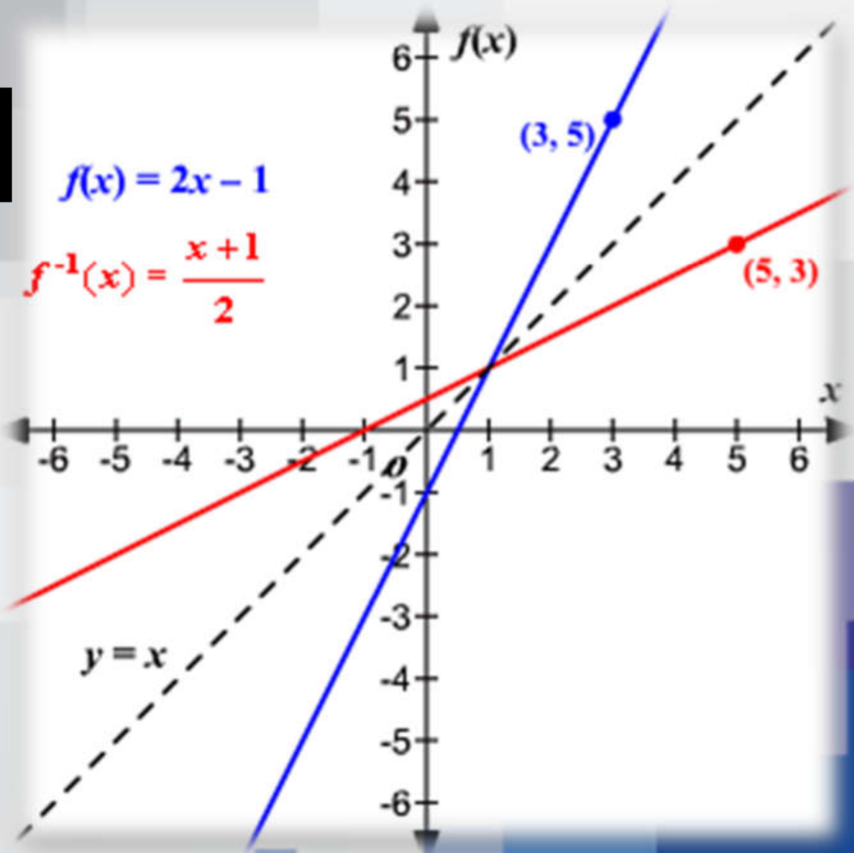
Unidad Didáctica 10

FUNCIONES



3º ESO

En esta unidad vas a:

Representar puntos en el plano cartesiano.

Distinguir relaciones funcionales entre magnitudes.

Conocer las diferentes formas de expresar una función.

Encontrar el dominio y el recorrido de una función.

Distinguir entre funciones discontinuas y continuas.

Reconocer las funciones simétricas y periódicas.

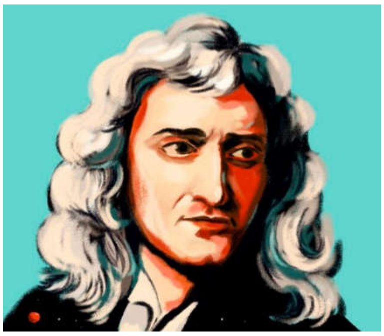
Estudiar el crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos de una gráfica.

Saber representar las funciones lineales y las funciones cuadráticas

Sumario

10.0.- Lectura comprensiva

Los conceptos de variable y función no surgieron en forma definitiva ni en la mente de *Galileo*, *Descartes* o *Newton*, ni en la de cualquier otro matemático concreto. Estos conceptos fueron pensados por otros matemáticos anteriores a ellos (por ejemplo, *Neper* cuando desarrolló los logaritmos) y tomaron una forma más o menos definida, aunque no definitiva, en *Newton* y *Leibnitz*. La definición actual de función data del siglo XIX, pero ni es del todo rigurosa ni seguramente la última. El concepto de función se desarrolla incluso en la actualidad.



Isaac Newton
(1643 – 1727)

El estudio de las funciones, más conocido como análisis matemático, se basó en los materiales suministrados por la nueva ciencia de la mecánica y en problemas de geometría y álgebra. El primer paso hacia la matemática de las magnitudes variables fue la aparición, en 1637, de la ***Geometría*** de *Renato Descartes*, donde se establecían las bases de la llamada geometría analítica.

El siguiente paso decisivo en la matemática de las magnitudes variables fue dado por *Newton* y *Leibnitz* durante la segunda mitad del siglo XVII al sentar las bases del cálculo. Este fue el verdadero comienzo del análisis matemático, puesto que el objeto del cálculo es el estudio de las funciones mismas, distinto al objeto de la geometría analítica que son las figuras geométricas o del algebra cuyo objeto de estudio son estructuras abstractas, dentro de las cuales además de haber números y operaciones aritméticas: también hay letras, que representan operaciones concretas, variables, incógnitas o coeficientes.

Lee nuevamente el texto anterior y contesta el siguiente cuestionario:

1.- Para el autor, el punto de arranque del análisis matemático fue dado:
- **a)** Cuando se publicaron los materiales suministrados por la nueva ciencia de la mecánica
- **b)** Por Descartes con la publicación de la "Geometría" en 1637.
- **c)** Por un inglés y un alemán cuando sentaron las bases del cálculo.
- **d)** Por las mentes geniales de Galileo, Descartes y Newton.

2.- El tema central que desarrolla el autor del texto es:
- **a)** La historia del cálculo: de la antigüedad a nuestros días.
- **b)** Cómo fueron los comienzos del desarrollo del análisis matemático.
- **c)** Las labores de los científicos europeos en el desarrollo de las matemáticas.
- **d)** Los tropiezos que ha tenido el cálculo en las diferentes épocas.

3.- Según el texto, es cierto que:
- **a)** Newton es el verdadero padre del análisis matemático.
- **b)** Galileo, Newton y Descartes son los "responsables" de los conceptos variable y función.
- **c)** Newton y Descartes se copiaron de Neper.
- **d)** Los conceptos de variable y función fueron presentados por los científicos predecesores de Galileo, Descartes y Newton.

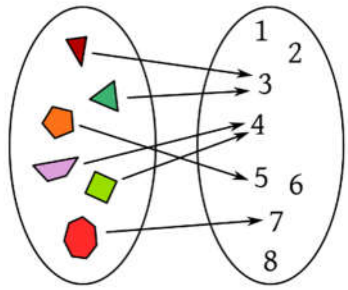
4.- ¿Qué sabes de Sir. Isaac Newton?

10.1.- Introducción

Una función, en matemáticas, es el término usado para indicar la relación o correspondencia entre dos o más cantidades. El término función fue usado por primera vez en 1637 por el matemático francés *René Descartes* para designar una potencia enésima, x^n, de la variable x.

En 1694 el matemático alemán *Gottfried Wilhelm Leibniz* utilizó el término para referirse a varios aspectos de una curva, como su pendiente. Hasta recientemente, su uso más generalizado ha sido el definido en 1829 por el matemático alemán, *J.P.G. Lejeune-Dirichlet* (1805-1859), quien escribió: "Una variable es un símbolo que representa un número dentro de un conjunto de ello.

Las funciones son las herramientas principales para la descripción matemática de una situación real. Todas las fórmulas de la Física no son más que funciones: expresan cómo ciertas magnitudes (por ejemplo el volumen de un gas) dependen de otras (la temperatura y la presión). El concepto de función es tan importante que muchas ramas de la matemática moderna se caracterizan por el tipo de funciones que estudian. No es de extrañar, por ello, que el concepto de función sea de una gran generalidad. Además, se trata de uno de esos conceptos cuyo contenido esencial es fácil de comprender pero difícil de formalizar.



La idea básica de función es la siguiente. Supongamos que tenemos dos conjuntos A y B; una función de A en B es una regla que a cada elemento de A asocia un único elemento de B.

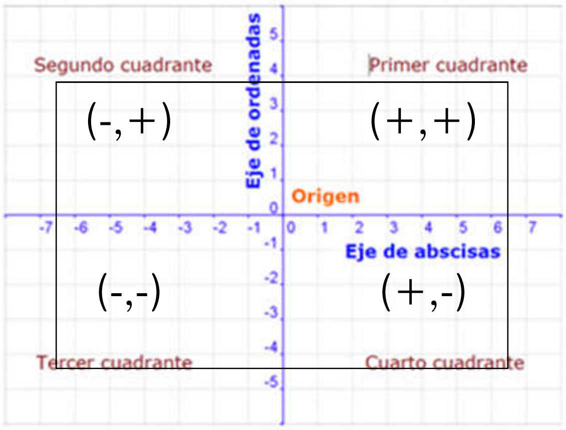
Veremos que las funciones se representan por letras. En la práctica las letras más usadas son f, g y h, pero cualquiera otra es también buena. Si *f* es una función y *x* es un número que está en su dominio, se representa por *f(x)* (léase "f de x") el número que *f* asigna a *x*, que se llama imagen de *x* por *f*, *Im(f)*.

10.2.- Sistemas de Representación en el plano

La gráfica de una función pone de manifiesto, a simple vista, muchas de sus propiedades. Para dibujar gráficas de funciones nos ayudaremos de los ejes cartesianos, y diremos que la gráfica de una función *f* es el conjunto de pares de números $(x, f(x))$ donde x son los puntos del dominio de la función.

10.2.1.- Ejes de coordenadas o Cartesianos.

El sistema de representación de puntos en el plano más común está formado por dos ejes perpendiculares, uno horizontal llamado ***eje de abscisas***, donde se representan los valores de la *variable independiente* (que toma los valores libremente, y que suele llamarse "x"), y otro vertical llamado ***eje de ordenadas***, donde se representan los valores de la *variable dependiente* (porque se calculan a partir de la otra, y que suele llamarse "y").



