

4

Inducción electromagnética



Inducción electromagnética

PARA COMENZAR

• ¿Por qué disponen los aerogeneradores de motores para orientar las palas del molino?

Porque así pueden aprovechar mejor la fuerza del viento, ya que dependiendo de la orientación de las palas, estas girarán a mayor o menor velocidad y producirán más o menos energía eléctrica.

• ¿Por qué se sitúan las centrales eólicas en las cimas de colinas?

Porque ahí el viento es habitualmente más intenso.

¿En qué centrales eléctricas se genera energía eléctrica de una manera similar al caso de los aerogeneradores?

Existen otras centrales donde vapor de agua o una corriente de agua mueve una turbina unidad a un generador de manera que se produce energía eléctrica. Por ejemplo, en las centrales hidroeléctricas o en las centrales térmicas. La ventaja de las centrales eólicas o las hidroeléctricas es que no emiten sustancias contaminantes a la atmósfera.

ACTIVIDADES

1. ¿Cuál es la intensidad de la corriente que pasa por un dispositivo de 2,2 k Ω si se produce una caída de tensión de 110 V?

Aplicando la ley de Ohm:

$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{110 \text{ V}}{2.2 \cdot 10^3 \Omega} = 0.05 \text{ A} = 50 \text{ mA}$$

2. El voltaje eficaz de la corriente que llega a nuestras casas es 230 V. ¿Qué resistencia debe tener un dispositivo para que circule por él una corriente de 2,5 A?

Aplicando la ley de Ohm:

$$I = \frac{\Delta V}{R} \rightarrow R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{230 \text{ V}}{2,5 \text{ A}} = 92 \Omega$$

3. Una espira circular de 20 cm de radio está situada perpendicularmente a un campo magnético de 0,02 T. Calcula el flujo que lo atraviesa. Si giramos la espira 90° de forma que se coloque paralela al campo magnético, ¿cuánto valdría ahora el flujo?

El flujo que atraviesa la espira se calcula a partir del valor del campo magnético y de la superficie de la espira (depende del número de líneas de campo magnético que atraviesan la espira). Si la espira está orientada perpendicularmente al campo magnético, entonces el vector que define la superficie y el campo magnético son paralelos. Por tanto, el flujo magnético será máximo:

$$\varphi_{\rm B} = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos \alpha = B \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \cos \alpha = 0.02 \, \text{T} \cdot \pi \cdot \left(0.2 \, \text{m}\right)^2 \cdot \cos 0^\circ = 2.51 \cdot 10^{-3} \, \, \text{Wb}$$

Si ahora giramos la espira 90°, el vector que define la superficie de la espira y el campo magnético serán perpendiculares, por lo que el flujo será nulo (mínimo flujo magnético):

$$\phi_{B} = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos \alpha = B \cdot \pi \cdot R^{2} \cdot \cos 90^{\circ} = 0$$



4. Una bobina compuesta por 400 espiras circulares de 40 cm de diámetro gira con una frecuencia de 100 Hz en un campo magnético uniforme de 0,4 T. Determina el flujo magnético que atraviesa la bobina, en función del tiempo.

El flujo que atraviesa la espira se calcula a partir del valor del campo magnético y de la superficie total atravesada. Si suponemos que inicialmente las espiras están orientadas perpendicularmente al campo magnético, entonces el vector que define la superficie de cada espira y el campo magnético son paralelos. Por tanto, el flujo será máximo:

$$\phi_{B0} = \vec{B} \cdot \vec{S}_0 = B \cdot S \cdot \cos \alpha = B \cdot 400 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \cos 0^\circ = 0.4 \text{ T} \cdot 400 \cdot \pi \cdot (0.4 \text{ m})^2 \cdot \cos 0^\circ = 25.6 \pi \text{ Wb}$$

Como la bobina va girando, el flujo magnético que la atraviesa va variando:

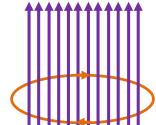
$$\phi_{B}(t) = \vec{B} \cdot \vec{S}(t) = B \cdot S \cdot \cos(\omega \cdot t) = B \cdot 400 \cdot \pi \cdot R^{2} \cdot \cos(2\pi \cdot f \cdot t) =$$

$$= 0.4 \text{ T} \cdot 400 \cdot \pi \cdot (0.4 \text{ m})^{2} \cdot \cos(2\pi \cdot 100 \cdot t) = 25.6\pi \cdot \cos(200\pi \cdot t) \text{ Wb}$$

5. Sea una espira conductora circular, colocada en el seno de un campo magnético perpendicular al plano de la espira, como se indica en la figura. Deduce el sentido de la corriente inducida en la espira si el módulo del campo magnético aumenta con el tiempo. Razona la respuesta.

