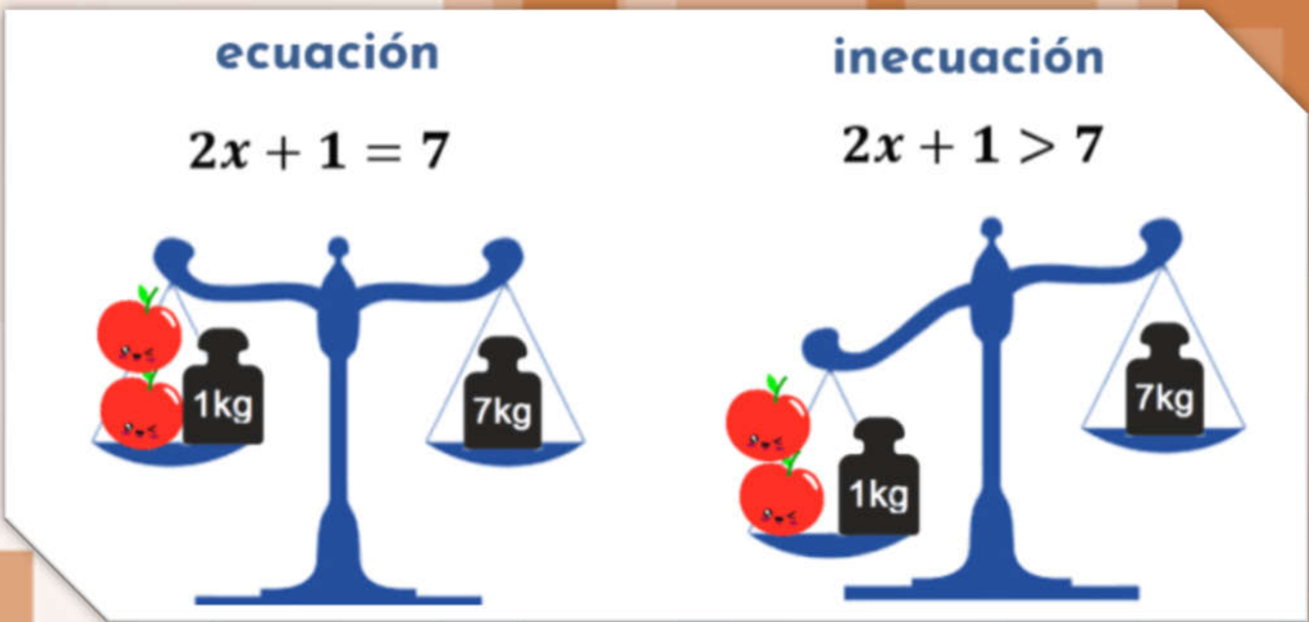
Unidad Didáctica 4

ECUACIONES e INECUACIONES

4º ESO



En esta unidad vas a:

1. **Distinguir e identificar ecuaciones e identidades.**
2. **Plantear y resolver ecuaciones de cualquier tipo.**
3. **Resolver problemas con la ayuda de ecuaciones.**
4. **Plantear y resolver Inecuaciones.**
5. **Resolver problemas con la ayuda de inecuaciones.**

SUMARIO

4.00.- Lectura Comprensiva

La última Noche

Durante un corto intervalo de tiempo la actividad del joven cesó, y en la pequeña habitación de la pensión donde vivía solo se escuchaba su agitada respiración, pues parecía que ni durmiendo descansaba.

El ruido producido por un carruaje sobre el empedrado de la calle hizo que primero entornara los ojos y después, como si hubiera sido poseído, tomara pluma y papel y comenzara a escribir.

Évariste Galois, presintiendo lo inevitable, escribió sus cartas con un carácter inequívoco de última voluntad, como si se dictara a sí mismo.

> **[...] Vuestra tarea es sencilla: demostrad que he de combatir contra mi voluntad, tras haber agotado todos los medios de reconciliación. [...] Por favor recordadme, ya que el destino no me ha dado vida bastante para ser recordado por mi patria.**

Tras sellar esta primera carta, más tranquilo, comenzó a escribir la segunda:

> **[...] He hecho algunos descubrimientos nuevos en Matemáticas que puedes ver en tres memorias que dejo aquí... Haz llegar estos trabajos a la Academia de las Ciencias. [...] Confío en que después de leerlos alguien encuentre provecho en organizarlo todo. [...]**

El premonitorio estado de ánimo de Galois estaba plenamente justificado: al amanecer sería herido de muerte en un duelo y moriría al día siguiente, abandonado por todos, en un hospital de París. Pese a fallecer con tan solo veinte años, sus trabajos sobre ecuaciones fueron absolutamente geniales.

Si eres capaz, escribe tres ecuaciones: una que no tenga solución, otra que tenga una solución y una tercera con más de una solución.

<u>Lee nuevamente el texto anterior y responde a las siguientes preguntas:</u>

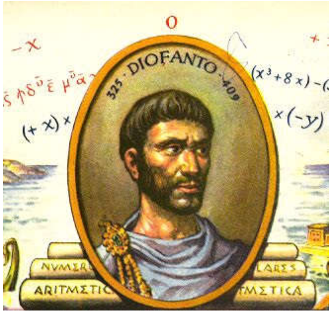
1.- ¿De qué trata el texto?

2.- ¿Qué te parece la historia?

3.- Busca información en Internet del protagonista de esta historia.

4.01.- Introducción

Desde el siglo XVII A.C. los matemáticos de Mesopotamia y de Babilonia ya sabían resolver ecuaciones. En el siglo XVI A.C. los egipcios desarrollaron un álgebra muy elemental que usaron para resolver problemas cotidianos que tenían que ver con la repartición de víveres, de cosechas y de materiales. Ya para entonces tenían un método para resolver ecuaciones de primer grado que se llamaba el "método de la falsa posición". No tenían notación simbólica, pero utilizaron el jeroglífico **hau** (que quiere decir montón o pila) para designar la incógnita.



Alrededor del siglo I D.C. los matemáticos chinos escribieron el libro **Jiu zhang suan shu** (que significa El Arte del cálculo), en el que plantearon diversos métodos para resolver ecuaciones.

Los matemáticos griegos no tuvieron problemas con las ecuaciones lineales y, exceptuando a **Diofanto** (250 D.C.), no se dedicaron mucho al álgebra, pues su preocupación era, como hemos visto, mayor por la geometría.

En el siglo III el matemático griego **Diofanto de Alejandría** publicó su Aritmética en la cual, por primera vez en la historia de las matemáticas griegas, se trataron de una forma rigurosa las ecuaciones de primer grado. Introdujo un simbolismo algebraico muy elemental al designar la incógnita con un signo que es la primera sílaba de la palabra griega **arithmos**, que significa número. Los problemas de álgebra que propuso prepararon el terreno de lo que siglos más tarde sería "la teoría de ecuaciones". A pesar de lo rudimentario de su notación simbólica y de lo poco elegantes que eran los métodos que usaba, se le puede considerar como uno de los precursores del álgebra moderna.

