1. Utilizando identidades notables, desarrollar las siguientes expresiones:

   a) $(x+2)^2$

   b) $(x-2)^2$

   c) $(x+2)(x-2)$

   d) $(2x+3)^2$

   e) $(3x-5)^2$

   f) $(3x+2)(3x-2)$

   g) $(ax+1)^2$

   h) $(ax-b)^2$

   i) $(3x-2)^2$

   j) $(2x+5)(2x-5)$

   k) $(-1+2x)^2$

   l) $(-2-x)^2$

   m) $\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)$

   n) $\left(x+\sqrt{2}\right)^2$

   o) $(x^2+x+2)^2$

2. **a)** Razonar por qué $(A-B)^2$ y $(B-A)^2$ dan el mismo resultado. **b)** Ídem con $(A+B)^2$ y $(-A-B)^2$

3. Averiguar de qué expresiones notables proceden los siguientes polinomios (Fíjate en el 1er ejemplo):

   a) $x^2+2x+1=(x+1)^2$

   b) x^2-4x+4

   c) x^2-1

   d) x^2+6x+9

   e) $x^2-8x+16$

   f) x^2-4

   g) $9-x^2$

   h) $x^2+2ax+a^2$

   i) $3x^2+6x+3$

   j) x^2-a^2

   k) $a^2x^2-b^2$

   l) x^2-16

   m) $x^2+10x+25$

   n) x^2-2

   o) $4x^2-9$

   p) $a^2x^2-2ax+1$

   q) x^4-16

   r) $4x^2+4x+1$

   s) x^2-6x+9

   t) x^2-25

   u) $25x^2-16$

4. Utilizar **identidades notables** para simplificar las siguientes fracciones algebraicas:

   a) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$ $\left(Soluc:\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

   b) $\dfrac{x^2-16}{x^2-4x}$ $\left(Soluc:1+\dfrac{4}{x}\right)$

   c) $\dfrac{2x+4}{2x-4}$ $\left(Soluc:\dfrac{x+2}{x-2}\right)$

   d) $\dfrac{2x^2-2}{3x^2+6x+3}$ $\left(Soluc:\dfrac{2x-2}{3x+3}\right)$

   e) $\dfrac{x^2+2ax+a^2}{mx+ma}$ $\left(Soluc:\dfrac{x+a}{m}\right)$

   f) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+xy}$ $\left(Soluc:1-\dfrac{y}{x}\right)$

   g) $\dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}$ $\left(Soluc:\dfrac{x+2}{x-2}\right)$

   h) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^4-1}$ $\left(Soluc:\dfrac{x+1}{x^3-x^2+x-1}\right)$

   i) $\dfrac{x^2-2ax+a^2}{x^2-a^2}$ $\left(Soluc:\dfrac{x-a}{x+a}\right)$

   j) $\dfrac{a^2x^2-1}{a^2x^2+2ax+1}$ $\left(Soluc:\dfrac{ax-1}{ax+1}\right)$

5. Utilizar el **teorema del factor** para simplificar, siempre que sea posible, las siguientes fracciones algebraicas:

   a) $\dfrac{x-2}{x^2+x-6}$ $\left(Soluc:\dfrac{1}{x+3}\right)$

   b) $\dfrac{x-1}{2x^2-3x+1}$ $\left(Soluc:\dfrac{1}{2x-1}\right)$

   c) $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$ $\left(Soluc:\dfrac{x+3}{x+2}\right)$

   d) $\dfrac{x^2-1}{5x^2+4x-9}$ $\left(Soluc:\dfrac{x+1}{5x+9}\right)$

   e) $\dfrac{x+2}{x^2-1}$ $(Soluc:irreducible)$

   f) $\dfrac{x^2+x-2}{x+2}$ $(Soluc:x-1)$

   g) $\dfrac{2x-2}{x^2+x-2}$ $\left(Soluc:\dfrac{2}{x+2}\right)$

   h) $\dfrac{x-3}{x^2+5x+6}$ $(Soluc:irreducible)$

   i) $\dfrac{x-1}{5x^2+4x-9}$ $\left(Soluc:\dfrac{1}{5x+9}\right)$

   j) $\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ $\left(Soluc:\dfrac{x^2+x+1}{x+1}\right)$