Si el módulo del campo magnético aumenta con el tiempo, en la espira se induce una corriente de tal manera que el campo magnético que crea dicha corriente se oponga a la variación del campo. Como el campo magnético externo aumenta con





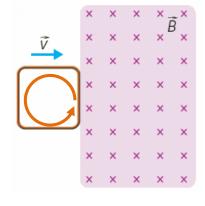
el tiempo, en la espira el flujo magnético aumenta con el tiempo.

Entonces, según la ley de Lenz: «el sentido de la corriente inducida es tal que se opone a la causa que lo originó»; en la espira se genera una corriente en un sentido que crea un campo magnético en sentido opuesto al campo magnético externo.

En el dibujo se indica el sentido de la corriente en la espira. La corriente circula en el sentido de las agujas del reloj.

6. Una espira cuadrada se desplaza hacia una región del espacio donde existe un campo magnético uniforme perpendicular al plano del papel, como se muestra en la figura. Indica el sentido de la corriente inducida en la espira cuando penetra en la región del campo magnético.

Cuando la espira penetra en la región donde existe el campo magnético, varía el flujo magnético que la atraviesa. Por tanto, se induce en ella una corriente eléctrica. Como mientras la espira está entrando en la región donde existe el campo el flujo magnético va aumentando, en la espira se induce una corriente que produce un campo magnético que se opone al campo magnético existente; es decir, un campo magnético que sale del papel.



Es decir, en el dibujo, en la espira se genera una corriente en sentido opuesto al de las agujas del reloj, tal y como se señala en el esquema.

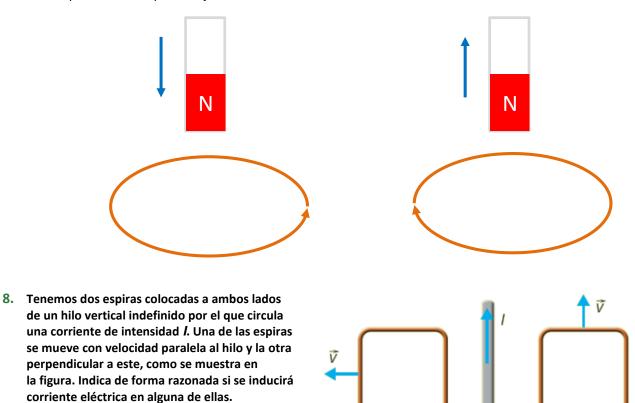
- 7. Sea una espira plana circular situada perpendicularmente y enfrente del polo norte de un imán.
 - a) Razona qué ocurre con el flujo magnético que atraviesa la espira si el imán se aproxima a la espira. ¿Y si el imán se alejara de la espira?
 - b) Haz un esquema e indica el sentido de la corriente inducida, para el caso en el que el imán se esté aproximando a o alejando de la espira.
 - a) Si el imán se aproxima a la espira, varía el flujo magnético que atraviesa la espira (aumenta el flujo magnético).
 - Si el imán se aleja de la espira, disminuye el flujo magnético que atraviesa la espira.



b) Si el imán se aproxima a la espira, se induce en la espira una corriente eléctrica que produce un campo en sentido opuesto al que produce el imán.

Si el imán se aleja de la espira, se induce en la espira una corriente eléctrica que produce un campo en el mismo sentido al que produce el imán.

Respuesta en el esquema adjunto.