El planteamiento de ecuaciones en matemáticas responde a la necesidad de expresar simbólicamente los problemas y los pensamientos.

Sobre la vida de Diofanto aparece en los siglos V o VI un epigrama algebraico que constituye una ecuación lineal, propuesto por un discípulo suyo para explicar datos de la vida de este sabio griego.

Epitafio de Diofanto

¡Caminante!
Aquí yacen los restos de Diofanto.
Los números pueden mostrar, ¡oh maravilla! la duración de su vida,
cuya sexta parte constituyó la hermosa infancia.
Había transcurrido además una duodécima parte de su vida cuando se cubrió de vello su barba.
A partir de ahí, la séptima parte de existencia transcurrió en un matrimonio estéril.
Pasó, además, un quinquenio y entonces le hizo dichoso el nacimiento de su primogénito.
Éste entregó su cuerpo y su hermosa existencia a la tierra, habiendo vivido la mitad de lo que su padre llegó a vivir.
Por su parte, Diofanto descendió a la sepultura con profunda pena habiendo sobrevivido cuatro años a su hijo.
Dime, caminante, cuántos años vivió Diofanto hasta que le llegó la muerte.

En 1557 el matemático inglés **Robert Recorde** inventó el símbolo de la igualdad, =.

En 1591 el matemático francés **François Viète** desarrolló una notación algebraica muy cómoda, representaba las incógnitas con vocales y las constantes con consonantes.

4.02.- Conceptos Generales

En esta unidad, vamos a relacionar expresiones algebraicas, que pueden ser polinomios, utilizando los signos:

$$= \qquad < \qquad > \qquad \leq \qquad \geq$$

- Si las expresiones algebraicas se construyen mediante el signo igual, **=**, se construye una **ecuación.**
- Si las expresiones algebraicas se construyen mediante alguno de los otros cuatro signos de desigualdad, $<$, $>$, $\leq$ y $\geq$, se construye una **inecuación.**

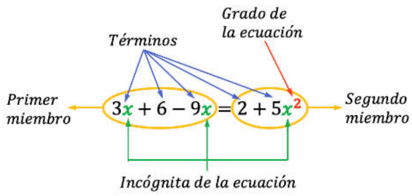
4.2.1.- Ecuaciones

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, denominadas miembros y separadas por el signo igual. En ellas, aparecen elementos conocidos y datos desconocidos o incógnitas, relacionados mediante operaciones matemáticas. Cuando esta igualdad es cierta para cualquier valor de la incógnita recibe el nombre de **Identidad.**

$$\underbrace{\underbrace{3x+5}_{\text{Primer miembro}} = \underbrace{2x-4}_{\text{Segundo miembro}}}_{\text{ECUACIÓN}} \qquad \underbrace{(x+2)^2 = x^2+4x+4}_{\text{IDENTIDAD}}$$

Las incógnitas, representadas generalmente por letras, son las variables que se pretenden encontrar. En general utilizaremos la letra **x**, aunque también se suelen utilizar la **y** y la **z**.

- **Los elementos de una ecuación son:**



- ✓ **Miembro:** Expresión algebraica que hay a ambos lados del =.
- ✓ **Término:** Cada uno de los sumandos que hay en los dos miembros.
  - o **Término Independiente:** Es aquel que no tiene parte literal.
- ✓ **Incógnita:** Cada una de las letras de valor desconocido y que queremos calcular.
- ✓ **Grado:** Es el mayor de los grados de sus términos

Recuerda que decimos que dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen la misma solución.

- **Resolver una ecuación** es encontrar el valor, o los valores, que debe tomar la incógnita (o incógnitas) para que la igualdad sea cierta. En el caso de que no exista ningún valor que verifique la igualdad, diremos que la ecuación no tiene solución. Para resolverlas, las transformaremos mediante la transposición y la reducción en otras equivalentes más sencillas hasta despejar la incógnita.

Ejemplo

1.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x+3(2x-1)=x+67 \xrightarrow[\text{Paréntesis}]{\text{Rompemos}} 2x+6x-3=x+67 \xrightarrow[\text{términos}]{\text{Agrupamos}} 8x-3=x+67 \xrightarrow[\text{términos}]{\text{Trasponemos}} 8x-x=67+3$

$\xrightarrow[\text{términos}]{\text{Agrupamos}} 7x=70 \xrightarrow[\text{la incógnita}]{\text{Despejamos}} x=\dfrac{70}{7}=10 \xrightarrow[\text{Solución}]{} x=10$

b) $4x-6=4(x+3) \rightarrow 4x-6=4x+12 \rightarrow 4x-4x=12+6 \rightarrow 0x=18 \rightarrow$ Sin Solución

c) $4x-6=4(x-2)+2 \rightarrow 4x-6=4x-8+2 \rightarrow 4x-4x=6-8+2 \rightarrow 0x=0 \rightarrow \infty$ Soluciones

4.03.- Ecuaciones Polinómicas

Una **ecuación polinómica** es una igualdad de dos polinomios, que se puede escribir de forma que en el primer miembro haya un polinomio y en el segundo un 0.

$$P(x)=0 \quad \rightarrow \quad \text{Ejemplo: } 3x^3-2x^2+4x-7=0$$

Dependiendo del grado del polinomio P, la ecuación será de primer grado, de segundo grado, ..., etc.

4.3.1.- Ecuaciones de primer grado

Son de la forma $ax+b=0$ y cuya solución viene dada por la expresión: $x=-\frac{b}{a}$

Ejemplo

2.- Resuelve la siguiente ecuación de primer grado: $\frac{x}{3}-\frac{13-2x}{2}=\frac{1}{3}$

$$\frac{x}{3}-\frac{13-2x}{2}=\frac{1}{3} \rightarrow m.c.d.(3,2,6)=6 \rightarrow \frac{2x}{6}-\frac{3\cdot(13-2x)}{6}=\frac{2}{6} \rightarrow 2x-3\cdot(13-2x)=2 \rightarrow 2x-38+6x=2$$

$$\rightarrow 8x-38=2 \rightarrow 8x=38+2 \rightarrow 8x=40 \rightarrow x=\frac{40}{8} \rightarrow x=5$$

4.3.2.- Ecuaciones de segundo grado

Son de la forma $ax^2+bx+c=0$ y cuya solución viene dada por la expresión: $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}$

