cuantas veces el área del grande será el área del pequeño:



Según lo que acabamos de ver, la razón entre las áreas de dos figuras, de las que conocemos su razón de semejanza, viene dada por k^2.

Por tanto, el área de la grande será $(1,5)^2=2,25$ veces la de la pequeña.

Vamos a comprobarlo calculando sus respectivas áreas:

$$A=\pi\cdot R^2 \quad \rightarrow \quad A=\pi\cdot(1,5\cdot R)^2=2,25\cdot\pi\cdot R^2=2,25\pi\cdot R^2=2,25A$$

- Si la **razón de semejanza** de dos cuerpos es **k**, entonces la **razón de sus volúmenes** es k^3.

Ejemplo

6.- El radio del balón de baloncesto talla 7 (oficial masculino) es 1,05 veces el radio del balón de talla 6 (oficial femenino). ¿Cuántas veces mayor será su volumen?

Según lo que acabamos de ver, la razón entre los volúmenes de dos cuerpos, de los que conocemos su razón de semejanza, viene dada por k^3.

Por tanto, el volumen de la grande será $(1,05)^3=1,158$ veces el de la pequeña.

Vamos a comprobarlo calculando sus respectivos volúmenes:

$$V_6=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3 \qquad V_7=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot(1,05\cdot R)^3=1,158\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3\right)=1,158\cdot V_6$$

6.06.- Escalas

Los dibujos, fotografías, planos, mapas o maquetas representan objetos, personas, edificios, superficies, distancias...

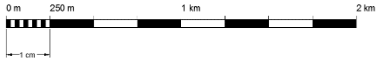
Para que la representación sea perfecta, deben guardar en todos sus elementos una misma razón de proporcionalidad que denominamos **escala**.

Cuando alguien quiere comprar una casa, la estudia cuidadosamente con la ayuda de un plano.

El plano de una casa es **(debe ser)** una imagen fiel de la realidad. Tiene la misma distribución y la misma forma que la casa real, pero sus dimensiones están reducidas según una escala. Es decir, la planta de la casa y el plano son figuras semejantes.

Por eso mismo, un mapa es una figura semejante a la porción del territorio que representa, así que, cuando consultamos un plano o un mapa, cuando contemplamos una fotografía, lo hacemos sabiendo que son figuras semejantes a la realidad que representan.

La **escala** es una razón de proporcionalidad entre la medida representada y la medida real, expresadas en una misma unidad de medida. Las escalas se pueden expresar de 3 formas:

Escala Numéríca	Escala unidad por unidad	Escala Gráfica
$1:500$	$1\ cm : 5\ km$	
Expresa la relación entre el valor de la representación y el valor real.	*Expresa la igualdad de una longitud en la representación y en la realidad.*	*Muestra la relación entre la longitud de la representación y la de la realidad.*

Ejemplo

7.- En un mapa de Andalucía, la distancia entre Sevilla y Granada es de 6 cm, si la escala es 1:4.000.000, ¿a qué distancia real están ambas ciudades?

La escala 1:4.000.000 quiere decir que lo que mide 1 unidad de longitud (u.l.) en el mapa mide en realidad 4.000.000 unidades de longitud, por tanto, para calcular la distancia entre ambas ciudades multiplicaremos y cambiaremos de unidad:

$$d = 6cm\cdot 4.000.000 = 6\cdot 4\cdot 10^6\ cm = 2,4\cdot 10^7\ cm = 2,4\cdot 10^7\ \cancel{cm}\cdot\frac{1km}{10^5\ \cancel{cm}} =$$

$$\rightarrow \quad = 2,4\cdot 10^2\ km = 240\ km$$

La distancia entre Granada y Sevilla es de 240 Km.

Piensa y practica

6.- Si la distancia entre Huelva y Almería es de 510 km, ¿Cuál será la distancia en el plano del ejemplo anterior donde la escala era 1:4.000.000? Sol: 12,75 cm

7.- En un mapa, de escala 1:250 000, la distancia entre dos pueblos es de 1,3 cm. a) ¿Cuál es la distancia real entre ambos pueblos? b) ¿Cuál sería la distancia en ese mapa, entre otros dos pueblos que en la realidad distan 15 km? Sol: a) 3,25 km. b) 6 cm

8.- Un arquitecto ha hecho una maqueta a escala 1:100 de un edificio destinado a oficinas, con forma de cubo cuya arista mide 70 m. Calcula la superficie de la planta y el volumen que el edificio tendrá en la maqueta. Sol: a) 0,49 m 2 b) 0,343 m^3

6.6.1.- Obtención de la Escala

Cuando nos den un plano, mapa o maqueta sin indicarnos su escala, podremos calcularla siempre y cuando conozcamos la distancia real entre dos de sus puntos.

Para ello dividiremos la distancia en el plano, entre la distancia real, pero eso sí, sin olvidarnos de ponerlas en las mismas unidades (no podemos dividir centímetros entre kilómetros).

$$Escala = \frac{Medida\ en\ plano\ (cm)}{Medida\ real\ (cm)}$$

Ejemplo

8.- Un avión viaja, en línea recta, entre la isla del Hierro (Canarias) y la isla de Ibiza (Baleares). Si en un plano la distancia entre ambas islas es de 20 cm, ¿Cuál sería la escala de dicho plano si la distancia real es de 2.200 km?

La escala 1:4.000.000 quiere decir que lo que mide 1 unidad de longitud (u.l.) en el mapa mide en realidad 4.000.000 unidades de longitud, por tanto, para calcular la distancia entre ambas ciudades multiplicaremos y cambiaremos de unidad:

$$\frac{Medida\ en\ plano\ (cm)}{Medida\ real\ (cm)} = \frac{20\ cm}{2200\ \cancel{km}\cdot\frac{1000\ \cancel{m}}{1\ \cancel{km}}\cdot\frac{10cm}{1\ \cancel{m}}} = \frac{20\ \cancel{cm}}{22.000.000\ \cancel{cm}} = \frac{1}{1.100.000}$$

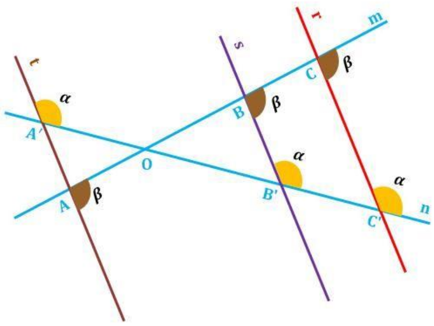
La distancia entre Granada u Sevilla es de 240 Km.