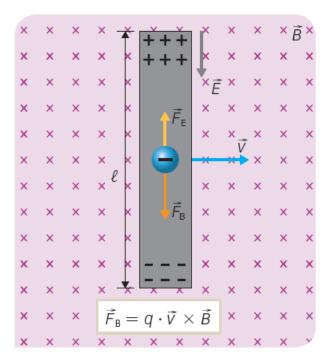
En la espira de la izquierda, la que se aleja del hilo

de corriente, sí se inducirá corriente, pues al alejarse del hilo se produce una variación en el flujo magnético que atraviesa la espira. Cada vez habrá menos líneas de campo que la atraviesan, por tanto, el flujo magnético a través de ella disminuirá y se inducirá una corriente en el sentido opuesto a las agujas del reloj, pues así el campo magnético generado por la corriente de la espira tiene el mismo sentido en el plano de la espira que el campo magnético generado por el hilo de corriente.

En la otra espira, la que se mueve de manera paralela al hilo de corriente, no se producirá ninguna corriente inducida, ya que el flujo magnético no varía en la espira, puesto que el campo magnético no varía en las diferentes posiciones de la espira, dada la simetría el campo alrededor del hilo de corriente.



- Una barra metálica de 50 cm se mueve perpendicularmente a un campo magnético uniforme con una velocidad de 4 m/s. Se observa que entre los extremos de la barra hay una diferencia de potencial de 0,8 V.
 - a) Calcula la intensidad del campo magnético en la zona.
 - b) Si la barra metálica se moviese en la misma dirección del campo, ¿cuánto valdría la intensidad del campo magnético?
 - a) Como la barra se mueve en el seno de un campo magnético, aparecerá una fuerza de Lorentz sobre las cargas del conductor. Esta fuerza depende del valor del campo magnético y de la velocidad de las cargas, es decir, de la velocidad de la barra. Como la barra se mueve perpendicularmente al campo, la velocidad de las cargas y el campo magnético son perpendiculares, y entonces podemos escribir:



$$\vec{F}_{B} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \rightarrow F_{B} = q \cdot v \cdot B \cdot \text{sen } \alpha \rightarrow F_{B} = q \cdot v \cdot B$$

La fuerza magnética provoca que los electrones se acumulen en un lado del conductor.

Aparece, entonces, un campo eléctrico debido a la acumulación de cargas positivas en un lado de la barra y de cargas negativas en el otro lado. El equilibrio se alcanza cuando la fuerza eléctrica y la fuerza magnética se igualan, es decir:

$$\vec{F}_{B} = -\vec{F}_{E} \rightarrow |\mathcal{A}| \cdot v \cdot B = |\mathcal{A}| \cdot E \rightarrow B = \frac{E}{v}$$

Como el campo eléctrico es constante, puesto que el campo magnético y la velocidad también lo son, podemos escribir:

$$\Delta V = E \cdot L$$

Y sustituyendo en la expresión anterior queda:

$$B = \frac{E}{V} = \frac{\frac{\Delta V}{L}}{V} = \frac{\Delta V}{L \cdot V} = \frac{0.8 \text{ V}}{0.5 \text{ m} \cdot 4 \text{ m/s}} = 0.4 \text{ T}$$

- b) Si la barra se mueve en la misma dirección del campo magnético, entonces la velocidad y el campo magnético son paralelos y su producto vectorial es nulo, por lo que no aparecerá una fuerza de Lorentz sobre las cargas del conductor. De este modo no aparecerá el campo eléctrico y, por consiguiente, no existirá diferencia de potencial entre los extremos de la barra.
- 10. Sea una bobina circular y plana de 2,5 cm de radio construida con 25 espiras cuyo eje es paralelo a un campo magnético uniforme de 0,1 T. Calcula la fem inducida entre los extremos de la bobina si durante $\Delta t = 10$ ms y de forma lineal se duplica el campo magnético. ¿Cuánto valdría la fem si en ese intervalo Δt hubiésemos invertido el sentido del campo?

La fuerza electromotriz inducida depende de la variación del flujo magnético sobre la bobina. Podemos escribir:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_{\rm B}}{dt}$$

El campo magnético se duplica, por lo que podemos escribir:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta \phi_{\rm B}}{\Delta t} = -\frac{\left(B_{\rm F} - B_{\rm O}\right) \cdot S}{\Delta t} = -\frac{\left(2 \cdot B_{\rm O} - B_{\rm O}\right) \cdot S}{\Delta t} = -\frac{B_{\rm O} \cdot S}{\Delta t} = -\frac{0.1 \, \text{T} \cdot 25 \cdot \pi \cdot \left(0.025 \, \text{m}\right)^2}{10 \cdot 10^{-3} \, \text{s}} = -0.49 \, \text{V}$$

La fuerza electromotriz inducida es constante en este caso.