Dependiendo del valor del discriminante $\Delta=b^2-4ac$, tendremos dos, una o ninguna solución:

$$\Delta=b^2-4ac \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \bullet\ Si\ \Delta>0 & \rightarrow \quad La\ ecuación\ tiene\ 2\ soluciones \\ \bullet\ Si\ \Delta=0 & \rightarrow \quad La\ ecuación\ tiene\ 1\ solución\ (Polo\ doble) \\ \bullet\ Si\ \Delta<0 & \rightarrow \quad La\ ecuación\ no\ tiene\ solución \end{cases}$$

- Decimos que una ecuación de segundo grado es completa si los coeficientes a, b y c son distintos de cero:

$$Si\ a,b,c\neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{Ec. Completa}$$

- Decimos que una ecuación es incompleta si alguno de los coeficientes a, b o c es nulo.

$$Si\ a\ ó\ b\ ó\ c=0 \quad \rightarrow \quad \text{Ec. Incompleta}$$

En el caso de que una ecuación de segundo grado sea incompleta, se puede resolver utilizando la fórmula general, pero, es preferible hacerlo de la siguiente manera:

- Si c=0, la ecuación será de la forma: $ax^2+bx=0$ y la resolveremos sacando factor común la *x*:

$$ax^2+bx=0 \rightarrow x\cdot(ax+b)=0 \xrightarrow{*} \begin{cases} x_1=0 \\ ax+b=0 \rightarrow x_2=-\frac{b}{a} \end{cases}$$

*Recordar que si el producto de dos números es cero es porque alguno de ellos es cero.

- Si $b=0$, la ecuación será de la forma: $ax^2+c=0$ y la resolveremos despejando la x:

$$ax^2+c=0 \rightarrow ax^2=-c \rightarrow x^2=-\frac{c}{a} \underset{**}{\rightarrow} x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}} \rightarrow \begin{cases} x_1=+\sqrt{-\frac{c}{a}} \\ x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}} \end{cases}$$

** Esta ecuación sólo tendrá solución si los signos de c y a son opuestos, en otro caso no tendrá solución porque no existe la raíz cuadrada negativa de un número.

Ejemplo

3.- Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $x^2+5x-6=0 \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=5 \\ c=-6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \\ x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1} \end{cases} \rightarrow x=\dfrac{-5\pm\sqrt{25+24}}{2}$

$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{49}}{2} \rightarrow x=\dfrac{-5\pm 7}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{-5+7}{2}=\dfrac{2}{2}=1 \\ x_2=\dfrac{-5-7}{2}=\dfrac{-12}{2}=-6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-6 \end{cases}$

b) $x^2+5x=0 \rightarrow x(x+5)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+5=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-5 \end{cases}$

c) $x^2-9=0 \rightarrow x^2=9 \rightarrow x=\pm\sqrt{9} \rightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-3 \end{cases}$

4.3.3.- Ecuaciones bicuadradas y bicúbicas (tricuadradas)

Son ecuaciones de cuarto o sexto grado que se resuelven de forma similar a las ecuaciones de segundo grado, pero haciendo antes un cambio de variable.

Ecuaciones Bicuadradas	Ecuaciones Bicúbicas
$ax^4+bx^2+c=0$	$ax^6+bx^3+c=0$

Tanto en una como en otra se realiza un cambio de variable, transformándolas en una ecuación de segundo grado.

Ejemplo

4.- Resuelve la siguiente ecuación bicuadrada: $x^4-5x^2-36=0$

Lo primero es hacer un cambio de variable para convertirla en una ecuación de segundo grado: $z=x^2$

$$x^4-5x^2-36=0 \xrightarrow[z=x^2]{\text{Cambio de Variable}} z^2-5z-36=0$$

Hecho esto, resolvemos la ecuación de segundo grado:

$z^2-5z-36=0 \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-5 \\ c=-36 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \\ z=\dfrac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 1\cdot(-36)}}{2\cdot 1} \end{cases} \rightarrow z=\dfrac{5\pm\sqrt{25+144}}{2} \rightarrow$

$\rightarrow z=\dfrac{5\pm\sqrt{169}}{2} \rightarrow z=\dfrac{5\pm 13}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1=\dfrac{5+13}{2}=\dfrac{18}{2}=9 \\ z_2=\dfrac{5-13}{2}=\dfrac{-8}{2}=-4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z_1=9 \\ z_2=-4 \end{cases}$

Resuelta la ecuación en z, deshacemos el cambio de variable y calculamos x.

$$\text{Si } z = x^2 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{z} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \\ x = \pm\sqrt{-8} = \text{No sol} \end{cases} \quad \rightarrow \quad x_1 = -3 \qquad x_2 = +3$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$ son $x_1 = -3 \qquad x_2 = +3$

Ejemplo

5.- Resuelve la siguiente ecuación bicúbica: $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

Lo primero es hacer un cambio de variable para convertirla en una ecuación de segundo grado: $z = x^2$

$$x^6 - 9x^3 + 8 = 0 \quad \xrightarrow[z=x^3]{\text{Cambio de Variable}} \quad z^2 - 9z + 8 = 0$$

Hecho esto, resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$z^2 - 9z + 8 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -9 \\ c = 8 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} z = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \\ z = \dfrac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} \end{cases} \quad \rightarrow \quad z = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{2} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad z = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{2} \quad \rightarrow \quad z = \frac{9 \pm 7}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} z_1 = \dfrac{9+7}{2} = \dfrac{16}{2} = 8 \\ z_2 = \dfrac{9-7}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} z_1 = 8 \\ z_2 = 1 \end{cases}$$

Resuelta la ecuación en z, deshacemos el cambio de variable y calculamos x.

$$\text{Si } z = x^3 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt[3]{z} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = \sqrt[3]{8} = 2 \\ x_2 = \sqrt[3]{1} = 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad x_1 = 2 \qquad x_2 = 1$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación $z^2 - 9z + 8 = 0$ son $x_1 = 2 \qquad x_2 = 1$

Piensa y practica

1.- Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado: Sol: a) –4; b) –27/29; c) –38/11

$a)\ 3x + \dfrac{1}{2}x + 6 = 2x \qquad b)\ \dfrac{3x-11}{20} - \dfrac{5x-1}{14} = \dfrac{x-7}{10} - \dfrac{5x-6}{21} \qquad c)\ \dfrac{-6}{2}\left(\dfrac{5+x}{3}\right) = \dfrac{1}{3}\left(4 - \dfrac{4x}{2}\right) + \dfrac{3x}{2}$

2.- Resuelve las siguientes ecuaciones de 2° grado: Sol: a) 0 y 12; b) –4 y 3; c) –2/3 y 5

$a)\ (x+13)^2 = (x+12)^2 + (x-5)^2 \qquad b)\ (x+4)^3 - (x-3)^3 = 343 \qquad c)\ \dfrac{x+3}{2x-1} - \dfrac{5x-1}{4x+7} = 0$