Piensa y practica

9.- Completa la tabla con los datos que faltan:

Plano o dibujo	Medida Real	Escala
1,4 cm	700 m	
7 dam	0,7 hm	
4 mm	20 km	
5 cm		1:500.000
	35 km	1: 700.000

6.07.- Teorema de Tales



Cuando dos rectas secantes **m** y **n** son cortadas por una serie de rectas paralelas **r**, **s**, **t**..., los segmentos que se forman en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes formados en la otra, incluido el punto de intersección O.

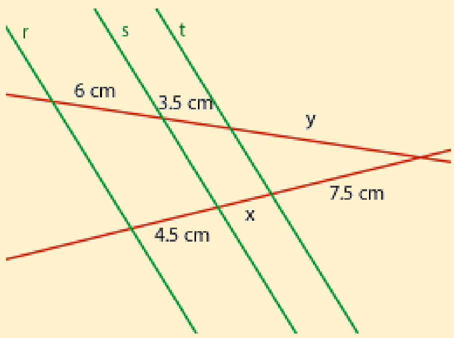
Matemáticamente:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}=\frac{AC}{A'C'}=r$$

Donde r es la razón de proporcionalidad.

Ejemplo

9.- Con la ayuda del Teorema de Tales, calcula el valor de x e y en la siguiente figura:



Según el teorema de Tales, los segmentos que determinan las rectas r, s y t son proporcionales, por tanto, para calcular x:

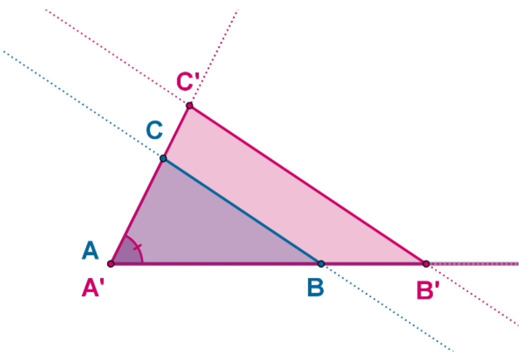
$$\frac{6}{4,5}=\frac{3,5}{x} \rightarrow 6x=3,5\cdot 4,5 \rightarrow x=\frac{3,5\cdot 4,5}{6}=2,625\ cm$$

Para calcular y:

$$\frac{6}{4,5}=\frac{y}{7,5} \rightarrow 4,5y=6\cdot 7,5 \rightarrow y=\frac{6\cdot 7,5}{4,5}=10$$

Por tanto, el segmento x mide 2,625 cm y el segmento y 10 cm

Decimos que **dos triángulos están en posición Tales** cuando dos de sus lados están sobre las mismas rectas y los otros dos lados son paralelos.



Por tanto, aquí también podemos aplicar Thales:

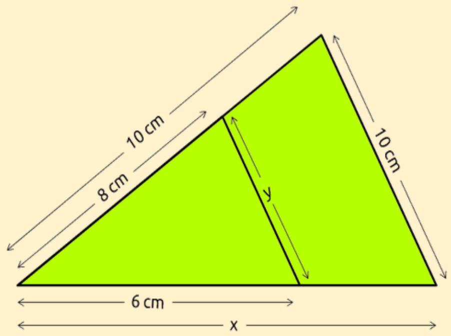
$$\frac{AC}{A'C'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{CB}{C'B'} \quad y \quad \frac{AC}{AB}=\frac{A'C'}{A'B'}$$

En el dibujo de la izquierda, vemos que el lado AC del triángulo azul y el lado A'C' del triángulo rosa están sobre la misma recta, al igual que los lados AB y A'B', mientras que los lados CB y C'B' están sobre rectas paralelas.

Los triángulos ABC y A'B'C' tienen un ángulo común, el Â. Es decir, el triángulo pequeño (ABC) está **"encajado"** en el grande (A'B'C'). Además, los lados opuestos a Â, los segmentos BC y B'C', son paralelos. Es por eso que decimos que estos dos triángulos **están en posición Tales**.

Ejemplo

10.- Calcula los valores de x e y en la siguiente figura:



Como podemos observar, se trata de dos triángulos en posición Tales ya que coinciden en un vértice y dos de sus lados son paralelos. Así que, sus lados son proporcionales y para calcular **x** haremos lo siguiente:

$$\frac{8}{10}=\frac{6}{x} \rightarrow 8x=6\cdot 10 \rightarrow x=\frac{60}{8}=7{,}5\ cm$$

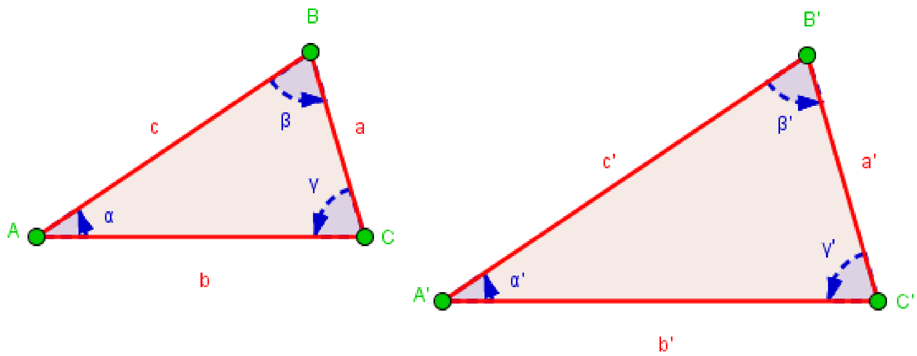
Y para calcular **y** haremos de forma similar:

