**1.-** Representa gráficamente los siguientes números complejos y di cuáles son reales, cuáles imaginarios y, de estos, cuáles son imaginarios puros:

$$a)\ 5-3i \quad b)\ \frac{1}{2}+\frac{5}{4}i \quad c)\ -5i \quad d)\ 7$$

$$e)\ \sqrt{3}i \quad f)\ 0 \quad g)\ -1-i \quad h)\ 4i$$

**2.-** Representa gráficamente el opuesto y el conjugado de:

*a)* 3-5i *b)* -1-2i *c)* 5 *d)* 2i

*e)* 5+2i *f)* -2+3i *g)* 0 *h)* -5i

**3.-** Calcula: $\dfrac{3\cdot i^{770}+i^{2043}}{1+i^{4153}}$

Sol: -2+i

**4.-** Calcula a para que el número complejo $z=\dfrac{-a+i}{2-i}$

**a)** Sea imaginario puro; **b)** tenga módulo 2.

Sol: a) a=-1/2; b) $a=\pm\sqrt{19}$

**5.-** Halla todos los números complejos cuyo cuadrado coincida con su conjugado.

Sol: $z_1=0;\ z_2=1;\ z_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;\ z_4=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

**6.- a)** ¿Qué relación existe entre el conjugado del opuesto de un número complejo, $z=a+bi$, y el opuesto del conjugado del mismo número?. Razona la respuesta. **b)** calcula los números $x$ e $y$ de modo que $\dfrac{3-xi}{1+2i}=y+2i$

Sol: a) Son iguales; b) x=-16, y=7

**7.-** Calcula en cada caso el valor que ha de tener k para que el resultado de la operación sea un número imaginario puro:

$$a)\ (2-3i)\cdot(1+ki) \qquad b)\ \left(k+\sqrt{2}\cdot i\right)^2 \qquad c)\ \frac{k-2i}{8+2i}$$

Sol: a) k=-2/3; b) $k=\pm\sqrt{2}$ ; c) k=1/2

**8.-** Escribe en forma binómica los siguientes números complejos:

$$a)\ 2_{45^\circ} \quad b)\ 2_{\pi/6} \quad c)\ \sqrt{2}_{180^\circ} \quad d)\ 1_{\pi/2}$$

$$e)\ 5_{270^\circ} \quad f)\ 1_{150^\circ} \quad g)\ 17_{0^\circ} \quad h)\ 4_{100^\circ}$$

$a)\sqrt{2}+i\sqrt{2};b)\sqrt{3}+i;c)-\sqrt{2};d)i;e)-5i;f)\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i;g)17;h)-0,7+3,94i$

**9.-** Efectúa estas operaciones y da el resultado en forma polar y en forma binómica:

$$a)\ 1_{150^\circ}\cdot 5_{30^\circ} \quad b)\ 6_{45^\circ}:3_{15^\circ} \quad c)\ 2_{10^\circ}\cdot 1_{40^\circ}\cdot 3_{70^\circ}$$

$$d)\left(1-\sqrt{3}i\right)^5 \quad e)\ 5_{2\pi/3}:1_{60^\circ} \quad f)(3+2i)\cdot(-3+2i)$$

Sol: $a)-5;b)\sqrt{3}+i;c)-3+\sqrt{3}i;d)32_{60};e)\frac{5}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{2}i;f)-13$

**10.-** Dados los complejos $z=5_{45^\circ}$, $w=2_{15^\circ}$, $t=4i$, obtén en forma polar:

$$a)\ z\cdot t \quad b)\ \frac{z}{w^2} \quad c)\ \frac{z^3}{w\cdot t^2} \quad d)\ \frac{z\cdot w^3}{t}$$

Sol: $a)\ 20_{135};b)\ \left(\frac{5}{4}\right)_{15};c)\ \left(\frac{125}{32}\right)_{300};d)\ 10$

**11.-** Halla las seis raíces sextas de 1. Represéntalas y exprésalas en forma binómica.

Sol: $1_0$, $1_{60}$, $1_{120}$, $1_{180}$, $1_{240}$, $1_{300}$.

**12.-** Resuelve la ecuación $z^3+27=0$. Representa sus soluciones.

Sol: $3_{60}$, $3_{180}$, $3_{300}$.