3.- Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas: Sol: a) –4, –3, 3 y 4; b) –1/2 y 1/2; c) –5, –2, 2 y 5

$a)\ x^4 - 25x^2 + 144 = 0 \qquad b)\ 4x^4 + 19x^2 - 5 = 0 \qquad c)\ \dfrac{x^2(x^2-9)}{20} + 1 = x^2 - 4$

4.- Resuelve las siguientes ecuaciones bicúbicas: Sol: a) –2 y 3; b) –2 y 1; c) 1 y 2; d) 1 y 3

$a)\ x^6 - 19x^3 = 216 \qquad b)\ x^6 + 7x^3 - 8 = 0 \qquad c)\ x^6 - 9x^3 + 8 = 0 \qquad d)\ x^6 - 28x^3 + 27 = 0$

4.3.4.- Ecuaciones con producto de factores, ecuaciones factorizadas

Llamamos ecuaciones factorizadas a aquellas ecuaciones polinómicas, en las que en el primer miembro aparece el producto de diferentes factores. Son de la forma:

$$(ax+b)\cdot(bx+c)\cdots\cdots\cdot(cx+d)=0$$

Y se resuelven igualando a cero cada uno de los factores, puesto que el producto de varios factores es cero, si alguno de ellos es cero.

Ejemplo

6.- Resuelve la siguiente ecuación con factores: $(x-1)\cdot(x+3)\cdot(x^2-9)=0$

Sabemos que cuando el producto de dos o más números es cero, es porque alguno de esos números es cero. En nuestro caso, y de forma similar, si el producto de dos o más factores es nulo, tiene que ser porque alguno de ellos será cero.

$$(x-1)\cdot(x+3)\cdot(x^2-9)=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x-1=0 \\ x+3=0 \\ x^2-9=0 \end{cases}$$

Igualamos a cero cada uno de ellos, obteniendo ecuaciones de menor grado y más fáciles de resolver:

$$\begin{cases} x-1=0 \rightarrow x=1 \rightarrow x_1=1 \\ x+3=0 \rightarrow x=-3 \rightarrow x_2=-3 \\ x^2-9=0 \rightarrow x^2=9 \rightarrow x=\pm\sqrt{9} \rightarrow x_3=-3 \text{ y } x_4=+3 \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación $(x-1)\cdot(x+3)\cdot(x^2-9)=0$ son $x_1=1$ $x_2=-3$ $x_3=3$

4.3.5.- Ecuaciones polinómicas de grado mayor que 2, factorizables

Para resolver ecuaciones polinómicas de tercer y de cuarto grado, existen fórmulas que dan las soluciones, pero son muy complicadas. Si la ecuación es de quinto grado o mayor, no existe una fórmula general que permita calcular sus soluciones. Por ese motivo, no se utilizan habitualmente, sino que se recurre a otras técnicas.

Como las soluciones de una ecuación polinómica de la forma P(x)=0 coinciden con las raíces del polinomio, el método más empleado consiste en factorizar el polinomio e igualar a cero cada uno de los factores resultantes de la factorización. De esta forma, se consigue reducir el grado de las ecuaciones implicadas.

Ejemplo

7.- Resuelve la siguiente ecuación polinómica: $2x^4+x^3-11x^2-4x+12=0$

Se trata de una ecuación de 4° grado que vamos a resolver descomponiendo en factores mediante la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 1 & -11 & -4 & 12 \\ -2 & & -4 & 6 & 10 & -12 \\ \hline & 2 & -3 & -5 & 6 & \lfloor 0 \\ 1 & & 2 & -1 & -6 & \\ \hline & 2 & -1 & -6 & \lfloor 0 & \\ 2 & & 4 & 6 & & \\ \hline & 2 & 3 & \lfloor 0 & & \end{array} \quad \rightarrow \quad 2x^4+x^3-11x^2-4x+12=(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(2x+3)$$

Por tanto, la ecuación queda de la forma: $2x^4+x^3-11x^2-4x+12=0 \rightarrow (x+2)\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(2x+3)=0$

Y cuya solución viene dada al igualar a cero cada uno de los factores:

$$(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(2x+3)=0 \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} x+2=0 \rightarrow x_1=-2 \\ x-1=0 \rightarrow x_2=1 \\ x-2=0 \rightarrow x_3=2 \\ 2x-3=0 \rightarrow x_4=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Las soluciones de la ecuación $2x^4+x^3-11x^2-4x+12=0$ son: −2, 1, 3/2 y 2

Piensa y practica

5.- Resuelve las siguientes ecuaciones factorizadas: Sol: a) -2 y 2; b) -1 y 2

$a)\ \left(3x^2-12\right)\cdot\left(x^2-x+2\right)\cdot\left(x^2+1\right)=0 \qquad b)\ \left(x+1\right)\cdot\left(x-2\right)\cdot\left(x^2+3x+4\right)=0$

6.- Resuelve las siguientes ecuaciones factorizables: Sol: a) -1, 0, 2/3 y 1; b) -2, 0 y 2; c) -2, -1/2, 0 y 3

$a)\ 3x^4-2x^3-3x^2+2x=0 \qquad b)\ x^6-16x^2=0 \qquad c)\ 10x^4-5x^3-65x^2-30x=0$

4.04.- Ecuaciones Racionales

Las ecuaciones racionales son ecuaciones en las que aparecen fracciones algebraicas de denominador no nulo, como por ejemplo:

$$\frac{x}{x+1}=\frac{\left(x+2\right)^2}{x\left(x+1\right)}+\frac{x+1}{x}$$

El método general para resolver este tipo de ecuaciones consiste en reducir todas las fracciones algebraicas a común denominador (mínimo común múltiplo de los denominadores), pudiendo así eliminarlos y transformarla en una ecuación polinómica.

Ejemplo

8.- Resuelve la siguiente ecuación polinómica: $\frac{x}{x+1}=\frac{\left(x+2\right)^2}{x\left(x+1\right)}+\frac{x+1}{x}$

Se trata de una ecuación racional, así que lo primero es calcular el m.c.m. de los denominadores para reducir a común denominador.