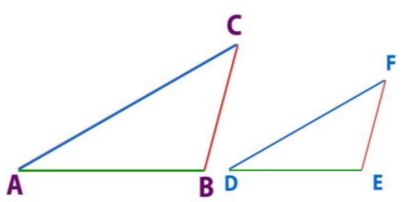
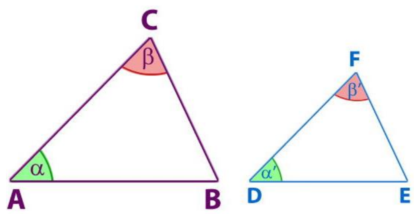
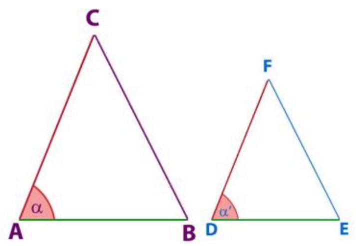
$$\frac{8}{y}=\frac{10}{10} \rightarrow 10y=8\cdot 10 \rightarrow y=\frac{80}{10}=8\ cm$$

Por tanto, x=7,5 cm e y=8 cm.

6.08.- Semejanza de Triángulos. Aplicaciones

Dos triángulos son **semejantes** si tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño, es decir, si sus ángulos son iguales y sus lados son proporcionales.

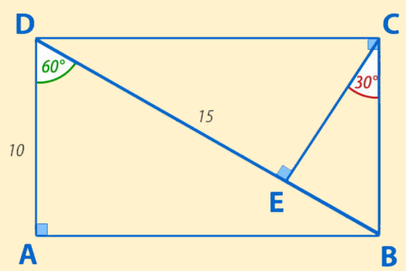


CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS		
Decimos que **dos triángulos son semejantes** entre sí:		
Si tienen los tres lados proporcionales.	Si tienen dos ángulos iguales	Si tienen dos lados proporcionales y un mismo ángulo
Criterio I	**Criterio II**	**Criterio III**
		
Sí, $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}$ *Entonces,* $\triangle ABC \sim \triangle DEF$	*Sí,* $\measuredangle\alpha \cong \measuredangle\alpha'$ *y,* $\measuredangle\beta \cong \measuredangle\beta'$ *Entonces,* $\triangle ABC \sim \triangle DEF$	*Sí,* $\frac{AC}{DF}=\frac{AB}{DE}$ *y,* $\measuredangle\alpha \cong \measuredangle\alpha'$ *Entonces,* $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

Otra forma de enunciar el Teorema de Tales sería decir que: **Toda paralela a un lado de un triángulo, que corta a los otros dos lados, determina un triángulo pequeño ABC semejante al grande A'B'C'**, o lo que es lo mismo, todos los triángulos en posición tales son semejantes.

Ejemplo

11.- En el rectángulo siguiente, ¿son semejantes los triángulos ABD y EDC? ¿hay alguno más que también lo sea?



Si nos fijamos, dentro del rectángulo ABCD tenemos 4 triángulos, el ABD, el EDC, el ECB y el DCB. Además, si somos un poco más observadores vemos que todos son rectángulos.

Pues si todos son rectángulos, con los datos de los ángulos dados, podemos ver que en todos ellos hay un ángulo recto, el de 90°, y otros dos complementarios, uno de 30° y otro de 60°, por tanto, como tienen todos sus ángulos iguales no sólo ABD y EDC son semejantes, sino que lo son los 4 triángulos, bueno los 3, porque el ABD y el DBC son exactamente iguales.

Por todo ello, los triángulos ABD, EDC, ECB y DCB son semejantes.

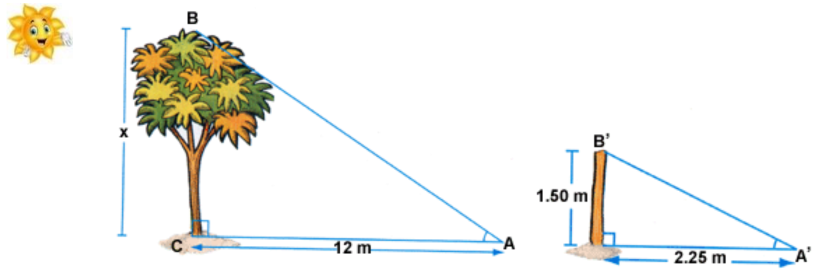
6.8.1.- Aplicaciones de la semejanza de triángulos

Las aplicaciones de la semejanza de triángulos y sobre todo del teorema de Tales son diversas y muy importantes. Veamos algunas de ellas:

6.8.1.1.- Cálculo de la altura de un objeto vertical a partir de su sombra

Para calcular la altura de un árbol x, procedemos del siguiente modo:

- Clavamos en el suelo, verticalmente, una estaca $\overline{B'C'}$.
- Medimos la longitud de la estaca $\overline{B'C'}$
- Medimos las sombras del árbol $\overline{CA}$ y de la estaca $\overline{C'A'}$, proyectadas por el sol en el mismo instante



Como podemos observar en la figura, los triángulos rectángulos ABC y A'B'C' son semejantes porque tienen dos ángulos respectivamente iguales:

- $\hat{C} = \hat{C}'$ porque los dos son rectos
- $\hat{A} = \hat{A}'$ porque los rayos del sol inciden sobre el árbol y la estaca con el mismo ángulo puesto que llegan a la tierra paralelos los unos a los otros.

Como son semejantes, podemos aplicar Thales: $\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}$

Como conocemos los segmentos $\overline{CA}$, $\overline{C'A'}$ y $\overline{B'C'}$ podemos calcular el segmento $\overline{BC}$ que corresponde a la altura del árbol.