   k) $\dfrac{2x^2-x-6}{x^2-4}$ $\left(Soluc:\dfrac{2x+3}{x+2}\right)$

   l) $\dfrac{x^2-a^2-a}{x^2-a^2}$ $\left(Soluc:\dfrac{x+a+1}{x+a}\right)$

6. Averiguar, **factorizando** previamente numerador y denominador, si es posible simplificar las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 2}$ $\left(Soluc: \dfrac{x-1}{x+1}\right)$

b) $\dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x + 2}$ $\left(Soluc: \dfrac{x-1}{x+1}\right)$

c) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5x + 6}$ $(Soluc: irreducible)$

d) $\dfrac{2x^2 - 3x + 1}{2x^2 - x - 1}$ $\left(Soluc: \dfrac{2x-1}{2x+1}\right)$

e) $\dfrac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$ $\left(Soluc: \dfrac{x-3}{x+1}\right)$

f) $\dfrac{x^2 + x + 2}{x^2 - x + 1}$ $(Soluc: irreducible)$

g) $\dfrac{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$ $\left(Soluc: \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 5x + 6}\right)$

h) $\dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 - 2x + 1}$ $(Soluc: x-1)$

i) $\dfrac{4x^2 - 1}{4x^2 + 4x + 1}$ $\left(Soluc: \dfrac{2x-1}{2x+1}\right)$

j) $\dfrac{x^3 - x^2 - 10x - 8}{x^2 + 3x - 4}$ $(Soluc: irreducible)$

k) $\dfrac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x^3 + 4x^2 + x - 6}$ $\left(Soluc: \dfrac{x-3}{x+3}\right)$

l) $\dfrac{4x^3 + 7x^2 + 2x - 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$ $\left(Soluc: \dfrac{4x-1}{x+1}\right)$

m) $\dfrac{2x^3 - x^2 - 8x + 4}{x^3 + 8}$ $\left(Soluc: \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 2x + 4}\right)$

n) $\dfrac{4x^3 - 2x^2 - 4x + 2}{2x^3 - 5x^2 + 4x - 1}$ $\left(Soluc: \dfrac{2x+2}{x-1}\right)$

o) $\dfrac{2x^3 - x^2 - 2x + 1}{2x^3 - 5x^2 + 4x - 1}$ $\left(Soluc: \dfrac{x+1}{x-1}\right)$

p) $\dfrac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^3 - 3x^2 + 4x - 12}$ $\left(Soluc: \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 4}\right)$

q) $\dfrac{x^2 + x + 1}{x^3 - 1}$ $\left(Soluc: \dfrac{1}{x-1}\right)$

r) $\dfrac{4x^3 - 8x^2 - x + 2}{2x^3 - x^2 - 8x + 4}$ $\left(Soluc: \dfrac{2x+1}{x+2}\right)$

s) $\dfrac{x^2 - 4}{x^3 - 7x - 6}$ $\left(Soluc: \dfrac{x-2}{x^2 - 2x - 3}\right)$

7. Efectuar las siguientes sumas y restas reduciendo previamente a común denominador y dando el <u>resultado simplificado</u> (NOTA: Con un * se indican aquellos casos en los que, al final del proceso de sumas y restas de F.A., se obtiene una expresión que se puede simplificar):

a) $\dfrac{3}{2x+4} + \dfrac{2x}{x^2 - 4}$ $\left(Soluc: \dfrac{7x-6}{2x^2 - 8}\right)$

b) $\dfrac{x^2 - 1}{x^3} - \dfrac{2x}{x^2 + 7}$ $\left(Soluc: \dfrac{-x^4 + 6x^2 - 7}{x^5 + 7x^3}\right)$

c) $\dfrac{x}{x^2 - 1} + \dfrac{1}{x^2 - x - 2}$ $\left(Soluc: \dfrac{x^2 - x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}\right)$

r) $\dfrac{a+b}{a-b} - \dfrac{2ab}{a^2 - b^2}$ $\left(Soluc: \dfrac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}\right)$

d) $\dfrac{x-2}{x+2} + \dfrac{x+2}{x-2}$ $\left(Soluc: \dfrac{2x^2 + 8}{x^2 - 4}\right)$

