# 2 Números reales

# INTRODUCCIÓN

Los alumnos han trabajado en cursos anteriores con las potencias, y conocen el significado de las potencias de exponente natural y de las partes que las componen. Se empezará la unidad repasando las operaciones con potencias: multiplicación, división, potencia de una potencia y sus operaciones combinadas.

A continuación, se introducirá el caso de potencias de exponente negativo. Se señalará que estas potencias cumplen las mismas propiedades que las potencias con exponente natural, y por tanto, las reglas de las operaciones son las mismas.

La parte que puede presentar mayor dificultad a los alumnos es la notación científica de las potencias. Su utilidad radica en la posibilidad de expresar números muy grandes y muy pequeños mediante potencias de 10.

Es fundamental conseguir que los alumnos alcancen el mayor grado de comprensión posible a la hora de identificar y trabajar con los distintos tipos de números que aparecen en la unidad; por tanto, deben aprender a distinguir los diferentes números decimales: exacto, periódico puro, periódico mixto e irracional.

# **RESUMEN DE LA UNIDAD**

- Un número a, llamado base, elevado a un exponente n es: a<sup>n</sup> = a · a · a · a · a · a · ... · n veces · ...
- Producto de potencias de la misma base: se escribe la base y se suman los exponentes.
- *División de potencias de la misma base*: se escribe la base y se restan los exponentes.
- *Potencia de una potencia*: se escribe la base y se multiplican los exponentes.
- Un número a elevado a un exponente negativo n es igual al inverso de la potencia de base a y exponente n:  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ .
- Para sumar o restar en notación científica se reducen los números al orden de magnitud del mayor y se suman o restan las partes enteras o decimales.
- Para multiplicar o dividir en notación científica se multiplican o dividen los decimales entre sí y las potencias de 10, después se pone el resultado en notación científica.
- Los *números irracionales* son los números con infinitos decimales no periódicos.
- El conjunto de los *números reales* lo forman los números racionales y los irracionales.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
Realizar operaciones con potencias.	<ul> <li>Potencias: base y exponente.</li> <li>Multiplicación de potencias de la misma base.</li> <li>División de potencias de la misma base.</li> <li>Potencia de una potencia.</li> <li>Potencias de exponente negativo.</li> </ul>	<ul> <li>Expresión del producto de varios factores iguales como potencia.</li> <li>Producto y división de potencias de la misma base.</li> <li>Potencia de una potencia.</li> <li>Utilización de las reglas de las operaciones combinadas con potencias.</li> <li>Definición de potencia de exponente negativo.</li> </ul>
2. Expresar números en notación científica.	<ul><li>Notación científica de un número decimal.</li><li>Orden de magnitud.</li></ul>	<ul> <li>Paso de un número en notación decimal a científica, y viceversa.</li> <li>Comparación de números escritos en notación científica.</li> </ul>
3. Realizar sumas y restas en notación científica.	Suma y resta de números en notación científica.	<ul> <li>Distinción del orden de magnitud de un número en notación científica.</li> <li>Reducción a un mismo orden de magnitud para sumar y restar.</li> </ul>
<b>4.</b> Realizar multiplicaciones y divisiones en notación científica.	Multiplicación y división en notación científica.	Multiplicación y división de números decimales y potencias de 10

#### **OBJETIVO 1**

# **REALIZAR OPERACIONES CON POTENCIAS**

\_\_\_\_\_ CURSO: \_\_\_\_\_ FECHA: \_\_\_\_\_ NOMBRE: \_\_\_\_\_

#### **POTENCIA**

• Un número a, llamado base, elevado a un exponente natural n es igual al resultado de multiplicar a por sí mismo n veces:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ veces}} = a^n$$

**n**: **exponente** (indica cuántas veces se multiplica la base). → a: base

• Se lee: «a elevado a n».

### **EJEMPLO**

 $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 \rightarrow \text{Se lee: «seis elevado a tres»}.$ 

# 1 Completa.

a)  $29 \cdot 29 \cdot 29 \cdot 29 =$ 

b)  $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 =$ 

 $= 13^5$ 

d)

e)

«.....»

«.....»

«.....»

«siete elevado a cuatro»

«nueve elevado a cinco»

#### **MULTIPLICACIÓN DE POTENCIAS**

• Como las potencias son multiplicaciones, aplicando la definición de potencia tenemos que:

$$3^4 \cdot 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^7$$
  
 $5^2 \cdot 5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^{\circ} \leftarrow \text{exponente}$ 

• Las potencias han de tener la **misma base** para poder sumar los exponentes.

