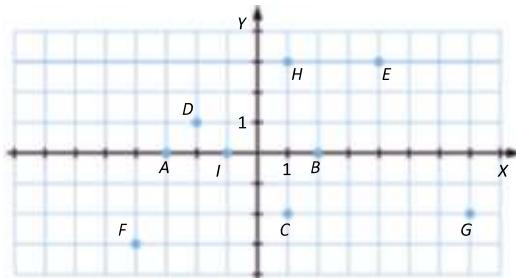


Vectores y rectas

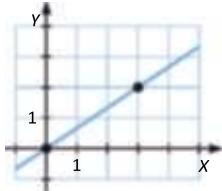
CLAVES PARA EMPEZAR

1. Página 156

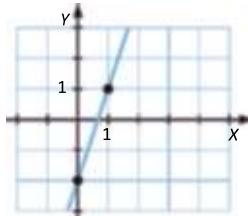


2. Página 156

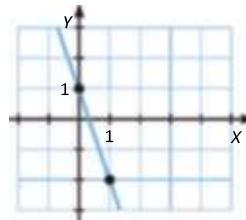
a) $y = \frac{2}{3}x$ pasa por los puntos $(0, 0)$ y $(3, 2)$.



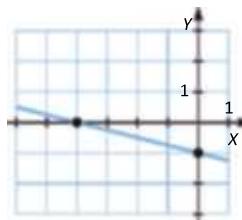
b) $y = 3x - 2$ pasa por los puntos $(0, -2)$ y $(1, 1)$.



c) $y = -3x + 1$ pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(1, -2)$.



d) $y = -\frac{1}{4}x - 1$ pasa por los puntos $(0, -1)$ y $(-4, 0)$.



VIDA COTIDIANA

EL GPS. Página 157

Las coordenadas son $(-230, -100)$.

Vectores y rectas

ACTIVIDADES

1. Página 158

a) $A(a_1, a_2) = A(1, 4)$ y $B(b_1, b_2) = B(3, -2) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (2, -6)$

Las coordenadas del vector \overrightarrow{AB} son $(2, -6)$.

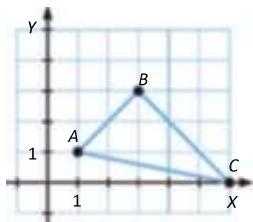
b) $A(a_1, a_2) = A(9, -1)$ y $B(b_1, b_2) = B(5, 7) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (-4, 8)$

Las coordenadas del vector \overrightarrow{AB} son $(-4, 8)$.

c) $A(a_1, a_2) = A(2, 3)$ y $B(b_1, b_2) = B(1, 6) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (-1, 3)$

Las coordenadas del vector \overrightarrow{AB} son $(-1, 3)$.

2. Página 158



$A(a_1, a_2) = A(1, 1)$ y $B(b_1, b_2) = B(3, 3) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (2, 2)$

$B(b_1, b_2) = B(3, 3)$ y $C(c_1, c_2) = C(6, 0) \rightarrow \overrightarrow{BC} = (c_1 - b_1, c_2 - b_2) = (3, -3)$

$C(c_1, c_2) = C(6, 0)$ y $A(a_1, a_2) = A(1, 1) \rightarrow \overrightarrow{CA} = (a_1 - c_1, a_2 - c_2) = (-5, 1)$

3. Página 158

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} A(a_1, a_2) \\ B(b_1, b_2) \end{array} \right\} \rightarrow \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (5, 3)$$

Dos parejas de puntos que cumplen esta condición serían:

$A(1, 1)$ y $B(6, 4)$

$A(0, -1)$ y $B(5, 2)$

4. Página 159

a) $A(a_1, a_2) = A(0, 0)$ y $B(b_1, b_2) = B(3, 4) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (3, 4) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9 + 16} = 5$

b) $A(a_1, a_2) = A(1, 2)$ y $B(b_1, b_2) = B(6, 14) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (5, 12) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{25 + 144} = 13$

c) $A(a_1, a_2) = A(2, -1)$ y $B(b_1, b_2) = B(5, 3) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (3, 4) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9 + 16} = 5$

d) $A(a_1, a_2) = A(1, 3)$ y $B(b_1, b_2) = B(4, 5) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (3, 2) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$

e) $A(a_1, a_2) = A(-2, 4)$ y $B(b_1, b_2) = B(5, -1) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (7, -5) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{49 + 25} = \sqrt{74}$

5. Página 159

a) $\frac{U_2}{U_1} = \frac{V_2}{V_1} \rightarrow \frac{3}{1} = \frac{-3}{-1} \rightarrow$ Son paralelos.

b) $\frac{U_2}{U_1} = \frac{V_2}{V_1} \rightarrow \frac{2}{1} = \frac{-4}{-6} \rightarrow$ Son paralelos.

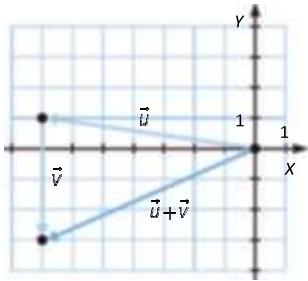
c) $U_1 \cdot V_1 + U_2 \cdot V_2 = 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) = 0 \rightarrow$ Son perpendiculares.

6. Página 159

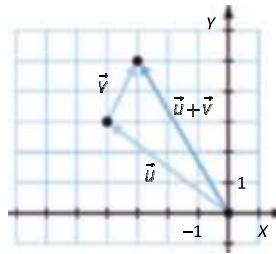
$\vec{v} = (V_1, V_2)$ y $\vec{v}' = (-V_2, V_1) \rightarrow -V_1 \cdot V_2 + V_1 \cdot V_2 = 0 \rightarrow$ Son perpendiculares.

7. Página 160

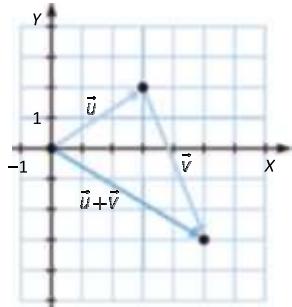
a) $\vec{u} + \vec{v} = (-7, 1) + (0, -4) = (-7, -3)$



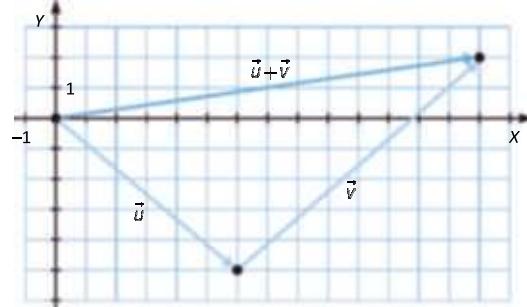
c) $\vec{u} + \vec{v} = (-4, 3) + (1, 2) = (-3, 5)$



b) $\vec{u} + \vec{v} = (3, 2) + (2, -5) = (5, -3)$



d) $\vec{u} + \vec{v} = (6, -5) + (8, 7) = (14, 2)$

**8. Página 160**

$\overrightarrow{AB} = (-1, 3)$ $\overrightarrow{CD} = (3, -1)$

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (2, 2)$

c) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB} = (4, -4)$

e) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CD} = (0, 0)$

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = (-4, 4)$

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = (-2, 6)$

f) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} = (2, 2)$

9. Página 160

$\vec{u} = (u_1, u_2) \rightarrow -\vec{u} = (-u_1, -u_2)$

$\vec{u} + (-\vec{u}) = (0, 0)$

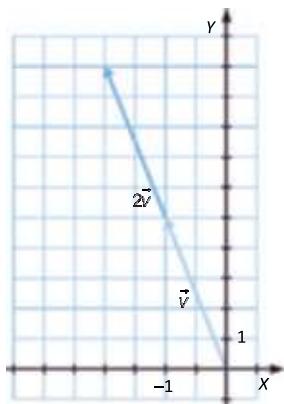
Vectores y rectas

10. Página 161

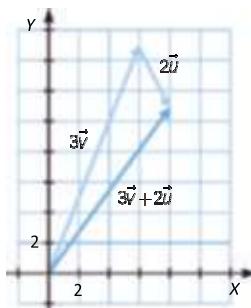
- a) $2 \cdot (1, 2) = (2, 4)$
- b) $-1 \cdot (3, -1) = (-3, 1)$
- c) $3 \cdot (2, 5) = (6, 15)$
- d) $2 \cdot (4, 10) + 3 \cdot (-2, 7) = (8, 20) + (-6, 21) = (2, 41)$
- e) $-1 \cdot (2, -3) - 3 \cdot (1, 1) = (-2, 3) + (-3, -3) = (-5, 0)$
- f) $5 \cdot (-3, 4) + 3 \cdot (8, 4) = (-15, 20) + (24, 12) = (9, 32)$
- g) $6 \cdot (1, -1) - 2 \cdot (2, 3) = (6, -6) + (-4, -6) = (2, -12)$

11. Página 161

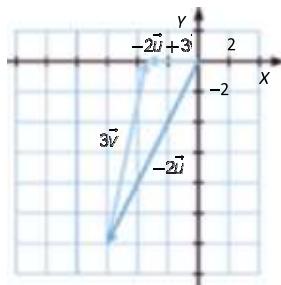
a) $2\vec{v} = (-2, 10)$



b) $3\vec{v} + 2\vec{u} = (6, 15) + (2, -4) = (8, 11)$



c) $-2\vec{u} + 3\vec{v} = (-6, -12) + (3, 12) = (-3, 0)$



12. Página 161

$$\vec{v} = (2, 6) \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{4 + 36} = 2\sqrt{10}$$

Un vector con la misma dirección, sentido contrario y módulo la mitad sería:

$$\vec{u} = (-1, 3) \rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

Para volver a obtener \vec{v} a partir de \vec{u} tenemos que multiplicarlo por -2 , es decir, $\vec{v} = -2\vec{u}$.

13. Página 162

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) Si $t = 1 \rightarrow (x, y) = (1, 2) + (4, -1) = (5, 1)$

$$\text{Si } t = -1 \rightarrow (x, y) = (1, 2) + (-1) \cdot (4, -1) = (-3, 3)$$

$$\text{Si } t = 2 \rightarrow (x, y) = (1, 2) + 2 \cdot (4, -1) = (9, 0)$$

b) Si $t = 1 \rightarrow (x, y) = (2, 0) + (3, 5) = (5, 5)$

$$\text{Si } t = -1 \rightarrow (x, y) = (2, 0) + (-1) \cdot (3, 5) = (-1, -5)$$

$$\text{Si } t = 2 \rightarrow (x, y) = (2, 0) + 2 \cdot (3, 5) = (8, 10)$$

c) Si $t = 1 \rightarrow (x, y) = (0, 4) + (-3, 2) = (-3, 6)$

$$\text{Si } t = -1 \rightarrow (x, y) = (0, 4) + (-1) \cdot (-3, 2) = (3, 2)$$

$$\text{Si } t = 2 \rightarrow (x, y) = (0, 4) + 2 \cdot (-3, 2) = (-6, 8)$$

d) Si $t = 1 \rightarrow (x, y) = (-3, 6) + (2, -4) = (-1, 2)$

$$\text{Si } t = -1 \rightarrow (x, y) = (-3, 6) + (-1) \cdot (2, -4) = (-5, 10)$$

$$\text{Si } t = 2 \rightarrow (x, y) = (-3, 6) + 2 \cdot (2, -4) = (1, -2)$$

e) Si $t = 1 \rightarrow (x, y) = (0, -2) + (-1, 5) = (-1, 3)$

$$\text{Si } t = -1 \rightarrow (x, y) = (0, -2) + (-1) \cdot (-1, 5) = (1, -7)$$

$$\text{Si } t = 2 \rightarrow (x, y) = (0, -2) + 2 \cdot (-1, 5) = (-2, 8)$$

f) Si $t = 1 \rightarrow (x, y) = (-1, 3) + (6, -1) = (5, 2)$

$$\text{Si } t = -1 \rightarrow (x, y) = (-1, 3) + (-1) \cdot (6, -1) = (-7, 4)$$

$$\text{Si } t = 2 \rightarrow (x, y) = (-1, 3) + 2 \cdot (6, -1) = (11, 1)$$

14. Página 162

a) $(x, y) = (4, 4) + t(2, 2)$

c) $(x, y) = (2, 3) + t(4, 5)$

b) $(x, y) = (5, -3) + t(-1, 1)$

d) $(x, y) = (-1, 3) + t(1, 5)$

15. Página 162

Un vector paralelo al vector director de la recta es $(6, 2) \rightarrow (x, y) = (-1, 5) + t \cdot (6, 2)$.