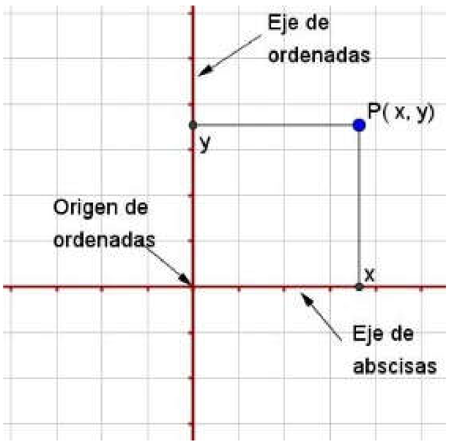
Ambos reciben el nombre de ***ejes de coordenadas*** o ejes cartesianos (en honor del famoso filósofo y matemático francés *Renè Descartes*).

El punto donde se cortan ambos ejes se llama ***origen de coordenadas*** y, al cortarse los dos ejes, el plano queda dividido en cuatro zonas, que se conocen como cuadrantes, y que se nombran en el sentido contrario a las agujas del reloj empezando desde la parte positiva del eje de abscisas.

10.2.2.- Coordenadas cartesianas.

[Se llaman coordenadas cartesianas en honor a *René Descartes* (Renatus Cartesius, en latín), filósofo, matemático (considerado como el creador de la geometría analítica) y físico francés. Nació el 1596 en La Haye, actual Descartes, (Francia) y murió el 1650 en Estocolmo (Suecia). De él es la célebre frase "*Cogito, ergo sum*", traducción del francés "*Je pense, donc je suis*" (Pienso, luego existo). Esta frase se encuentra en su libro "*Discours de la methode*" (1637). El título completo es: « Discours de la methode pour bien conduire sa raison & chercher la verité dans les sciences. Plus la Dioptrique, les Meteores et la Geometrie, qui sont des essais de cette methode ». (Discurso del método para dirigir bien la razón y buscar la verdad en las ciencias. Más la Dióptrica, los Meteoros y la Geometría, que son ensayos de este método). Es en este último ensayo, el de Geometría, en donde habla de la relación entre el álgebra y la geometría, utilizando los ejes de coordenadas. Esta obra la escribió en francés, y no en latín, que era el lenguaje en el que se escribían los libros en aquella época].

Una vez establecido el *sistema de referencia* con respecto al cual poder situar los puntos, para llegar a uno en concreto partimos del origen, “O”, recorremos una determinada cantidad hacia la derecha o la izquierda y luego otra hacia arriba o hacia abajo. Así cada punto queda determinado por un par de números, la medida de los caminos realizados en ambas direcciones, a los que llamamos coordenadas cartesianas del punto.



Las coordenadas de un punto ***P*** son un par ordenado de números reales ***P(x, y)***, siendo “***x***” la primera coordenada o ***abscisa*** (nos indica la distancia a la que dicho punto se encuentra del eje vertical) e “***y***” la segunda coordenada u ***ordenada*** (nos indica la distancia a la que dicho punto se encuentra del eje horizontal).

Cuando ese valor se toma hacia la izquierda o hacia abajo lo indicamos con un número negativo y si es hacia arriba o a la derecha lo indicamos con uno positivo, de la misma manera que hacíamos al representar los números en la recta. De esta forma, cualquier punto del plano queda totalmente determinado mediante sus coordenadas y viceversa, a toda pareja ordenada de números le corresponde un punto del plano.

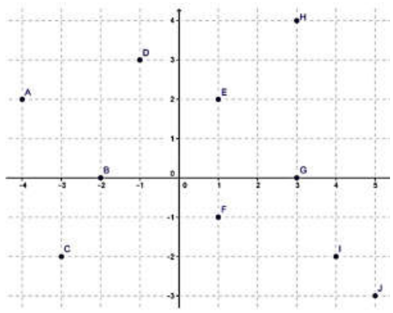
Piensa y practica

1.- *Representa en un sistema cartesiano los siguientes puntos:*

$A(1,1)$ $B(0,0)$ $C(4,0)$ $D(3,-3)$

$E(-1,-3)$ $F(-5,6)$ $G(0,-5)$

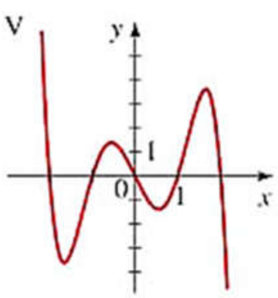
2.- *Indica las coordenadas de los puntos del plano:*

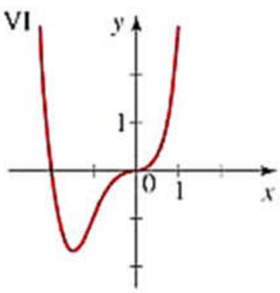


10.3.- Concepto de Función

Una ***función*** es una relación entre dos magnitudes o variables numéricas, x e y, de forma que, a cada valor de la variable independiente, *x*, le hace corresponder un único valor de la variable dependiente, *y*.

Se representa: $y = f(x)$





Son funciones	**No es función**
Para cada valor de x existe un único de y	*Para un x existen 2 valores de y.* ***Una línea cruza dos valores***

Una función nunca vuelve hacia atrás.

10.4.- Formas de expresar una función

Tanto en el estudio de las matemáticas como en otras ciencias o en la vida cotidiana, nos encontramos frecuentemente con funciones.

Las funciones nos vienen dadas de muy diversas formas: mediante su gráfica, por una tabla de valores, por una fórmula o mediante una descripción verbal (enunciado).

10.4.1.- Función definida por un enunciado.

Cuando una función viene dada por un enunciado o una descripción, la idea que nos podemos hacer de ella es, casi siempre, cuantitativamente poco precisa. Pero si el enunciado se acompaña con datos numéricos, la función puede quedar perfectamente determinada.

Ejemplo

1.- En un teatro cada entrada cuesta 18€. La relación entre las entradas vendidas y la recaudación, ¿es una función?

A la magnitud entradas vendidas la llamamos ***x***, y toma los valores 1,2,3,4….. Es la ***variable independiente.***

La magnitud recaudación del teatro, que llamamos ***y***, toma los valores 18, 36, 54….. en función de la cantidad de entradas vendidas. Es la ***variable dependiente.***

A cada número de entradas vendidas le corresponde una única recaudación. Es decir, a cada valor de x le corresponde un único valor de y, así que ***la relación es una función.***

10.4.2.- Función definida por una expresión algebraica.

En ocasiones, las funciones vienen dadas por una expresión algebraica. La expresión $y = f(x)$ hace referencia a la ecuación de una función. Esta expresión algebraica es la forma más precisa y operativa de dar una función.

Ejemplo

2.- La ecuación del espacio recorrido por un móvil es $S(t)=5+3t+2t^2$, donde s, se expresa en metros y t en segundos. ¿Qué longitud ha recorrido el móvil al cabo de 5 segundos de iniciar el movimiento?

El móvil habrá recorrido $S(5)=5+3\cdot 5+2\cdot 5^2=5+15+50=70\ m$

10.4.3.- Función definida mediante una tabla.

Con frecuencia se nos dan los valores de una función mediante una tabla en la cual se obtienen directamente los datos buscados. Sin embargo, en otros casos hay que efectuar complejos cálculos para obtener lo que se busca.

Ejemplo

3.- Al estudiar el movimiento de un objeto, se han obtenido los siguientes resultados:

Posición (cm)	4	16,5	24	29	54
Tiempo (s)	0	5	8	10	20

10.4.4.- Función definida mediante una gráfica.

La forma más frecuente de encontrarnos con una función es mediante su gráfica. Recordar que, en el eje de las x, eje de abscisas, se representa la variable independiente, mientras que, en el eje de ordenadas, eje y, se representa la variable dependiente.

Ejemplo

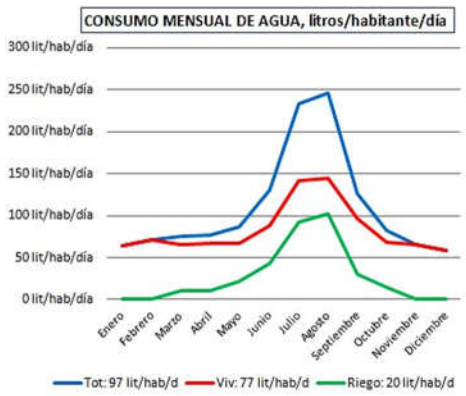
4.- El consumo de agua en una vivienda unifamiliar de Madrid durante el año 2018 viene dado por la siguiente gráfica:

a) ¿Qué mes del año se consume más agua?

b) ¿En qué mes se consume menos?

c) ¿por qué crees que es así?

d) ¿Qué cantidad total se consume en el mes de agosto?

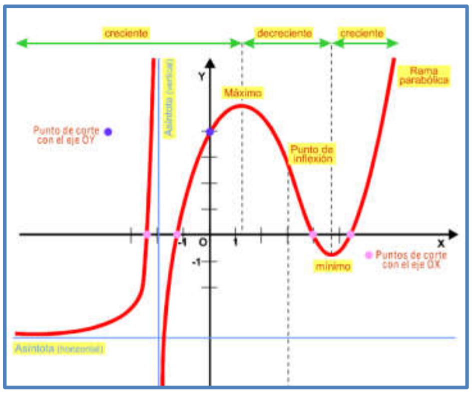


10.5.- Características de una función

Hay ciertas características y propiedades que permiten analizar y clasificar las funciones y que se refieren a los puntos especiales y a la forma y comportamiento de la curva. Su definición estricta requiere cierta práctica en el lenguaje matemático, por lo que se introducen aquí de manera intuitiva y visual.