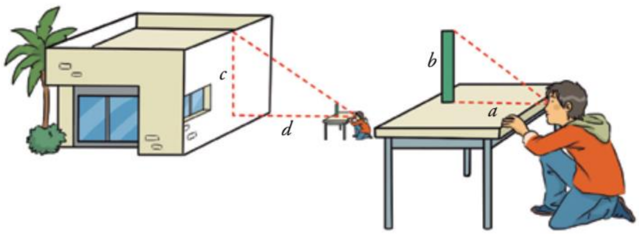
$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{1{,}50} = \frac{12}{2{,}25} \quad \rightarrow \quad x = \frac{1{,}5 \cdot 12}{2{,}25} = 8\ m$$

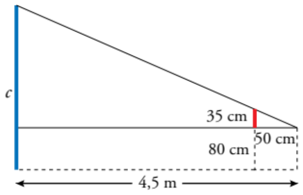
Por tanto, la altura del árbol es de 8 metros.

6.8.1.2.- Cálculo de la altura de un objeto vertical sin recurrir a su sombra

Fijémonos ahora en el siguiente ejemplo en el que un chico quiere calcular la altura de su casa, lanzando una visual desde el borde de la mesa al punto más alto de la casa.

Estando en esa posición, mueve la regla, situándola de modo que su extremo quede alineado con la visual (la mesa debe estar en posición horizontal, y la regla, en vertical).





Los triángulos rectángulos, de catetos a, b y d, c, son semejantes, pues se encuentran en posición de Tales.

Si la longitud de la regla es b=35 cm; la distancia del borde de la mesa al pie de la regla es a=50 cm; la distancia del borde de la mesa a la casa es d = 4,5 m; y la altura de la mesa es de 80 cm, tenemos la siguiente figura en la que:

$$\frac{c}{d}=\frac{b}{a} \quad \rightarrow \quad c=\frac{d\cdot b}{a}=\frac{450\cdot 35}{50}=315\ cm$$

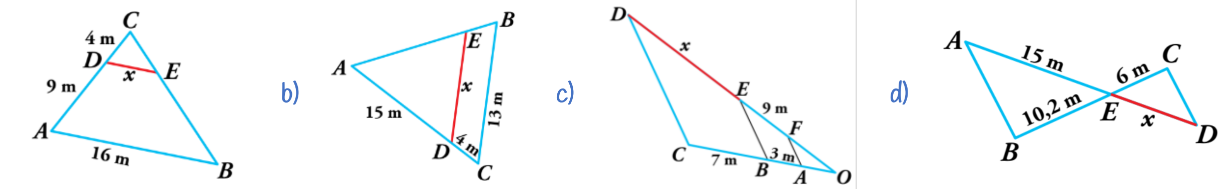
Y la altura de la casa será: $h=315+80=395\ cm$

Por tanto la casa mide 3,95 metros de altura

Piensa y practica

10.- Calcula el valor de x en cada caso: Sol: a) 4,92 m; b) 10,26m ; c) 21m; d) 8,82 m

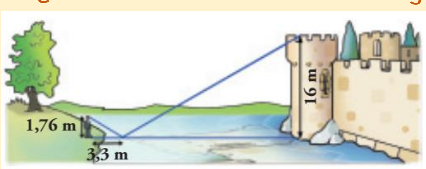
a) b) c) d)



11.- Para medir la altura de su casa, Álvaro, de 165 cm de altura, se sitúa a 1,5 m de distancia de la verja que mide 3,5 metros de altura de forma que el tejado de su casa, el borde superior de la valla y sus ojos quedan alineados. Sabiendo que desde la valla hasta su casa hay 25 metros, ¿podrías decir cuál es la altura de la casa de Álvaro? Sol: 34,33 m

Ejemplo

12.- ¿Cuál es la distancia entre el chico y la base de la torre si el chico ve la torre reflejada en el agua?



Si observamos el dibujo tenemos dos triángulos semejantes cuyos lados son proporcionales. Así que, por semejanza de triángulos:

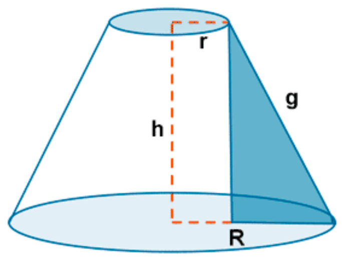
$$\frac{1,76}{3,3}=\frac{16}{x} \quad \rightarrow \quad x=\frac{3,3\cdot 16}{1,76}=30\ m$$

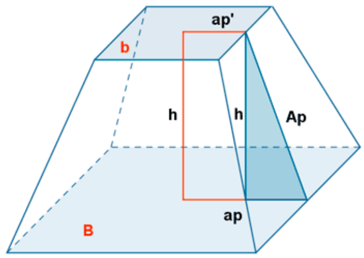
La distancia del chico a la torre es de 30 + 3,3 = 33,3 metros.

6.8.1.3.- Cálculo del volumen de un tronco de cono o de un tronco de pirámide

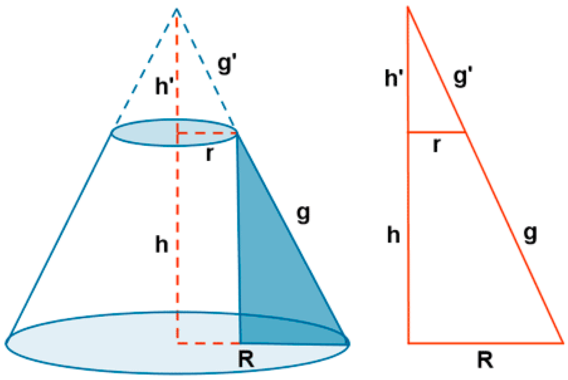
Para calcular el volumen tanto de un tronco de cono como de un tronco de pirámide, lo primero será ampliarlos continuando las líneas hasta obtener las dos figuras completas: un cono o una pirámide.