Vectores y rectas

16. Página 163

Los puntos son respuestas abiertas.

a) $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 3-2t \end{cases} \rightarrow$ Vector director = $(1, -2)$

Puntos: $t = 0 \rightarrow (1, 3)$ $t = 1 \rightarrow (2, 1)$ $t = -1 \rightarrow (0, 5)$

b) $\begin{cases} x = -1+3t \\ y = 2+2t \end{cases} \rightarrow$ Vector director = $(3, 2)$

Puntos: $t = 0 \rightarrow (-1, 2)$ $t = 1 \rightarrow (2, 4)$ $t = -1 \rightarrow (-4, 0)$

c) $\begin{cases} x = 2+t \\ y = -2t \end{cases} \rightarrow$ Vector director = $(1, -2)$

Puntos: $t = 0 \rightarrow (2, 0)$ $t = 1 \rightarrow (3, -2)$ $t = -1 \rightarrow (1, 2)$

d) $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = 5-4t \end{cases} \rightarrow$ Vector director = $(3, -4)$

Puntos: $t = 0 \rightarrow (1, 5)$ $t = 1 \rightarrow (4, 1)$ $t = -1 \rightarrow (-2, 9)$

17. Página 163

a) $A(8, 3)$ y $B(6, 5) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2, 2) \rightarrow \begin{cases} x = 8 - 2t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$

b) $A(1, 7)$ y $B(-1, 4) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2, -3) \rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 7 - 3t \end{cases}$

18. Página 163

$$\begin{cases} x = 6t \\ y = 2 + 10t \end{cases}$$

Sí, existe solo una recta que cumple esta condición, aunque podamos obtener infinitas expresiones para ella, ya que hay infinitos vectores paralelos a \vec{u} ; pero la recta obtenida es la misma en todos los casos.

19. Página 164

$$r: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 + t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = \frac{x-3}{2} \\ t = \frac{y-4}{1} \end{cases} \rightarrow r: \frac{x-3}{2} = y-4$$

20. Página 164

a) $A(4, 2)$ y $B(0, 0) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-4, -2) \rightarrow \frac{x-4}{-4} = \frac{y-2}{-2}$

b) $A(6, 3)$ y $B(-1, 3) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-7, 0) \rightarrow y = 3$

21. Página 164

a) $(x, y) = (2, 1) + t \cdot (2, 3) \rightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3}$

b) $(x, y) = (-3, -1) + t \cdot (4, 1) \rightarrow \frac{x+3}{4} = y + 1$

c) $(x, y) = (4, -5) + t \cdot (-1, 3) \rightarrow \frac{x-4}{-1} = \frac{y+5}{3}$

22. Página 165

a) $y - 2 = 3 \cdot (x + 7) \rightarrow y - 2 = 3x + 21 \rightarrow y = 3x + 23$

b) $y - 5 = -2 \cdot (x - 1) \rightarrow y - 5 = -2x + 2 \rightarrow y = -2x + 7$

23. Página 165

$y - 3 = 2 \cdot (x - 4) \rightarrow y = 2x - 5 \rightarrow$ La pendiente es 2 y la ordenada en el origen es -5.

24. Página 165

a) $y = \frac{2}{3}x$

b) $1 = -2 + c \rightarrow c = 3 \rightarrow y = -2x + 3$

25. Página 166

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= (6, -1) = (B, -A) \rightarrow Ax + By + C = 0 \xrightarrow{A=1, B=6} X + 6Y + C = 0 \\ &\xrightarrow{x=-2, y=3} -2 + 18 + C = 0 \rightarrow C = -16 \rightarrow X + 6Y - 16 = 0\end{aligned}$$

26. Página 166

a) Vector director: $m = \frac{-1}{-4} \rightarrow \vec{v} = (-4, -1)$

b) Punto de la recta: $y = 0 \rightarrow x + 5 = 0 \rightarrow x = -5 \rightarrow (-5, 0)$

c) Vector perpendicular: $(1, -4)$ ya que $(-4) \cdot 1 + (-1) \cdot (-4) = 0$

27. Página 166

La recta pasa por $A(-1, -1)$ y por $B(1, 2)$ entonces:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (2, 3) = (B, -A) \rightarrow Ax + By + C = 0 \xrightarrow{A=-3, B=2} -3X + 2Y + C = 0 \\ &\xrightarrow{x=-1, y=-1} 3 - 2 + C = 0 \rightarrow C = -1 \rightarrow -3X + 2Y - 1 = 0\end{aligned}$$

Vectores y rectas

28. Página 167

a) $P(0, 0)$ y $Q(-3, 4) \rightarrow \vec{PQ} = (-3, 4)$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, 0) + t(-3, 4)$

Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = -3t \\ y = 4t \end{cases}$

Ecuación continua: $\begin{cases} t = -\frac{x}{3} \\ t = \frac{y}{4} \end{cases} \rightarrow -\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$

Ecuación punto-pendiente: $y = -\frac{4}{3}x$

Ecuación explícita: $y = -\frac{4}{3}x$

Ecuación general: $3y = -4x \rightarrow 4x + 3y = 0$

b) $P(0, 1)$ y $Q(2, 0) \rightarrow \vec{PQ} = (2, -1)$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, 1) + t(2, -1)$

Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1-t \end{cases}$

Ecuación continua: $\begin{cases} t = \frac{x}{2} \\ t = \frac{y-1}{-1} \end{cases} \rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1}$

Ecuación punto-pendiente: $y - 1 = -\frac{1}{2}x$

Ecuación explícita: $y = -\frac{1}{2}x + 1$

Ecuación general: $2y = -x + 2 \rightarrow x + 2y - 2 = 0$

c) $P(-7, 4)$ y $Q(1, 2) \rightarrow \vec{PQ} = (8, -2)$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (1, 2) + t(8, -2)$

Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = 1 + 8t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$

Ecuación continua: $\begin{cases} t = \frac{x-1}{8} \\ t = \frac{y-2}{-2} \end{cases} \rightarrow \frac{x-1}{8} = \frac{y-2}{-2}$

Ecuación punto-pendiente: $y - 2 = \frac{x-1}{-4} \rightarrow y - 2 = -\frac{1}{4}(x - 1)$

Ecuación explícita: $y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$

Ecuación general: $4y = -x + 9 \rightarrow x + 4y - 9 = 0$

d) $P(5, 1)$ y $Q(0, 4) \rightarrow \overrightarrow{PQ} = (-5, 3)$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, 4) + t(-5, 3)$

Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = -5t \\ y = 4 + 3t \end{cases}$

Ecuación continua: $\begin{cases} t = -\frac{x}{5} \\ t = \frac{y-4}{3} \end{cases} \rightarrow -\frac{x}{5} = \frac{y-4}{3}$

Ecuación punto-pendiente: $y - 4 = -\frac{3}{5}x$

Ecuación explícita: $y = -\frac{3}{5}x + 4$

Ecuación general: $5y = -3x + 20 \rightarrow 3x + 5y - 20 = 0$

e) $P(3, -2)$ y $Q(1, 3) \rightarrow \overrightarrow{PQ} = (-2, 5)$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (1, 3) + t(-2, 5)$

Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + 5t \end{cases}$

Ecuación continua: $\begin{cases} t = \frac{x-1}{-2} \\ t = \frac{y-3}{5} \end{cases} \rightarrow \frac{x-1}{-2} = \frac{y-3}{5}$

Ecuación punto-pendiente: $y - 3 = 5\left(\frac{x-1}{-2}\right) \rightarrow y - 3 = -\frac{5}{2}(x-1)$

Ecuación explícita: $y = -\frac{5}{2}x + \frac{11}{2}$

Ecuación general: $2y = -5x + 11 \rightarrow 5x + 2y - 11 = 0$

f) $P(-2, 0)$ y $Q(0, -1) \rightarrow \overrightarrow{PQ} = (2, -1)$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (-2, 0) + t(2, -1)$

Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -t \end{cases}$

Ecuación continua: $\begin{cases} t = \frac{x+2}{2} \\ t = \frac{y}{-1} \end{cases} \rightarrow \frac{x+2}{2} = \frac{y}{-1}$

Ecuación punto-pendiente: $y = -\left(\frac{x+2}{2}\right) \rightarrow y = -\frac{1}{2}(x+2)$

Ecuación explícita: $y = -\frac{1}{2}x - 1$

Ecuación general: $2y = -x - 2 \rightarrow x + 2y + 2 = 0$

Vectores y rectas

29. Página 167

Ecuación vectorial: $(x, y) = (2, 1) + t(-4, -3)$

Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = 1 - 3t \end{cases}$

Ecuación continua: $\begin{cases} t = \frac{x-2}{-4} \\ t = \frac{y-1}{-3} \end{cases} \rightarrow \frac{x-2}{-4} = \frac{y-1}{-3}$

Ecuación punto-pendiente: $y - 1 = -3\left(\frac{x-2}{-4}\right) \rightarrow y - 1 = \frac{3}{4}(x-2)$

Ecuación explícita: $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$

Ecuación general: $4y = 3x - 2 \rightarrow 3x - 4y - 2 = 0$

30. Página 167

a) La ecuación explícita: $2x + y - 3 = 0 \rightarrow y = -2x + 3$

b) La ecuación continua: $2x + y - 3 = 0 \rightarrow \frac{y-3}{-2} = x$

c) La ecuación vectorial: $2x + y - 3 = 0 \rightarrow (x, y) = (0, 3) + t \cdot (1, -2)$

31. Página 167

a) Su pendiente es -1 y pasa por el punto $(0, -2)$.

Ecuación punto-pendiente: $y + 2 = -1 \cdot (x - 0) \rightarrow y + 2 = -x$

Ecuación explícita: $y = -x - 2$

Ecuación general: $x + y + 2 = 0$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, -2) + t(1, -1)$

Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = t \\ y = -2 - t \end{cases}$

Ecuación continua: $x = \frac{y+2}{-1}$

b) Su pendiente es 2 y su ordenada en el origen es -3 .