En este curso, las principales características de una función que vamos a estudiar son:

1. Dominio y recorrido
2. Simetrías
3. Periodicidad
4. Continuidad
5. Puntos de Corte
6. Monotonía
7. Máximos y mínimos

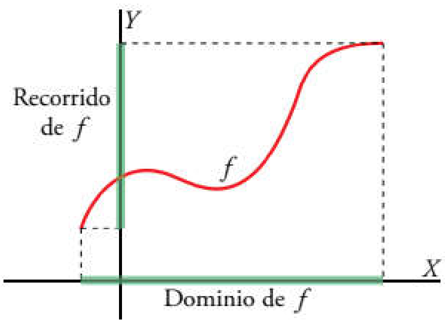


10.5.1.- Dominio y Recorrido de una función.

Llamamos ***dominio*** de una función $f(x)$ y los representaremos por $Dom(f)$, a los valores de la variable independiente, x, para los que existe valor de la variable dependiente, y.

Matemáticamente se expresa: $\boxed{Dom(f)=\{x\in\mathbb{R}\,/\,f(x)\ existe\}}$

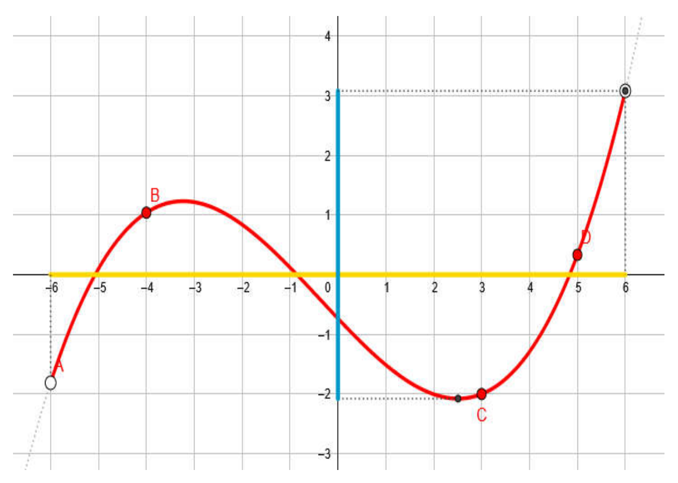
En general el dominio de una función son los puntos donde la función no presenta algún tipo de problema, por ejemplo, al dividir por cero en una función racional o al hacer una raíz cuadrada de un número negativo en una función irracional. (Se verá en cursos posteriores)



 Llamamos ***recorrido*** o imagen de una función $f(x)$ y los representaremos por $\mathrm{Im}(f)$, a los valores que toma la variable dependiente.

Matemáticamente se expresa: $\boxed{\mathrm{Im}(f)=\{y\in \mathbb{R} \ / \ y=f(x), x\in Dom(f)\}}$

Si trabajamos con gráficas el *dominio y el recorrido* de una función los podemos ver en dicha gráfica:



 Dominio: Valores de x para los que existe dibujo. *Me fijo en el eje x, línea amarilla.*

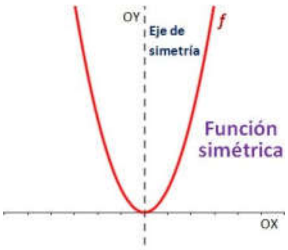
$$Dom(f)=(-6,6)$$

 Recorrido: Valores de y para los que existe dibujo. *Me fijo en el eje y, línea azul.*

$$\mathrm{Im}(f)=(-2,3)$$

10.5.2.- Simetrías.

Una función f es ***simétrica*** si al doblar su gráfica por un eje de simetría ésta se superpone (las dos ramas coinciden).



Existen dos tipos de simetrías:

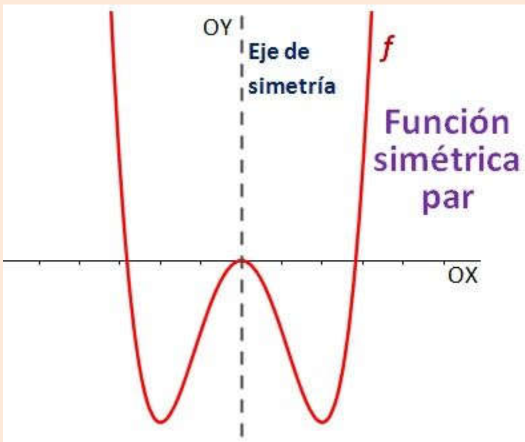
 Funciones simétricas respecto al eje de ordenadas OY, o ***funciones pares***.

 Funciones simétricas respecto al origen O, o ***funciones impares***.

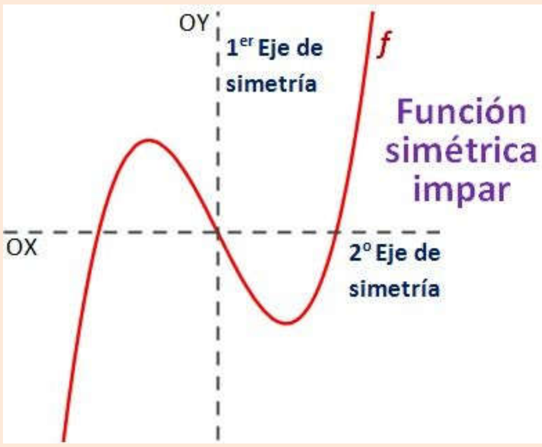
Estudiar si la función es simétrica se llama estudio de la simetría o, al tratarse de funciones pares o impares, estudio de la paridad.

A las funciones que no sean simétricas las llamaremos ***asimétricas.***

Una ***función par*** es una función simétrica respecto al eje de ordenadas OY. Es decir, si doblamos la gráfica por el eje de ordenadas, la gráfica se solaparía.



Una ***función impar*** es una función simétrica respecto al origen O. Si doblamos la gráfica por el eje de ordenadas (OY) y después de nuevo por el eje de abscisas (OX), la gráfica se solaparía.



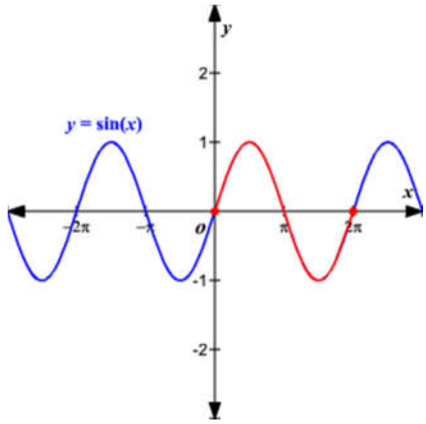
10.5.3.- Periodicidad

Una ***función periódica*** es aquella cuyo comportamiento se repite cada vez que la variable independiente recorre un cierto intervalo. La longitud de ese intervalo se llama periodo, T.

La gráfica se repite a sí misma una y otra vez. En otras palabras, la gráfica completa está formada por infinitas copias de una porción particular.

Una función *f(x)* es periódica, si existe un número T tal que:

$$f(x) = f(x+T)$$

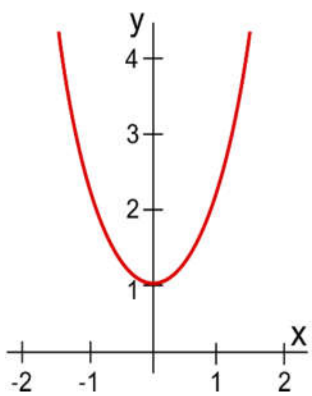


10.5.4.- Continuidad

Una ***función es continua*** si su gráfica puede dibujarse de un solo trazo, es decir, f(x) es continua si puede dibujarse sin separar el lápiz de la hoja de papel.

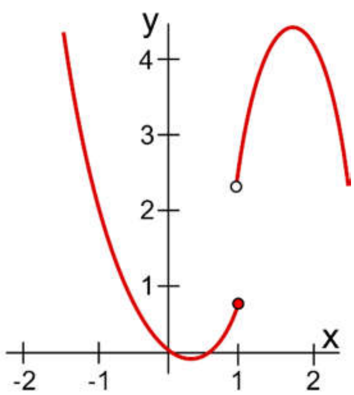
Se dice que la función es discontinua si no es continua, es decir, presenta algún punto en el que la gráfica se rompe ***(punto de discontinuidad)***. Aunque se suele decir que la función es continua excepto en el punto $x=a$ donde presenta una discontinuidad de algún tipo.

Función Continua



Función continua

Función discontinua



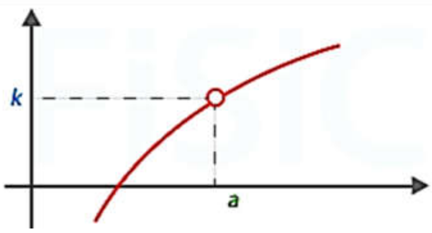
Función continua en todo su dominio excepto en x=a donde presenta una ***discontinuidad***

10.5.4.1.- Tipos de Discontinuidades

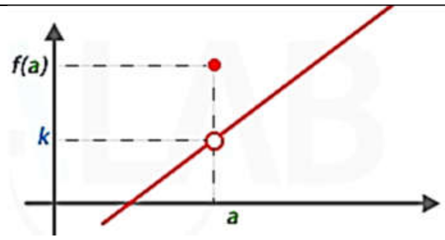
Existen varios tipos de discontinuidades, aunque en este curso solo nos fijaremos en algunas.

