P. A. U. LAS PALMAS

JUNIO 2008

BLOQUE 1;

1A. Para la función dada por

Encontrar los valores de a, b y c que hacen que *f(x)* sea continua y admita primera y segunda derivada en el punto x = 1.

Una función

Aplicamos estas definiciones a la función

- Continuidad:

- Primera derivada:

- Segunda derivada:

Resolviendo el sistema formado por las tres ecuaciones anteriores, tenemos:

1B. Dada la función , determinar los valores de *a, b, c y d* para que se cumplan las siguientes condiciones: 1º) Que la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto (0, 2) sea paralela a la recta y + 1 = 0, y 2º) Que la recta *x – y – 2 = 0* sea tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa x = 1.

- *La pendiente de una recta es el coeficiente de "x" al despejar "y" en su ecuación.*
- *Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente.*
- *La ecuación de la recta tangente a f(x) en x = a es y = f(a) + f´(a)·(x – a)*

De la función , sabemos:

- La tangente en el punto (0, 2) es paralela a la recta y + 1 = 0 (m = 0) luego,

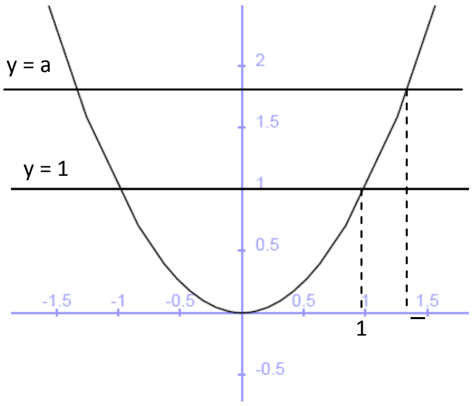
A partir de este momento, $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + 2$ y $f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2bx$.

- x – y + 2 = 0 (m = 1) es tangente a f(x) en

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones anteriores,

BLOQUE 2:

2A. Calcular el valor de *a* para que la región plana encerrada entre la parábola *$y = x^2$* y la recta *$y = a$* sea el doble del área de la región limitada por dicha parábola y la recta *$y = 1$.*



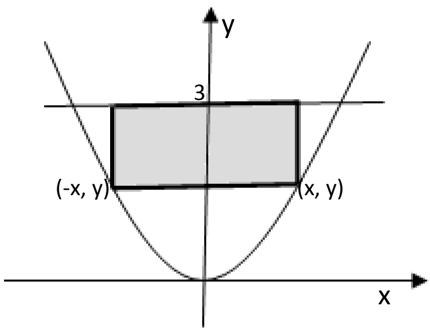
El área del recinto limitado por dos funciones que se cortan en $x = a$ y $x = b$ $(a < b)$ es:

Vamos a hallar los puntos de intersección de la parábola con las dos rectas:

Como la figura es simétrica, simplificamos los cálculos ya que

Llamamos A_1 al área comprendida entre $y = x^2$ e $y = 1$:

2B. Considérese el recinto limitado por la curva $y = x^2$ y la recta $y = 3$



De entre los rectángulos situados como el de la figura anterior, determinar el que tiene área máxima.

La función que vamos a optimizar es el área de un rectángulo cuya base (ver el gráfico) mide 2x y cuya altura es $(3 – y) = 3 – x^2$ (ya que el punto pertenece a la parábola $y = x^2$).

f(x) presenta un máximo en x = a si

(*) La solución negativa no tiene sentido al ser x la medida de un segmento.

BLOQUE 3:

3A. Estudiar el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a y resolverlo en los casos que sea posible:

Se trata de un sistema con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas (de Cramer) que sólo admite solución única si el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero. Calculamos det (C) e igualamos a cero.

- **, , el sistema es compatible determinado.** Vamos a resolverlo aplicando la regla de Cramer:

En el primer caso el numerador es también . En los otros dos, el determinante del numerador tiene dos columnas iguales.