Ecuación explícita: $y = 2x - 3$

Ecuación punto-pendiente: $y + 3 = 2x$

Ecuación general: $-2x + y + 3 = 0$

Ecuación continua: $x = \frac{y+3}{2}$

Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, -3) + t(1, 2)$

- c) Pasa por el punto $P(2, 1)$ y es perpendicular a la recta $3x - 2y + 1 = 0$.

El vector $(-2, 3)$ es el director de $3x - 2y + 1 = 0$, por tanto, el vector director de la nueva recta es $(3, -2)$.

Ecuación vectorial: $(x, y) = (2, 1) + t(3, -2)$

Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$

$$\text{Ecuación continua: } \begin{cases} t = \frac{x-2}{3} \\ t = \frac{y-1}{-2} \end{cases} \rightarrow \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2}$$

$$\text{Ecuación punto-pendiente: } y - 1 = -2\left(\frac{x-2}{3}\right) \rightarrow y - 1 = -\frac{2}{3}(x-2)$$

$$\text{Ecuación explícita: } y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$$

$$\text{Ecuación general: } 3y = -2x + 7 \rightarrow 2x + 3y - 7 = 0$$

- d) Pasa por el punto $P(-1, 0)$ y es paralela a la recta $y - 2 = 3(x - 2)$.

El vector $(1, 3)$ es el director de $y - 2 = 3(x - 2)$, por tanto, un vector director de la nueva recta es $(2, 6)$.

Ecuación vectorial: $(x, y) = (-1, 0) + t(2, 6)$

Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 6t \end{cases}$

$$\text{Ecuación continua: } \begin{cases} t = \frac{x+1}{2} \\ t = \frac{y}{6} \end{cases} \rightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{y}{6}$$

$$\text{Ecuación punto-pendiente: } y = 6\left(\frac{x+1}{2}\right) \rightarrow y = 3(x+1)$$

$$\text{Ecuación explícita: } y = 3x + 3$$

$$\text{Ecuación general: } -3x + y - 3 = 0$$

32. Página 168

a) $y = -2x + 1 \rightarrow \text{Pendiente} = -2$
 $2x - 3y + 2 = 0 \rightarrow \text{Pendiente} = \frac{2}{3}$ \rightarrow Las pendientes son distintas, luego las rectas son secantes.

b) $(x, y) = (2, 3) + t(1, 4) \rightarrow \text{Pendiente} = 4$
 $\frac{x-3}{-8} = \frac{y-1}{-2} \rightarrow \text{Pendiente} = \frac{1}{4}$ \rightarrow Las pendientes son distintas, luego las rectas son secantes.

33. Página 168

El vector $(1, 2)$ es director de la recta $y = 2x + 3$. Por tanto, un vector perpendicular puede ser $(-2, 1)$, es decir, la recta perpendicular tiene pendiente $m = -\frac{1}{2}$.

Vectores y rectas

34. Página 168

El vector director de s es $(2, 4)$ y su pendiente es $m = 2$. Por tanto, las pendientes son iguales cuando $A = 2$.
Pero en este caso son coincidentes ya que $\frac{-2}{4} = \frac{1}{-2} = \frac{-6}{12}$.

35. Página 169

- a) $3x + y - 1 = 0 \rightarrow \vec{v} = (1, -3)$ es vector director de la recta.

Un vector perpendicular es $\vec{v}' = (3, 1)$ y, por tanto, la recta perpendicular que pasa por el punto $P(3, -1)$ es:
 $(x, y) = (3, -1) + t \cdot (3, 1)$.

El punto $P(3, -1)$ no pertenece a la recta dada ya que $3x + y - 1 = 0 \xrightarrow{x=3, y=-1} 9 - 1 - 1 \neq 0$.

El vector director de la recta paralela puede ser el mismo que el de la recta original. Por tanto, la ecuación vectorial de la recta paralela es: $(x, y) = (3, -1) + t \cdot (1, -3)$.

- b) $5x + 2y - 4 = 0 \rightarrow \vec{v} = (2, -5)$ es vector director de la recta.

Un vector perpendicular es $\vec{v}' = (5, 2)$ y, por tanto, la recta perpendicular que pasa por el punto $P(3, -1)$ es:
 $(x, y) = (3, -1) + t \cdot (5, 2)$.

El punto $P(3, -1)$ no pertenece a la recta dada ya que $5x + 2y - 4 = 0 \xrightarrow{x=3, y=-1} 15 - 2 - 4 \neq 0$.

El vector director de la recta paralela puede ser el mismo que el de la recta original. Por tanto, la ecuación vectorial de la recta paralela es: $(x, y) = (3, -1) + t \cdot (2, -5)$.

- c) $-x + y + 2 = 0 \rightarrow \vec{v} = (1, 1)$ es vector director de la recta.

Un vector perpendicular es $\vec{v}' = (1, -1)$ y, por tanto, la recta perpendicular que pasa por el punto $P(3, -1)$ es:
 $(x, y) = (3, -1) + t \cdot (1, -1)$.

El punto $P(3, -1)$ no pertenece a la recta dada ya que $-x + y + 2 = 0 \xrightarrow{x=3, y=-1} -3 - 1 + 2 \neq 0$.

El vector director de la recta paralela puede ser el mismo que el de la recta original. Por tanto, la ecuación vectorial de la recta paralela es: $(x, y) = (3, -1) + t \cdot (1, 1)$.

- d) $-2x + 2y - 1 = 0 \rightarrow \vec{v} = (2, 2)$ es vector director de la recta.

Un vector perpendicular es $\vec{v}' = (2, -2)$ y, por tanto, la recta perpendicular que pasa por el punto $P(3, -1)$ es:
 $(x, y) = (3, -1) + t \cdot (2, -2)$.

El punto $P(3, -1)$ no pertenece a la recta dada ya que $-2x + 2y - 1 = 0 \xrightarrow{x=3, y=-1} -6 - 2 - 1 \neq 0$.

El vector director de la recta paralela puede ser el mismo que el de la recta original. Por tanto, la ecuación vectorial de la recta paralela es: $(x, y) = (3, -1) + t \cdot (2, 2)$.

- e) $4x + 3y + 2 = 0 \rightarrow \vec{v} = (3, -4)$ es vector director de la recta.

Un vector perpendicular es $\vec{v}' = (4, 3)$ y, por tanto, la recta perpendicular que pasa por el punto $P(3, -1)$ es:
 $(x, y) = (3, -1) + t \cdot (4, 3)$.

El punto $P(3, -1)$ no pertenece a la recta dada ya que $4x + 3y + 2 = 0 \xrightarrow{x=3, y=-1} 12 - 3 + 2 \neq 0$.

El vector director de la recta paralela puede ser el mismo que el de la recta original. Por tanto, la ecuación vectorial de la recta paralela es: $(x, y) = (3, -1) + t \cdot (6, -8)$.

36. Página 169

$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{7} \rightarrow \vec{v}_r = (2, 7)$ es un vector director de la recta.

Un vector paralelo es $\vec{v}_s = (4, 14)$. El punto $P(0, 0)$ no pertenece a la recta dada ya que:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{7} \xrightarrow{x=0, y=0} \frac{-1}{2} \neq \frac{-5}{7}$$

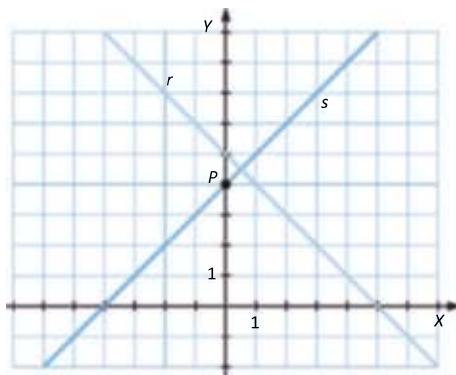
Por tanto, la ecuación vectorial de la recta paralela es $s: (x, y) = (0, 0) + t \cdot (4, 14)$.

37. Página 169

$r: x + y - 5 = 0 \rightarrow \vec{v}_r = (1, -1)$ es un vector director de la recta.

Un vector perpendicular es $\vec{v}_s = (1, 1)$ y, por tanto, la recta perpendicular que pasa por el punto $P(0, 4)$ es:

$$s: (x, y) = (0, 4) + t \cdot (1, 1)$$

**38. Página 169**

$r: (x, y) = (2, 0) + t(-1, 4) \rightarrow \vec{v}_r = (-1, 4)$ es un vector director de la recta.

Un vector paralelo es $\vec{v}_s = (-2, 8)$. El punto $P(1, 1)$ no pertenece a la recta dada ya que:

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y}{4} \xrightarrow{x=1, y=1} 1 \neq \frac{1}{4}$$

Por tanto, la ecuación vectorial de la recta paralela es $s: (x, y) = (1, 1) + t \cdot (-2, 8)$.

39. Página 169

$y = \frac{3}{2}x + 1 \rightarrow \vec{v} = (2, 3)$ es un vector director de la recta.

a) Un vector paralelo es $\vec{v}_s = (4, 6)$. El punto $P(0, 2)$ no pertenece a la recta dada ya que:

$$y = \frac{3}{2}x + 1 \xrightarrow{x=0, y=2} 2 \neq 1$$

Por tanto, la ecuación vectorial de la recta paralela es $s: (x, y) = (0, 2) + t \cdot (4, 6)$.

b) Un vector perpendicular es $\vec{v}_s = (3, -2)$ y, por tanto, la recta perpendicular que pasa por el punto $P(0, 0)$ es:

$$s: y = -\frac{2}{3}x$$

Vectores y rectas

- c) Un vector paralelo es $\vec{v}_s = (4, 6)$. El punto $Q(0, 3)$ no pertenece a la recta dada ya que:

$$y = \frac{3}{2}x + 1 \xrightarrow{x=0, y=3} 3 \neq 1$$

Por tanto, la ecuación continua de la recta paralela es $s: \frac{x}{4} = \frac{y-3}{6}$.

40. Página 169

$y = 7 \rightarrow (x, y) = (0, 7) + t(1, 0)$. Para que pase por el $(1, 2)$ la recta tiene que ser $y = 2$.

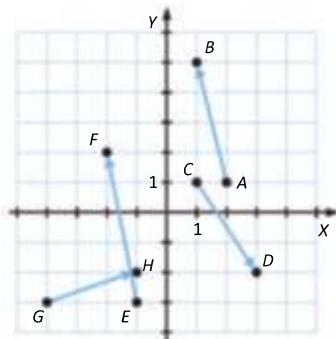
41. Página 169

La recta pasa por los puntos $A(0, 3)$ y $B(-2, -2) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2, -5) \rightarrow r: (x, y) = (0, 3) + t(-2, -5)$

- a) Un vector paralelo es $\vec{v}_s = (4, 10)$. Una recta paralela que pasa por el origen es $s: (x, y) = (0, 0) + t(4, 10)$.
- b) Un vector perpendicular es $\vec{v}_t = (-5, 2)$. Una recta perpendicular que pasa por $A(0, -1)$ es $t: (x, y) = (0, -1) + t(-5, 2)$.

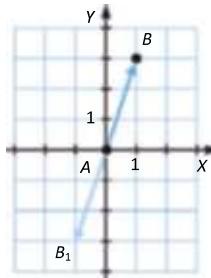
ACTIVIDADES FINALES

42. Página 170



43. Página 170

$\overrightarrow{AB} = (1 - 0, 3 - 0) = (1, 3)$, y un vector con sentido contrario $\overrightarrow{AB_1} = (-1, -3)$.