Discontinuidad Evitable:

Es aquella que se da cuando no existe el valor de la función para un punto $x=a$, o ese valor está desplazado:



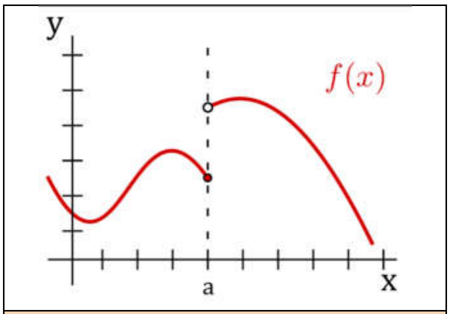
No existe f(a)



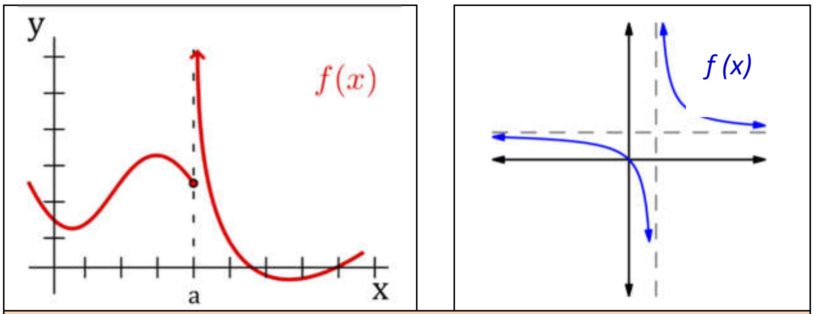
f(a) está desplazado

Discontinuidad de salto:

Es aquella que se da cuando en un punto x=a los valores de la función por la izquierda y por la derecha no coinciden. Según sea el salto, así será la discontinuidad.



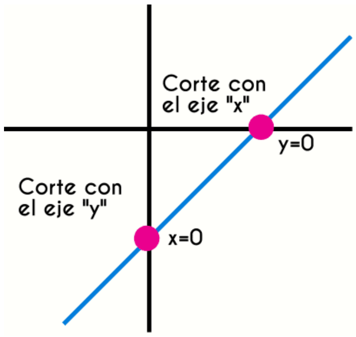
De salto finito



De salto infinito

10.5.5.- Puntos de corte con los ejes

Los puntos de corte con los ejes coordenados son puntos importantes a la hora de representar gráficamente una función. Además, cuando la función está dentro de un contexto real, aportan información sobre el fenómeno estudiado.



Llamamos ***puntos de corte con los ejes*** a los puntos donde la función *f(x)* corta con los ejes de ordenadas y de abscisas.

- ***Con el eje x:*** Los puntos de corte con el eje de abscisas se obtienen igualando la función a cero $f(x)=0$ y resolviendo la ecuación obtenida. Son de la forma $(a,0)$ y pueden existir varios puntos.

- ***Con el eje y:*** El punto de corte con el eje de ordenadas si existe es único y se obtiene sustituyendo el cero en la función. Es de la forma (*0, f(0)*)

Ejemplo

5.- Calcula los puntos de corte con los ejes cartesianos de la función f(x)=x²-5x+6

Con el eje x:

Para calcularlos puntos de corte, igualamos la función a cero y resolvemos la ecuación:

$$f(x)=0 \quad \leftrightarrow \quad x^2-5x+6=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \quad \rightarrow \quad x=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm 1}{2} \qquad x=\begin{cases}\frac{5+1}{2}=3\\ \frac{5-1}{2}=2\end{cases}$$

Corta al eje x en los puntos (3,0) y (2,0)

Con el eje y:

Calculamos f(0): $f(0)=0^2-5\cdot 0+6=6$

Corta el eje y en el punto (0,6)

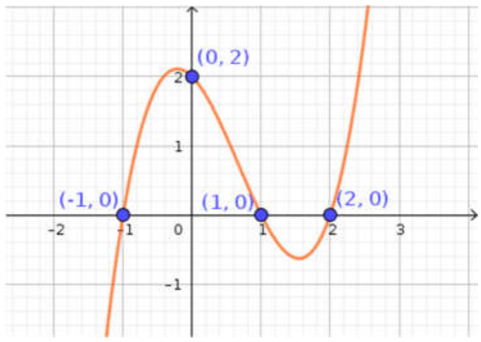
Piensa y practica

1.- Calcula los puntos de corte con los ejes de las funciones:

a) $f(x)=x^2-9$ b) $f(x)=x^2-7x+12$ c) $f(x)=x^2-4x$

Ejemplo

6.- Identifica en gráfica de la función f(x), los puntos de corte de ésta con los ejes cartesianos.

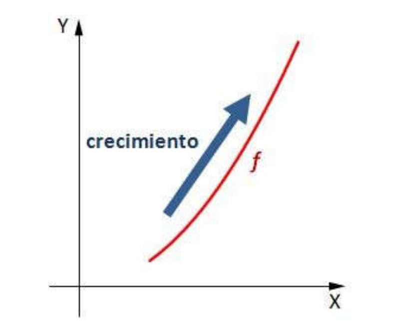
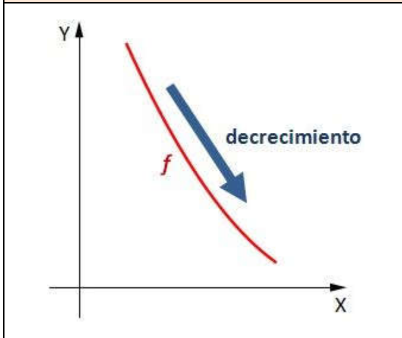
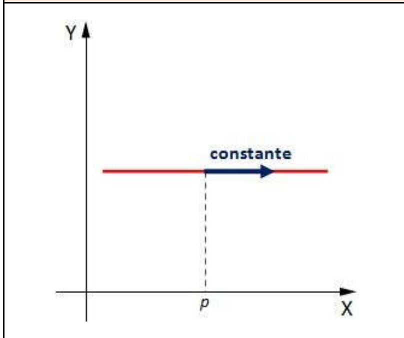


f corta al eje x en los puntos (-1,0), (1,0) y (2,0)

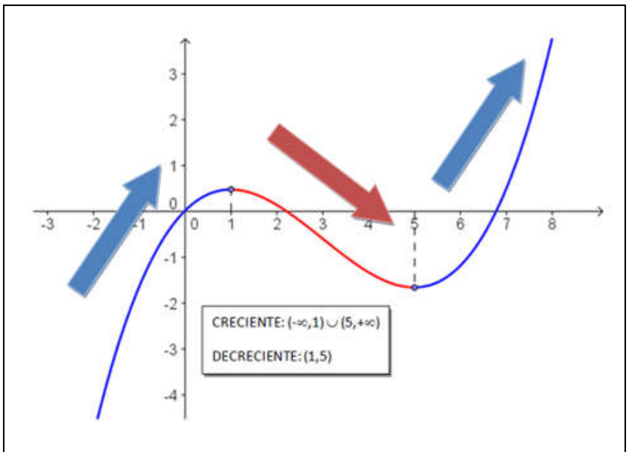
f corta el eje y en el punto (0,2)

10.5.6.- Monotonía. Crecimiento y decrecimiento

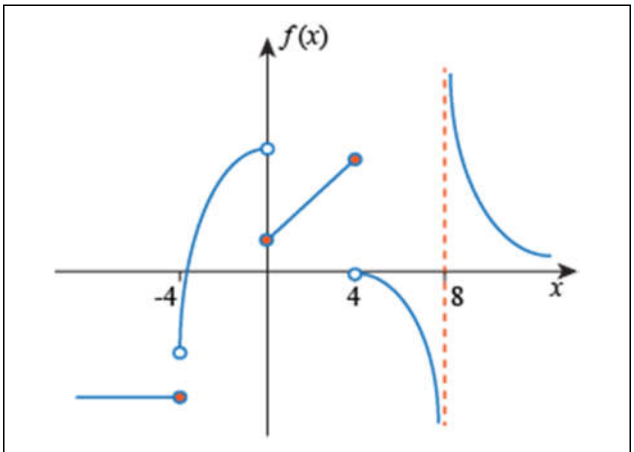
Una de las características más importantes a la hora de hacer la representación gráfica de una función es estudiar su monotonía, es decir, ver si la función es creciente, decreciente o constante.

Decimos que una función ***f(x) es creciente***, si al aumentar la *x*, aumenta también la *y*.	Decimos que una función ***f(x) es decreciente***, si al aumentar la *x*, la *y* disminuye.	Decimos que una función ***f(x) es constante***, si al aumentar la *x*, la *y* no varía (permanece constante)
		
La gráfica va hacia arriba	**La gráfica va hacia abajo**	**La gráfica es paralela a x.**

En general nos encontraremos que, una función no es siempre creciente ni siempre decreciente, sino que tendrá trozos en los que será creciente, trozos en los que será decreciente y trozos en los que será constante.