$m.c.m.\left(x+1,x\right)=x\cdot\left(x+1\right)$

Hecho esto, escribimos fracciones equivalentes con este nuevo denominador, utilizando la misma técnica utilizada en las fracciones numéricas:

$$\frac{x}{x+1}=\frac{\left(x+2\right)^2}{x\left(x+1\right)}+\frac{x+1}{x} \;\rightarrow\; \frac{x\cdot x}{x\left(x+1\right)}=\frac{\left(x+2\right)^2}{x\left(x+1\right)}+\frac{\left(x+1\right)\cdot\left(x+1\right)}{x\left(x+1\right)} \;\rightarrow\; \frac{x^2}{\cancel{x\left(x+1\right)}}=\frac{\left(x+2\right)^2}{\cancel{x\left(x+1\right)}}+\frac{\left(x+1\right)^2}{\cancel{x\left(x+1\right)}} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; x^2=\left(x+2\right)^2+\left(x+1\right)^2 \;\rightarrow\; x^2=x^2+4x+4+x^2+2x+1 \;\rightarrow\; x^2+6x+5=0$$

Por tanto, la ecuación queda de la forma $x^2+6x+5=0$ que podemos resolver factorizándola:

$$x^2+6x+5=0 \;\leftrightarrow\; \left(x+5\right)\cdot\left(x+1\right)=0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x+5=0 \;\leftrightarrow\; x=-5 \\ x+1=0 \;\leftrightarrow\; x=-1 \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación $\frac{x}{x+1}=\frac{\left(x+2\right)^2}{x\left(x+1\right)}+\frac{x+1}{x}$ son: -5 y -1.

Piensa y practica

7.- Resuelve las siguientes ecuaciones racionales: Sol: a) Identidad; b) No sol; c) 2

$a)\ \frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x-2} \qquad b)\ \frac{x+3}{x-1}+\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{26}{35} \qquad c)\ \frac{x-3}{x^2-x}-\frac{x+3}{x^2+x}=\frac{2-3x}{x^2-1}$

4.05.- Ecuaciones Radicales

Las **ecuaciones con radicales** son aquellas en las que la incógnita aparece en alguno de los términos bajo el signo radical.

No existe un único procedimiento para resolver este tipo de ecuaciones, pero es muy útil tener en cuenta las siguiente recomendaciones:

- Si la ecuación contiene un único radical cuadrático, conviene aislarlo en un miembro y elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación.

$$3\sqrt{6x+1}-5=2x \quad \rightarrow \quad 3\sqrt{6x+1}=2x+5 \quad \rightarrow \quad \left(3\sqrt{6x+1}\right)^2=(2x+5)^2 \quad \rightarrow \quad 9(6x+1)=4x^2+20x+25$$

- Si la ecuación contiene más de un radical cuadrático, conviene aislar uno de ellos en un miembro (el más fácil) y elevar al cuadrado, después volveremos a aislarlo y otra vez elevar al cuadrado:

$$\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+4}=6 \quad \rightarrow \quad \sqrt{x+4}=6-\sqrt{2x-1} \quad \rightarrow \quad \left(\sqrt{x+4}\right)^2=\left(6-\sqrt{2x-1}\right)^2 \quad \rightarrow \quad x+4=\left(6-\sqrt{2x-1}\right)^2$$

$$\rightarrow \quad x+4=36+2x-1-12\sqrt{2x-1} \quad \rightarrow \quad x+4=35+2x-12\sqrt{2x-1} \quad \rightarrow \quad 12\sqrt{2x-1}=x+31 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \left(12\sqrt{2x-1}\right)^2=(x+31)^2 \quad \rightarrow \quad 144(2x-1)=x^2+62x+961$$

Y con estas recomendaciones convertimos las ecuaciones con radicales en ecuaciones polinómicas.

Ojo, al elevar al cuadrado los dos miembros de la ecuación, se pueden introducir soluciones falsas, es por tanto, imprescindible comprobar la veracidad de las soluciones obtenidas.

Ejemplo

9.- Resuelve las siguientes ecuación: $\sqrt{4x+5}-\sqrt{3x+1}=1$

Lo primero será aislar una de los radicales:

$$\sqrt{4x+5}-\sqrt{3x+1}=1 \quad \rightarrow \quad \sqrt{3x+1}=\sqrt{4x+5}-1$$

Después elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación y operamos:

$$\left(\sqrt{3x+1}\right)^2=\left(\sqrt{4x+5}-1\right)^2 \quad \rightarrow \quad 3x+1=4x+5+1-2\sqrt{4x+5}$$

Agrupamos y volvemos a aislar el radical, para volver a elevar al cuadrado:

$$3x+1=4x+5+1-2\sqrt{4x+5} \quad \rightarrow \quad 2\sqrt{4x+5}=x+5 \quad \rightarrow \quad \left(2\sqrt{4x+5}\right)^2=(x+5)^2$$

Operamos y agrupamos, y llegamos a una ecuación de segundo grado:

$$\left(2\sqrt{4x+5}\right)^2=(x+5)^2 \quad \rightarrow \quad 4(4x+5)=x^2+10x+25 \quad \rightarrow \quad 16x+20=x^2+10x+25 \quad \rightarrow \quad x^2-6x+5=0$$

Cuya solución es:

$$x^2-6x+5=0 \quad \rightarrow \quad (x-5)\cdot(x-1)=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x-5=0 & \rightarrow \quad x=5 \\ x-1=0 & \rightarrow \quad x=1 \end{cases}$$

Comprobamos ambas ecuaciones:

- Si x=5 $\quad \rightarrow \quad \sqrt{4\cdot 5+5}-\sqrt{3\cdot 5+1}=1 \quad \rightarrow \quad \sqrt{25}-\sqrt{16}=5-4=1$
- Si x=1 $\quad \rightarrow \quad \sqrt{4\cdot 1+5}-\sqrt{3\cdot 1+1}=1 \quad \rightarrow \quad \sqrt{9}-\sqrt{4}=3-2=1$

Por tanto, las soluciones de la ecuación $\sqrt{4x+5}-\sqrt{3x+1}=1$ son x=5 y x=1

Piensa y practica

8.- Resuelve las siguientes ecuaciones radicales: Sol: a) 13/9; b) 2; c) 5; d) 15

$a)\ \sqrt{x+4}=3-\sqrt{x-1} \qquad b)\ \sqrt{2x+5}+6=3x+3 \qquad c)\ 2\sqrt{2x-1}=\sqrt{6x-5}+\sqrt{2x-9} \qquad d)\ 1+\sqrt{x+1}=\frac{x}{3}$

4.06.- Ecuaciones Logarítmicas y Exponenciales

Como vimos en el tema 2, para resolver las ecuaciones logarítmicas y exponenciales, es necesario conocer bien tanto las propiedades de las potencias como las de los logaritmos.

4.6.1.- Ecuaciones exponenciales

Una ecuación exponencial es una ecuación en la que la incógnita, la x normalmente, aparece en el exponente de una potencia. Como por ejemplo:

$$2^{2x-4}=64$$

Resolver una **ecuación exponencial** es encontrar el valor o valores de **x** que verifican la igualdad

Las ecuaciones exponenciales podemos resolverlas de dos maneras diferentes, según sea el caso:

Caso 1: Exponencial igualada a un número:

Para resolverla, basta con realizar las operaciones necesarias para que en ambos miembros de la igualdad tengamos la misma base, y de esta forma, poder igualar los exponentes.