Si en ese intervalo de tiempo modificamos el campo hasta invertirlo de sentido, procediendo análogamente:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta \phi_{\rm B}}{\Delta t} = -\frac{\left(B_{\rm F} - B_{\rm O}\right) \cdot S}{\Delta t} = -\frac{\left(-B_{\rm O} - B_{\rm O}\right) \cdot S}{\Delta t} = \frac{2 \cdot B_{\rm O} \cdot S}{\Delta t} = \frac{2 \cdot 0.1 \, \text{T} \cdot 25 \cdot \pi \cdot \left(0.025 \, \text{m}\right)^2}{10 \cdot 10^{-3} \, \text{s}} = 0.98 \, \text{V}$$

11. Una espira circular de 4 cm de radio se encuentra situada en el seno de un campo magnético uniforme perpendicular al plano de la espira cuya intensidad varía con el tiempo:

$$B = 3 \cdot t^2 + 4$$
 (en unidades del SI)

- a) Escribe la expresión matemática del flujo magnético que atraviesa la espira en función del tiempo.
- b) Representa la fuerza electromotriz inducida en función del tiempo y calcula su valor para t = 2 s.
- a) El flujo magnético que atraviesa la espira depende del valor del campo magnético y de la superficie de la espira. La superficie de la espira no varía, pero el campo magnético sí, por lo que el flujo magnético variará con el tiempo. Como el campo magnético es perpendicular al plano de la espira:

$$\begin{split} & \varphi_{\text{B}} = \vec{B}(t) \cdot \vec{S} = B(t) \cdot S \cdot \cos \alpha = B(t) \cdot S \cdot \cos 0^{\circ} = \left(3 \cdot t^{2} + 4\right) \cdot \pi \cdot R^{2} = \left(3 \cdot t^{2} + 4\right) \cdot \pi \cdot \left(0,04 \text{ m}\right)^{2} = \\ & = 1,6 \cdot 10^{-3} \, \pi \cdot \left(3 \cdot t^{2} + 4\right) \, \text{Wb} = 0,015 \cdot t^{2} + 0,02 \, \text{Wb} \end{split}$$

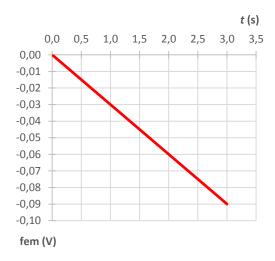
 b) Calculamos el valor de la fuerza electromotriz derivando el flujo magnético respecto al tiempo y sustituyendo valores:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_{\text{B}}}{dt} = -\frac{d(\vec{B} \cdot \vec{S})}{dt} = -\frac{d(B \cdot S)}{dt} = -\frac{d(0.015 \cdot t^2 + 0.02 \text{ Wb})}{dt} = -0.030 \cdot t \text{ V}$$

El valor de la fuerza electromotriz para t = 2 s es:

$$\varepsilon = -0.030 \cdot t = -0.030 \cdot 2 = -0.060 \text{ V}$$

La representación gráfica es la siguiente:



12. Una espira circular de 20 cm de radio se encuentra en un campo magnético uniforme perpendicular a la superficie de la espira cuya intensidad varía con el tiempo según la expresión:

$$B(t) = 1.8 \text{ sen } (8 \cdot t) \text{ (en unidades del SI)}.$$

- a) Calcula el flujo magnético que atraviesa la espira en función del tiempo.
- b) Calcula la fuerza electromotriz inducida máxima.



 a) Como el campo magnético es perpendicular a la espira, el flujo magnético que cruza la espira es máximo y viene dado por la expresión:

$$\begin{aligned} \phi_{\text{B}}(t) &= \vec{B}(t) \cdot \vec{S} = B(t) \cdot S \cdot \cos 0^{\circ} = 1.8 \cdot \sin (8 \cdot t) \cdot \pi \cdot R^{2} = 1.8 \cdot \sin (8 \cdot t) \cdot \pi \cdot (0.2 \text{ m})^{2} \\ &= 0.226 \cdot \sin (8 \cdot t) \text{ Wb} \end{aligned}$$

b) La fuerza electromotriz se calcula a partir de la variación del flujo magnético con el tiempo:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_{B}}{dt} = -\frac{d(\vec{B} \cdot \vec{S})}{dt} = -\frac{d(B \cdot S)}{dt} = -\frac{d(0,226 \cdot \text{sen } (8 \cdot t))}{dt} \rightarrow$$

$$\rightarrow |\varepsilon| = 0,226 \cdot \cos(8 \cdot t) \cdot 8 \text{ V} = 1,808 \cdot \text{sen } (8 \cdot t) \text{ V}$$

