Nombre:			Nota
Curso:	2º Bachillerato	Examen VIII	
Fecha:	*25 de Febrero de 2016*	La mala o nula explicación de cada ejercicio implica una penalización de hasta el 25% de la nota.	

1.- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donde m representa un número real.

a) Halla los valores de m para los que la matriz A tiene inversa. **(1 punto)**
b) Para m=2 calcule la matriz inversa. **(1 punto)**
c) Para m=2, calcule el vector X que verifique $A \cdot X = B$ siendo B la matriz $B=\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

2.- Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^3-4x$,

a) **(0,75 puntos)** Halla la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa $x=1$.
b) **(0,75 puntos)** Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y=-x-2$, determinando los puntos de corte de ambas gráficas.
c) **(1 punto)** Calcula el área del recinto anterior.

A elegir uno: (2,5 puntos)

3a.- Se sabe que el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ es -3. Calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:

a) **(1 punto)** det(-2A) y det(A^{-1})

b) **(1,5 puntos)** $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}+2a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22}+2a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23}+2a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix}$

3b.- Calcula, *sin utilizar la regla de Sarrus*, el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

A elegir uno: (2,5 puntos)

4a.- De entre todos los números reales positivos, determina el que sumado con su inverso da suma mínima.

4b.- Enunciar el *teorema de Rolle*. Demostrar que la función $f(x)=x^3-x+a$ cumple la hipótesis de este teorema en el intervalo [0, 1] cualquiera que sea el valor de a. Encontrar el punto en el cual se cumple la tesis.

4c.- Calcula la integral: $\int \frac{5}{1+\sqrt{e^{-x}}}dx$

1.- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&m&1\\m&1&1\end{pmatrix}$ **donde m representa un número real.**

- **a) Halla los valores de m para los que la matriz A tiene inversa. (1 punto)**
- **b) Para m=2 calcule la matriz inversa. (1 punto)**
- **c) Para m=2, calcule el vector X que verifique** $A\cdot X=B$ **siendo B la matriz** $B=\begin{pmatrix}-4\\1\\4\end{pmatrix}$

a) La matriz inversa se calcula mediante la expresión: $A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj(A^t)$, por tanto la matriz será inversible, siempre y cuando sea una matriz regular, o sea que su determinante no sea nulo.

Calculamos el determinante de A:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&m&1\\m&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&m&0\\m&1&1-m\end{vmatrix}=(1-m)\cdot\begin{vmatrix}1&1\\1&m\end{vmatrix}=(1-m)\cdot(m-1)=-m^2+2m-1$$

$$|A|=0 \quad\leftrightarrow\quad -m^2+2m-1=0 \quad\leftrightarrow\quad m=1$$

Por tanto la matriz A tiene inversa siempre y cuando su determinante sea distinto de 1.

$$\exists A^{-1}\forall m\in\mathbb{R}-\{1\}$$

b) Si m=2, entonces A es de la forma: $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}$ y su determinante: $|A|=-m^2+2m-1=-1$

Calculamos la traspuesta de A, y luego su adjunta:

$$A^t=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\1&1&1\end{pmatrix} \quad\rightarrow\quad Adj\left(A^t\right)=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&-1&0\\-3&1&1\end{pmatrix}$$

Por tanto la inversa de A para m=2, es:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj(A^t)=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&-1&0\\-3&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\-1&1&0\\3&-1&-1\end{pmatrix} \quad ➔ \quad A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\-1&1&0\\3&-1&-1\end{pmatrix}$$

c) Si $A\cdot X=B \quad\rightarrow\quad A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B \quad\rightarrow\quad I\cdot X=A^{-1}\cdot B \quad\rightarrow\quad X=A^{-1}\cdot B$, por tanto el vector x será:

$$X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}-1&0&1\\-1&1&0\\3&-1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\5\\-17\end{pmatrix} \quad ➔ \quad X=\begin{pmatrix}8\\5\\-17\end{pmatrix}$$

2.- Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ **la función definida por** $f(x)=x^3-4x$ **,**

- **a) Halla la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa *x=1*.**
- **b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta** $y=-x-2$ **, determinando los puntos de corte de ambas gráficas.**
- **c) Calcula el área del recinto anterior.**

a) La recta tangente a una gráfica en un punto x=a, viene dada por la expresión: $y - f(a) = f'(a)\cdot(x-a)$, por tanto, necesitamos calcula f(1) y f'(1).