 $3^2 \cdot 5^4 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \rightarrow \text{No se puede poner con el mismo exponente.}$ 

• La fórmula general para multiplicar potencias de la misma base es:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

2 Realiza las siguientes operaciones.

a) 
$$10^2 \cdot 10^5 =$$

d) 
$$3^2 \cdot 3^6 =$$

g) 
$$11^3 \cdot 11^3 =$$

b) 
$$7^4 \cdot 7^2 = 7^{\bigcirc}$$

e) 
$$3^3 \cdot 3^3 \cdot 3^5 =$$

h) 
$$19^5 \cdot 19^7 =$$

c) 
$$11^3 \cdot 11^2 \cdot 11 =$$

f) 
$$3^5 = 3^5$$

i) 
$$2^2 \cdot \boxed{\phantom{0}} = 2^5$$

# **DIVISIÓN DE POTENCIAS**

- Para dividir potencias con igual base, se restan los exponentes:  $a^n : a^m = a^{n-m}$ .
- Ten en cuenta que la división entre potencias de distinta base no se puede realizar, y debe quedar indicada.

#### **EJEMPLO**

**7**<sup>5</sup>: **7**<sup>2</sup> = 
$$\frac{7^5}{7^2}$$
 =  $\frac{\cancel{1} \cdot \cancel{1} \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{\cancel{1} \cdot \cancel{1}}$  =  $7 \cdot 7 \cdot 7$  =  $7^3$ 

3 Calcula estas operaciones.

a) 
$$5^6:5^4=\frac{5^6}{5^4}=-----=5\cdot 5=$$

- c)  $11^5:11^3=$
- e)  $7^3:7^2=$

Realiza las divisiones.

- a)  $3^5:3^4=$
- c)  $4^6 : \boxed{\phantom{0}} = 4^3$  e)  $5^7 : \boxed{\phantom{0}} = 5^2$
- b)  $\boxed{ : 7^2 = 7^5}$
- d)  $12^7: 12^4 =$  f)  $6^2: 6^5 =$

• Hay operaciones que combinan la multiplicación y la división. En estos casos, realizamos las operaciones, paso a paso.

$$\frac{3^2 \cdot 3^5 \cdot 3}{3^6} = \frac{3^8}{3^6} = 3^2$$

$$\frac{5^6 \cdot 5^3}{5^2 \cdot 5^3} = \frac{5^9}{5^5} = 5^4$$

• Recuerda que solo podemos operar con potencias de la misma base.

$$\frac{7^2 \cdot 7^3 \cdot 5^2}{7^2 \cdot 7} = \frac{7^5 \cdot 5^2}{7^3} = 7^2 \cdot 5^2$$

5 Completa las siguientes operaciones.

a) 
$$(2^5 \cdot 2^4) : (2^3 \cdot 2^2) = \frac{}{} = \frac{2^{\bigcirc}}{} = \boxed{}$$

b) 
$$(11^5 \cdot 11^2 \cdot 11^3) : (11^4 \cdot 11) =$$

c) 
$$(10^5:10^2) \cdot 10^5 = --- \cdot$$

#### POTENCIA DE UNA POTENCIA

• Si elevamos una potencia a otra potencia, el resultado es una potencia con la misma base y cuyo exponente es el producto de los exponentes:

$$(a^n)^p = a^{n \cdot p}$$

### **EJEMPLO**

$$(7^2)^3 = (7 \cdot 7)^3 = (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7) = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^6$$

# 6 Completa las siguientes operaciones.

a) 
$$(7^3)^4 = 7^{\bigcirc}$$

b) 
$$(3^3)^{\bigcirc} = 3^{15}$$

c) 
$$(6^2)^{\bigcirc} = 6^{12}$$

d) 
$$(9^3)^{\bigcirc} = 9^{15}$$

e) 
$$(4^2)^{\bigcirc} = 4^8$$

f) 
$$(2^5)^2 = 2^{\bigcirc}$$

g) 
$$(5^3)^4 = 5^{\bigcirc}$$

h) 
$$(10^2)^3 = 10^{\circ}$$

- Hay operaciones combinadas que presentan las tres operaciones estudiadas hasta el momento.
- Antes de comenzar su estudio veamos las reglas para operar:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$a^m:a^n=a^{m-n}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

multiplicación

división

potencia de una potencia

#### **EJEMPLO**

$$(2^5 \cdot 2^4) : (2^2)^3 = \frac{2^5 \cdot 2^4}{(2^2)^3} = \frac{2^9}{2^6} = 2^3$$