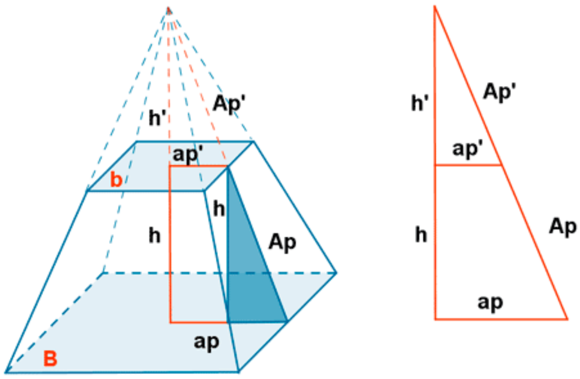
TRONCO DE CONO	TRONCO DE PIRÁMIDE





Para calcular el volumen tanto de un tronco de cono como de un tronco de pirámide, lo primero será ampliarlos continuando las líneas hasta obtener las dos figuras completas: un cono o una pirámide



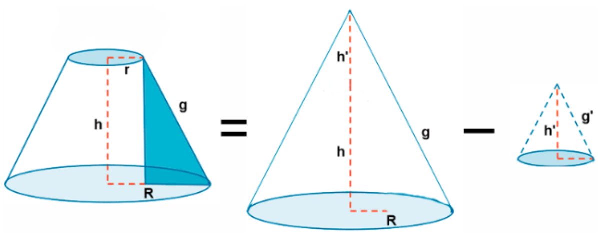


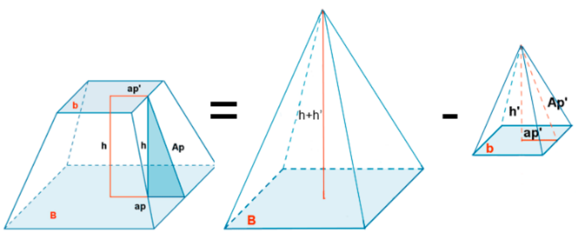
Si llamamos **h'** a la altura añadida, podemos utilizar la semejanza de triángulos para calcularla con la ayuda de los datos del problema.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{r}{R}=\dfrac{h'}{h+h'} \\[2ex] \dfrac{r}{R}=\dfrac{g'}{g+g'} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{r}{R}=\frac{h'}{h+h'}=\frac{g'}{g+g'}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{ap'}{ap}=\dfrac{Ap'}{Ap'+Ap} \\[2ex] \dfrac{ap'}{ap}=\dfrac{h'}{h'+h} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{ap'}{ap}=\frac{Ap'}{Ap'+Ap}=\frac{h'}{h'+h}$$

Una vez calculada **h'**, ya tendremos la altura total tanto del cono como de la pirámide, ambos completos y calcularemos los volúmenes de los troncos, restando al volumen del cono completo (o de la pirámide) el volumen del cono añadido (o de la pirámide).



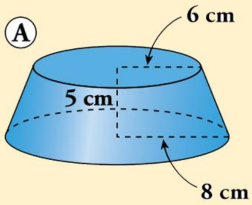


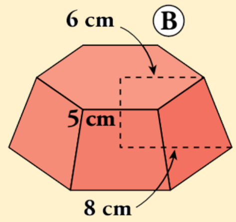
$$V_{\text{Tronco de Cono}}=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot R^2\cdot(h+h')-\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h'$$

$$V_{\text{Tronco de Pirámide}}=\frac{1}{3}\cdot A_B\cdot(h+h')-\frac{1}{3}\cdot A_b\cdot h'$$

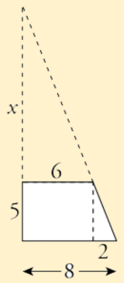
Ejemplo

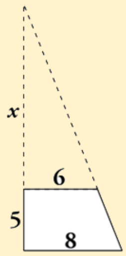
13.- Calcula el volumen de los siguientes troncos de cono y de pirámide.





Si prolongamos las dos figuras hasta obtener el cono y la pirámide completos, podemos observar los siguientes triángulos:





Por semejanza de triángulos, en ambas figuras:

$$\frac{8}{5+x}=\frac{6}{x} \rightarrow 8x=6(5+x) \rightarrow 8x=30+6x \rightarrow 2x=30 \rightarrow x=15$$

Con esto, la altura del cono pequeño es de 15 cm y la del grande es de 15+5=20 cm. Ya podemos calcular su volumen mediante:

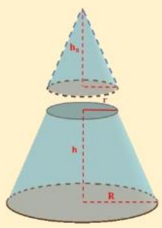
$$V_{Cono}=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot R^2\cdot h$$

$$V_{Cono\ Grande}=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 8^2\cdot 20=1340,41\ cm^3$$

$$V_{Cono\ Pequeño}=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 6^2\cdot 15=565,49\ cm^3$$

$$V_{Tronco\ de\ Cono}=V_{Cono\ Grande}-V_{Cono\ Pequeño}$$

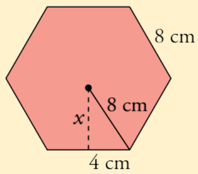
$$V_{Tronco\ de\ Cono}=1340,41-565,49=774,92\ cm^3$$

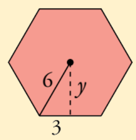


Con esto, la altura de la pirámide pequeña es de 15 cm y la de la grande 15+5=20 cm. Para calcular su volumen usaremos:

$$V=\frac{1}{3}\cdot A_{Base}\cdot h$$

Como la base es hexagonal, para calcular el volumen de ambas pirámides, primero hemos de calcular el área de las bases y para ello los apotemas de cada base:





$$x=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3} \qquad y=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$$

$$V_{Pirámide}=\frac{1}{3}\cdot\frac{perimetro\cdot ap}{2}\cdot h$$

$$V_{Pirámide\ Grande}=\frac{1}{3}\cdot\frac{48\cdot 4\sqrt{3}}{2}\cdot 20=1108,8\ cm^3$$

$$V_{Pirámide\ Pequeña}=\frac{1}{3}\cdot\frac{36\cdot 3\sqrt{3}}{2}\cdot 15=468\ cm^3$$

$$V_{Tronco\ Pirámide}=V_{Pirámide\ Grande}-V_{Pirámide\ Pequeña}=$$
$$=1108,8-468=640,8\ cm^3$$

Por tanto, el volumen del tronco de cono es de 774,92 cm³ y el del tronco de pirámide de 640,8 cm³

Piensa y practica

12.- Calcula el área total y el volumen de un tronco de cono de 6 cm de altura cuyos radios miden 6 y 4 cm.
Sol: A=361,91 cm² y V=477,52 cm³

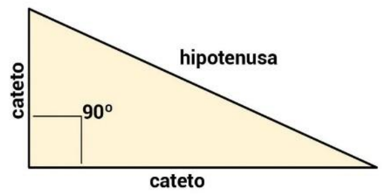
13.- Calcula el área total y el volumen de un tronco de pirámide de bases cuadradas de 10 metros de altura, sabiendo que los lados de sus base son de 6 y 16 metros.
Sol: A=783,93 cm² y V=1.293,3 cm³

14.- Un cilindro y un cono tienen la misma superficie total, 96π cm2, y el mismo radio, 6 cm. ¿Cuál de los dos tendrá mayor volumen?
Sol: El cono.