Como vemos, la fem será máxima cuando la función trigonométrica sea 1, es decir:

$$\varepsilon_{máx} = 1,808 \cdot 1 \text{ V} = 1,808 \text{ V}$$

13. Una espira conductora está girando con un periodo de giro de 4,0 s en una región donde hay un campo magnético constante, produciéndose una fuerza electromotriz máxima en la espira de 5,2 V. Si se reduce el periodo de giro de la espira hasta 3 s, calcula cuánto valdrá ahora la fuerza electromotriz máxima inducida en la espira.

Si aumenta el periodo de giro en la espira, el flujo magnético a través de la espira variará más rápidamente, por lo que es de esperar que la fuerza electromotriz máxima en la espira aumente. Calculamos el flujo magnético a través de la espira.

$$\phi_{B}(t) = \vec{B}(t) \cdot \vec{S} = B(t) \cdot S \cdot \cos(\omega \cdot t) = B \cdot S \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) = B \cdot \pi \cdot R^{2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

Suponemos que en el instante inicial la espira está colocada de manera perpendicular al campo magnético.

Entonces podemos calcular cómo varía este flujo magnético con el tiempo y deducir entonces el valor de la fuerza electromotriz.

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_{B}}{dt} = -\frac{d(\vec{B} \cdot \vec{S})}{dt} = -\frac{d(B \cdot S)}{dt} = -\frac{d\left[B \cdot \pi \cdot R^{2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right]}{dt} = -B \cdot \pi \cdot R^{2} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

Aplicamos la expresión anterior a las dos situaciones planteadas:

$$\left|\varepsilon\right|_{1} = B \cdot \pi \cdot R^{2} \cdot \frac{2\pi}{T_{1}} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T_{1}} \cdot t\right) \rightarrow \left|\varepsilon\right|_{1 \text{ máx}} = B \cdot \pi \cdot R^{2} \cdot \frac{2\pi}{T_{1}}$$

$$\left|\varepsilon\right|_{2} = B \cdot \pi \cdot R^{2} \cdot \frac{2\pi}{T_{2}} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T_{2}} \cdot t\right) \rightarrow \left|\varepsilon\right|_{2 \text{ máx}} = B \cdot \pi \cdot R^{2} \cdot \frac{2\pi}{T_{2}}$$

Dividimos una ecuación entre otra y obtenemos:

$$\frac{\left|\varepsilon\right|_{2\text{ máx}}}{\left|\varepsilon\right|_{1\text{ máx}}} = \frac{\cancel{B} \cdot \overrightarrow{\pi} \cdot \cancel{R}^2}{\cancel{B} \cdot \cancel{\pi} \cdot \cancel{R}^2} \cdot \frac{\cancel{2}\overrightarrow{\pi}}{T_1} = \frac{T_1}{T_2} \rightarrow \left|\varepsilon\right|_{2\text{ máx}} = \frac{T_1}{T_2} \cdot \left|\varepsilon\right|_{1\text{ máx}} = \frac{4\text{ s}}{3\text{ s}} \cdot 5,2\text{ V} = 6,9\widehat{3}\text{ V}$$

- 14. En el seno de un campo magnético uniforme de 0,02 T se coloca perpendicularmente una bobina circular de 40 cm de radio y 10 espiras. Si la bobina comienza a girar alrededor de uno de sus diámetros, calcula:
 - a) El flujo magnético máximo que atraviesa la bobina.
 - b) La fem en la bobina en el instante t = 0,1 s, si gira con una velocidad angular constante de 120 rpm.
 - a) El flujo magnético máximo se produce cuando el plano de la espira es perpendicular al campo magnético, ya que en esta situación es en la que mayor número de líneas de campo atraviesan la espira.