- **Si a = 2 El sistema puede ser tanto compatible indeterminado como incompatible**. Vamos a estudiarlo en cada caso aplicando el Teorema de Rouché:

El sistema es compatible indeterminado. Resolvemos el sistema equivalente:

- **Si a = 7 El sistema puede ser tanto compatible indeterminado como incompatible**.
  Vamos a estudiarlo en cada caso aplicando el Teorema de Rouché:

El sistema es compatible indeterminado. Resolvemos el sistema equivalente:

3B. Dadas las matrices A

a) Razonar para qué valores de k la matriz $B^t \cdot A^t$ tiene inversa.

Recordando las propiedades de las matrices traspuestas, $B^t \cdot A^t = (A \cdot B)^t$

$A \cdot B =$ ·

$(A \cdot B)^t$ que sólo tendrá inversa si su determinante es

b) Resolver la ecuación $(A \cdot B)^t \cdot X = I$, para k = 0, siendo I la matriz unidad.

Despejando en la ecuación anterior, multiplicando por la izquierda por la inversa, $\mathbf{((A \cdot B)^t)^{-1} \cdot (A \cdot B)^t \cdot X = ((A \cdot B)^t)^{-1} \cdot I = ((A \cdot B)^t)^{-1}}$ Calculamos la inversa para k = 0:

$\mathbf{((A \cdot B)^t)^{-1} =}$—

BLOQUE 4 :

4A. Dadas las rectas

i) Determinar su posición relativa

Para determinar su posición relativa, estudiamos el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas. En este caso, el sistema es muy sencillo y lo podemos estudiar por procedimientos tradicionales:

ii) En caso de cortarse, determinar el ángulo que forman y el punto de corte.

El punto de corte ya lo hemos encontrado en el apartado anterior: **P (2, 4, – 1)**

El ángulo de las rectas es el menor de los que forman (dos rectas que se cortan determinan cuatro ángulos, iguales dos a dos y suplementarios). Se obtiene a partir de los vectores directores. Para encontrar el vector director de una recta dada como intersección de dos planos, tenemos en cuenta que la recta está contenida en cada uno de los planos por lo que su vector director es perpendicular a los vectores normales (A, B, C) de ambos planos, es decir, es su producto vectorial:

Aplicando la fórmula del ángulo de dos vectores, tenemos:

luego

4B. Se consideran la recta , el plano y el punto P(1, 1, 1), se pide:

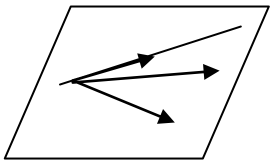
i) Determinar la ecuación del plano $_1$ que pasa por el punto P y es paralelo a

Las ecuaciones de dos planos paralelos tienen los coeficientes de x, y, z iguales o proporcionales, pero no el término independiente. Por lo tanto, la ecuación de todos los planos paralelos a es de la forma De ellos, el plano que buscamos pasa por el punto P (1, 1, 1) luego

$K = 2 \cdot 1 - 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = -4$ Por tanto, simplificando

ii) Determinar la ecuación general del plano ${}_2$ que contiene a la recta r y pasa por el punto P.

La recta *r* pasa por el punto R (2, 2, 3) y su vector director es



La ecuación general o cartesiana de un plano viene determinado por un punto A y dos vectores , y definida por la siguiente condición: Cualquier punto P(x, y, z) del plano debe verificar que **es combinación lineal de luego el determinante formado por los tres vectores es nulo.**
En nuestro caso, el plano está determinado por el punto R y los vectores

Efectuando, la ecuación cartesiana del plano será:

<u>**S E P T I E M B R E 2008**</u>

BLOQUE 1:

1A. **Dada la función , se pide:**

- **i) Hallar las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos.**
- **ii) Calcula, si existe, la ecuación de la asíntota horizontal.**

➢ *La condición necesaria para que una función presente un extremo (máximo o mínimo) relativo en x = a es que f´(a) = 0.*

Los puntos donde la función puede presentar extremo local son x = – 1, x = 0 y x = 1.

Para distinguir si se trata de un máximo o un mínimo, utilizamos el criterio de la derivada segunda:

- *Si f´(a) = 0 y f´´(a)>0, la función presenta en x = a un mínimo relativo.*
- *Si f´(a) = 0 y f´´(a)<0, la función presenta en x = a un máximo relativo.*

- *La recta y = l es una asíntota horizontal de f(x) si*

(*) Como tanto como son funciones derivables en ℝ, podemos aplicar el teorema de L´Hôpital: . También podemos comparar los infinitos y ver que el denominador (exponencial) es de orden superior al numerador (polinómico).