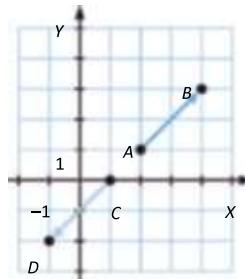


44. Página 170

- a) El origen es $A(0, 0)$ y el extremo es $(5, 2) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (5, 2)$.
- b) El origen es $A(0, 0)$ y el extremo es $(-2, 1) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2, 1)$.
- c) El origen es $A(0, 0)$ y el extremo es $(3, 2) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (3, 2)$.
- d) El origen es $A(0, 0)$ y el extremo es $(2, 5; 7) = \overrightarrow{AB} = (2, 5; 7)$.

45. Página 170

$\overrightarrow{AB} = (4 - 2, 3 - 1) = (2, 2) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, y un vector con el mismo módulo y la misma dirección es $\overrightarrow{CD} = (-2, -2)$.

**46. Página 170**

El origen es el punto $A(2, 1)$ y el extremo $B(5, 2)$.

47. Página 170

$P(5, 2)$ y $B(b_1, b_2) \rightarrow \vec{a} = \overrightarrow{PB} = (b_1 - 5, b_2 - 2) = (3, -1) \rightarrow B(8, 1)$

48. Página 170

$A(a_1, a_2)$ y $Q(3, -1) \rightarrow \vec{a} = \overrightarrow{AQ} = (3 - a_1, -1 - a_2) = (-2, 4) \rightarrow A(5, -5)$

49. Página 170

- a) $P(-2, -7)$ y $B(b_1, b_2) \rightarrow \vec{a} = (b_1 + 2, b_2 + 7) = (-3, 2) \rightarrow B(-5, -5)$
- b) $P(1, -6)$ y $B(b_1, b_2) \rightarrow \vec{b} = (b_1 - 1, b_2 + 6) = (4, -5) \rightarrow B(5, -11)$
- c) $P(5, 3)$ y $B(b_1, b_2) \rightarrow \vec{c} = (b_1 - 5, b_2 - 3) = (4, 11) \rightarrow B(9, 14)$
- d) $P(7, -2)$ y $B(b_1, b_2) \rightarrow \vec{d} = (b_1 - 7, b_2 + 2) = (-5, 7) \rightarrow B(2, 5)$

50. Página 170

- a) El origen es $A(4, 4)$, el extremo $B(2, 1)$ y las coordenadas $\overrightarrow{AB} = (-2, -3)$.
- b) El origen es $A(1, 0)$, el extremo $B(-2, 1)$ y las coordenadas $\overrightarrow{AB} = (-3, 1)$.
- c) El origen es $A(-1, 2)$, el extremo $B(6, 2)$ y las coordenadas $\overrightarrow{AB} = (7, 0)$.
- d) El origen es $A(0, 5)$, el extremo $B(5, 7)$ y las coordenadas $\overrightarrow{AB} = (5, 2)$.

51. Página 170

- a) $P(-6, -7)$ y $A(a_1, a_2) \rightarrow \vec{a} = (-6 - a_1, -7 - a_2) = (-3, 5) \rightarrow A(-3, -12)$
- b) $P(0, 1)$ y $A(a_1, a_2) \rightarrow \vec{b} = (0 - a_1, 1 - a_2) = (1, -5) \rightarrow A(-1, 6)$
- c) $P(2, 8)$ y $A(a_1, a_2) \rightarrow \vec{c} = (2 - a_1, 8 - a_2) = (4, 7) \rightarrow A(-2, 1)$
- d) $P(-1, -3)$ y $A(a_1, a_2) \rightarrow \vec{d} = (-1 - a_1, -3 - a_2) = (-1, 1) \rightarrow A(0, -4)$

Vectores y rectas

52. Página 170

Los vectores que forman los puntos son:

$$\overrightarrow{AB} = (1, 3)$$

$$\overrightarrow{BC} = (-1, 1)$$

$$\overrightarrow{CA} = (0, -4)$$

Si los puntos están alineados, los vectores que forman deben tener la misma dirección, es decir, sus coordenadas deben ser múltiplos. Tenemos que comprobar si existe un número, λ , de forma que al multiplicar uno de los vectores por ese número obtengamos otro de los vectores:

$\overrightarrow{AB} = (1, 3) = \lambda \cdot \overrightarrow{BC} = \lambda \cdot (-1, 1) \rightarrow$ Imposible. Los puntos no están alineados, forman un triángulo.

53. Página 170

Puntos: $A(2, -2)$

$B(4, 2)$

$C(0, 6)$

Vectores: $\overrightarrow{AB} = (2, 4)$

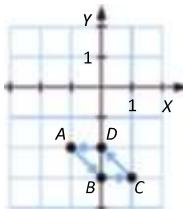
$\overrightarrow{BC} = (-4, 4)$

$\overrightarrow{CA} = (2, -8)$

54. Página 170

Obtenemos gráficamente el punto D :

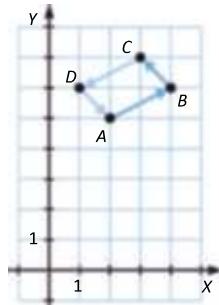
El punto es $D(0, -2)$.



55. Página 170

Obtenemos gráficamente el punto D :

El punto es $D(1, 6)$.



56. Página 171

a) $A(1, -2)$ y $B(4, 2) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (3, 4) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{25} = 5$

b) $A(0, 0)$ y $B(-4, 3) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-4, 3) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{25} = 5$

c) $A(2, -3)$ y $B(1, 2) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-1, 5) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{26}$

d) $A(3, 7)$ y $B(0, 3) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-3, -4) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{25} = 5$

57. Página 171

a) $A(1, 5)$ y $B(4, 8) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (3, 3) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

b) $C(4, -1)$ y $D(9, 10) \rightarrow \overrightarrow{CD} = (5, 11) \rightarrow |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{146}$

c) $E(-2, -6)$ y $F(-1, 0) \rightarrow \overrightarrow{EF} = (1, 6) \rightarrow |\overrightarrow{EF}| = \sqrt{37}$

d) $G(-3, 0)$ y $H(0, -1) \rightarrow \overrightarrow{GH} = (3, -1) \rightarrow |\overrightarrow{GH}| = \sqrt{10}$

58. Página 171

$$\vec{v} = (5, 12) \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{169} = 13$$

Vector con módulo igual a la unidad: $\vec{u} = (0, 1) \rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{1^2} = 1$

Vector con módulo el doble de \vec{v} : $\vec{v}_2 = (26, 0) \rightarrow |\vec{v}_2| = \sqrt{26^2} = 26$

59. Página 171

Calculamos los vectores que forman los puntos y sus módulos:

$$\overrightarrow{AB} = (1, -1) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{CD} = (-1, 1) \rightarrow |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{BC} = (1, 1) \rightarrow |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{DA} = (-1, -1) \rightarrow |\overrightarrow{DA}| = \sqrt{2}$$

Veamos si los vectores consecutivos son perpendiculares:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0 \rightarrow \text{Son perpendiculares.}$$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0 \rightarrow \text{Son perpendiculares.}$$

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DA} = (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = 0 \rightarrow \text{Son perpendiculares.}$$

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} = (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = 0 \rightarrow \text{Son perpendiculares.}$$

Como todos los vectores tienen el mismo módulo, y los vectores consecutivos son perpendiculares, determinan un cuadrado.

60. Página 171

Las diagonales miden: $\overrightarrow{AC} = (0, -4) \rightarrow |\overrightarrow{AC}| = 4$

$$\overrightarrow{BD} = (2, 0) \rightarrow |\overrightarrow{BD}| = 2$$

Por tanto, el área del rombo es $\frac{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}|}{2} = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4$.

61. Página 171

Los vértices del triángulo son: $A(0, 0)$ $B(-4, 3)$ $C(6, 3)$

Los lados del triángulo miden:

$$\overrightarrow{AB} = (-4, 3) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 5$$

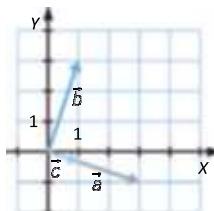
$$\overrightarrow{BC} = (10, 0) \rightarrow |\overrightarrow{BC}| = 10$$

$$\overrightarrow{CA} = (-6, -3) \rightarrow |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$\text{Perímetro} = 15 + 3\sqrt{5}$$

62. Página 171

Los vectores \vec{a} y \vec{c} tienen la misma dirección y el mismo sentido. El vector \vec{b} es perpendicular a los otros dos.



Vectores y rectas

63. Página 171

a) $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0 \rightarrow$ Son perpendiculares.

b) $\frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} \rightarrow -\frac{1}{2} = -\frac{2}{4} \rightarrow$ Son paralelos.

c) $e_1 \cdot f_1 + e_2 \cdot f_2 = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) = 0 \rightarrow$ Son perpendiculares.

d) $\frac{g_2}{g_1} = \frac{b_2}{b_1} \rightarrow \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \rightarrow$ Son paralelos.

64. Página 171

Los vectores que forman los puntos son:

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 3) \quad \overrightarrow{BC} = (2, -2) \quad \overrightarrow{CA} = (-1, -1)$$

Comprobamos si dos de los vectores son perpendiculares.

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 3) \text{ y } \overrightarrow{BC} = (2, -2) \rightarrow (-1) \cdot 2 + 3 \cdot (-2) = -8 \neq 0 \rightarrow \text{No son perpendiculares.}$$

$$\overrightarrow{BC} = (2, -2) \text{ y } \overrightarrow{CA} = (-1, -1) \rightarrow 2 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-1) = 0 \rightarrow \text{Son perpendiculares.}$$

Los puntos no están alineados y dos de sus lados son perpendiculares, por tanto, forman un triángulo rectángulo.