$$f(x) = x^3 - 4x \qquad\qquad f(1) = (1)^3 - 4(1) = -3$$

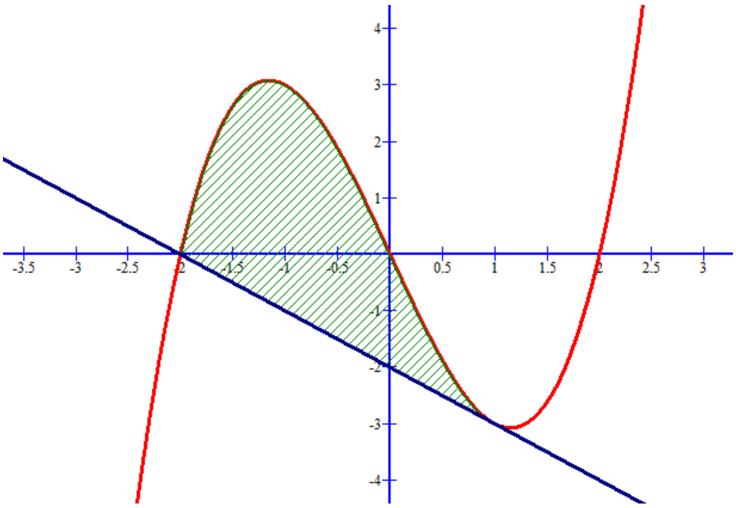
$$f'(x) = 3x^2 - 4 \qquad\qquad f'(1) = 3(1)^2 - 4 = -1$$

Así que la recta tangente en x=1 es:

$$y - f(1) = f'(1)\cdot(x-1) \quad \leftrightarrow \quad y-(-3) = -1(x-1) \quad \leftrightarrow \quad y+3 = -x+1 \quad \leftrightarrow \quad x+y+2=0$$

Recta tangente: $x+y+2=0$

b) El recinto es:



c) El área del recinto viene dada por el área entre dos gráficas, y para ello definimos una nueva función h(x) = f(x)-g(x), donde f(x) es la función $f(x) = x^3 - 4x$ y g(x) es la recta tangente en x=1, $y = -2 - x$, por tanto:

$$h(x) = f(x) - g(x) = \left(x^3 - 4x\right) - \left(-x-2\right) = x^3 - 3x + 2$$

Calculamos ahora los puntos donde se anula la nueva función y para ello la igualamos a cero:

$$h(x) = 0 \quad \leftrightarrow \quad x^3 - 3x + 2 = 0$$

Utilizamos *Ruffini* para factorizar el polinomio $h(x) = x^3 - 3x + 2$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \lfloor 0 \end{array} \qquad \Rightarrow$$

$$x^3 - 3x + 2 = 0 \quad \leftrightarrow \quad (x-1)\cdot(x^2+x-2) = 0 \quad \leftrightarrow \quad (x-1)^2\cdot(x+2) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Por tanto la función se anula para x=-2 y para x=1.

Calculamos el área, integrando la función h(x) entre los dos valores -2 y 1:

$$A = \int_{-2}^{1} \left(x^3 - 3x + 2\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2\right) - (4 - 6 - 4) = \frac{3}{4} + 6 = \frac{27}{4} \ u.a.$$

3A.- Se sabe que el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ **es -3. Calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:**

a) (1 punto) det(-2A) y det(A^{-1})

b) (1,5 puntos) $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}+2a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22}+2a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23}+2a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix}$

a) Det(-2A)=$(-2)^3\cdot$det(A)=-8·(-3)=24 Utilizamos la propiedad que dice que al multiplicar una línea por un número, el determinante aparece multiplicado por dicho número. Como la matriz es de orden 3, al multiplicar la matriz por un número, el determinante aparece multiplicado por el número al cubo.

Det(A^{-1})=$(\det(A))^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}=\dfrac{1}{|A|}=\dfrac{1}{-3}=-\dfrac{1}{3}$ Utilizamos la propiedad que dice que si queremos calcular el determínate de la potencia de una matriz, podemos calcular el determinante de la matriz, y elevarlo a dicha potencia. Podemos tratar la matriz inversa A^{-1} como $(A)^{-1}$

$$|A^n|=|A|^n$$

b) $$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} 7\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} -14\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -14\cdot|A| = -14\cdot(-3)=42$$

En el que hemos utilizado la propiedad que dice que al multiplicar una fila o columna por un número, el determinante aparece multiplicado por dicho número (en la igualdad (1), 2 veces, una para el 7 y otra para el 2) y la propiedad que dice que si permutamos una fila o columna por otra el determinante cambia de signo (en la igualdad (2), permutamos la fila 1 y la 2).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}+2a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22}+2a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23}+2a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & 5a_{33} \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 5\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} 5\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 5\cdot|A| = 5\cdot(-3)=-15$$

En (1) utilizamos la propiedad que dice que si a una fila o columna se le suma otra por un número, el determinante no cambia, en el (2) hemos utilizado la propiedad que dice que al multiplicar una columna por un número, el determinante aparece multiplicado por dicho número, y en (3) hemos utilizado la propiedad que dice que el determinante de una matriz y el de su transpuesta coinciden.