Ejemplo

10.- Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

$$2^{2x-4}=64 \rightarrow 2^{2x-4}=2^6 \rightarrow 2x-4=6 \rightarrow 2x=6+10 \rightarrow 2x=10 \rightarrow x=5$$

$$2\cdot 3^{2x-5}=54 \rightarrow 3^{2x-5}=27 \rightarrow 3^{2x-5}=3^3 \rightarrow 2x-5=3 \rightarrow 2x=8 \rightarrow x=4$$

En este tipo de ecuaciones es conveniente verificar si la solución o soluciones son correctas.

$$2^{2x-4}=64 \rightarrow 2^{2\cdot 5-4}=2^6=64 \quad ó \quad 2\cdot 3^{2x-5}=54 \rightarrow 2\cdot 3^{2\cdot 4-5}=2\cdot 3^3=54 \quad c.q.d.$$

Caso 2: Transformación a una ecuación polinómica mediante un cambio de variable:

Un cambio de variable es una técnica empleada en matemáticas para resolver algunas ecuaciones o sistemas de ecuaciones de grado superior a uno, que de otra forma sería muy complicado de resolver.

Por ejemplo, la ecuación $x^6-5x^3+6=0$, que es muy difícil de resolver, se puede transformar en otra, mucho más fácil de resolver, $z^2-5z+6=0$, simplemente haciendo el cambio de variable: $z=x^3$

Cuando nos encontremos con una ecuación exponencial compleja podemos recurrir a un cambio de variable para transformarla en una ecuación polinómica, casi siempre de segundo grado, que es de fácil resolución. Posteriormente, y esto es muy importante, se deshace el cambio de variable y se obtiene el valor de la incógnita pedida. Veamos un ejemplo:

Ejemplo

11.- Resuelve la siguiente ecuación exponencial $2^{2x+1}-3\cdot 2^x+1=0$

En primer lugar, aplicamos las propiedades de las potencias necesarias para quitar las sumas o restas de los exponentes:

$$2^{2x+1}-3\cdot 2^x+1=0 \rightarrow 2^1\cdot 2^{2x}-3\cdot 2^x+1=0 \rightarrow 2\cdot\left(2^x\right)^2-3\cdot 2^x+1=0$$

Si observamos la ecuación obtenida, vemos que se parece a una ecuación de segundo grado donde la "incógnita" sería 2^x, así que hacemos el cambio de variable $2^x=Z$ y reescribimos la ecuación:

$$2\cdot\left(2^x\right)^2-3\cdot 2^x+1=0 \rightarrow \text{Si } z=2^x \rightarrow 2\cdot\left(2^x\right)^2-3\cdot 2^x+1=0 \rightarrow 2\cdot(z)^2-3\cdot z+1=0$$

Llegamos a una ecuación de segundo grado, cuya solución es:

$$2z^2-3z+1=0 \Rightarrow z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\frac{3\pm 1}{4}=\begin{cases} z_1=\frac{1}{2} \\ z_2=1 \end{cases}$$

Ahora si deshacemos el cambio de variable para poder calcular x:

$$\text{Si } z=2^x \rightarrow \begin{cases} 2^x=\frac{1}{2} \rightarrow 2^x=2^{-1} \rightarrow x=-1 \\ 2^x=1 \rightarrow 2^x=2^0 \rightarrow x=0 \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones son $x_1=-1$ y $x_2=0$.

12.- Resuelve la siguiente ecuación exponencial $2-3^{-x}+3^{x+1}=0$

Si aplicamos las propiedades de las potencias y hacemos el cambio $t=3^x$, llegamos a una ecuación de 2° grado:

$$2-3^{-x}+3^{x+1}=0 \quad \to \quad 2-\frac{1}{3^x}+3\cdot 3^x=0 \quad \to \quad \left(\text{Si } 3^x=t\right) \quad \to \quad 2-\frac{1}{t}+3t=0 \quad \to \quad 3t^2+2t-1=0$$

Cuya solución es:

$$3t^2+2t-1=0 \quad \to \quad t=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{6}=\frac{-2\pm 4}{6}=\begin{cases} t_1=-1 \\ t_2=\frac{1}{3} \end{cases}$$

Y deshaciendo el cambio:

$$\text{Si } t=3^x \quad \to \quad \begin{cases} 3^x=-1 \quad \to \quad \text{Sin solución} \\ 3^x=\frac{1}{3} \quad \to \quad 3^x=3^{-1} \quad \to \quad x=-1 \end{cases}$$

Por lo que su solución es $x=-1$

Piensa y practica

9.- Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales: Sol: a) −7; b) −8; c) 5/6; d) 1; e) 0 y 1

$a)\ \sqrt{3^{x+1}}=\frac{1}{27}$ $\quad b)\ \frac{\left(\sqrt{3}\right)^{-x}}{81}=1$ $\quad c)\ \frac{2^x\cdot\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}}=2$ $\quad d)\ 2^{x-1}+2^x+2^{x+1}=7$ $\quad e)\ 3^x+3^{1-x}=4$

4.6.2.- Ecuaciones logarítmicas

Una ecuación logarítmica es aquella en la que la incógnita aparece dentro de un logaritmo.

Ejemplo de este tipo de ecuaciones es:

$$\log 2+\log\left(11-x^2\right)=2\cdot\log\left(5-x\right)$$

Para resolverlas hemos de tener en cuenta:

- Las propiedades de los logaritmos:

1) $\log_a 1=0$

2) $\log_a a=1$

3) $\log_a a^Q=Q$

4) $a^{\log_a Q}=Q$

5) $\log_a\left(P\cdot Q\right)=\log_a P+\log_a Q$

6) $\log_a\left(\frac{P}{Q}\right)=\log_a P-\log_a Q$

7) $\log_a\left(P\right)^Q=Q\cdot\log_a P$

8) $\log_a\sqrt[Q]{P}=\frac{1}{Q}\cdot\log_a P$

9) $\log_a P=\log_a Q \quad \to \quad P=Q$

10) $\log_P Q=\frac{\log_x Q}{\log_x P}$

Propiedades de los Logaritmos

- La definición de logaritmo: $\log_a P=x \quad \Leftrightarrow \quad a^x=P$
- La igualdad de logaritmos: $\log_a P=\log_a Q \quad \to \quad P=Q$
- y además tendremos que comprobar las soluciones para verificar que no tengamos logaritmos nulos o negativos.