65. Página 171

$$\vec{u} = (2, x) \text{ y } \vec{v} = (x-1, 4) \text{ perpendiculares} \rightarrow 2 \cdot (x-1) + x \cdot 4 = 0 \rightarrow 2x - 2 + 4x = 0 \rightarrow 6x = 2 \rightarrow x = \frac{1}{3}$$

66. Página 171

$$\vec{u} = (x, 8) \text{ y } \vec{v} = (2, x) \text{ paralelos} \rightarrow \frac{8}{x} = \frac{x}{2} \rightarrow 16 = x^2 \rightarrow x = \pm 4$$

67. Página 171

a) $\vec{w} = 2 \cdot (1, -3) = (2, -6)$

c) $\vec{w} = \frac{3}{2} \cdot (5, -1) = \left(\frac{15}{2}, -\frac{3}{2} \right)$

b) $\vec{w} = (-1) \cdot (3, 2) = (-3, -2)$

d) $\vec{w} = \frac{1}{2} \cdot (-2, 4) = (-1, 2)$

68. Página 171

a) $\vec{u} = (4, 2) \text{ y } \vec{v} = (1, -2) \rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (5, 0)$

c) $\vec{u} = (1, 2) \text{ y } \vec{v} = (2, -3) \rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (3, -1)$

b) $\vec{u} = (2, 2) \text{ y } \vec{v} = (5, -3) \rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (7, -1)$

d) $\vec{u} = (2, 1) \text{ y } \vec{v} = (3, 1) \rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (5, 2)$

69. Página 171

a) $\vec{v} + \vec{w} = (3, -2) + (-1, 7) = (2, 5)$

c) $2\vec{v} - 3\vec{w} = (6, -4) - (-3, 21) = (9, -25)$

b) $\vec{v} - \vec{w} = (3, -2) - (-1, 7) = (4, -9)$

d) $5\vec{v} + 2\vec{w} = (15, -10) + (-4, 14) = (11, 4)$

70. Página 171

- a) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (2, -5) + (3, 7) + (5, -1) = (10, 1)$
b) $-2\vec{a} + 5\vec{b} + \vec{c} = (-4, 10) + (15, 35) + (5, -1) = (16, 44)$
c) $\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c} = (2, -5) + (6, 14) + (-15, 3) = (-7, 12)$
d) $-\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + 4\vec{c} = (-2, 5) + \left(-\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}\right) + (20, -4) = \left(\frac{33}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

72. Página 172

- a) $A(2, 2)$ y $B(4, 2) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (2, 0) \rightarrow M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (2, 2) + (1, 0) = (3, 2)$
b) $A(3, 5)$ y $B(1, 7) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2, 2) \rightarrow M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (3, 5) + (-1, 1) = (2, 6)$
c) $A(2, 3)$ y $B(4, 1) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (2, -2) \rightarrow M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (2, 3) + (1, -1) = (3, 2)$
d) $A(5, 7)$ y $B(1, 3) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-4, -4) \rightarrow M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (5, 7) + (-2, -2) = (3, 5)$

73. Página 172

- a) $A(1, -3)$ y $B(-1, 2) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2, 5) \rightarrow M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1, -3) + \left(-1, \frac{5}{2}\right) = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$
b) $A(1, -1)$ y $B(5, 7) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (4, 8) \rightarrow M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1, -1) + (2, 4) = (3, 3)$
c) $A(-3, -3)$ y $B(-4, 2) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-1, 5) \rightarrow M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (-3, -3) + \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
d) $A(2, -7)$ y $B(-1, 3) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-3, 10) \rightarrow M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (2, -7) + \left(-\frac{3}{2}, 5\right) = \left(\frac{1}{2}, -2\right)$

74. Página 172

- a) $\overrightarrow{AB} = (b_1 - 0, b_2 - 3) \rightarrow M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \rightarrow (2, 2) = (0, 3) + \left(\frac{b_1}{2}, \frac{b_2 - 3}{2}\right) \rightarrow (2, 2) = \left(\frac{b_1}{2}, \frac{b_2 + 3}{2}\right) \rightarrow B = (4, 1)$
b) $\overrightarrow{AB} = (b_1 - 2, b_2 + 1) \rightarrow M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \rightarrow (0, 0) = (2, -1) + \left(\frac{b_1 - 2}{2}, \frac{b_2 + 1}{2}\right) \rightarrow (0, 0) = \left(\frac{b_1 + 2}{2}, \frac{b_2 - 1}{2}\right) \rightarrow B = (-2, 1)$
c) $\overrightarrow{AB} = (b_1 + 3, b_2 - 3) \rightarrow M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \rightarrow (0, 5) = (-3, 3) + \left(\frac{b_1 + 3}{2}, \frac{b_2 - 3}{2}\right) \rightarrow (0, 5) = \left(\frac{b_1 - 3}{2}, \frac{b_2 + 3}{2}\right) \rightarrow B = (3, 7)$
d) $\overrightarrow{AB} = (b_1 - 5, b_2 - 3) \rightarrow M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \rightarrow (-2, -2) = (5, 3) + \left(\frac{b_1 - 5}{2}, \frac{b_2 - 3}{2}\right) \rightarrow (-2, -2) = \left(\frac{b_1 + 5}{2}, \frac{b_2 + 3}{2}\right) \rightarrow B = (-9, -7)$

75. Página 172

- $A(0, 0)$ y $B(5, 2) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (5, 2) \rightarrow M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (0, 0) + \left(\frac{5}{2}, 1\right) = \left(\frac{5}{2}, 1\right)$

Vectores y rectas

76. Página 172

$$\overrightarrow{PQ} = (6, -6) \rightarrow M = P + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = (-2, 3) + (3, -3) = (1, 0)$$

77. Página 172

$$\overrightarrow{AB} = (2, -4) \rightarrow M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (2, 1) + (1, -2) = (3, -1)$$

78. Página 172

- a) $\vec{v}(2, 3)$ y $A(1, 3) \rightarrow (x, y) = (1, 3) + t(2, 3)$
- b) $\vec{v}(-1, 1)$ y $A(0, 5) \rightarrow (x, y) = (0, 5) + t(-1, 1)$
- c) $\vec{v}(-4, 1)$ y $A(-1, -2) \rightarrow (x, y) = (-1, -2) + t(-4, 1)$
- d) $\vec{v}(5, -3)$ y $A(3, -1) \rightarrow (x, y) = (3, -1) + t(5, -3)$

79. Página 172

- a) $A(0, 3)$ y $B(2, 1) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (2, -2) \rightarrow (x, y) = (0, 3) + t(2, -2)$
- b) $A(3, -2)$ y $B(5, 1) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (2, 3) \rightarrow (x, y) = (3, -2) + t(2, 3)$
- c) $A(-6, -1)$ y $B(4, -3) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (10, -2) \rightarrow (x, y) = (-6, -1) + t(10, -2)$
- d) $A(3, -7)$ y $B(4, 2) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (1, 9) \rightarrow (x, y) = (3, -7) + t(1, 9)$

80. Página 172

- a) La recta pasa por los puntos $A(0, 1)$ y $B(1, 3) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (1, 2) \rightarrow (x, y) = (0, 1) + t(1, 2)$.
- b) La recta pasa por los puntos $A(-1, 0)$ y $B(0, 3) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (1, 3) \rightarrow (x, y) = (-1, 0) + t(1, 3)$.
- c) La recta pasa por los puntos $A(0, -2)$ y $B(-1, 2) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-1, 4) \rightarrow (x, y) = (0, -2) + t(-1, 4)$.
- d) La recta pasa por los puntos $A(-4, 0)$ y $B(0, -4) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (4, -4) \rightarrow (x, y) = (-4, 0) + t(4, -4)$.

81. Página 172

- a) $\vec{v}(-1, 1)$ y $A(-9, 4) \rightarrow \begin{cases} x = -9 - t \\ y = 4 + t \end{cases}$
- b) $\vec{v}(8, -1)$ y $A(6, 9) \rightarrow \begin{cases} x = 6 + 8t \\ y = 9 - t \end{cases}$
- c) $\vec{v}(-1, -5)$ y $A(-3, 1) \rightarrow \begin{cases} x = -3 - t \\ y = 1 - 5t \end{cases}$
- d) $\vec{v}(-4, -7)$ y $A(-2, 3) \rightarrow \begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = 3 - 7t \end{cases}$

82. Página 172

- a) $A(-3, -8)$ y $B(0, 10) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (3, 18) \rightarrow \begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = -8 + 18t \end{cases}$
- b) $A(-8, -6)$ y $B(1, 5) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (9, 11) \rightarrow \begin{cases} x = -8 + 9t \\ y = -6 + 11t \end{cases}$
- c) $A(5, 8)$ y $B(-9, 5) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-14, -3) \rightarrow \begin{cases} x = 5 - 14t \\ y = 8 - 3t \end{cases}$
- d) $A(0, 4)$ y $B(-10, 0) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-10, -4) \rightarrow \begin{cases} x = -10t \\ y = 4 - 4t \end{cases}$

83. Página 172

a) Pasa por los puntos $A(1, 0)$ y $B(0, -1) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-1, -1) \rightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -t \end{cases}$.

b) Pasa por los puntos $A(1, 0)$ y $B(0, -2) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-1, -2) \rightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2t \end{cases}$.

c) Pasa por los puntos $A(1, 0)$ y $B(0, 1) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-1, 1) \rightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \end{cases}$.

d) Pasa por los puntos $A(-2, -1)$ y $B(0, 3) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (2, 4) \rightarrow \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -1 + 4t \end{cases}$.

85. Página 173

a) $\frac{y+1}{5} = \frac{x-2}{3}$ y $P(2, 3) \quad \frac{y+1}{5} = \frac{x-2}{3} \xrightarrow{x=2, y=3} \frac{4}{5} \neq \frac{0}{3} \rightarrow \text{No pertenece a la recta.}$

b) $\frac{y+1}{2} = \frac{x}{-3}$ y $P(-1, 3) \quad \frac{y+1}{2} = \frac{x}{-3} \xrightarrow{x=-1, y=3} \frac{4}{2} \neq \frac{1}{3} \rightarrow \text{No pertenece a la recta.}$

c) $\frac{y}{3} = \frac{x+3}{6}$ y $P(6, 9) \quad \frac{y}{3} = \frac{x+3}{6} \xrightarrow{x=6, y=9} 3 \neq \frac{3}{2} \rightarrow \text{No pertenece a la recta.}$

86. Página 173

a) $(x, y) = (2, 4) + \lambda(1, 2) \rightarrow x - 2 = \frac{y - 4}{2} \xrightarrow{x=3, y=6} 1 = 1 \rightarrow \text{Sí pertenece a la recta.}$

b) $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - 2t \end{cases} \rightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-2} \xrightarrow{x=3, y=6} 2 \neq -\frac{3}{2} \rightarrow \text{No pertenece a la recta.}$

c) $(x, y) = (3, 5) + \lambda(-1, 1) \rightarrow -(x-3) = y-5 \xrightarrow{x=3, y=6} 0 \neq 1 \rightarrow \text{No pertenece a la recta.}$

d) $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 8 - t \end{cases} \rightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{y-8}{-1} \xrightarrow{x=3, y=6} 2 = 2 \rightarrow \text{Sí pertenece a la recta.}$

87. Página 173

a) $\vec{v} = (-1, 6)$ y $A(-3, -8) \rightarrow \frac{x+3}{-1} = \frac{y+8}{6}$

c) $\vec{v} = (6, -2)$ y $A(10, -7) \rightarrow \frac{x-10}{6} = \frac{y+7}{-2}$

b) $\vec{v} = (-6, -2)$ y $A(4, -5) \rightarrow \frac{x-4}{-6} = \frac{y+5}{-2}$

d) $\vec{v} = (-1, 3)$ y $A(6, -7) \rightarrow \frac{x-6}{-1} = \frac{y+7}{3}$

88. Página 173

a) $A(-6, 0)$ y $B(-9, -7) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-3, -7) \rightarrow \frac{x+6}{-3} = \frac{y}{-7}$

b) $A(0, -10)$ y $B(-6, -3) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-6, 7) \rightarrow \frac{x}{-6} = \frac{y+10}{7}$

c) $A(7, 5)$ y $B(-4, 2) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-11, -3) \rightarrow \frac{x-7}{-11} = \frac{y-5}{-3}$

d) $A(-2, 8)$ y $B(1, 9) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (3, 1) \rightarrow \frac{x+2}{3} = y-8$

Vectores y rectas

89. Página 173

a) $y = 2x - 1 \xrightarrow{x=2, y=3} 3 = 4 - 1 \rightarrow 3 = 3 \rightarrow$ Sí pertenece a la recta.

b) $y - 2 = 2(x - 1) \xrightarrow{x=-1, y=3} 1 \neq -4 \rightarrow$ No pertenece a la recta.

c) $y = -x + 3 \xrightarrow{x=3, y=1} 1 \neq 0 \rightarrow$ No pertenece a la recta.