3B.- Calcula, *sin utilizar Sarrus*, el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\1&3&3&3&3\\1&3&5&5&5\\1&3&5&7&7\\1&3&5&7&9\end{vmatrix}\overset{(1)}{=}\begin{vmatrix}1&0&0&0&0\\1&2&2&2&2\\1&2&4&4&4\\1&2&4&6&6\\1&2&4&6&8\end{vmatrix}\overset{(2)}{=}1\cdot\begin{vmatrix}2&2&2&2\\2&4&4&4\\2&4&6&6\\2&4&6&8\end{vmatrix}\overset{(3)}{=}\begin{vmatrix}2&0&0&0\\2&2&2&2\\2&2&4&4\\2&2&4&6\end{vmatrix}\overset{(4)}{=}2\begin{vmatrix}2&2&2\\2&4&4\\2&4&6\end{vmatrix}\overset{(5)}{=}2\begin{vmatrix}2&0&0\\2&2&2\\2&2&4\end{vmatrix}\overset{(6)}{=}$$

$$=2\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}2&2\\2&4\end{vmatrix}=4\cdot 4=16$$

En (1) a las columnas 2,3,4,5 les hemos restado la columna 1, en (2) utilizamos el método de los adjuntos para reducir un determinante de orden 5 a uno de orden 4, en (3) volvemos a restarle a las columnas 2,3 y 4 la primera columna, en (4) volvemos a utilizar el método de los adjuntos para reducirlo ahora a un determinante de orden 3, en (5) a las columnas 2 y 3 les restamos la primera, y en (6) utilizamos de nuevo el método de los adjuntos para reducirlo a un determinante de orden 2 y por último calculamos el determinante de orden dos restando a la columna principal la columna secundaria.

4A.- De entre todos los números reales positivos, determina el que sumado con su inverso da suma mínima.

Sea x un número distinto de cero y positivo, su inverso viene dado por: $\frac{1}{x}$

Por tanto la función a minimizar será: $f(x)=x+\frac{1}{x}$

La derivamos:

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$$

Y la igualamos a cero:

$$f'(x)=0 \quad\leftrightarrow\quad 0=1-\frac{1}{x^2} \quad\leftrightarrow\quad \frac{x^2-1}{x^2}=0 \quad\leftrightarrow\quad x^2-1=0 \quad\leftrightarrow\quad x=1\ \forall x\in\mathbb{R}^+$$

Por tanto el número que minimiza la suma es el ***número 1.***

Veamos que es realmente un mínimo, y para ello utilizaremos la segunda derivada:

$$f''(x)=\frac{2}{x^3} \quad\rightarrow\quad f''(1)=\frac{2}{1}=2>0$$

Por tanto queda demostrado que es un mínimo.

4B.- Enunciar el *teorema de Rolle*. Demostrar que la función $f(x)=x^3-x+a$ cumple la hipótesis de este teorema en el intervalo [0, 1] cualquiera que sea el valor de a. Encontrar el punto en el cual se cumple la tesis.

El ***teorema de Rolle*** dice que sea f(x) una función continua en el intervalo [a,b] y derivable en el intervalo (a,b) que verifica que f(a)=f(b). Entonces existe un c ∈ (a,b) tal que f'(c)=0, es decir que existe un punto en que la recta tangente es paralela al eje x.

Por tratarse de un polinomio, la función $f(x)=x^3-x+a$ es continua para todo número real; en particular en el intervalo [0,1]. Como además se verifica que f(0)=a y que f(1)=a, también se verifica la segunda hipótesis, en consecuencia, podemos afirmar que existe un número c que pertenece al intervalo (0,1) cuya derivada es nula:

Derivando la función f: $f'(x)=3x^2-1$ e igualando a cero, obtenemos los valores $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

El valor $x=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}=0{,}577....$ pertenece al intervalo $(0,1)$

Por tanto en $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ se cumple la tesis del teorema de Rolle.

4C.- Calcula la integral: $\displaystyle\int\frac{5}{1+\sqrt{e^{-x}}}dx$

Si hacemos el cambio $t^2=e^{-x}$ $\rightarrow$ $\begin{cases} t=\sqrt{e^{-x}} \\ 2tdt=-e^{-x}dx \quad \rightarrow \quad dx=\frac{2tdt}{-e^{-x}}=\frac{2tdt}{-t^2}=-\frac{2}{t}dt \end{cases}$

Por tanto la integral quedará de la forma:

$$\int\frac{5}{1+\sqrt{e^{-x}}}dx=\int\frac{5}{1+t}\cdot\frac{-2}{t}dt=\int\frac{-10dt}{t(t+1)}\overset{Hermite}{=}\int\frac{-10}{t}dt+\int\frac{10}{t+1}dt=-10\ln|t|+10\ln|t+1|$$

Donde hemos utilizado el método de Hermite. Si deshacemos el cambio:

$$\int\frac{5}{1+\sqrt{e^{-x}}}dx=-10\ln\left|\sqrt{e^{-x}}\right|+10\ln\left|\sqrt{e^{-x}}+1\right|=10\ln\left|\frac{\sqrt{e^{-x}}+1}{\sqrt{e^{-x}}}\right|+K$$

Por tanto:

$$\int\frac{5}{1+\sqrt{e^{-x}}}dx=10\ln\left|\frac{\sqrt{e^{-x}}+1}{\sqrt{e^{-x}}}\right|+K$$