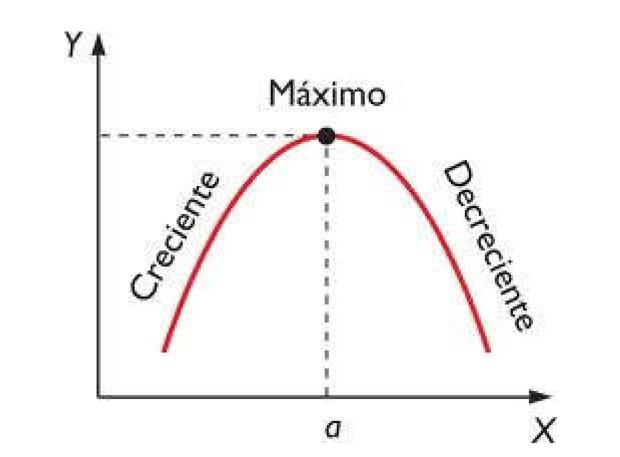
- *f es creciente hasta 1, y a partir de 5*
- *f es decreciente entre 1 y 5*



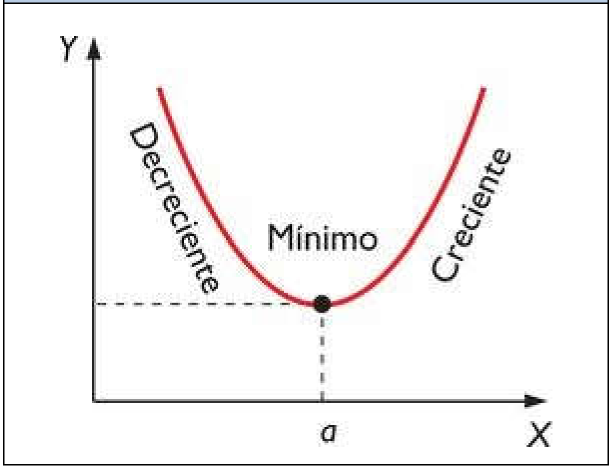
- *f es creciente desde -4 a 4*
- *f es decreciente a partir de 4*
- *f es constante hasta -4*

10.5.7.- Máximos y Míminos.

- Diremos que la función *f(x)* tiene un ***máximo*** en el punto $x=a$, si en dicho punto la función pasa de ser creciente a decreciente.

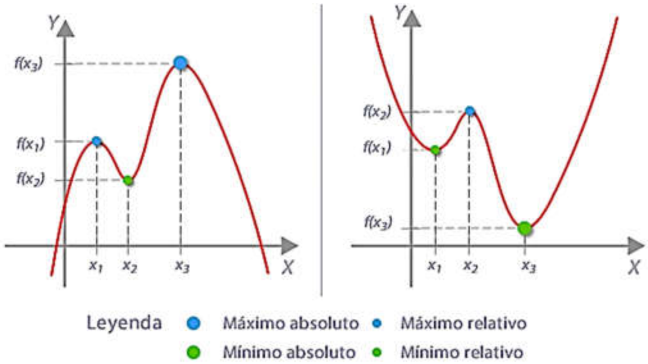


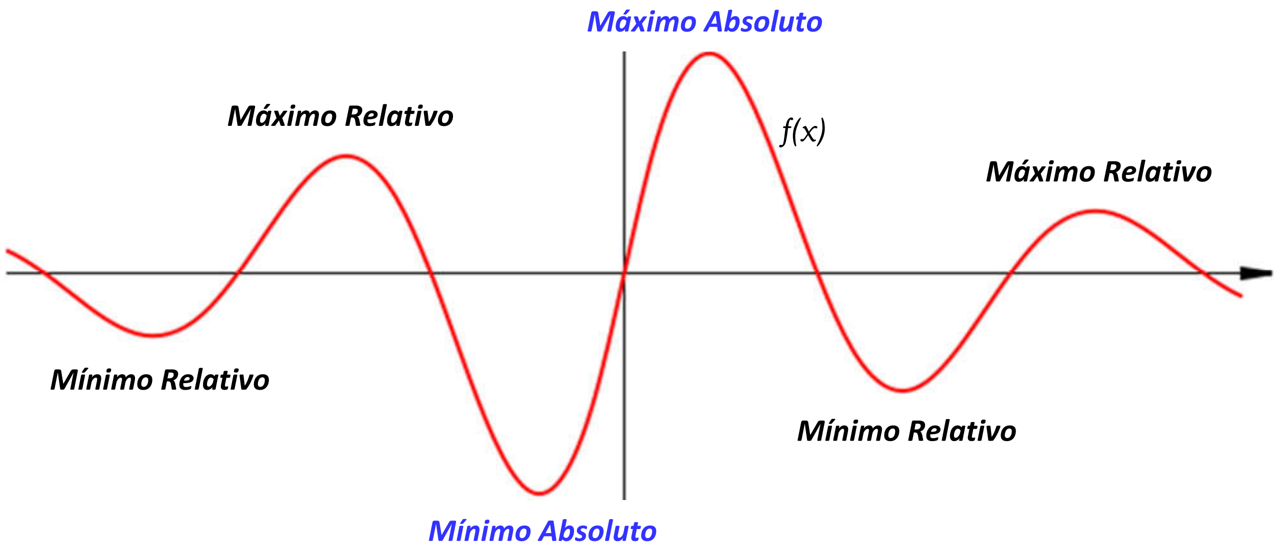
- Diremos que la función *f(x)* tiene un ***mínimo*** en el punto $x=a$, si en dicho punto la función pasa de ser decreciente a creciente.



Decimos que un punto $x=a$ de una gráfica es el ***máximo absoluto***, si además de ser máximo, es el punto más alto de la gráfica, en caso contrario diremos que se trata de un máximo relativo.

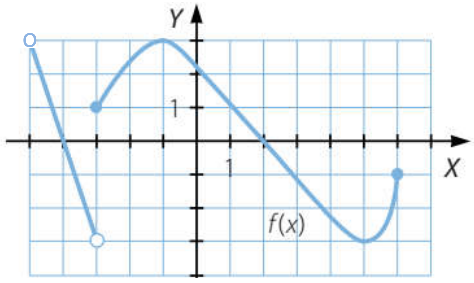
Decimos que un punto $x=a$ de una gráfica es el ***mínimo absoluto***, si además de ser mínimo, es el punto más bajo de la gráfica, en caso contrario diremos que se trata de un mínimo relativo.





Ejemplo

7.- Estudia la función dada por la siguiente gráfica:



$$dom(f)=(-5,6] \qquad \mathrm{Im}(f)=[-3,3]$$

f(x) es continua en todo su dominio excepto en el punto de abscisa x=-3 donde hay una discontinuidad de salto.

La función corta al eje x en los puntos de abscisa x=-4 y x=2

La función corta al eje y en el (0,2)

La función f es creciente en los intervalos $(-3,-1)\cup(5,6)$ y es decreciente en $(-5,-3)\cup(-1,5)$

Además, presenta un ***máximo absoluto*** en el punto (-1,3) y un ***mínimo*** también ***absoluto*** en el (5,-3)

10.06.- Funciones Lineales

Una función lineal es una función polinómica de primer grado cuya gráfica es una linea recta.

Su expresión algebráica es de la forma: $y=mx+b$

Donde *m* es a lo que se llama ***pendiente*** e indica la inclinación de la recta con respecto al eje x, y *b*, ***ordenada en el origen*** e indica el punto de corte con el eje y.

Todas estas funciones están definidas para cualquier valor y son contínuas en todo $\mathbb{R}$.

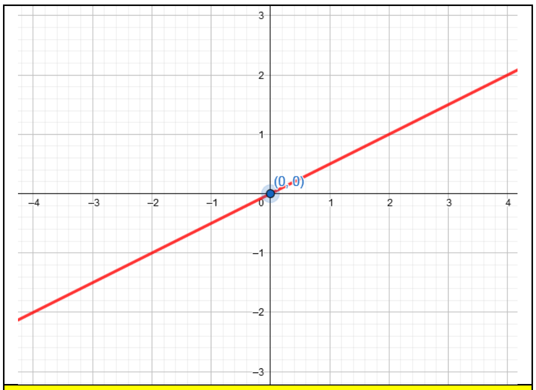
10.6.1.- Funciones de Proporcionalidad

$$Si\ b=0 \quad \rightarrow \quad y=mx+b \quad \rightarrow \quad y=mx+0 \quad \rightarrow \quad y=mx$$

Se llama función de proporcionalidad a la función lineal que relaciona dos valores directamente proporcionales.

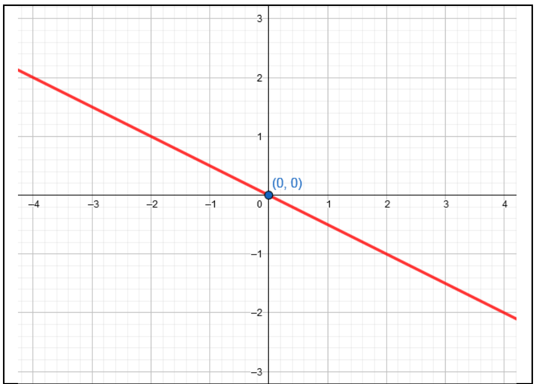
Su expresión algebraica es del tipo *y = mx*, donde m es la constante de proporcionalidad más conocida por ***pendiente de la recta*** y que nos indica su inclinación.

Su gráfica es una línea recta que pasa por el punto (0, 0).