# 7 Realiza las operaciones.

a) 
$$(3^5:3^2)^3 = \left(---\right)^3 = ($$
  $)^3 =$ 

b) 
$$(5^7:5^3) \cdot (5^6:5^2) = ----$$

c) 
$$(10^3)^4 : (10^2 \cdot 10^3) =$$

d) 
$$(4^2)^3 \cdot (4^5)^2 =$$

e) 
$$(6^5:6^2) \cdot (6^3)^4 =$$

f) 
$$(7^2:7)\cdot(7^3)^2=$$

#### POTENCIA DE UNA FRACCIÓN

Para elevar una fracción a una potencia se elevan el numerador y el denominador a dicha potencia.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

#### **EJEMPLO**

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2^{5}}{3^{5}} = \frac{32}{243}$$

8 Opera.

a) 
$$\left(\frac{2}{5}\right)^7 =$$

d) 
$$\left(\frac{3}{7}\right)^3 =$$

b) 
$$\left(\frac{6}{10}\right)^3 =$$

e) 
$$\left(\frac{1}{5}\right)^4 =$$

c) 
$$\left(\frac{4}{3}\right)^5 =$$

f) 
$$\left(\frac{2}{3}\right)^6 =$$

- 9 Completa el ejercicio y resuélvelo:  $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{3}{4}$ .
  - Veamos el número de bloques en los que queda dividida la operación.
     En este caso tenemos dos bloques separados por el signo —.

$$\begin{bmatrix}
\left(\frac{3}{4}\right)^2 \\
A
\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}
\frac{3}{4} \\
B
\end{bmatrix}$$

• Realizamos las operaciones de cada bloque:

B:  $\frac{3}{4}$  En este bloque no podemos operar.

• Tenemos que resolver la resta, pero para ello necesitamos el denominador común. El denominador común es:



• Ahora sí podemos restar: Solución = —

10 Calcula, dando prioridad a las operaciones de los paréntesis.

a) 
$$\left(\frac{6}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5}\right) =$$

b) 
$$\left(\frac{3}{5} - 1\right) : \frac{1}{2} =$$

c) 
$$\left(1 - \frac{5}{6}\right) : \left(-\frac{1}{3} + 2\right) =$$

d) 
$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) =$$

#### POTENCIA DE EXPONENTE NEGATIVO

• Al efectuar una división de potencias, el resultado puede ser una potencia de exponente negativo:

$$7^{3}:7^{5} = \frac{7^{3}}{7^{5}} = \frac{\cancel{1} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{1}}{7 \cdot 7 \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{1}} = \frac{1}{7 \cdot 7} = \frac{1}{7^{2}} = 7^{-2}$$

• Es decir, un número entero elevado a una potencia negativa es una fracción.

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{81}$$

- En general, las potencias de exponente negativo se definen como:  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ .
- Las potencias de exponente negativo cumplen las mismas propiedades que las potencias de exponente natural.

# Opera con exponentes negativos.

a) 
$$5^2 \cdot 3^{-2} = 5^2 \cdot \frac{1}{3 \odot} = \frac{5^2}{3 \odot} = \frac{25}{3 \odot}$$

b) 
$$5^2 \cdot 5^{-7} \cdot 5^3 = 5^2 \cdot \frac{1}{\boxed{\phantom{0}}} \cdot 5^3 = \frac{5^2 \cdot 5^3}{\boxed{\phantom{0}}} =$$

c) 
$$6^3 \cdot 2^{-4} = 6^3 \cdot \frac{1}{6} = (2 \cdot 3)^3 \cdot \frac{1}{1} = \frac{2^3 \cdot 3^3}{1} = \frac{1}{1}$$

d) 
$$7^3 \cdot 7^2 \cdot 7^{-4} =$$
  $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $=$   $-$ 

e) 
$$4^{3} \cdot 2^{-3} \cdot 8 = 4^{3} \cdot \frac{}{} \cdot 8 = (2 \cdot 2)^{3} \cdot \frac{}{} \cdot 2^{3} = \frac{}{} = \frac{$$

# 12 Expresa en forma de potencia de la base indicada en cada caso.

OPERACIÓN	BASE	RESULTADO
$9^{-7} \cdot 9^{11}$	3	
$4^6:8^{-3}$	2	
$(25^9)^{-3}$	5	
$(16^{-5}:4^3)^{-2}$	2	
$(49^{-3})^4:7^{-6}$	7	

# 9

**OBJETIVO 2** 

# EXPRESAR NÚMEROS EN NOTACIÓN CIENTÍFICA

NOMBRE: \_\_\_\_\_\_ FECHA: \_\_\_\_\_

• La expresión de un número en **notación científica** consiste en representarlo como un número entero o un número decimal, con una sola cifra entera, multiplicado por una potencia de 10 (positiva o negativa).

$$10^{2} = 10 \cdot 10 = 100$$
$$10^{-3} = \frac{1}{10^{3}} = \frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10} = 0,001$$

• Llamamos **orden de magnitud** de un número expresado en notación científica al exponente de la potencia de 10.