**13.-** Calcular $a$ y $b$ para que se verifique: $(a+bi)^2=3+4i$.

Sol: a=±1; b=±2

**14.-** Calcula:

$$a)\sqrt[3]{-i} \qquad b)\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i} \qquad c)\sqrt{-25} \qquad d)\left(\frac{-2+2i}{1+\sqrt{3}i}\right)^3$$

Sol: a) $1_{90}$, $1_{210}$, $1_{330}$; b) $2_{30}$, $2_{120}$, $2_{210}$, $2_{300}$, c) $5_{90}$, $5_{270}$, d) $\left(2\sqrt{2}\right)_{225}$

**15.-** Calcula el valor de $a$ y $b$ para que se verifique:

$$a-3i=\frac{2+bi}{5-3i}$$

Sol: a=11/5;b=-108/5.

**16.-** Calcula el valor de $b$ para que el producto $(3-6i)\cdot(4+bi)$ sea: ***a)*** Un número imaginario puro. ***b)*** Un número real.

Sol: a) b=-2; b) b=8.

**17.-** Determina $a$ para que $(a-2i)^2$ sea un número imaginario puro.

Sol: a=±2.

**18.-** Calcula pasando a forma polar:

$$a)\left(1+i\sqrt{3}\right)^5 \qquad b)\ \left(-1-i\sqrt{3}\right)^6\cdot\left(\sqrt{3}-i\right) \qquad c)\ \sqrt[4]{-2+2\sqrt{3}\cdot i}$$

$$d)\ \frac{8}{(1-5i)^5} \qquad e)\ \sqrt[6]{-64} \qquad f)\ \sqrt[3]{-i} \qquad g)\ \frac{2-2i}{-3+3i}$$

Sol: a) $32_{300}$, b) $4_{540}$, c) $\left(\sqrt{2}\right)_{30},\left(\sqrt{2}\right)_{120},\left(\sqrt{2}\right)_{210},\left(\sqrt{2}\right)_{300}$ ,d) $\left(\sqrt{26}\right)_{225}$
e) $2_{30}$, $2_{90}$, $2_{150}$, $2_{210}$, $2_{270}$, $2_{330}$, f) $1_{90}$, $1_{210}$, $1_{330}$; g) 0

**19.-** El producto de dos números complejos es –8 y uno de ellos es el cuadrado del otro. Calcúlalos.

$w_1=2_{60^\circ}\to z_1=4_{120^\circ};w_2=2_{180^\circ}\to z_2=4_0=4;w_3=2_{300^\circ}\to z_3=4_{240^\circ}$

**20.-** De dos números complejos sabemos que:

- ✓ Tienen el mismo módulo.
- ✓ Sus argumentos suman $17\pi/6$
- ✓ El primero es conjugado del cuadrado del segundo.

¿Cuáles son esos números?

Sol: $1_{11\pi/3}$ y $1_{7\pi/6}$

**21.-** La suma de dos números complejos conjugados es 8 y la suma de sus módulos es 10. ¿Cuáles son esos números?

Sol: $z=4+3i;\ \overline{z}=4-3i$

**22.-** Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$a)\ z^2+4=0 \qquad b)\ z^2-2z+5=0 \qquad c)\ 2z^2+10=0$$

Sol: a) $2_{90}$ y $2_{270}$; b) 1±2i; c) $\sqrt{5}_{90}$ y $\sqrt{5}_{270}$

**23.-** Resuelve estas ecuaciones y expresa las soluciones en forma binómica: $a)z^3+8i=0$ $b)\ i\cdot z^4+4=0$

Sol: a) $2_{90}$, $2_{210}$ y $2_{330}$; b) $\sqrt{2}_{22,5}$, $\sqrt{2}_{112,5}$, $\sqrt{2}_{202,5}$, y $\sqrt{2}_{292,5}$

**24.-** Sean $z_1=3-i\sqrt{3}$ y $z_2=-2-2\sqrt{3i}$ , calcula: **a)** $Z_1\cdot Z_2$ (en forma polar); **b)** $Z_1/Z_2$ (en forma binómica); **c)** $(Z_1)^4$ (en forma binómica); **d)** $(Z_2)^5$ (en forma polar); **e)** $\sqrt{Z_1}$ (en forma polar); **f)** $\sqrt{Z_2}$ (en forma polar).