$$\phi_{B \text{ máx.}} = 10 \cdot B(t) \cdot S \cdot \cos(90^{\circ}) = 10 \cdot B \cdot S = 10 \cdot B \cdot \pi \cdot R^{2} = 10 \cdot 0.02 \text{ T} \cdot \pi \cdot (0.4 \text{ m})^{2} = 0.1 \text{ Wb}$$



b) La fem se calcula a partir de la variación del flujo magnético en el tiempo:

$$\begin{split} \epsilon &= -\frac{d\varphi_{\text{B}}}{dt} = -\frac{d\left(\vec{B} \cdot \vec{S}\right)}{dt} = -\frac{d\left(B \cdot S\right)}{dt} = -\frac{d\left[10 \cdot B \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \cos\left(\omega \cdot t\right)\right]}{dt} \\ &\rightarrow \left|\epsilon\right| = 10 \cdot B \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \omega \cdot \sin\left(\omega \cdot t\right) = \\ &= 10 \cdot 0,02 \, \text{T} \cdot \pi \cdot \left(0,4 \, \text{m}\right)^2 \cdot \frac{120 \, \text{rev.}}{1 \, \text{min}} \cdot \frac{2\pi \, \text{rad}}{1 \, \text{rev.}} \cdot \frac{1 \, \text{min}}{60 \, \text{s}} \cdot \text{sen} \left(\frac{120 \, \text{rev.}}{1 \, \text{min}} \cdot \frac{2\pi \, \text{rad}}{1 \, \text{rev.}} \cdot \frac{1 \, \text{min}}{60 \, \text{s}} \cdot 0,1 \, \text{s}\right) = 2,77 \cdot 10^{-2} \, \text{V} \end{split}$$

- 15. Un transformador permite modificar el voltaje de la red eléctrica, 230 V, a los 12 V con los que funciona una lámpara halógena de 5 A. Si la bobina primaria tiene 2200 espiras:
 - a) Halla el número de espiras de la bobina secundaria.
 - b) ¿Qué intensidad circula por la primaria?
 - a) La ecuación que relaciona los voltajes, espiras e intensidades en un transformador es la siguiente:

$$\frac{V_{\rm s}}{V_{\rm p}} = \frac{N_{\rm s}}{N_{\rm p}} = \frac{I_{\rm p}}{I_{\rm s}}$$

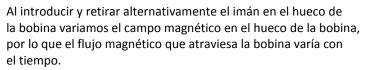
Entonces, sustituyendo los datos de los voltajes involucrados podemos calcular el número de espiras del secundario:

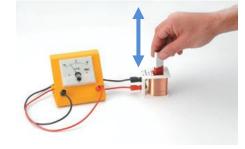
$$\frac{V_{\rm s}}{V_{\rm p}} = \frac{N_{\rm s}}{N_{\rm p}} \rightarrow N_{\rm s} = \frac{V_{\rm s}}{V_{\rm p}} \cdot N_{\rm p} = \frac{12 \text{ V}}{230 \text{ V}} \cdot 2200 \text{ espiras} \approx 115 \text{ espiras}$$

b) La intensidad que circula por la bobina primaria es:

$$\frac{V_s}{V_p} = \frac{I_p}{I_s} \rightarrow I_p = \frac{V_s}{V_p} \cdot I_s = \frac{12 \text{ V}}{230 \text{ V}} \cdot 5 \text{ A} = 0.26 \text{ A}$$

16. Tenemos una bobina conectada a un amperímetro e introducimos y retiramos un imán alternativamente en el hueco de la bobina. Al hacerlo, se observa que la aguja del amperímetro se mueve alternativamente a la derecha y a la izquierda del centro de la escala. Explica razonadamente.



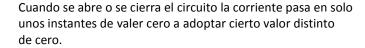


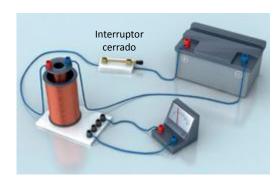
Esto hace que se produzca una fuerza electromotriz en la bobina. La aguja se mueve alternativamente porque al introducir y sacar el imán el flujo aumenta y disminuye alternativamente.

Cuanto más rápido movamos el imán, más intensa será la corriente que circula por la bobina.