* s) $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{x^2 + 4x + 8}{(x+2)^2(x-2)} + \dfrac{1}{x^2 - 4}$ $\left(Soluc: \dfrac{1}{x^2 + 4x + 4}\right)$

e) $\dfrac{2x}{x^2 - 4} + \dfrac{x+1}{4x - 8}$ $\left(Soluc: \dfrac{x^2 + 11x + 2}{4x^2 - 16}\right)$

* t) $\dfrac{x-2}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{6x - x^2}{x^2 - 4}$ $\left(Soluc: \dfrac{1}{x-2}\right)$

f) $\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x-1}{x+1}$ $\left(Soluc: \dfrac{4x}{x^2 - 1}\right)$

* u) $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3x + 3}{x^2 + x - 2} + \dfrac{1}{x+2}$ $\left(Soluc: \dfrac{1}{1-x}\right)$

* g) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2x}{x^2 - 1} - \dfrac{1}{x-1}$ $\left(Soluc: \dfrac{2}{x+1}\right)$

v) $\dfrac{x-1}{x^2 - 4} - \dfrac{x-2}{x^2 + 2x} + \dfrac{1}{x-2}$ $\left(Soluc: \dfrac{x^2 + 5x - 4}{x^3 - 4x}\right)$

h) $1 - \dfrac{x}{y}$ $\left(Soluc: \dfrac{y-x}{y}\right)$

* w) $\dfrac{x+1}{x-2} + \dfrac{x-2}{x+2} - \dfrac{12}{x^2 - 4}$ $\left(Soluc: \dfrac{2x+3}{x+2}\right)$

i) $x - \dfrac{x^2 - 1}{x}$ $\left(Soluc: \dfrac{1}{x}\right)$

x) $\dfrac{x-2}{x^2 + x - 2} - \dfrac{x+1}{x^2 - 4} + \dfrac{x+3}{x^2 - 3x + 2}$ $\left(Sol: \dfrac{x^2 + x + 11}{x^3 - x^2 - 4x + 4}\right)$

y) $\dfrac{x^2 - x + 9}{x^3 - 9x} + \dfrac{1}{x^2 - 9} - \dfrac{1}{x-3} + \dfrac{1}{x}$ $\left(Soluc: \dfrac{1}{x+3}\right)$

j) $\dfrac{3x-2}{x^2 - 1} + \dfrac{x+2}{x-1}$ $\left(Soluc: \dfrac{x^2 + 6x}{x^2 - 1}\right)$

z) $\dfrac{2x}{x-1} + \dfrac{3x+1}{x-1} - \dfrac{1-x}{x^2 - 1}$ $\left(Soluc: \dfrac{5x^2 + 7x}{x^2 - 1}\right)$

k) $\dfrac{7x}{6x+12}-\dfrac{x+5}{2x^2-8}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{7x^2-17x-15}{6x^2-24}\right)$

α) $\dfrac{4}{x+1}+\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{x+1}{x-1}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x^4+7x^3-2x^2+5x-3}{x^4-1}\right)$

l) $\dfrac{x+3}{x^2+1}+\dfrac{2x}{x-3}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{2x^3+x^2+2x-9}{x^3-3x^2+x-3}\right)$

β) $\dfrac{3}{2x-4}+\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{x+10}{2x^2-8}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{2}{x+2}\right)$

m) $\dfrac{3x}{x^2-1}-\dfrac{x+2}{x+1}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{-x^2+2x+2}{x^2-1}\right)$

* γ) $\dfrac{x-x^2}{1-x^2}+\dfrac{1+x}{x^2+2x+1}-\dfrac{1-2x}{1+x}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{3x}{x+1}\right)$

n) $\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x+1}{x^2-1}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x^2+x+2}{x^2-1}\right)$