90. Página 173

a) $\vec{v}(-2, -1)$ y $A(0, -6) \rightarrow y = \frac{1}{2}x - 6$

c) $\vec{v}(1, -3)$ y $A(-8, 3) \rightarrow y = -3x - 21$

b) $\vec{v}(8, 9)$ y $A(-6, 10) \rightarrow y = \frac{9}{8}x + \frac{67}{4}$

d) $\vec{v}(-1, 3)$ y $A(-7, -6) \rightarrow y = -3x - 27$

91. Página 173

a) $m = -7$ y $A(0, 3) \rightarrow y - 3 = -7x$

c) $m = 3$ y $A(3, 5) \rightarrow y - 5 = 3(x - 3)$

b) $m = -4$ y $A(4, -5) \rightarrow y + 5 = -4(x - 4)$

d) $m = -1$ y $A(0, -3) \rightarrow y + 3 = -x$

92. Página 173

a) La recta pasa por los puntos $A(3, 2)$ y $B(-2, -2) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-5, -4) \rightarrow y = \frac{4}{5}x - \frac{5}{2}$.

b) La recta pasa por los puntos $A(2, 1)$ y $B(1, -2) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-1, -3) \rightarrow y = 3x - 5$.

94. Página 173

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $2x + 4y - 3 = 0 \rightarrow \vec{v} = (4, -2)$ Para $\begin{cases} x = 0 \rightarrow y = \frac{3}{4} \\ y = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow A\left(0, \frac{3}{4}\right)$ y $B\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

b) $x - 3y + 1 = 0 \rightarrow \vec{v} = (-3, -1)$ Para $\begin{cases} x = 0 \rightarrow y = \frac{1}{3} \\ y = 0 \rightarrow x = -1 \end{cases} \rightarrow A\left(0, \frac{1}{3}\right)$ y $B(-1, 0)$

c) $\begin{cases} x = 2 + 8t \\ y = 1 - 6t \end{cases} \rightarrow \vec{v} = (8, -6)$ Para $\begin{cases} t = 0 \rightarrow A(2, 1) \\ t = 1 \rightarrow B(10, -5) \end{cases}$

d) $x + 8y + 1 = 0 \rightarrow \vec{v} = (8, -1)$ Para $\begin{cases} x = 0 \rightarrow y = -\frac{1}{8} \\ y = 0 \rightarrow x = -1 \end{cases} \rightarrow A\left(0, -\frac{1}{8}\right)$ y $B(-1, 0)$

e) $y + 5 = 7(x - 4) \rightarrow \vec{v} = (1, 7)$ Para $\begin{cases} x = 0 \rightarrow y = -33 \\ x = 4 \rightarrow y = -5 \end{cases} \rightarrow A(0, -33)$ y $B(4, -5)$

f) $\frac{y - 6}{-5} = \frac{x - 10}{2} \rightarrow \vec{v} = (2, -5)$ Para $\begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 31 \\ y = 6 \rightarrow x = 10 \end{cases} \rightarrow A(0, 31)$ y $B(10, 6)$

95. Página 174

a) $A(7, -8), B(5, -4) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2, 4) = (B, -A)$

$$Ax + By + C = 0 \xrightarrow{A=-4, B=-2} -4x - 2y + C = 0$$

$$B(5, -4) \in r \xrightarrow{x=5, y=-4} 20 + 8 + C = 0 \rightarrow C = 12 \quad r : -4x - 2y + 12 = 0$$

b) $A(-1, 1), B(-2, 4) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-1, 3) = (B, -A)$

$$Ax + By + C = 0 \xrightarrow{A=-3, B=-1} -3x - y + C = 0$$

$$A(-1, 1) \in r \xrightarrow{x=-1, y=1} 3 - 1 + C = 0 \rightarrow C = -2 \quad r : -3x - y - 2 = 0$$

c) $A(9, -8), B(0, 3) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-9, 11) = (B, -A)$

$$Ax + By + C = 0 \xrightarrow{A=-11, B=-9} -11x - 9y + C = 0$$

$$B(0, 3) \in r \xrightarrow{x=0, y=3} -27 + C = 0 \rightarrow C = 27 \quad r : -11x - 9y + 27 = 0$$

d) $A(10, -6), B(0, 5) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-10, 11) = (B, -A)$

$$Ax + By + C = 0 \xrightarrow{A=-11, B=-10} -11x - 10y + C = 0$$

$$B(0, 5) \in r \xrightarrow{x=0, y=5} -50 + C = 0 \rightarrow C = 50 \quad r : -11x - 10y + 50 = 0$$

96. Página 174

a) La recta pasa por los puntos $A(3, 0)$ y $B(0, 1) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-3, 1) = (B, -A)$

$$Ax + By + C = 0 \xrightarrow{A=-1, B=-3} -x - 3y + C = 0$$

$$B(0, 1) \in r \xrightarrow{x=0, y=1} -3 + C = 0 \rightarrow C = 3 \quad r : -x - 3y + 3 = 0$$

b) La recta pasa por los puntos $A(5, 0)$ y $B(0, 3) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-5, 3) = (B, -A)$

$$Ax + By + C = 0 \xrightarrow{A=-3, B=-5} -3x - 5y + C = 0$$

$$B(0, 3) \in r \xrightarrow{x=0, y=3} -15 + C = 0 \rightarrow C = 15 \quad r : -3x - 5y + 15 = 0$$

98. Página 174

a) $\begin{cases} r : 2x - 2y + 5 = 0 \\ s : x + 4y - 1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\substack{x=1-4y \\ \rightarrow x=1-4y}} 2 - 8y - 2y + 5 = 0 \rightarrow y = \frac{7}{10} \rightarrow P\left(-\frac{9}{5}, \frac{7}{10}\right)$

b) $\begin{cases} r : 4x - 3y + 1 = 0 \\ s : x - y = 0 \end{cases} \xrightarrow{\substack{x=y \\ \rightarrow x=y}} 4y - 3y + 1 = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow P(-1, -1)$

c) $\begin{cases} r : x - 2y = 0 \\ s : 3x + 2y - 16 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\substack{x=2y \\ \rightarrow x=2y}} 6y + 2y - 16 = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow P(4, 2)$

d) $\begin{cases} r : x - 3y + 7 = 0 \\ s : x + y - 1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\substack{x=1-y \\ \rightarrow x=1-y}} 1 - y - 3y + 7 = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow P(-1, 2)$

Vectores y rectas

99. Página 174

a) $s: (x, y) = (1, 3) + t(2, -1) \rightarrow s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1}$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} \xrightarrow{x=2+2t, y=-1+t} \frac{2+2t-1}{2} = \frac{-1+t-3}{-1} \rightarrow -1-2t = 2t-8 \rightarrow t = \frac{7}{4}$$

$$\begin{cases} x = 2+2t \\ y = -1+t \end{cases} \xrightarrow{t=\frac{7}{4}} \begin{cases} x = 2+\frac{7}{2} = \frac{11}{2} \\ y = -1+\frac{7}{4} = \frac{3}{4} \end{cases} \rightarrow P\left(\frac{11}{2}, \frac{3}{4}\right)$$

b) $\begin{cases} \frac{x+1}{-2} = \frac{y+3}{4} \\ y-3 = 2(x+2) \end{cases} \xrightarrow{y=2x+7} \frac{x+1}{-2} = \frac{2x+7+3}{4} \rightarrow 4x+4 = -4x-20 \rightarrow x = -3 \rightarrow P(-3, 1)$

100. Página 174

a) $r: \begin{cases} x = 2-3t \\ y = 2t \end{cases} \rightarrow \vec{v} = (-3, 2) \rightarrow$ Un vector paralelo es $\vec{v} = (-6, 4) \rightarrow \begin{cases} x = -3-6t \\ y = 1+4t \end{cases}$.

b) Si no corta a r entonces es paralela o coincidente con ella, luego tienen la misma pendiente: $y = \frac{2}{5}x + 2$

c) La ecuación es $y = \frac{2}{3}x + n$. Como pasa por el punto $(-2, 0) \rightarrow 0 = \frac{2}{3}(-2) + n \rightarrow n = \frac{4}{3} \rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$.

d) Las rectas paralelas al eje X son de la forma $y = k$. Como su ordenada en el origen vale $n = -1 \rightarrow y = -1$.

101. Página 174

a) $r: 3x + y - 7 = 0 \rightarrow \vec{u} = (1, -3), m_1 = -3$
 $s: 3x + y + 5 = 0 \rightarrow \vec{v} = (1, -3), m_2 = -3$

Tienen pendientes iguales, pero $\frac{3}{1} = \frac{1}{1} \neq \frac{-7}{5} \rightarrow$ son rectas paralelas.

b) $r: x + y - 3 = 0 \rightarrow \vec{u} = (1, -1), m_1 = -1$
 $s: 2x + 2y - 6 = 0 \rightarrow \vec{v} = (2, -2), m_2 = -1$

Tienen pendientes iguales, y además $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{-3}{-6} \rightarrow$ son rectas coincidentes.

c) $r: x + 3y - 4 = 0 \rightarrow \vec{u} = (3, -1), m_1 = -\frac{1}{3}$
 $s: x + 2y + 5 = 0 \rightarrow \vec{v} = (2, -1), m_2 = -\frac{1}{2}$

Tienen pendientes distintas. Por tanto, son rectas secantes.

d) $r: -5x + 10y - 8 = 0 \rightarrow \vec{u} = (10, 5), m_1 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$
 $s: 10x - 20y + 16 = 0 \rightarrow \vec{v} = (-20, -10), m_2 = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

Tienen pendientes iguales, y además $\frac{-5}{10} = \frac{10}{-20} = \frac{-8}{16} \rightarrow$ son rectas coincidentes.

e) $r: -x + 2y - 1 = 0 \rightarrow \vec{u} = (2, 1), m_1 = \frac{1}{2}$
 $s: 2 - x + 3y - 8 = 0 \rightarrow \vec{v} = (3, 1), m_2 = \frac{1}{3}$

Tienen pendientes distintas. Por tanto, son rectas secantes.

$$\text{f)} \begin{cases} r: \frac{1}{2}x + y - 3 = 0 \\ s: x - \frac{1}{5}y + 8 = 0 \end{cases} \rightarrow \vec{u} = \left(1, -\frac{1}{2}\right), m_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \vec{v} = \left(-\frac{1}{5}, -1\right), m_2 = 5$$

Tienen pendientes distintas. Por tanto, son rectas secantes.