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_{\rm B}}{dt} = -\frac{d(\vec{B} \cdot \vec{S})}{dt}$$

17. En el montaje de la derecha, la bobina interior está conectada a una batería de corriente continua; un interruptor permite cerrar o abrir el circuito a voluntad. La bobina exterior está conectada solo a un amperímetro cuyo cero está en el centro de la escala. Explica por qué se desplaza la aguja del amperímetro hacia uno de los lados cuando se abre o cierra el circuito y por qué lo hace solo durante unos breves instantes.







Durante esos instantes se produce una variación en el valor del campo magnético que crea la bobina por la que pasa la corriente que proporciona la batería. Entonces se produce también una variación en el flujo magnético que pasa por la bobina exterior.

Esta variación en el flujo magnético hace que aparezca una corriente en la bobina exterior y esto es lo que muestra el amperímetro.

La aguja solo se desplaza durante unos instantes porque rápidamente la intensidad en la bobina interior alcanza un valor constante y entonces el campo magnético creado por esta bobina interior no cambia. Esto implica que el flujo magnético por la bobina exterior se mantiene constante, con lo que la corriente generada en esta bobina exterior pasa a valer cero.

- 18. Una espira circular se conecta con un amperímetro.
 - a) ¿Se induce corriente al acercar o alejar un imán a la espira? ¿Influirá la velocidad con que se mueve el imán en la intensidad que marcaría el amperímetro?
 - b) Y si se mueve la espira y permanece fijo el imán, ¿se producirá corriente eléctrica?
 - a) Sí, pues al acercar o alejar el imán a la espira varía el valor del campo magnético en la espira y, por consiguiente, varía el flujo magnético que atraviesa la espira. Este hecho provoca la aparición de una corriente en la espira.

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_{\rm B}}{dt} = -\frac{d(\vec{B} \cdot \vec{S})}{dt}$$

La velocidad con que se mueve el imán no influirá en la intensidad que marcaría el amperímetro, ya que la intensidad es directamente proporcional a la fem, y esta no depende de la velocidad, sino del valor del campo magnético, de la superficie de la espira y del ángulo que formen ambos vectores.

- b) Si se mueve la espira y permanece fijo el imán, la situación es análoga, puesto que el valor del campo magnético en la espira también cambiará y esto provocará una variación del flujo magnético en la espira, lo que induce una corriente en la espira.
- 19. Cuando un imán se acerca a una espira se genera en ella una fuerza electromotriz. Razona cómo cambiaría esa fuerza electromotriz si:
 - a) El imán se alejara de la espira.
 - b) Se invirtieran los polos del imán.
 - c) El imán se mantuviera fijo.
 - a) Se genera una fuerza electromotriz del mismo valor, pero la corriente en la espira circularía en sentido opuesto al primer caso, pues la variación del flujo magnético sobre la espira sería opuesta al caso mencionado en el enunciado.
 - b) De nuevo se genera una fuerza electromotriz del mismo valor, pero la corriente en la espira circularía de nuevo en sentido opuesto al primer caso recogido en el enunciado.
 - c) Si el imán se mantiene fijo, no circularía corriente por la espira, pues entonces el valor del campo magnético sobre la espira no cambiaría, el flujo magnético sobre la espira sería constante y entonces no se induce corriente en la espira.
- 20. Una espira está situada en el plano XY y es atravesada por un campo magnético constante en la dirección del eje Z. Se induce una fuerza electromotriz:
 - a) Si la espira se mueve en el plano XY.
 - b) Si la espira gira alrededor de un eje perpendicular a la espira.
 - c) Si se anula gradualmente el campo.
 - a) No, pues en este caso no varía el valor de la superficie expuesta al campo magnético y el flujo magnético que atraviesa la espira es constante, por lo que no se inducirá corriente en la espira.



- b) No, pues en este caso tampoco varía el valor de la superficie expuesta al campo magnético y el flujo magnético que atraviesa la espira es constante, por lo que no se inducirá corriente en la espira.
- c) Sí, pues en este caso el flujo magnético disminuye con el paso del tiempo, y entonces se induce una corriente en la espira tal que el campo que genera esta corriente inducida se opone a la variación del campo. Como el campo magnético va disminuyendo, el sentido de la corriente inducida en la espira es tal que provoca un campo magnético en la misma dirección y sentido que el campo que va anulándose.
- 21. Una espira se mueve en el plano XY donde también hay una zona con un campo magnético \vec{B} constante en dirección +Z. En la espira aparece una corriente en sentido antihorario:
 - a) Si la espira entra en la zona de \vec{B} .
 - b) Cuando sale de esa zona.
 - c) Cuando se desplaza por esa zona.