## **EJEMPLO**

Expresa en notación científica el número 3.220.000.

Desplazamos la coma seis lugares a la izquierda y multiplicamos por 106.

NOTACIÓN DECIMAL NOTACIÓN CIENTÍFICA

3.220.000 = 
$$\boxed{3,22} \cdot \boxed{10^6}$$

PARTE DECIMAL POTENCIA DE 10

Determina el orden de magnitud del número anterior.

El orden de magnitud es 6, ya que el exponente de la potencia de 10 es 6.

1 Realiza las operaciones.

a) 
$$10^3 = =$$

b) 
$$10^4 =$$

c) 
$$10^5 =$$

d) 
$$10^{-4} = \frac{1}{100} = \frac{1$$

e) 
$$10^{-6}$$
 =

f) 
$$10^{-3} =$$

2 Escribe en forma decimal estos números expresados en notación científica.

a) 
$$3.2 \cdot 10^4 = 3.2 \cdot 10.000 =$$

3 Escribe, con todas sus cifras, estos números escritos en notación científica.

a) 
$$2,51 \cdot 10^6 =$$

b) 
$$9.32 \cdot 10^{-8} =$$

c) 
$$1.01 \cdot 10^{-3} =$$

d) 
$$1.15 \cdot 10^4 =$$

e) 
$$3.76 \cdot 10^{12} =$$

4 ¿Cuál de estos números es mayor?



El mayor número es:

5 Los siguientes números no están correctamente escritos en notación científica. Escríbelos de la forma adecuada.

NÚMERO	EXPRESIÓN CORRECTA
12,3 · 10 <sup>15</sup>	
0,6 · 10 <sup>-9</sup>	
325 · 10 <sup>3</sup>	
0,002 · 10 <sup>-2</sup>	
6.012 · 10 <sup>4</sup>	
1,3 · 10 <sup>3</sup>	

- 6 Expresa en notación científica.
  - a) Mil trescientos cuarenta billones.
  - b) Doscientas cincuenta milésimas.
  - c) Treinta y siete.
  - d) Cuarenta y tres billones.
  - e) Seiscientos ochenta mil.
  - f) Tres billonésimas.
- 7 Indica el orden de magnitud de cada uno de estos números.
  - a)  $1.3 \cdot 10^3$
  - b)  $6 \cdot 10^{-4}$
  - c)  $3.2 \cdot 10^7$
  - d)  $8 \cdot 10^{-5}$
  - e)  $2,6 \cdot 10^4$
  - f) 1,9 · 10<sup>2</sup>

**OBJETIVO 3** 

# REALIZAR SUMAS Y RESTAS EN NOTACIÓN CIENTÍFICA

\_\_\_\_\_ CURSO: \_\_\_\_\_ FECHA: \_\_\_\_\_

Realizar cálculos con números escritos en notación científica es muy fácil: basta con operar, por un lado, con los números que aparecen antes de la potencia de 10 y, por otro, con las potencias.

#### SUMAR Y RESTAR EN NOTACIÓN CIENTÍFICA

Para sumar (o restar) números en notación científica se reducen al orden de magnitud del mayor y, luego, se suman (o restan) los números decimales y se mantiene la misma potencia de 10.

#### **EJEMPLO**

Realiza las siguientes operaciones.

**3,5** · **10**<sup>3</sup> + **5,2** · **10**<sup>3</sup> = 
$$(3,5 + 5,2) \cdot 10^3 = 8,7 \cdot 10^3$$

Si los exponentes de las potencias son iguales, se suman los números decimales y se deja la misma potencia de base 10.

**3,5** · **10**<sup>4</sup> + **5,2** · **10**<sup>3</sup> = 3,5 · 
$$10^4$$
 + 0,52 ·  $10^4$  =

Si los exponentes de las potencias son diferentes, se reduce al mayor.

$$= (3,5 + 0,52) \cdot 10^4 = 4,02 \cdot 10^4$$

Luego se suman los números decimales y se deja la potencia de base 10.