102. Página 174

$$\text{a)} \begin{cases} r: (x, y) = (1, 3) + t(1, 2) \\ s: \frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{2} \end{cases} \rightarrow \vec{u} = (1, 2)$$

$$\rightarrow \vec{v} = (1, 2)$$

Tienen el mismo vector director. El punto $(1, 3)$ pertenece a ambas rectas. Por tanto, son rectas coincidentes.

$$\text{b)} \begin{cases} r: \begin{cases} x = 2-t \\ y = t \end{cases} \\ s: (x, y) = (2, 0) + t(2, -1) \end{cases} \rightarrow \vec{u} = (-1, 1), m_1 = -1$$

$$\rightarrow \vec{v} = (2, -1), m_2 = -\frac{1}{2}$$

Tienen pendientes distintas. Por tanto, son rectas secantes.

$$\text{c)} \begin{cases} r: \begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = 2 - 2t \end{cases} \\ s: \frac{x-8}{10} = \frac{y}{-4} \end{cases} \rightarrow \vec{u} = (5, -2), m_1 = -\frac{2}{5}$$

$$\rightarrow \vec{v} = (10, -4), m_2 = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}$$

Tienen la misma pendiente y el punto $(3, 2)$ pertenece a las dos rectas. Por tanto, son rectas coincidentes.

$$\text{d)} \begin{cases} r: 2x - 3y = 0 \\ s: (x, y) = t(1, -1) \end{cases} \rightarrow \vec{u} = (-3, -2), m_1 = \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow \vec{v} = (1, -1), m_2 = -1$$

Tienen pendientes distintas. Por tanto, son rectas secantes.

$$\text{e)} \begin{cases} r: \begin{cases} x = -2t \\ y = 3 + 2t \end{cases} \\ s: x + 3y - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \vec{u} = (-2, 2), m_1 = -1$$

$$\rightarrow \vec{v} = (3, -1), m_2 = \frac{-1}{3}$$

Tienen pendientes distintas. Por tanto, son rectas secantes.

103. Página 174

$2x - 3y + 1 = 0 \rightarrow \vec{v} = (-3, -2)$ es el vector director de la recta.

Un vector paralelo es $\vec{v}_2 = (-6, -4)$, y el punto $A(1, 4)$ no pertenece a la recta dada ya que:

$$2x - 3y + 1 = 0 \xrightarrow{x=1, y=4} 2 - 12 + 1 \neq 0$$

Por tanto, la ecuación vectorial de la recta paralela es $(x, y) = (1, 4) + t(-6, -4)$.

104. Página 174

$y = 2x - 3 \rightarrow 2x - y - 3 = 0 \rightarrow \vec{v} = (-1, -2)$ es el vector director de la recta.

Un vector paralelo es $\vec{v}_2 = (-2, -4)$, y el punto $A(-5, 2)$ no pertenece a la recta dada ya que:

$$y = 2x - 3 \xrightarrow{x=-5, y=2} 2 \neq -10 - 3$$

Por tanto, la ecuación vectorial de la recta paralela es $(x, y) = (-5, 2) + t(-2, -4)$.

Vectores y rectas

105. Página 175

$r: \begin{cases} x = 8 - t \\ y = 3 + 5t \end{cases} \rightarrow \vec{v} = (-1, 5)$ es el vector director de la recta.

Un vector paralelo es $\vec{v}_2 = (-2, 10)$, y el punto $C(-2, 7)$ no pertenece a la recta dada ya que:

$$\begin{cases} x = 8 - t \\ y = 3 + 5t \end{cases} \rightarrow \frac{x - 8}{-1} = \frac{y - 3}{5} \xrightarrow{x=-2, y=7} \frac{-10}{-1} \neq \frac{4}{5}$$

Por tanto, la ecuación vectorial de la recta paralela es $(x, y) = (-2, 7) + t(-2, 10)$.

106. Página 175

$$y = 2x - 8 \rightarrow 2x - y - 8 = 0 \rightarrow \vec{v} = (-1, -2)$$

Un vector perpendicular es $\vec{v}_p = (-2, 1)$.

Así, una recta perpendicular que pasa por $A(5, 3)$ es $(x, y) = (5, 3) + t(-2, 1)$.

107. Página 175

$$\frac{x - 1}{3} = \frac{y + 2}{-1} \rightarrow \vec{v} = (3, -1)$$

Un vector perpendicular es $\vec{v}_p = (-1, -3)$

Así, una recta perpendicular que pasa por $B(0, -9)$ es $(x, y) = (0, -9) + t(-1, -3)$.

108. Página 175

$$\begin{cases} y = 3x - 4 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow x - 3x + 4 - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow P(1, -1) \text{ es el punto de intersección.}$$

El vector director de la recta $\frac{x - 1}{5} = \frac{y}{-8}$ es $\vec{v} = (5, -8)$. Por tanto, un vector perpendicular es $\vec{v}_p = (-8, -5)$.

Así, la recta perpendicular que pasa por P es $(x, y) = (1, -1) + t(-8, -5)$.

109. Página 175

Calculamos la intersección.

$$(x, y) = (-2, 3) + t(3, -1) \rightarrow \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 3 - t \end{cases}$$

$$\text{Sustituimos en la otra ecuación: } \frac{x + 2}{1} = \frac{y - 3}{2} \xrightarrow{\substack{x = -2 + 3t \\ y = 3 - t}} \frac{-2 + 3t + 2}{1} = \frac{3 - t - 3}{2} \rightarrow 6t = -t \rightarrow t = 0$$

Ahora, sustituimos el valor de t en las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 3 - t \end{cases} \rightarrow P(-2, 3) \text{ es el punto de intersección de las rectas.}$$

El vector director de la recta $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \end{cases}$ es $\vec{v} = (1, -1)$. Por tanto, un vector perpendicular es $\vec{v}_p = (-1, -1)$.

Así, una recta perpendicular que pasa por P es $(x, y) = (-2, 3) + t(-1, -1)$.

110. Página 175

$$\frac{3x-2}{4} = \frac{-x+2}{3} \rightarrow 9x-6 = -4x+8 \rightarrow 13x = 14 \rightarrow x = \frac{14}{13}$$

Ecuación vectorial: $(x, y) = \left(\frac{14}{13}, 0\right) + t(0, 1)$

Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = \frac{14}{13} \\ y = t \end{cases}$

No se puede expresar en forma continua porque no tenemos parámetro t en x .

Ecuación punto-pendiente: $x - \frac{14}{13} = 0$

Ecuación explícita: $x = \frac{14}{13}$

Ecuación general: $x - \frac{14}{13} = 0$

111. Página 175

Q es el punto medio del segmento $PR \rightarrow Q = P + \frac{1}{2}\vec{PR}$

$\vec{PR} = (1, -2) \rightarrow Q = (1, 5) + \frac{1}{2}(1, -2) = \left(\frac{3}{2}, 4\right)$

P, Q y R están alineados.

Ecuación vectorial: $(x, y) = (1, 5) + t(1, -2)$

Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 5 - 2t \end{cases}$

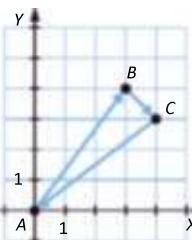
Ecuación continua: $\begin{cases} t = x - 1 \\ t = \frac{y - 5}{-2} \end{cases} \rightarrow \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 5}{-2}$

Ecuación punto-pendiente: $y - 5 = -2(x - 1)$

Ecuación explícita: $y = -2x + 7$

Ecuación general: $2x + y - 7 = 0$

112. Página 175



a) $A(0, 0)$
 $B(3, 4)$
 $C(4, 3)$

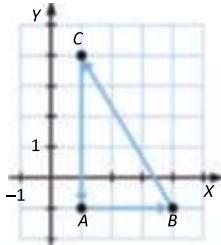
b) $\vec{BC} + \vec{CA} = (-3, -4)$

c) Perímetro = $|\vec{AB}| + |\vec{BC}| + |\vec{CA}| = 5 + \sqrt{2} + 5 = 10 + \sqrt{2}$

d) Tiene dos lados con la misma longitud, 5, por tanto es un triángulo isósceles.

Vectores y rectas

113. Página 175



$$\left. \begin{array}{l} A(1, -1) \\ B(4, -1) \\ C(1, 4) \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (3, 0) \\ \overrightarrow{BC} = (-3, 5) \\ \overrightarrow{CA} = (0, -5) \end{array}$$

$$M_1 = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \left(\frac{5}{2}, -1\right) \quad M_2 = B + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) \quad M_3 = C + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \left(1, \frac{3}{2}\right)$$

b) Las mediatrixes son rectas perpendiculares a los lados que pasan por su punto medio.

$$r_1 : (x, y) = \left(\frac{5}{2}, -1\right) + t(0, -3) \quad r_2 : (x, y) = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) + t(5, 3) \quad r_3 : (x, y) = \left(1, \frac{3}{2}\right) + t(-5, 0)$$

114. Página 175

Los puntos forman un triángulo si no están alineados.

A, B y C están alineados si los vectores \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} y \overrightarrow{CA} son paralelos.

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1)$$

$$\overrightarrow{BC} = (2, 2) \quad \text{Son paralelos, por tanto } A, B \text{ y } C \text{ están alineados.}$$

$$\overrightarrow{CA} = (-3, -3)$$

A, B y C no forman un triángulo.

115. Página 175

El punto B tiene que tener la primera coordenada de A y la segunda de $C \rightarrow B(1, 4)$

El punto D tiene que tener la primera coordenada de C y la segunda de $A \rightarrow D(5, 0)$

Cada lado mide: $\overrightarrow{AB} = (0, 4) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{0 + 16} = 4$ u. Por tanto, el área del cuadrado es 16 u².

116. Página 175

a) Las mediatrixes son rectas perpendiculares a los lados que pasan por su punto medio.

$$\overrightarrow{AB} = (0, 4) \quad \overrightarrow{BC} = (4, -2) \quad \overrightarrow{CA} = (-4, -2)$$

Vectores perpendiculares son:

$$\overrightarrow{AB}_2 = (4, 0) \quad \overrightarrow{BC}_2 = (-2, -4) \quad \overrightarrow{CA}_2 = (-2, 4)$$

Calculamos el punto medio de cada uno de los lados del triángulo.

$$M_1 = A + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \rightarrow (-4, -2) + (0, 2) = (-4, 0)$$

$$M_2 = B + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} \rightarrow (-4, 2) + (2, -1) = (-2, 1)$$

$$M_3 = C + \frac{1}{2} \overrightarrow{CA} \rightarrow (0, 0) + (-2, -1) = (-2, -1)$$

Por tanto, las mediatrices son:

$$m_1 : y = 0$$

$$m_2 : \frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{-4}$$

$$m_3 : \frac{x+2}{-2} = \frac{y+1}{4}$$

El circuncentro es el punto en el que se cortan las mediatrices:

$$\frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{-4} \xrightarrow{y=0} -4(x+2) = 2 \rightarrow -4x - 8 = 2 \rightarrow x = -\frac{5}{2} \rightarrow \left(-\frac{5}{2}, 0\right)$$

b) Las medianas son rectas que pasan por un vértice y por el punto medio del lado opuesto.

$$\overrightarrow{AM_2} = (2, 3) \rightarrow me_1 : \frac{x+4}{2} = \frac{y+2}{3} \quad \overrightarrow{BM_3} = (2, -3) \rightarrow me_2 : \frac{x+4}{2} = \frac{y-2}{-3} \quad \overrightarrow{CM_1} = (-4, 0) \rightarrow me_3 : y = 0$$

El baricentro es el punto de intersección de las medianas:

$$\frac{x+4}{2} = \frac{y+2}{3} \xrightarrow{y=0} 3(x+4) = 4 \rightarrow 3x = -8 \rightarrow x = -\frac{8}{3} \rightarrow \left(-\frac{8}{3}, 0\right)$$

c) Las alturas son rectas que pasan por un vértice y son perpendiculares al lado opuesto.