6.09.- Teoremas basados en los triángulos rectángulos

Además del teorema de Pitágoras, existen otros dos teoremas importantes sobre los triángulos rectángulos que permiten resolver ciertos problemas geométricos de una forma rápida. Estos teoremas son el teorema del cateto y el teorema del resto, pero antes repasemos el teorema de Pitágoras:

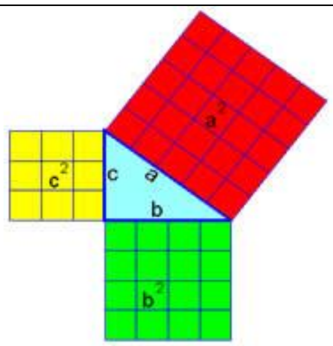
6.9.1.- Teorema de Pitágoras



En un **triángulo rectángulo**, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, y matemáticamente se expresa:

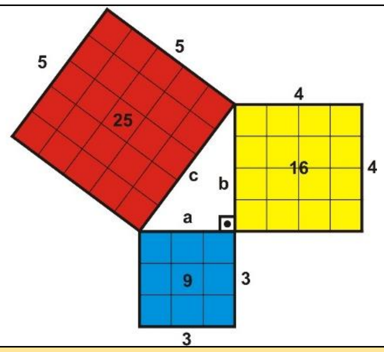
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Cuya demostración era que: el área de un cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

El área del cuadrado rojo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados amarillo y verde



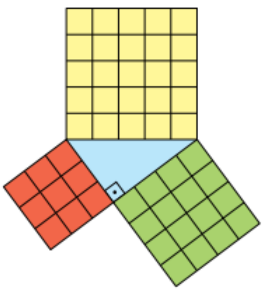
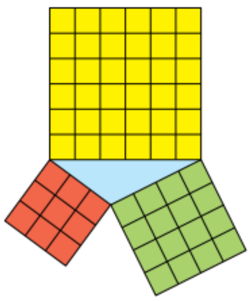
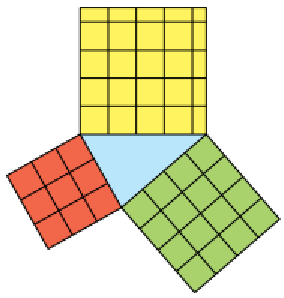
$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$5^2 = 4^2 + 3^2$$

$$25 = 16 + 9$$

El área del cuadrado rojo $5^2 = 25$ es igual a la suma del área de azúl $3^2 = 9$ + la del amarillo $4^2 = 16$

Además, recuerda que si conocemos los lados de un triángulo, con la ayuda del teorema de Pitágoras podíamos clasificarlo en rectángulo, obtusángulo y acutángulos, comparando el cuadrado de la hipotenusa con la suma de los cuadrados de los catetos.

Rectángulo	Obtusángulo	Acutángulo
Si $a^2 = b^2 + c^2$	Si $a^2 > b^2 + c^2$	Si $a^2 < b^2 + c^2$
		

Piensa y practica

15.- Clasifica los siguientes triángulos:

a=13, b=12, c=5 a=245, b=70, c=240 a=39, b=36, c=15 a=83, b=80, c=18

Una de sus muchas aplicaciones es que si sabemos que un triángulo es rectángulo, y conocemos la longitud de dos de sus lados, el teorema de Pitágoras nos permite calcular la longitud del tercero:

$$\text{Si } a^2 = b^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = \sqrt{b^2 + c^2} \\ b = \sqrt{a^2 - c^2} \\ c = \sqrt{a^2 - b^2} \end{cases}$$

Ejemplo

14.- En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 130 cm, y uno de los catetos, 32 cm. Halla la longitud del otro cateto.

Si aplicamos el teorema de Pitágoras y despejamos el cateto c, legamos a:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad c^2 = a^2 - b^2 \quad \rightarrow \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad \rightarrow \quad c = \sqrt{130^2 - 32^2} = \sqrt{15876} = 126$$

Sol: El otro cateto mide 126 m.

En un **triángulo rectángulo** la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de sus catetos.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

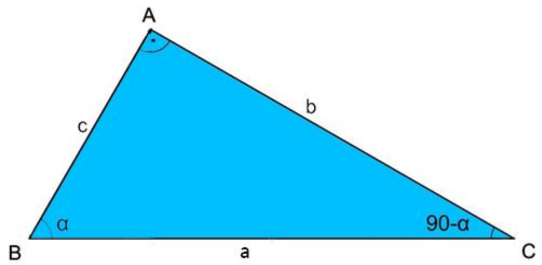
6.9.2.- Teorema del Cateto

En todo **triángulo rectángulo** el cuadrado de cualquier cateto es igual al producto de la hipotenusa por la proyección de dicho cateto sobre ella.