# Completa estas sumas y restas.

a) 
$$17.000 + 3.2 \cdot 10^3 - 232 \cdot 10^2 =$$

$$= 17 \cdot 10^3 + 3.2 \cdot 10^3 - \boxed{\phantom{0}} \cdot 10^3 = (\boxed{\phantom{0}} + \boxed{\phantom{0}} - \boxed{\phantom{0}}) \cdot 10^3 =$$

b) 
$$0.00035 + 5.7 \cdot 10^{-4} - 7.2 \cdot 10^{-3} =$$

$$= \boxed{ \cdot 10^{\circ} + \boxed{ \cdot 10^{\circ} - \boxed{ \cdot 10^{\circ} = (\boxed{ + \boxed{ - \boxed{ }}) \cdot 10^{\circ} = }}$$

Han de tener el mismo exponente.

c) 
$$1.9 \cdot 10^5 + 3.2 \cdot 10^7 =$$

d) 
$$6 \cdot 10^{-4} - 4.5 \cdot 10^{-2} =$$

# 2 Realiza las operaciones en notación científica.

a) 
$$37.3 \cdot 10^6$$
 -  $\boxed{\phantom{0}} = 8.4 \cdot 10^5$  c)  $1.15 \cdot 10^4$  +  $\boxed{\phantom{0}} = 3 \cdot 10^5$ 

c) 
$$1.15 \cdot 10^4 + \boxed{\phantom{0}} = 3 \cdot 10^5$$

b) 
$$9.32 \cdot 10^{-3} + \boxed{\phantom{0}} = 5.6 \cdot 10^{-3}$$

$$= 5.6 \cdot 10^{-2} \qquad \qquad \text{d) } 3.6 \cdot 10^{12} - \boxed{} = 2 \cdot 10^{12}$$

\_\_\_\_\_ CURSO: \_\_\_\_\_ FECHA: \_\_\_\_\_ NOMBRE:

#### MULTIPLICAR EN NOTACIÓN CIENTÍFICA

Para multiplicar números en notación científica se multiplican los números decimales y las potencias de 10. Es decir, se obtiene un número cuya parte decimal es igual al producto de los números decimales, y cuya potencia de 10 tiene un exponente que es igual a la suma de los exponentes de cada una de ellas.

# **EJEMPLO**

3.457 · (4,3 · 
$$10^4$$
)

Pasamos a notación científica

$$= (3,457 \cdot 10^3) \cdot (4,3 \cdot 10^4) =$$

$$= (3,457 \cdot 4,3) \cdot 10^3 \cdot 10^4 =$$

$$= 14,8651 \cdot 10^7 =$$

$$= 1,48651 \cdot 10^8$$
Pasamos a notación científica

# Completa siguiendo el modelo anterior.

Pasamos a notación científica

# Efectúa en notación científica.

a) 
$$(34 \cdot 10^3) \cdot (25, 2 \cdot 10^{-2}) =$$

b) 
$$(8,06 \cdot 10^9) \cdot (0,65 \cdot 10^7) =$$

c) 
$$(37.3 \cdot 10^{-2}) \cdot (0.01 \cdot 10^{2}) =$$

d) 
$$(0.00000009) \cdot (1.5 \cdot 10^{-6}) =$$

e) 
$$(33,57) \cdot (4,3 \cdot 10^{-4}) =$$

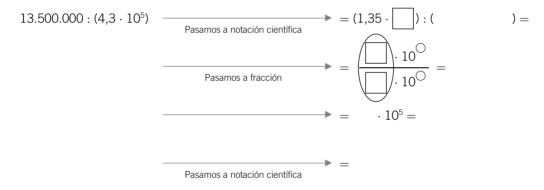
f) 
$$(3 \cdot 10^5) \cdot (2,5 \cdot 10^{11}) =$$

#### **DIVIDIR EN NOTACIÓN CIENTÍFICA**

Para dividir números en notación científica se dividen los números decimales y las potencias de 10. Es decir, el número decimal es igual a la división de los números decimales y la potencia de 10 tiene un exponente que es igual a la resta de los exponentes de cada una de ellas.

# **EJEMPLO**

# 3 Completa la siguiente operación.



# 4 Realiza las operaciones en notación científica.

a) 
$$(0.75 \cdot 10^7) : (0.3 \cdot 10^3) =$$

b) 
$$(13.650.000.000) : (6,5 \cdot 10^{15}) =$$

c) 
$$(14.310 \cdot 10^3) : (5,4 \cdot 10^5) =$$

d) 
$$(9 \cdot 10^6) : (3 \cdot 10^4) =$$

e) 
$$(20.100 \cdot 10^3) : (6.7 \cdot 10^5) =$$

f) 
$$(6 \cdot 10^4) : (3 \cdot 10^2) =$$

g) 
$$(15.320) : (20 \cdot 10^4) =$$

h) 
$$(6 \cdot 10^{-7}) : (1,2 \cdot 10^{5}) =$$