Vectores perpendiculares a los lados son:

$$\overrightarrow{AB}_2 = (4, 0)$$

$$\overrightarrow{BC}_2 = (-2, -4)$$

$$\overrightarrow{CA}_2 = (-2, 4)$$

$$\text{Altura desde el vértice } A(-4, -2): \quad h_1 : \frac{x+4}{-2} = \frac{y+2}{-4}$$

$$\text{Altura desde el vértice } B(-4, 2): \quad h_2 : \frac{x+4}{-2} = \frac{y-2}{4}$$

$$\text{Altura desde el vértice } C(0, 0): \quad h_3 : y = 0$$

El ortocentro es el punto de intersección de las alturas:

$$\frac{x+4}{-2} = \frac{y+2}{-4} \xrightarrow{y=0} -4x - 16 = -4 \rightarrow x = -3 \rightarrow (-3, 0)$$

117. Página 175

$$\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \overrightarrow{P_3P_4} + \dots + \overrightarrow{P_{n-2}P_{n-1}} + \overrightarrow{P_{n-1}P_n} + \overrightarrow{P_nP_1} = P_2 - P_1 + P_3 - P_2 + P_4 - P_3 + \dots + P_{n-1} - P_{n-2} + P_n - P_{n-1} + P_1 - P_n = 0$$

La suma es 0.

DEBES SABER HACER

1. Página 175

$A(0, -3)$ y $B(1, 4) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (1, 7)$ y $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{50}$

2. Página 175

$(x, y) = (1, 2) + t(2, -1)$

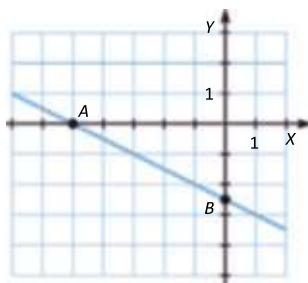
3. Página 175

Repuesta abierta. Por ejemplo:

$$\begin{cases} x = 0 + t \\ y = -1 - 2t \end{cases} \rightarrow A(0, -1) \text{ y } B(1, -3)$$

4. Página 175

La recta pasa por los puntos $A(-5, 0)$ y $B\left(0, -\frac{5}{2}\right)$.



5. Página 175

La ecuación punto-pendiente y la explícita coinciden para las rectas que pasan por el origen de coordenadas. Como tiene por vector director $\vec{u}(1, 1)$, la ecuación es $y = x$.

6. Página 175

Ecuación general: $5x - y + 2 = 0$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, 2) + t(-1, -5)$

$$\text{Ecuación paramétrica: } \begin{cases} x = -t \\ y = 2 - 5t \end{cases}$$

$$\text{Ecuación continua: } \begin{cases} t = -x \\ t = \frac{y-2}{-5} \end{cases} \rightarrow -x = \frac{y-2}{-5}$$

Ecuación punto-pendiente: $y - 2 = 5x$

Ecuación explícita: $y = 5x + 2$

7. Página 175

Un vector director de la recta paralela al eje X es $\vec{u} = (2, 0) \rightarrow (x, y) = (1, 3) + t(2, 0)$.

Un vector director de la recta perpendicular al eje X es $\vec{v} = (0, -1) \rightarrow (x, y) = (1, 3) + t(0, -1)$.

8. Página 175

$$\begin{aligned} (x, y) &= (2, 1) + t(-1, 2) \\ \frac{x-1}{2} &= \frac{y-3}{1} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \vec{u} = (-1, 2), m_1 = -2 \\ \rightarrow \vec{v} = (2, 1), m_2 = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Las pendientes son distintas. Por tanto, son rectas secantes.

Hallamos su punto de intersección:

$$(x, y) = (2, 1) + t(-1, 2) \rightarrow \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

Sustituimos:

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{2} &= \frac{y-3}{1} \xrightarrow{x=2-t, y=1+2t} \frac{2-t-1}{2} = 1 + 2t - 3 \rightarrow 1 - t = 4t - 4 \rightarrow t = 1 \\ \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \end{cases} &\xrightarrow{t=1} P(1, 3) \end{aligned}$$

COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana**118. Página 176**

a) Suponemos que la ubicación actual es $O(0, 0)$ y la embarcación está en el punto $P(8, -3)$. Entonces:

$$\overrightarrow{OP} = (8, -3) \rightarrow |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{64 + 9} = \sqrt{73} = 8,54 \text{ km}$$

b) Como parten del puerto, las coordenadas son $Q(-2, 12)$.

$$c) \overrightarrow{OQ} = (-2, 12) \rightarrow |\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{148} = 12,17 \text{ km}$$

FORMAS DE PENSAR. Razonamiento matemático**119. Página 176**

Calculamos el punto medio del segmento BC .

$$M = B + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = (3, 1) + \frac{1}{2}(6, 2) = (6, 2)$$

Consideramos el punto $A(x, y) \rightarrow \overrightarrow{MA} = (x - 6, y - 2)$.

$$|\overrightarrow{MA}| = \sqrt{(x - 6)^2 + (y - 2)^2} = 4 \rightarrow x^2 - 12x + 36 + y^2 - 4y + 4 = 16 \rightarrow x^2 + y^2 - 12x - 4y + 24 = 0$$

Por ser isósceles los módulos de los vectores \overrightarrow{BA} y \overrightarrow{CA} son iguales:

$$\sqrt{(x - 3)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{(x - 9)^2 + (y - 3)^2} \rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 18x + 81 + y^2 - 6y + 9 \rightarrow 12x + 4y = 80$$

Vectores y rectas

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 12x - 4y = -24 \\ 3x + y = 20 \end{cases} \xrightarrow{\begin{array}{l} y=20-3x \\ \hline x^2 + (20-3x)^2 - 12x - 80 + 12x = -24 \end{array}} x^2 + (20-3x)^2 - 12x - 80 + 12x = -24 \rightarrow 10x^2 - 120x + 344 = 0$$

$$5x^2 - 60x + 172 = 0 \rightarrow x = \frac{60 \pm \sqrt{160}}{10} = \begin{cases} x_1 = 6 + \frac{2\sqrt{10}}{5} \\ x_2 = 6 - \frac{2\sqrt{10}}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1 = 2 - \frac{6\sqrt{10}}{5} \\ y_2 = 2 + \frac{6\sqrt{10}}{5} \end{cases}$$

Hay dos posibles vértices que verifican el problema:

$$A_1 \left(6 + \frac{2\sqrt{10}}{5}, 2 - \frac{6\sqrt{10}}{5} \right) \quad A_2 \left(6 - \frac{2\sqrt{10}}{5}, 2 + \frac{6\sqrt{10}}{5} \right)$$

120. Página 176

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$.

a) Los vectores tienen distinta dirección $\rightarrow \frac{v_1}{u_1} \neq \frac{v_2}{u_2}$.

$$a \cdot \vec{u} = b \cdot \vec{v} \rightarrow (a \cdot u_1, a \cdot u_2) = (b \cdot v_1, b \cdot v_2) \rightarrow (a \cdot u_1 - b \cdot v_1, a \cdot u_2 - b \cdot v_2) = (0, 0)$$

$$\begin{cases} a \cdot u_1 - b \cdot v_1 = 0 \\ a \cdot u_2 - b \cdot v_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\begin{array}{l} a = \frac{b \cdot v_1}{u_1} \\ a = \frac{b \cdot v_2}{u_2} \end{array}} \frac{b \cdot v_1}{u_1} = \frac{b \cdot v_2}{u_2} \xrightarrow{\frac{v_1 - v_2}{u_1 - u_2}} b = 0 \text{ y } a = 0$$

Los números reales son $a = b = 0$.

b) Si tienen la misma dirección: $\frac{a}{b} = \frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2}$

121. Página 176

Tomando como base el lado horizontal, BC , y como altura la distancia al eje X , tenemos:

$$\text{Área} = \frac{(10-2) \cdot 2}{2} = 8 \text{ u}^2$$

Las ecuaciones de los lados que no forman la base son $\begin{cases} \text{Lado } AB \rightarrow y = x \\ \text{Lado } AC \rightarrow y = \frac{x}{5} \end{cases}$.

Sea a el área del nuevo triángulo. La base del nuevo triángulo medirá $10-a$, y su altura, $2-\frac{a}{5}$.

$$\text{Por tanto, el área será: } 4 = \frac{(10-a)\left(2-\frac{a}{5}\right)}{2} \rightarrow a = \begin{cases} 10+2\sqrt{10} \\ 10-2\sqrt{10} \end{cases}$$

Así, la recta vertical es $x = 10 - 2\sqrt{10}$.

122. Página 176

El punto de corte es el de las rectas $A + a \cdot (\vec{u} + \vec{v})$ y $B + b \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = A + \vec{u} + b(\vec{u} - \vec{v})$.

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AD}$$

$$A + a(\vec{u} + \vec{v}) = A + \vec{u} + b(\vec{u} - \vec{v}) \rightarrow a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v} = (b+1)\vec{u} - b \cdot \vec{v} \rightarrow (a+b)\vec{v} = (b+1-a)\vec{u}$$

Como \vec{u} y \vec{v} no son vectores paralelos:

$$a+b=0 \rightarrow a=-b$$

$$b+1-a=0 \xrightarrow{a=-b} 2b+1=0 \rightarrow b=-\frac{1}{2} \rightarrow a=\frac{1}{2}$$

El punto de corte es $A + \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, que es el punto medio.

123. Página 176

Sean $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ y $\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$.

Como \vec{u} y \vec{v} tienen el mismo módulo, entonces:

$$\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \rightarrow u_1^2 + u_2^2 = v_1^2 + v_2^2 \rightarrow u_1^2 + u_2^2 - v_1^2 - v_2^2 = 0$$

Comprobamos $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ si son perpendiculares:

$$(u_1 + v_1) \cdot (u_1 - v_1) + (u_2 + v_2) \cdot (u_2 - v_2) = u_1^2 - v_1^2 + u_2^2 - v_2^2 = 0 \rightarrow \text{Por tanto, } \vec{u} + \vec{v} \text{ y } \vec{u} - \vec{v} \text{ forman un ángulo recto.}$$

Como un rombo es un paralelogramo, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA}$, y sus lados tienen la misma longitud, es decir, los vectores tienen el mismo módulo.

Las diagonales del rombo vienen dadas por los vectores:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$$

Por el resultado anterior, \overrightarrow{AC} y \overrightarrow{BD} son perpendiculares.

PRUEBAS PISA

124. Página 177

La figura D.

125. Página 177

- a) Hallamos la recta perpendicular a $y = -x + 2$ que pase por el punto $(-9, -1)$.

$$y = -x + 2 \rightarrow \vec{v}(-1, 1) \quad \text{Un vector perpendicular a esta recta es } \vec{v}_p(1, 1).$$

El barco tiene que seguir la trayectoria de la línea recta de ecuaciones: $\frac{x+9}{1} = \frac{y+1}{1} \rightarrow y = x + 8$

- b) El punto será la intersección entre las dos rectas.

$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = x + 8 \end{cases} \rightarrow -x + 2 = x + 8 \rightarrow x = -3 \rightarrow P(-3, 5)$$