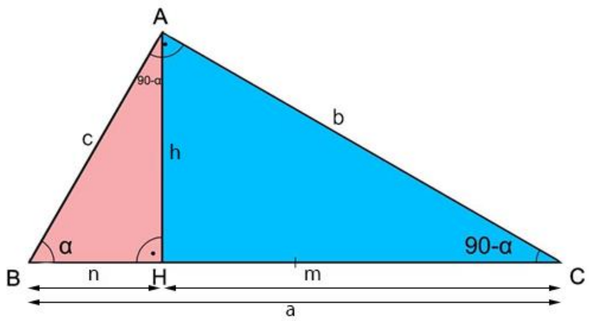
$$c^2 = a \cdot n \qquad\qquad b^2 = a \cdot m$$

DEMO

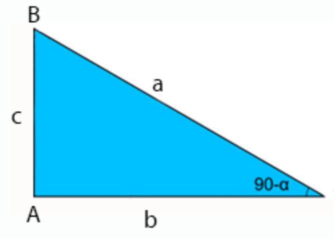
Dado un triángulo rectángulo ABC apoyado sobre su hipotenusa,

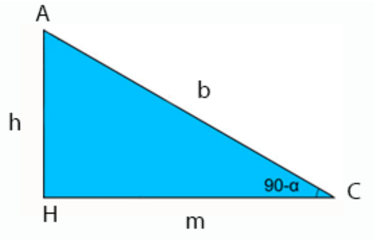


Si trazamos la altura, h, sobre su hipotenusa **a**, la parte en dos segmentos m y n que son las proyecciones sobre ella de los catetos b y c. Además divide el triángulo rectángulo en otros dos también rectángulos: el HBA y el HAC.



Pues si nos fijamos en los triángulos ABC y en el HAC, podemos observar que son semejantes:

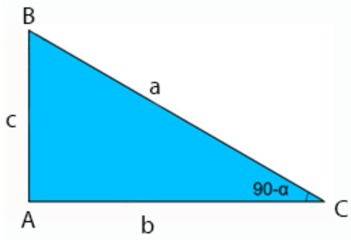


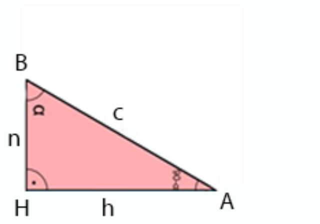


Y por tanto:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{m} \quad \rightarrow \quad a \cdot m = b \cdot b \quad \rightarrow \quad b^2 = a \cdot m \qquad c.q.d.$$

De forma similar, si nos fijamos en los triángulos ABC y HBA que también son semejantes:

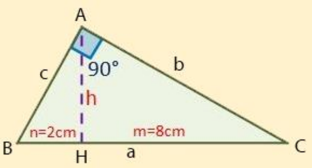




$$\frac{a}{c}=\frac{c}{n} \quad \rightarrow \quad a \cdot n = c \cdot c \quad \rightarrow \quad c^2 = a \cdot n \qquad c.q.d.$$

Ejemplo

15.- Calcula el perímetro de un triángulo rectángulo del que se conoce la medida de los segmentos en que la altura divide a la hipotenusa, que son m=8 y n=2 cm.



Si observamos el dibujo, vemos que la atura divide el triángulo ABC en otros dos HAC y HAB, y que los tres son semejantes, así que, si aplicamos dos veces el teorema del cateto:

$$b^2 = a \cdot m \quad \rightarrow \quad b = \sqrt{a \cdot m} = \sqrt{10 \cdot 8} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}\ cm$$

$$c^2 = a \cdot n \quad \rightarrow \quad c = \sqrt{a \cdot n} = \sqrt{10 \cdot 2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\ cm$$

Podemos calcular el valor de ambos, y con ellos y el valor de la hipotenusa. Y con todos ellos, el perímetro del triángulo:

$$P = 10 + 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 10 + 6\sqrt{5} = 23{,}416\ cm$$

Por tanto, el perímetro es de aproximadamente 23,42 cm.

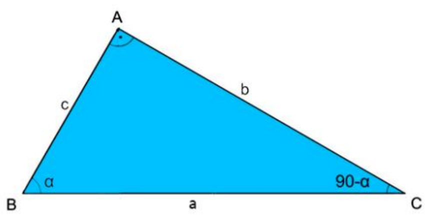
6.9.3.- Teorema de la Altura

En todo **triángulo rectángulo**, la altura (h) relativa a la hipotenusa es la media geométrica de las dos proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa (n y m).

$$h^2 = m \cdot n$$

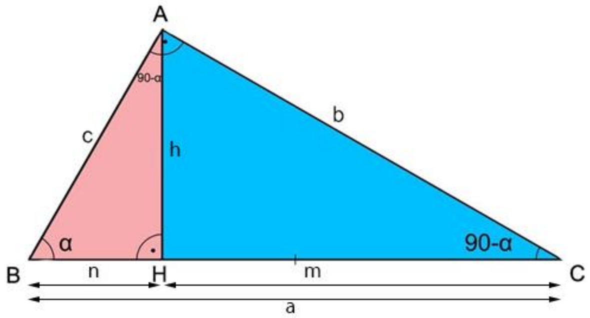
DEMO

Dado un triángulo rectángulo ABC

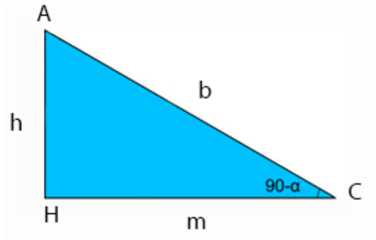


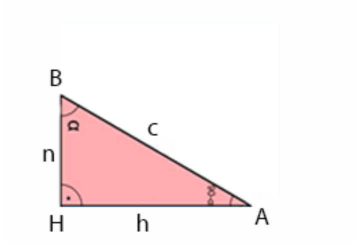
apoyado sobre su hipotenusa,

Si trazamos la altura, h, sobre su hipotenusa **a**, la parte en dos segmentos m y n que son las proyecciones sobre ella de los catetos b y c. Además divide el triángulo rectángulo en otros dos también rectángulos: el HBA y el HAC.



Pues si nos fijamos en los triángulos HAB y en el HAC, podemos observar que son semejantes:

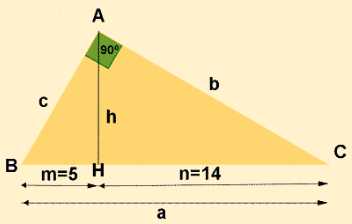




Y por tanto:

$$\frac{h}{m}=\frac{n}{h} \quad \rightarrow \quad h \cdot h = m \cdot n \quad \rightarrow \quad h^2 = m \cdot n \qquad c.q.d.$$

16.- En un triángulo rectángulo, la altura relativa a la hipotenusa divide a ésta en dos segmentos de longitudes 5 y 14 cm. Halla el área de dicho triángulo.