Como en toda ecuación, hemos de despejar la incógnita, y para ello podemos encontrarnos con diferentes casos:

Caso 1: Aplicando la definición de logaritmo:

Ejemplo

13.- Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log_8\left[2\left(x^3+5\right)\right]=2$

Aplicando la definición de logaritmo, legamos a:

$$\log_a b=c \Leftrightarrow \quad a^c=b \quad \to \quad \log_8\left[2\left(x^3+5\right)\right]=2 \quad \Leftrightarrow \quad 8^2=2\left(x^3+5\right)$$

Y operando:

$$8^2=2\left(x^3+5\right) \quad \to \quad 64=2\left(x^3+5\right) \quad \to \quad 32=x^3+5 \quad \to \quad x^3=27 \quad \to \quad x^3=3^3$$

Queda claro que si dos potencias son iguales y sus exponentes también lo son, entonces sus bases también tienen que ser iguales:

$$\text{Si } x^3=3^3 \quad \to \quad x=3$$

Verificamos para asegurarnos de no realizar logaritmos nulos o negativos y claramente si x es positivo, x^3 también lo es.

Por tanto, la solución es x=3.

b) $\log_{2x+3}(81)=2$

Aplicando la definición de logaritmo, legamos a:

$$\log_a b=c \Leftrightarrow \quad a^c=b \quad \to \quad \log_{2x+3}(81)=2 \quad \to \quad (2x+3)^2=81$$

Y operando:

$$(2x+3)^2=81 \quad \to \quad 4x^2+12x+9=81 \quad \to \quad 4x^2+12x-72=0 \quad \to \quad x^2+3x-18=0$$

Llegamos a una ecuación de segundo grado cuya solución es:

$$x^2+3x-18=0 \quad \to \quad (x+6)\cdot(x-3)=0 \quad \to \quad \begin{cases} x=-6 \\ x=3 \end{cases}$$

Verificamos para asegurarnos de no realizar logaritmos nulos o negativos y vemos que ambas soluciones son correctas.

Por tanto, las soluciones son x=3 y x=-6.

c) $\log(2x-4)=2$

Aplicando la definición de logaritmo y operando, legamos a:

$$\log_a b=c \Leftrightarrow \quad a^c=b \quad \to \quad \log(2x-4)=2 \quad \to \quad 10^2=2x-4 \quad \to \quad 104=2x \quad \to \quad x=52$$

Solución que es válida porque no hace negativo al argumento.

Por tanto x=52

Caso 2: Aplicando las propiedades de los logaritmos y finalmente la igualdad de logaritmos

Ejemplo

14.- Resuelve la siguiente ecuación logarítmica $\dfrac{\log\left(16-x^2\right)}{\log(3x-4)}=2$

Si operamos un poco llegamos a:

$$\frac{\log\left(16-x^2\right)}{\log(3x-4)}=2 \quad \to \quad \log\left(16-x^2\right)=2\cdot\log(3x-4)$$

Aplicando la propiedad de la potencia de un logaritmo:

$$\log\left(16-x^2\right)=2\cdot\log(3x-4) \quad \to \quad \log\left(16-x^2\right)=\log(3x-4)^2$$

Y si dos logaritmos son iguales, sus argumentos también lo son:

$$\text{Si } \log\left(16-x^2\right)=\log(3x-4)^2 \quad \to \quad \left(16-x^2\right)=(3x-4)^2 \quad \to \quad 16-x^2=9x^2-24x+16$$

Llegamos a una ecuación de segundo grado cuya solución es:

$$16-x^2=9x^2-24x+16 \quad \to \quad 10x^2-24x=0 \quad \to \quad x(5x-12)=0 \quad \to \quad x=0 \quad y \quad x=\frac{12}{5}$$

Desechamos la solución x=0 porque el logaritmo del cociente sería negativo.

Por tanto la solución es x=12/5

15.- Resuelve la siguiente ecuación logarítmica $\log 2+\log\left(11-x^2\right)=2\cdot\log(5-x)$

Aplicando las propiedades de los logaritmos llegamos a:

$$\underbrace{\log 2+\log\left(11-x^2\right)}_{\text{Propiedad 5}}=\underbrace{2\cdot\log(5-x)}_{\text{Propiedad 7}} \rightarrow \underbrace{\log\left[2\cdot\left(11-x^2\right)\right]=\log(5-x)^2}_{\text{Propiedad 9}} \rightarrow \left[2\cdot\left(11-x^2\right)\right]=(5-x)^2$$

Una ecuación de segundo grado, que resolviendo:

$$22-2x^2=25-10x+x^2 \underset{\text{Agrupamos}}{\rightarrow} 3x^2-10x+3=0 \rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

No podemos olvidar que siempre hay que verificar si la solución o soluciones son correctas:

Si sustituimos x=3:

$$\log 2+\log\left(11-x^2\right)=2\cdot\log(5-x) \rightarrow \log 2+\log(11-9)=2\cdot\log(5-3) \rightarrow \log 2+\log 2=2\cdot\log 2 \qquad c.q.d.$$

Si sustituimos x=1/3:

$$\log 2+\log\left(11-x^2\right)=2\cdot\log(5-x) \rightarrow \log 2+\log\left(11-\frac{1}{9}\right)=2\cdot\log\left(5-\frac{1}{3}\right) \rightarrow \log 2+\log\left(\frac{98}{9}\right)=2\cdot\log\left(\frac{14}{3}\right)$$

$$\rightarrow \log\left(2\cdot\frac{98}{9}\right)=\log\left(\frac{14}{3}\right)^2 \rightarrow \frac{196}{9}=\frac{196}{9} \qquad c.q.d.$$

Vemos que ambas soluciones son correctas.

Piensa y practica

10.- Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:	Sol: a) 3; b) 5
a) $\log(x+1)+\log(x)=\log(x+9)$	b) $\log\sqrt{x-1}=\log(x+1)-\log\sqrt{x+4}$

11.- Determina el valor de x en las siguientes expresiones:			Sol: a) 3; b) 3, c) 4/3 d) 10
a) $\log_{2x+3} 81=2$	b) $x+2=10^{\log 5}$	c) $x=\dfrac{\log 625}{\log 125}$	d) $\dfrac{\log(x-7)}{\log(x-1)}=0,5$

4.07.- Inecuaciones con una incógnita

Como ya vimos al principio del tema, una inecuación es una desigualdad entre expresiones algebraicas entre las que se encuentra uno de estos signos ≠, <, >, ≤ y ≥. Ejemplos de inecuaciones son:

$$2x-3<5 \qquad x^2-x-6>0 \qquad x(x+1)+3x>5x+6$$

La solución de una inecuación va a estar formada por todos los valores que verifican la desigualdad. Para resolverla, hay que operar hasta obtener **inecuaciones equivalentes**, es decir, aquellas que tengan la misma solución, pero respetando las propiedades de las desigualdades.

En general, la solución de una inecuación se puede expresar mediante una representación gráfica o un intervalo.