δ) $\dfrac{1}{x(x-1)}+\dfrac{2x+1}{x^2-1}+\dfrac{x}{(x+1)^2}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{3x^3+3x^2+3x+1}{x^4+x^3-x^2-x}\right)$

o) $\dfrac{x+2y}{x^2-y^2}+\dfrac{2x-5y}{x-y}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{2x^2-5y^2-3xy+x+2y}{x^2-y^2}\right)$

ε) $\dfrac{1}{x^2-9x+20}-\dfrac{1}{x^2-11x+30}+\dfrac{1}{x^2-10x+24}$

$\left(Soluc:\ \dfrac{x-7}{x^3-15x^2+24x-120}\right)$

p) $\dfrac{x-y}{xy}+\dfrac{y-z}{yz}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x-z}{xz}\right)$

q) $x+\dfrac{1}{x}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x^2+1}{x}\right)$

---

8. Efectuar los siguientes productos y cocientes, dando el <u>resultado simplificado</u>:

a) $\dfrac{3x-1}{x^2-9}\cdot\dfrac{x+3}{2x}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{3x-1}{2x^2-6x}\right)$

f) $\dfrac{\dfrac{x+1}{x^2-2}}{\dfrac{x-1}{x^2+2}}=$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x^3+x^2+2x+2}{x^3-x^2-2x+2}\right)$

b) $\dfrac{x+1}{x^2-2}:\dfrac{x^2+2}{x-1}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x^2-1}{x^4-4}\right)$

c) $\dfrac{\dfrac{x+1}{x+2}}{\dfrac{x+1}{x+3}}=$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x+3}{x+2}\right)$

g) $\dfrac{\dfrac{x-1}{x^2-1}}{\dfrac{x+1}{x^2+2x+1}}=$ $(Soluc:\ 1)$

d) $\dfrac{\dfrac{3x+1}{x^2-4}}{\dfrac{x}{x^2-4x+4}}=$ $\left(Soluc:\ \dfrac{3x^2-5x-2}{x^2+2x}\right)$

h) $\dfrac{\dfrac{x^3-3ax^2+3a^2x-a^3}{x+a}}{\dfrac{x-a}{x+a}}=$ $\left(Soluc:\ x^2-2ax+a^2\right)$

e) $\dfrac{3x-1}{x^2}\cdot\dfrac{x+1}{x^5}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{3x^2+2x-1}{x^7}\right)$

i) $\dfrac{9\,\dfrac{x+2y}{3}+6z}{3}=$ $(Soluc:\ x+2y+2z)$

k) $\dfrac{A}{B}(1-B)+A=$ $(Soluc:\ A/B)$

j) $\dfrac{\dfrac{x}{3}}{\dfrac{2\,\dfrac{x}{a}\,\dfrac{x}{3}1}{2}}=$ $(Soluc:\ 1/2)$

l) $\dfrac{\dfrac{x^3-x}{2x^2+6x}}{\dfrac{5x^2-5x}{2x+6}}=$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x+1}{5x}\right)$

m) $\dfrac{\dfrac{2}{a}}{-\dfrac{1}{2}}=$ $(Soluc:\ a-2)$

---

9. Efectuar las siguientes operaciones combinadas con F.A. y simplificar:

a) $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(\dfrac{2x}{x^2-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)=$ $\left(Soluc:\ \dfrac{1}{x}\right)$

b) $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}+\dfrac{x+2}{x-2}\,\dfrac{x-1}{x+1}=$ $\left(Soluc:\ \dfrac{2x^3-2x^2-2x}{x^3-2x^2-x+2}\right)$

c) $\left(\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\dfrac{a+b}{a-b}\right)\dfrac{a+b}{ab}=$ $\left(Soluc:\ -\dfrac{2}{a-b}\right)$

d) $\dfrac{xy}{x^2-y^2}:\dfrac{x-y}{y}+\dfrac{y}{x-y}=$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right)$

---

10. Demostrar que: **a)** $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Rightarrow\dfrac{a-c}{b-d}=\dfrac{a}{b}$ **b)** $\dfrac{(a+b)^2}{4}-\dfrac{(a-b)^2}{4}=a\cdot b$