Si m>0

Función Creciente



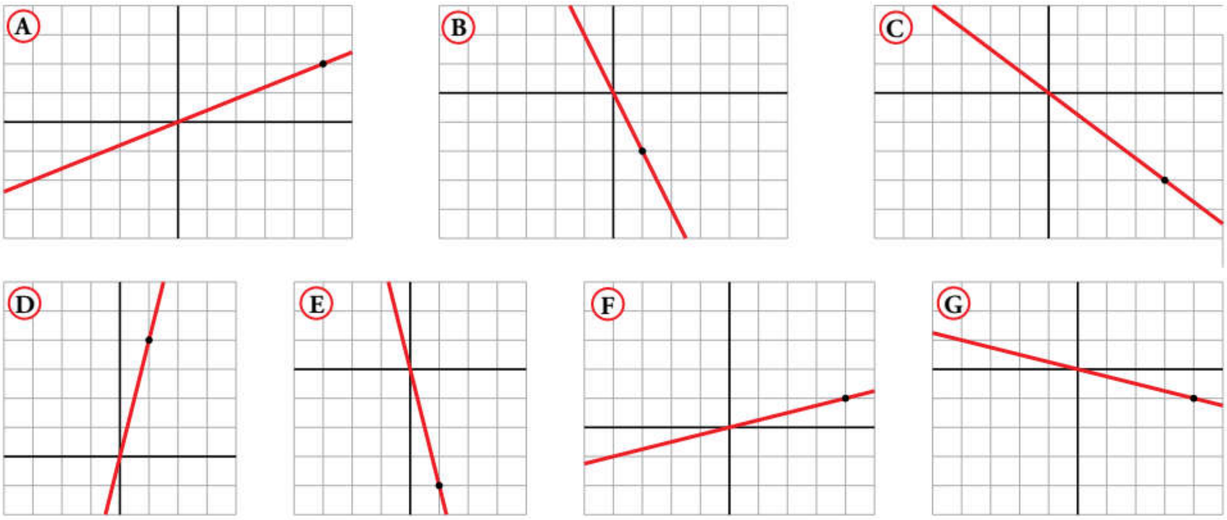
Si m<0

Función Decreciente

Conocido un punto de la recta (x_o,y_o) diferente del origen de coordenadas, podemos calcular la pendiente despejandola de la expresión:

$$y = mx \quad \rightarrow \quad m = \frac{y}{x} = \frac{y_0}{x_0} = \frac{\text{Lo que sube (o baja)}}{\text{Lo que avanza}}$$

8.- Indica la ecuación de las siguientes funciones de proporcionalidad:



a) $m = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\text{Lo que sube (o baja)}}{\text{Lo que avanza}} = \dfrac{2}{5} \quad \rightarrow \quad y = \dfrac{2}{5}x$ b) $\mathrm{m} = \dfrac{-2}{1} = -2 \quad \rightarrow \quad y = -2x$

c) $\mathrm{m} = \dfrac{-3}{4} = -\dfrac{3}{4} \quad \rightarrow \quad y = -\dfrac{3}{4}x$ d) $\mathrm{m} = \dfrac{4}{1} = 4 \quad \rightarrow \quad y = 4x$ e) $y = -4x$

f) $y = \dfrac{1}{4}x$ g) $y = -\dfrac{1}{4}x$

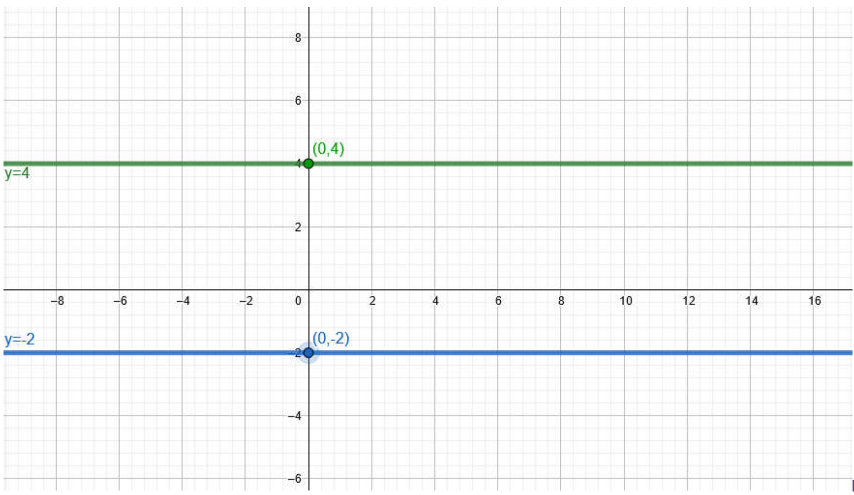
10.6.2.- Funciones Constantes

$$Si\ \mathrm{m} = 0 \quad \rightarrow \quad y = mx + b = 0\cdot x + b = b \quad \rightarrow \quad y = b$$

Se llama función constante a la función lineal que en la que el valor de y es siempre el mismo independientemente del valor de la variable x.

Su pendiente es m=0 y si gráfica es paralelea al eje y.

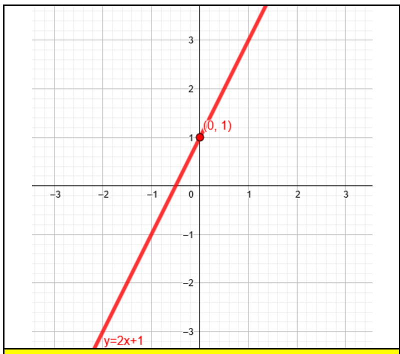
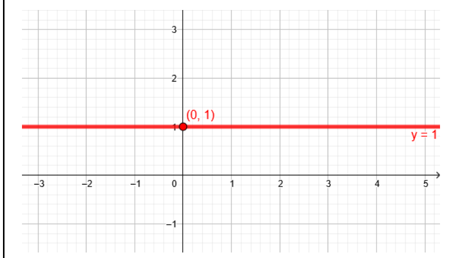
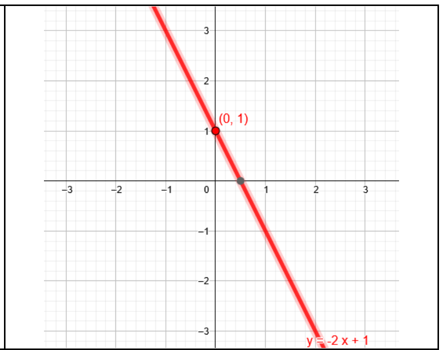
Su ordenada en el origen es (0,b).



10.6.2.- Función afín

Si a dos magnitudes directamente proporcionales se les aplica alguna condición inicial, la función que las liga ya no es una función de proporcionalidad, si no que es una función afín. Su gráfica sigue siendo una línea recta de pendiente m pero ya no pasa por el origen sino por el punto *(0,b)*.

$$Si \begin{cases} m \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \rightarrow \quad y = mx + b \quad con \quad \begin{cases} m : pendiente \\ b : ordenada\ en\ el\ origen \end{cases}$$

		
Si m>0	**Si m=0**	**Si m<0**
Función Creciente	***Función Constante***	***Función Decreciente***

Existen distintas formas de presentar la ecuación de una función lineal o ecuación de una recta:

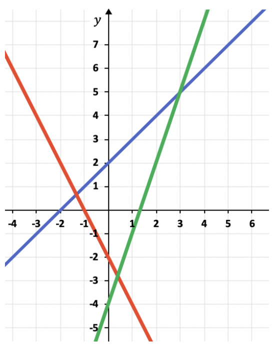
$y = mx + n$	$y - y_o = m(x - x_o)$	$ax + by - c = 0$
Forma Explícita	**Forma Punto - Pendiente**	**Forma General**

La forma explícita es la que ya conocemos ***(función afín)***, la forma general es aquella en la que pasamos todo al primer miembro y la dejamos igualada a 0. La forma punto pendiente la estudiaremos un poco más adelante.

Conocidos dos puntos de la recta (x_1,y_1) y (x_2,y_2), podemos calcular la pendiente de la recta que los une haciendo como hemos hecho anteriormente.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_2} = \frac{Lo\ que\ sube\ (o\ baja)}{Lo\ que\ avanza}$$

8.- Indica la ecuación de las siguientes funciones:



$$azul)\ m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_2} = \frac{Lo\ que\ sube\ (o\ baja)}{Lo\ que\ avanza} = \frac{3}{3} = 1 \quad \rightarrow \quad y = 1x + b$$
$$\rightarrow \quad y = x + 2$$

$$rojo)\ m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_2} = \frac{Lo\ que\ sube\ (o\ baja)}{Lo\ que\ avanza} = \frac{-2}{1} = -2 \quad \rightarrow \quad y = -2x + b$$
$$\rightarrow \quad y = -2x - 2$$

$$verde)\ m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_2} = \frac{Lo\ que\ sube\ (o\ baja)}{Lo\ que\ avanza} = \frac{3}{1} = 3 \quad \rightarrow \quad y = 3x + b$$
$$\rightarrow \quad y = 3x - 4$$

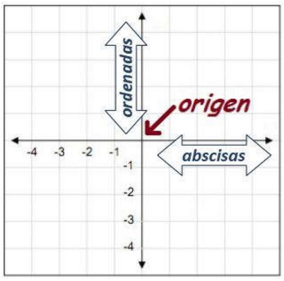
10.07.- Representación de Funciones Lineales

Para representar la gráfica de una función lineal necesitamos obtener los puntos cartesianos por los que pasa. Para ello:

- Hacemos una tabla de doble entrada en la que nos inventamos los valores de la variable independiente, x (siempre fáciles y no muy grandes), como, por ejemplo: -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 y los sustituimos en la función para calcular los distintos valores de y. ***(Valores numéricos)***

x	y	(x,y)
-2		
-1		
0		
1		
2		

(como es una línea recta con 2 puntos sería suficiente, pero mejor calculamos como mínimo tres)



- Se representan los puntos *(x,y)* en el ***plano cartesiano*** y se unen con una línea recta, obteniendo la gráfica de la función deseada.