1B. Hallar los valores de *a, b y c* de forma que la función

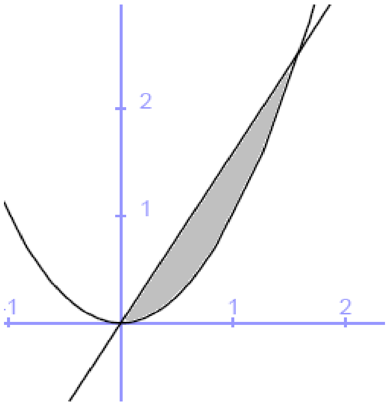
sea continua en el intervalo [– 2, 3], derivable en (– 2, 3) y tal que *f* (– 2) = *f* (3)

f(x) es continua y derivable en todo su dominio excepto en x = 0 ya que es un polinomio y es una función irracional, continua siempre que *x* y, por tanto, en [0, 3].

f(x) será continua en x = 0 si f(0) =

BLOQUE 2:

2A. Determina el valor de *a*, siendo *a*>0, para que el área de la región limitada por la curva $y = x^2$ y la recta $y = ax$ sea igual a 9/2.



El área del recinto limitado por dos funciones que se cortan en x = a y x = b (a < b) es:

Vamos a hallar los puntos de intersección de la parábola con la recta:

Si el área del recinto mide 9/2,

2B. Calcular las siguientes integrales:

i)

Las integrales en las que interviene un polinomio y un logaritmo se resuelven **por partes** llamando u al logaritmo.

ii)

Hemos descompuesto en dos integrales: la primera de tipo arcotangente y la segunda, un logaritmo neperiano:

BLOQUE 3:

3A. Dadas las matrices y la identidad de orden 2, *I* :

- **i) ¿Para qué valores de la matriz *A – mI* no admite inversa?**
- **ii) Describir las matrices *X* de orden 2 x 2 que cumplen:**

i) *Una matriz cuadrada no admite inversa si su determinante es cero:*

ii) Sea

3B. Se sabe que , calcula:

i) **ii)** – **iii)**

i) Sacando factor común 3 en la primera fila y, después, 5 en la tercera columna, tenemos:

ii) Entendemos la expresión – como el determinante de la matriz 1/3 A y

suponemos que la matriz A es . Como para multiplicar una matriz por un

número se multiplica cada elemento, al calcular el determinante podemos sacar factor común en cada línea y tenemos:

donde n es el orden de la matriz A

–

ii) Si en un determinante los elementos de una línea están formados por dos sumandos, podemos descomponerlo en la suma de dos determinantes. Así,

El primer determinante es el del enunciado y el segundo es nulo ya que la segunda y la tercera fila son proporcionales (

BLOQUE 4:

4A. Calcula la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano con la recta y es paralela a la recta

Para hallar el punto de intersección resolvemos el sistema formado por la ecuación del plano y

las dos ecuaciones de la recta:

Las matrices del sistema son

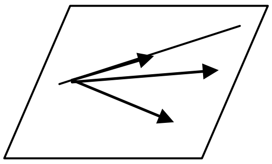
Resolvemos el sistema aplicando el teorema de Rouché, calculando el rango de las matrices por el método de Gauss:

R (C) = R (A) = 3: EL SISTEMA TIENE SOLUCIÓN ÚNICA, que obtenemos a partir del sistema equivalente:

El punto de intersección de la recta y el plano es P (– 9, – 1, – 4). La ecuación de la recta que pasa por P y es paralela a la recta s tiene la misma dirección que ésta. Su ecuación será:

4B. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P (– 1, 0, 2) y contiene a la recta

La recta r pasa por el punto R (0, 1, – 2) y su dirección es .



La ecuación general o cartesiana de un plano viene determinado por un punto A y dos vectores , y definida por la siguiente condición: Cualquier punto Q(x, y, z) del plano debe verificar que **es combinación lineal de luego el determinante formado por los tres vectores es nulo.**

En nuestro caso, el plano está determinado por el punto R y los vectores

Desarrollando el determinante por la primera fila,