Si observamos el dibujo, vemos que la atura divide el triángulo ABC en otros dos HAC y HAB, y ambos son semejantes, así que, si aplicamos el teorema de la altura:

$$h^2 = m \cdot n \quad \rightarrow \quad h=\sqrt{m \cdot n}=\sqrt{5 \cdot 14}=\sqrt{70}=8{,}37\ cm$$

Conocida la altura, ya podemos calcular su área:

$$A=\frac{b \cdot h}{2}=\frac{(5+14)\cdot\sqrt{70}}{2}=79{,}48\ cm^2$$

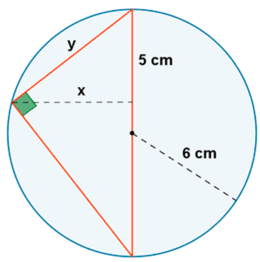
Por tanto, el área es de aproximadamente 79,5 cm^2.

Piensa y practica

16.- En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 10 cm y la proyección del cateto b sobre el mide 3,6 cm. Dibuja dicho triángulo con todas sus medidas, b, c, n, h.

Sol: b=6, n=6,4; c=8; h=4,8 cm.

17.- Calcula los valores de x e y en la siguiente figura:



Sol: x=5,92 e y=7,75 cm

6.10.- Autoevaluación

1.- En un mapa cuya escala es 1:1 500 000, la distancia entre dos ciudades es 2,5 cm.

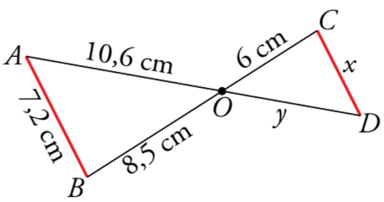
a) ¿Cuál es la distancia real entre ellas?

b) ¿Cuál será la distancia en ese mapa entre dos ciudades A y B cuya distancia real es 360 km?

2.- Una maqueta está hecha a escala 1:250. Calcula:

- **a)** Las dimensiones de una torre cilíndrica que en la maqueta mide 6 cm de altura y 4 cm de diámetro.
- **b)** La superficie de un jardín que en la maqueta ocupa 40 cm^2.
- **c)** El volumen de una piscina que en la maqueta con tiene 20 cm^3 de agua.

3.- Observa esta figura, en la que el segmento AB es paralelo a CD.

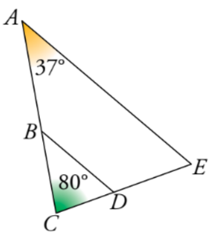


- **a)** Di por qué son semejantes los triángulos AOB y ODC.
- **b)** Calcula x e y.

4.- Dos depósitos cilíndricos semejantes tienen un volumen de 100 m^3 y 250 m^3, respectivamente. Si la altura del menor es 1,5 m, ¿cuánto mide el radio del mayor?

5.- En un triángulo rectángulo, la relación entre los catetos es 3/4. Halla el perímetro de otro triángulo semejante en el que el cateto menor mide 54 cm.

6.- Si BD es paralelo a AE, y AC = 15 cm, CE = 11 cm y BC = 6,4 cm:



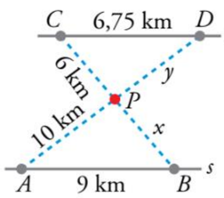
- **a)** Calcula CD.
- **b)** ¿Podemos saber cuánto vale AE sin medirlo directamente?
- **c)** Si $\hat{A}=37°$ y $\hat{C}=80°$, calcula $\hat{E}$, $\hat{B}$ y $\hat{D}$

7.- ¿Cuál es la profundidad de un pozo, si su anchura es 1,2 m y alejándote 0,8 m del borde, desde una altura de 1,7 m, ves que la visual une el borde del pozo con la línea del fondo?

8.- De un cono de radio 5 cm hemos cortado otro cono de radio 2 cm y altura 3 cm. Calcula el volumen del cono grande.

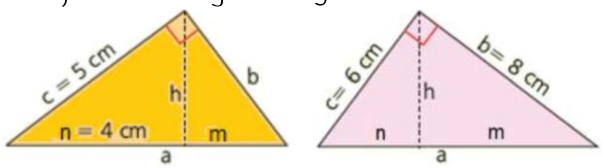
9.- Un florero tiene forma de tronco de pirámide de bases cuadradas de 8 cm y 12 cm de lado, y altura 16 cm. Calcula su volumen.

10.- Un centro comercial P está situado entre dos vías paralelas r y s. Se quiere unir, mediante carreteras, con las poblaciones A, B, C y D. Con los datos de la figura, calcula x e y.

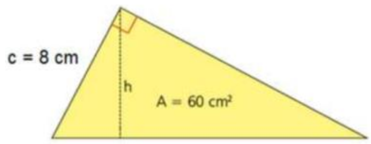


11.- Un cateto de un triángulo rectángulo mide 8 cm, y la altura sobre la hipotenusa, 4. Halla el área del triángulo.

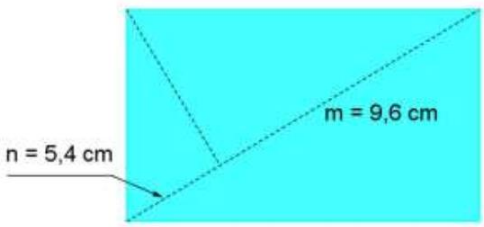
12.- Calcula las medidas desconocidas de los siguientes triángulos, utilizando los teoremas del cateto, de la altura y de Pitágoras:



13.- Un triángulo rectángulo de 60 cm^2 de área tiene un cateto que mide 8 cm. ¿Cuánto mide la altura sobre la hipotenusa?



14.- Halla el perímetro y el área de la siguiente figura, utilizando los teoremas del cateto y de la altura:



15.- Enuncia el teorema de la altura y aplícalo para calcular la altura de un triángulo las proyecciones de cuyos catetos sobre la hipotenusa son de 8 cm y 10 cm.

2023