Ejemplo

8.- Representa la gráfica de la función dada por la ecuación general: 3x+y=45

Para ello, lo primero es despejar la variable y:

$$y = f(x) = 45 - 3x$$

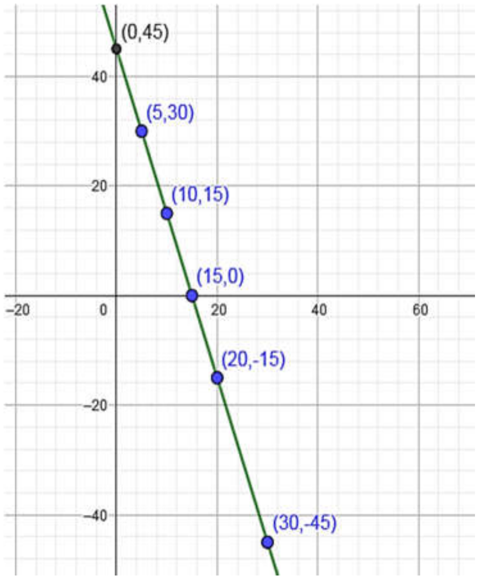
Una vez despejada, hacemos una tabla de doble entrada en la que nos inventamos algunos valores de x.

x	0	5	10	15	20	30
y	45	30	15	0	-15	-45

Y calculamos su valor sustituyendo en la función:

$f(0) = 45 - 3 \cdot 0 = 45 - 0 = 45$ $\quad f(5) = 45 - 3 \cdot 5 = 45 - 15 = 30$

$f(10) = 45 - 3 \cdot 10 = 45 - 30 = 15$ $\quad f(15) = 45 - 3 \cdot 15 = 45 - 45 = 0$



Y una vez hecho esto se representan todos los puntos *(x,y)* en el plano cartesiano y, cómo podemos observar, quedan alineados en una recta.

Recta de ecuación: $3x + y = 45$

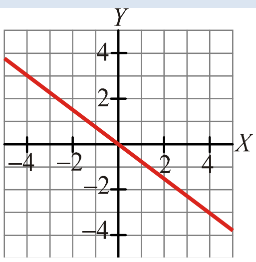
Piensa y practica

4.- Representa las funciones en un mismo sistema cartesiano:

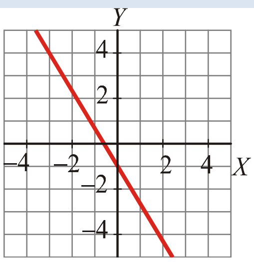
a) $y = 3x - 9$ ***b)*** $y = 7 - 2x$ ***c)*** $y = -5$

5.- Asocia cada gráfica con su ecuación:

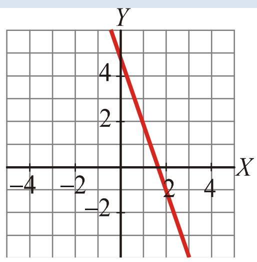
a)



b)



c)

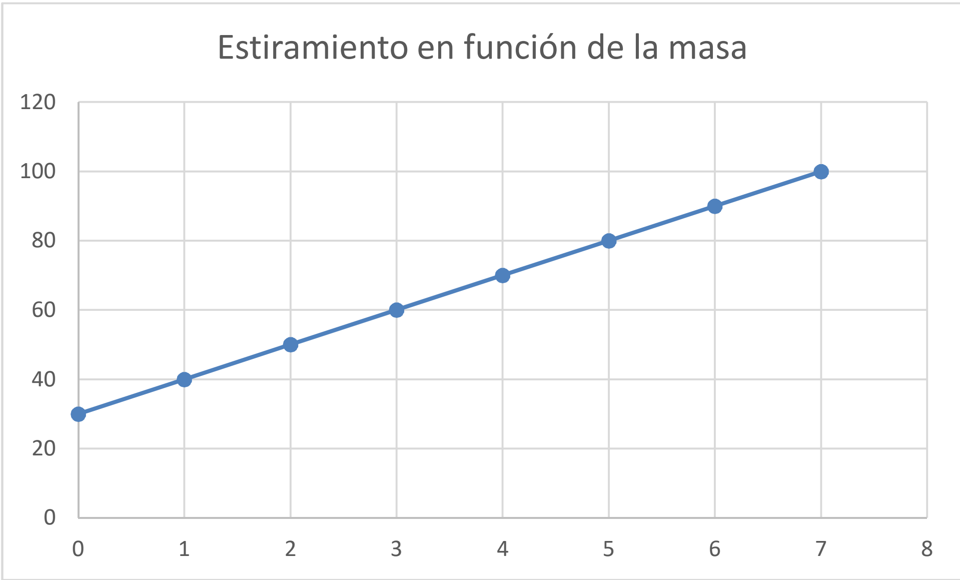


$f(x) = -\dfrac{5}{3}x - 1$ $\qquad g(x) = -3x + 5$ $\qquad h(x) = \dfrac{-3x}{4}$

Ejemplo

9.- Un muelle mide 30 cm y se alarga otros 10 cm por cada kilogramo que se cuelga de él. Sabiendo que no se pueden colgar más de 7,5 kg, expresa algebraicamente la función que relaciona la longitud, L, del muelle con la masa, m, que se va colgando de él y represéntala gráficamente con la ayuda de una tabla de valores.

Masa (Kg)	Longitud (Cm)
0	30
1	40
2	50
3	60
4	70
5	80
6	90
7	100



10.08.- Funciones Cuadráticas

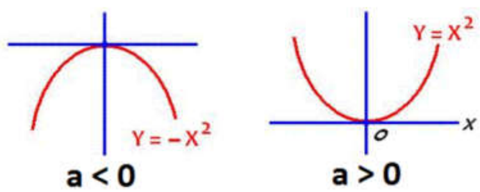
La curva que describe un balón cuando se lanza a canasta es una parábola. También describen parábolas las bolas de golf o los chorros de agua.

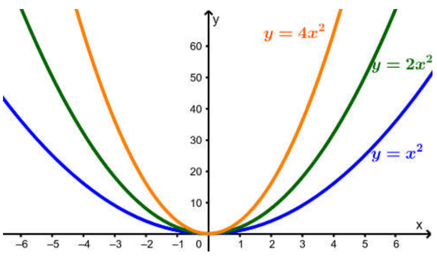
Parabólicas son las secciones de las antenas que captan las emisiones de televisión procedentes de los satélites artificiales y las secciones de los faros de los coches.

as funciones de la forma $y = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, llamadas ***funciones cuadráticas***, se representan todas ellas mediante parábolas con su eje de simetría paralelo al eje Y. Son funciones cuya expresión algebraica es un polinomio de segundo grado.

Según sea el valor de a, tendremos:

- Si a>0, las ramas van hacia arriba (Alegre)
- Si a<0, las ramas van hacia abajo (Triste)

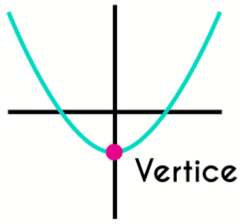




Cuanto mayor sea el valor absoluto de a, |a|, más estilizada (abierta) será la parábola.

10.8.1.- Representación de Funciones cuadráticas

Como ya se ha dicho, las funciones cuadráticas se representan mediante parábolas cuya forma depende, exclusivamente, del coeficiente de x^2. Veamos ahora algunos pasos que conviene dar para la representación de $y = f(x) = ax^2 + bx + c$:



La primera es encontrar el vértice de la parábila de coordenadas $V = (V_x, V_y)$; para ello calcularemos primero la abscisa del vértice de la siguiente forma: $V_x = \frac{-b}{2a}$

Una vez esto hecho calculamos la ordenada del vértice, sustituyendo el valor obtenido en la función original:

$$V_y = f(V_x)$$

Una vez conocido el vértice, $V = (V_x, V_y) = \left(\frac{-b}{2a}, f(v_x)\right)$, lo siguiente es calcular los puntos de cortes con los ejes que como ya hemos visto con anterioridad en el punto 10.5.5 se calculan:

$$\text{Ptos. de corte} \begin{cases} eje\ x: & hacemos \quad f(x)=0 \\ eje\ y: & calculamos \quad f(0) \end{cases}$$

En general, con el vértice, los dos puntos de corte con el eje x y el punto de corte con el eje y es suficiente, pero si vemos que no lo es, sería conveniente calcular el valor de la función en abscisas enteras próximas al vértice, a su derecha y a su izquierda y así conoceremos mejor la curva en su parte más interesante.

Una vez hecho esto, escogeremos sobre los ejes unas escalas que nos permitan plasmar la información en un espacio razonable y dibujaremos la gráfica.

Ejemplo

10.- Representa la función $y=f(x)=x^2+2x-8$

Empezamos calculando el vértice: $\begin{cases} V_x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(2)}{2\cdot 1} = -1 \\ V_y = f(V_x) = (-1)^2 + 2\cdot(-1) - 8 = 1 - 2 - 8 = -9 \end{cases} \rightarrow \quad V = (-1, -9)$

Después, calculamos los puntos de corte con los ejes:

- *Eje x* $\rightarrow \quad f(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + 2x - 8 = 0$

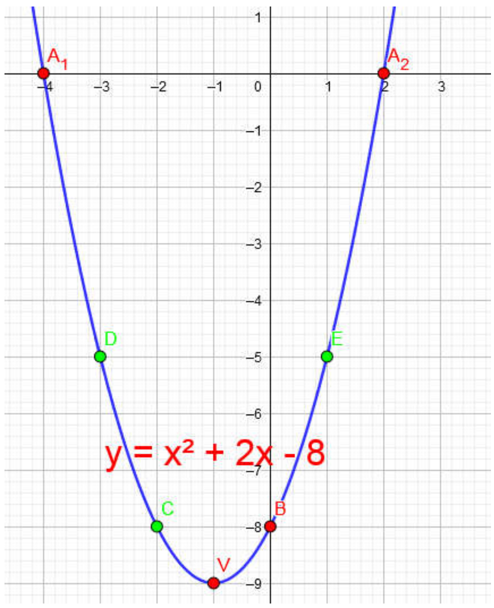
  $\rightarrow \quad (x-2)\cdot(x+4) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -4 \end{cases}$
- *Eje y*: $\rightarrow \quad f(0) = (0)^2 + 2\cdot(0) - 8 = -8$