Sol:

**25.-** Representa gráficamente las soluciones de los resultados de los apartados e) y f) del ejercicio anterior.

**26.-** Hallar todas las soluciones que presenten las ecuaciones siguientes:

$$a)\ x^3-27=0 \qquad b)\ x^4+16i=0$$

Sol:

**27.-** Prueba que si z tiene de módulo 1, su conjugado coincide con su inverso.

Sol:

**28.-** Hallar el valor de a para que el complejo $z=\dfrac{a+2i}{1-i}$

**a)** Sea un número real; **b)** Sea un número imaginario puro; **c)** Tenga módulo 2.

Sol:

**29.-** ¿Puede ser real el cociente de dividir un número complejo por su conjugado? ¿Puede ser imaginario puro?

Sol:

**30.-** Halla los números complejos que cumplen que su cubo coincide con su conjugado.

Sol:

**31.-** Prueba que $\arg\left(\dfrac{z}{\bar{z}}\right)=2\arg(z)$ y $\arg\left(\dfrac{z^{-1}}{\bar{z}}\right)=0$

Sol:

**32.-** Determina los coeficientes complejos a, b, y c del polinomio $f(z)=z^3+az^2+bz+c$, sabiendo que $f(1)=8+16i$, $f(-1)=16-8i$ y $f(i)=0$.

Sol:

**33.-** Si $1+3i$ es solución de la ecuación $ax^2+bx+c=0$, con coeficientes reales, ¿cuál es la otra solución?. Escribe la ecuación.

Sol:

**34.-** Calcula a y b para que $\dfrac{a+2i}{3+bi}=\sqrt{2}_{45^\circ}$

Sol:

**35.-** Demuestra que:

$a)\ \overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}\quad b)\ \overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\quad c)\ \overline{z^{-1}}=\left(\bar{z}\right)^{-1}$

**36.-** Calcula el valor de x para que el cociente $\dfrac{3-2xi}{4-3i}$

**a)** Sea un número real. **b)** Sea imaginario puro. **c)** Tenga su afijo en la bisectriz del primer cuadrante.

Sol:

**37.-** Halla dos números complejos cuya suma sea 10, y su producto 26.

Sol:

**38.-** Cuales son las coordenadas del punto que se obtiene al girar 90°, en sentido anti horario alrededor del origen, el afijo del complejo $2+i$.

Sol: (-1,2)

**39.-** Halla las coordenadas de los vértices de un cuadrado de centro el origen de coordenadas, sabiendo que uno de los vértices es el punto (0, −2).

Sol: $(2,0),(0,2),(-2,0),(0,-2)$

**40.-** La suma de las componentes reales de dos números complejos conjugados es seis, y la suma de sus módulos es 10. Determínalos en forma binómica y polar.

Sol: $3+4i=5_{53^\circ 7'48''}$ y $3-4i=5_{306^\circ 52'11''}$

**41.-** Sean los complejos $z=4_{60^\circ}$ y $z'=2_{45^\circ}$ calcula:

$a)\ z+z'\quad b)\ z\cdot z'\quad c)\ \dfrac{z}{z'}\quad d)\ z^2\cdot z'\quad e)\ z^2\cdot\overline{z'}\quad f)\ (-z)\cdot z'$

Sol: a) $(2+\sqrt{2})+(2\sqrt{3}+\sqrt{2})i$ ; b) $8_{105^\circ}$ ; c) $2_{15^\circ}$; d) $32_{165^\circ}$; e) $32_{75}$; f) $8_{285^\circ}$

**42.-** Encuentra la ecuación que tiene por raíces:

**a)** $2-i$ y $2+i$ **b)** $2, -3, i$ y $-i$

Sol: a) $z^2-4z+5=0$; b) $z^4+z^3-5z^2+z-6=0$.