Propiedades de las desigualdades

- Si a los dos miembros de una desigualdad le sumamos o restamos un mismo número, obtenemos otra desigualdad del mismo sentido.

$$2x-3<5 \quad \rightarrow \quad 2x-3+8<5+8$$

(no cambia el sentido de la desigualdad)

- Si a los dos miembros de una desigualdad lo multiplicamos o lo dividimos por un número, puede pasar que:
  - Si el número es positivo obtendremos una desigualdad del mismo sentido.

$$2x-3<5 \quad \rightarrow \quad 3\cdot(2x-3)<3\cdot 5$$

(no cambia el sentido de la desigualdad)

  - Si el número es negativo obtendremos una desigualdad de sentido contrario.

$$2x-3<5 \quad \rightarrow \quad -3\cdot(2x-3)>-3\cdot 5 \qquad \text{Si } a<b \quad \rightarrow \quad -a>-b$$

(cambia el sentido de la desigualdad)

4.7.1.- Inecuaciones de primer grado

Una inecuación de primer grado es una desigualdad entre expresiones polinómicas de grado 1 que se resuelve despejando la incógnita como se hace en las ecuaciones de primer grado.

Ejemplo

16.- Resuelve la siguiente inecuación: $2(x-3) < x+3(x+4)$

Si rompemos los paréntesis y operamos un poco llegamos a:

$$2(x+3)<x+3(x+4) \quad \rightarrow \quad 2x+6<x+3x+12 \quad \rightarrow \quad 2x+6<4x+12$$

Si pasamos las x a un miembro, los números a otro y agrupamos, llegamos a:

$$2x+6<4x+12 \quad \rightarrow \quad 2x-4x<12-6 \quad \rightarrow \quad -2x<6$$

Si despejamos la incógnita:

$-2x<6$ Si multiplicamos por −1, cambia la desigualdad: $2x>-6 \quad \rightarrow \quad x>-\frac{6}{2} \quad \rightarrow \quad x>-3$

Por tanto la solución escrita en forma de intervalo es:

$$x>-3 \quad \rightarrow \quad (-3,+\infty)$$

Piensa y practica

12.- Resuelve las siguientes inecuaciones de primer grado: Sol: a) $x > 4$; b) $x > 9/2$; c) $x \geq -5/7$; d) $x \leq 128/13$

a) $20<8+4(x-1)$ b) $\frac{4x-3}{2}>x+3$ c) $\frac{x-1}{3}+\frac{x+3}{2}\leq 2(x+1)$ d) $\frac{2x+2}{3}-\frac{5(x-8)}{4}\geq\frac{x}{2}$

4.7.2.- Inecuaciones de segundo grado

Una inecuación de segundo grado es una desigualdad entre expresiones polinómicas de grado 2 que se resuelve factorizando el polinomio y analizando el signo del producto en los intervalos determinados por sus raíces.

Ejemplo

17.- Resuelve la siguiente inecuación de segundo grado: $x^2 - 3x - 4 < 0$

Primero resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$x^2-3x-4=0 \quad \rightarrow \quad (x-4)\cdot(x+1)=0 \quad \rightarrow \quad x_1=-1 \quad \text{y} \quad x_2=4$$

Después, representamos gráficamente los intervalos determinados por las soluciones en la recta real y estudiamos los signos en cada uno de ellos, para ver donde se verifica la desigualdad.

Si escogemos el valor 0, que está en el intervalo central, y lo sustituimos en la desigualdad, llegamos a $-4<0$, que vemos que es cierta.

Por tanto la solución es el intervalo $(-1,4)$

4.08.- Resolución de Problemas de

Según **Polya** (1965), el profesor de matemáticas tiene en sus manos la llave del éxito ya que, si es capaz de estimular en los alumnos la curiosidad, podrá despertar en ellos el gusto por el pensamiento independiente; pero, si por el contrario dedica el tiempo a ejercitarles en operaciones de tipo rutinario, matará en ellos el interés.

Es necesario crear en clase un ambiente que favorezca la investigación, el descubrimiento, la búsqueda, la desinhibición – cuando se trate de plantear preguntas o dudas – , el respeto a los compañeros, las actitudes de colaboración... etc.

Más que enseñar a los alumnos a resolver problemas, se trata de enseñarles a pensar matemáticamente, es decir, a que sean capaces de abstraer y aplicar ideas matemáticas a un amplio rango de situaciones y, en este sentido, los propios problemas serán las "herramientas" que les llevarán a ello.

Es por ello que la resolución de problemas es considerada la parte más esencial del aprendizaje de matemáticas. Mediante la resolución de problemas, experimentareis la utilidad de las Matemáticas en el mundo que os rodea aplicando de forma práctica los conocimientos teóricos que habéis adquirido.

En general, a la hora de resolver problemas en matemáticas, seguiremos el siguiente esquema:

a) Lectura y comprensión del enunciado.
b) Análisis de los datos del enunciado. (A veces es importante ayudarse con un dibujo)
c) Plantear las operaciones a realizar y realizarlas sin olvidar el orden de prioridad.
d) Resolver el problema paso a paso intentando explicar los pasos seguidos para resolverlo y dando la solución pedida.
e) Evaluar e interpretar los resultados. ¿Son lógicos? ¿se corresponden con lo pedido en el enunciado? ¿puedo comprobar si la solución es correcta?

¿Cuáles son los números cuyo triple excede a su cuadrado en 10 o más unidades?

3.10.- Autoevaluación

1.- Opera y simplifica:

$$\frac{(x-2)\cdot(x+1)}{3}-\frac{(3x-1)^2}{8}+\frac{(2x-3)\cdot(2x+3)}{12}=$$

2.- Halla el cociente y el resto de la división:

$$3x^4-5x^3+4x^2-1 \quad \underline{|x^2+2}$$

3.- Descompón en factores los siguientes polinomios:

a) $x^4-12x^3+36x^2$ b) $2x^4+5x^2-4x-3$

4.- Calcula el valor del parámetro **m** para que el polinomio $P(x)=7x^3-mx^2+3x-2$, sea divisible por $x+1$.

5.- Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

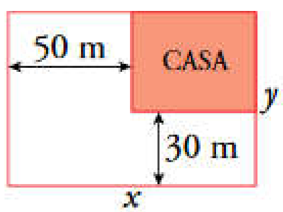
a) $\dfrac{x^3-4x}{x^3+x^2-2x}$ b) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+6x^2+5x-12}$

6.- Efectúa y simplifica cuando sea posible:

a) $\dfrac{2x^2}{x-3}:\dfrac{8}{x^3-3x^2}$ b) $\dfrac{x^2-6}{(x-2)^2}-\dfrac{x-3}{x-2}$

7.- En un triángulo rectángulo, un cateto mide 14 cm. Escribe el perímetro y el área del triángulo en función de su hipotenusa x.

8.- En una parcela de lados x e y se construye una casa, en la zona que se indica en la figura.



Expresa en función de x e y el área de la zona no edificada.