La función corta con los ejes en los puntos:

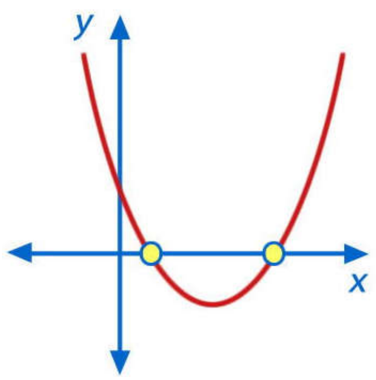
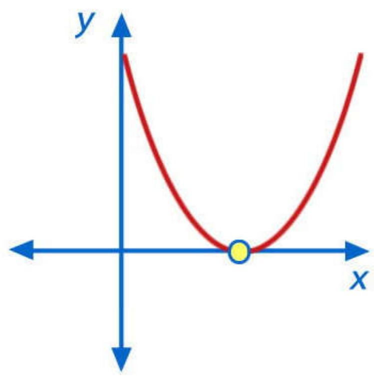
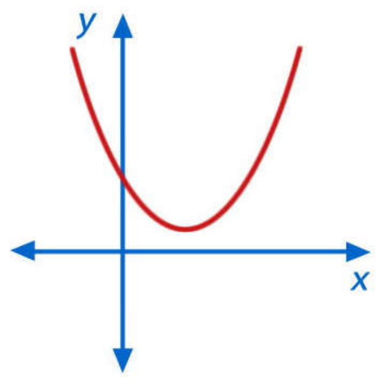
$A_1 = (-4, 0) \qquad A_2 = (2, 0) \qquad y \qquad B = (0, -8)$

Aunque no necesitaríamos más, en este ejemplo hemos calculado además, los puntos:

$C = (-2, 8) \qquad D = (-3, -5) \qquad y \qquad E = (1, -5)$



A la hora de calcular los puntos de corte con el eje x, nos podemos encontrar con tres caso diferentes:

Si $\Delta>0$, la ecuación tendrá dos raíces, por tanto la función corta dos veces con el eje x:	Si $\Delta=0$, la ecuación tendrá una raíz, por tanto la función corta una sola vez con el eje x:	Si $\Delta<0$, la ecuación no tiene raíces, por tanto la función no corta con el eje x:
		

10.8.2.- Resolución de problemas con funciones cuadráticas

Existen una gran cantidad de problemas en el mundo real que se resuelven mediante las funciones cuadráticas. Veamos algún ejemplo:

Ejemplo

11.- Un consultorio médico abre a las 5 de la tarde y cierra cuando no hay pacientes. La expresión que representa el número medio de pacientes en función del tiempo en horas, t, que lleva abierto el consultorio es $N(t)=4t-t^2$.

a) ¿A qué hora el número medio de pacientes es máximo? ¿Cuál es ese máximo?
b) Sabiendo que el consultorio cierra cuando no hay pacientes. ¿a qué hora cerrará?

Observamos que se trata de una función cuadrática en la que a<0, por tanto tiene forma de U invertida.

Nos preguntan por el máximo, como se trata de una U invertida, el máximo se encuentra en el vértice, así que empezamos calculando el vértice: $\begin{cases} V_x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-4}{2\cdot(-1)} = 2 \\ V_y = f(V_x) = 4\cdot 2 - 2^2 = 8-4 = 4 \end{cases} \rightarrow \quad V=(2,4)$

Así que el número de pacientes es máximo a las dos horas de abrir el consultorio. A las 17 + 2 = 19 h dela tarde. En cuanto a ese máximo es de 4 pacientes.

Para calcular la hora a la que cerrará el consultorio igualamos la función a cero, es decir, calculamos los puntos de corte con los ejes:

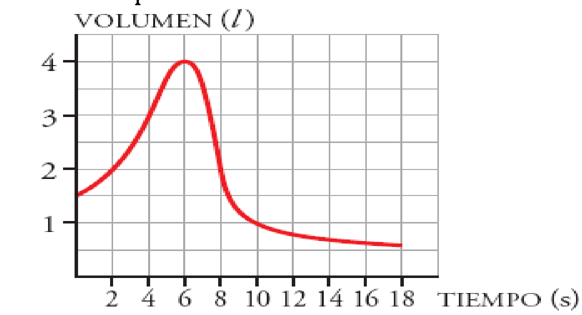
- *Eje x* $\quad \rightarrow \quad f(x)=0 \quad \rightarrow \quad 4t-t^2=0 \quad \rightarrow \quad t\cdot(4-t)=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} t_1=0 \\ t_2=4 \end{cases}$
- *Eje y* : $\quad \rightarrow \quad f(0)=0$

Por tanto cerrará 4 horas después de la apertura, es decir a las 21 horas:

Así que, el número de pacientes es máximo a las 19h, y ese máximo es de 4 pacientes, mientras que cerrarán a las 21 cuando no quedan pacientes.

10.09.- Autoevaluación

1.- Para medir la capacidad espiratoria de los pulmones de una persona, se hace una prueba que consiste en inspirar al máximo y, después, espirar tan rápido como se pueda en un aparato llamado espirómetro.



Esta curva indica el volumen de aire que entra y sale de los pulmones.

a) ¿Cuál es el volumen en el momento inicial?
b) ¿Cuánto tiempo duró la observación?
c) ¿Cuál es la capacidad máxima de los pulmones de esta persona?
d) ¿Cuál es el volumen a los 10 segundos de iniciarse la prueba? ¿Y cuándo termina?

2.- Representa una función definida en el intervalo (0,12) que tenga un mínimo en el punto (3, 2) y un máximo en (7, 8). Describe un tramo creciente y un tramo decreciente.

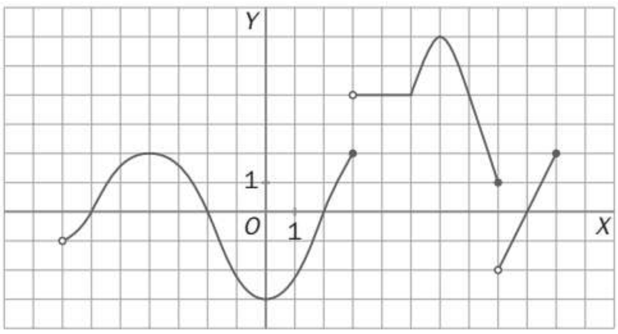
3.- La tabla indica la cantidad de agua de un depósito de 30 litros cuando se abre un grifo:

Tiempo (min)	0	1	2	3	4
Volumen (l)	0	5	10	15	20

a) Representa la función tiempo - volumen.
b) ¿Cuál de estas tres expresiones corresponde a esta función?

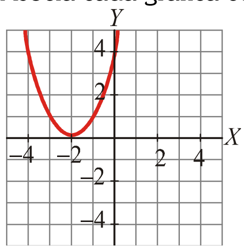
$y = 2x \qquad y = 5x \quad y = 5/x$

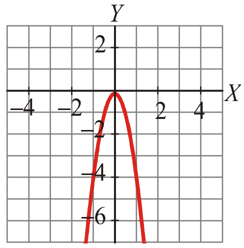
4.- Observa la gráfica y estudia sus características:

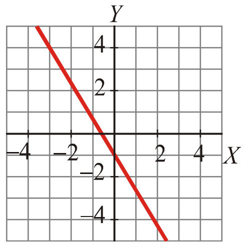


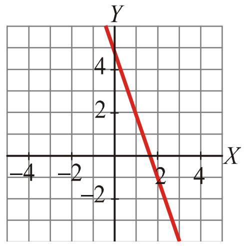
5.- Representa la función de la que sabemos: *Dom (f)* = [-10,9], que *f(-10)* = *5* y que *f(9)* = *1*, que es continua en [-10,9], que crece en [-6,-1]U[4,9] y que decrece en [-10,-6]U[-1,4], que tiene un máximo en (-1,2), y mínimos en (-6,-3) y (4,-2), que corta al eje X en los puntos (-7,0), (-3,0), (1,0) y (7,0) y al eje Y en el punto (0,1).

6.- Asocia cada gráfica con su ecuación:

a)


b)


c)


d)


1) $y = -3x + 5$ **2)** $y = (x+2)^2$

3) $y = -\dfrac{5}{3}x - 1$ **4)** $y = -4x^2$

7.- En una agencia de alquiler de coches cobran, para un modelo concreto, 50 € fijos más 0,20 € por cada kilómetro recorrido. En otra agencia, por alquilar el mismo modelo, cobran 20 € fijos más 0,30 € por cada kilómetro recorrido.

a) Obtén, en cada uno de los dos casos, la expresión analítica de la función que nos da el gasto total según los kilómetros recorridos.
b) Representa, en los mismos ejes, las dos funciones anteriores. (Elige una escala adecuada, tomando los kilómetros de 100 en 100).
c) Analiza cuál de las dos opciones es más ventajosa, según los kilómetros que vayamos a recorrer.

8.- Se sabe que la función cuadrática de ecuación $y=ax^2+bx+c$ pasa por los puntos (1,1), (0, 0) y (-1,1). Calcula a, b y c.

9.- En el manual de instrucciones de un cañón de artillería podemos leer que la altura alcanzada en metros por el proyectil, y, está en función del espacio recorrido horizontalmente, x, según la ecuación $y = -0{,}005x^2 + 3x$.

a) Representa gráficamente dicha función.
b) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el proyectil?
a) ¿Cuál es el espacio recorrido por el proyectil hasta dar a un objetivo situado en tierra?