**43.-** Halla las soluciones, reales o complejas, de las ecuaciones:

$a)\ z^2-2z+5\quad b)\ z^4-256=0\quad c)\ z^4+\left(1-\sqrt{3}i\right)=0$

Sol: a) $1+2i$, $1-2i$; b) $4, -4, 4i, -4i$; c) $\left(\sqrt[4]{2}\right)_{30^\circ},\left(\sqrt[4]{2}\right)_{120^\circ},\left(\sqrt[4]{2}\right)_{210^\circ}\left(\sqrt[4]{2}\right)_{300^\circ}$

**44.-** Resuelve las siguientes ecuaciones:

$a)\ z^5-1=0\qquad b)\ z^3+8=0$

Sol: a) $1_{0^\circ}$; $1_{72^\circ}$; $1_{144^\circ}$; $1_{216^\circ}$ y $1_{288^\circ}$; b) $2_{60^\circ}$; $2_{180^\circ}$ y $2_{300^\circ}$ ;

**45.-** Se considera el complejo $2+2\sqrt{3}i$, se gira 45° alrededor del origen de coordenadas en sentido contrario a las agujas del reloj. Hallar el complejo obtenido después del giro.

Sol: $4_{105}$

**46.-** Halla las coordenadas de los vértices de un hexágono regular de centro el origen de coordenadas, sabiendo que uno de los vértices es el afijo del complejo $1_{90^\circ}$.

Sol: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right),(0,1),\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right),(0,-1),\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$

**47.-** Dados $z_1=3-2i$, $z_2=-3+i$, $z_3=5i$, calcula:

$a)\ z_1+z_2+z_3\quad b)\ z_1+2z_2-z_3\quad c)\ z_1\left(z_2+z_3\right)+z_3$

$d)\ \dfrac{z_2-z_1}{z_3}\quad e=\left(z_1+2z_3\right)\cdot\left(z_2-z_1\right)$

Sol: a) $4i$ ; b) $-3-5i$ ; c) $3+29i$ ; d) $\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i$ ; e) $-42-39i$ .

**48.-** Efectúa las siguientes operaciones:

$a)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)^8\quad b)\left(2\sqrt{3}-2i\right)^5\quad c)\ \dfrac{2}{3-i}\quad d)\ \dfrac{1+i}{1-i}$

Sol: a) 1; b) $-512\sqrt{3}-512i$ ; c) $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$ ; d) $i$

**49.-** Completa la tabla:

| z | –z | $\bar{z}$ | 1/z |
|---|---|---|---|
| 2 – 3i | -2+3i | 2+3i | 2/13 + 2i/13 |
| 1 – 4i | –1 + 4i | 1+4i | 1/17 + 4i/17 |
| 3+3i | -3 – 3i | 3 – 3i | 1/6 – i/6 |
| -i | i | i | i |

**50.-** Un hexágono regular, con centro en el origen de coordenadas, tiene uno de sus vértices en el punto $\left(\sqrt{3},1\right)$. Halla los otros vértices.

Sol: $(0,2);\left(-\sqrt{3},1\right),\left(-\sqrt{3},-1\right),(0,-2),\left(\sqrt{3},-1\right)$

**51.-** Halla el módulo y el argumento de $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^4$ .

Sol: Módulo 1 y argumento 0.

**52.-** Halla e interpreta gráficamente las soluciones.

Sol: Las cinco raíces son: $1_{36},1_{108},1_{180},1_{252},1_{324}$

**53.-** Expresa $\cos(3\alpha)$ y $sen(3\alpha)$ en función del seno y del coseno de α, ayudándote de la fórmula de Moivre.

Sol: sin(3a)=sen(a)(4cos²a -1); cos(3a)=4cos³(a)-3cos a

**54.-** Halla las razones trigonométricas de 15° conociendo las de los ángulos de 45 y 30 mediante $1_{45}:1_{30}$

Sol: $\cos 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ y $sen 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

**55.-** Si el producto de dos números complejos es -8 y dividiendo el cubo de uno de ellos entre el otro obtenemos de resultado 2, ¿Cuánto valen el módulo y el argumento de cada uno?

Sol: $r=2_{45}$ y $s=4_{135}$

**56.-** Calcula el área del pentágono cuyos vértices son los afijos de las soluciones de la ecuación $z^5-1=0$ .

Sol: A=2,4 u.a

**57.-** Un cuadrado con centro en el origen tiene uno de sus vértices en el punto (1,2). Calcula los demás vértices.

Sol: B(-2,1), C(-1,-2), D(2,-1)

**58.-** ¿Es cierto que, siempre que multiplicas un número real por un número complejo *z*, el resultado tiene el mismo argumento que *z*? Si no es cierto, enuncia una propiedad correcta.