Respuesta correcta: a, b. En estos casos habrá una variación en el flujo magnético sobre la espira, y se inducirá una corriente. Cuando la espira se desplaza por esa zona, respuesta c, no hay variación de flujo magnético, puesto que no cambia ni la superficie ni el campo ni la orientación relativa.

22. Indica, razonando la respuesta, si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: «En un circuito cerrado en un instante de tiempo en el que el flujo magnético a través de dicho circuito es nulo es posible que exista fuerza electromotriz inducida».

Verdadero. Puede existir una fuerza electromotriz inducida aunque el flujo magnético sea nulo si existe una variación con el tiempo del flujo magnético. Por ejemplo, cuando una espira gira en un campo magnético y en un instante determinado el plano de la espira es paralelo a la dirección del campo magnético. En ese momento justo, el flujo magnético será cero pero existe una fuerza electromotriz inducida en la espira.

- 23. Una espira circular de radio 0,20 m se coloca perpendicularmente a un campo magnético uniforme de 0,4 T. Halla la fem inducida en la espira si en 0,2 s:
 - a) Se duplica el valor del campo magnético.
 - b) Se invierte el sentido del campo magnético.
 - c) Se gira la espira 90° en torno a un eje perpendicular al campo.
 - a) La fuerza electromotriz inducida se calcula a partir de la variación del flujo magnético con el tiempo. Teniendo en cuenta que la superficie de la espira no varía y el valor del campo magnético se duplica:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta \phi_{B}}{\Delta t} = -\frac{\Delta \left(\vec{B} \cdot \vec{S}\right)}{\Delta t} = -\frac{\Delta \left(B \cdot S\right)}{\Delta t} = -\frac{\left(B_{2} \cdot S_{2} - B_{1} \cdot S_{1}\right)}{\Delta t} = -\frac{\left(B_{2} \cdot \pi \cdot R^{2} - B_{1} \cdot \pi \cdot R^{2}\right)}{\Delta t} = \\ = -\pi \cdot R^{2} \cdot \frac{\left(B_{2} - B_{1}\right)}{\Delta t} = -\pi \cdot \left(0.2 \text{ m}\right)^{2} \cdot \frac{\left(2 \cdot 0.4 \text{ T} - 0.4 \text{ T}\right)}{0.2 \text{ s}} = -0.25 \text{ V}$$

b) Si ahora se invierte el sentido del campo, podemos escribir:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta \phi_{B}}{\Delta t} = -\frac{\Delta (\vec{B} \cdot \vec{S})}{\Delta t} = -\frac{\Delta (B \cdot S)}{\Delta t} = -\frac{(B_{2} \cdot S_{2} - B_{1} \cdot S_{1})}{\Delta t} = -\frac{(B_{2} \cdot \pi \cdot R^{2} - B_{1} \cdot \pi \cdot R^{2})}{\Delta t} =$$

$$= -\pi \cdot R^{2} \cdot \frac{(-B_{1} - B_{1})}{\Delta t} = -\pi \cdot (0.2 \text{ m})^{2} \cdot \frac{(-0.4 \text{ T} - 0.4 \text{ T})}{0.2 \text{ s}} = 0.50 \text{ V}$$

En este caso la corriente inducida en la espira tiene sentido opuesto al caso anterior.

c) Si la espira se gira 90° en torno a un eje perpendicular al campo, el módulo del campo no varía, pero el producto escalar entre el vector campo magnético y el vector que define el plano de la espira sí cambia (el flujo en la posición final será nulo porque el eje de la espira y las líneas de campo son paralelos).



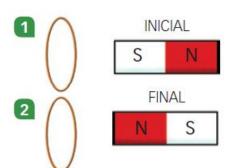
Entonces, existirá una variación en el flujo magnético entre ambos instantes y, por consiguiente, se inducirá una fuerza electromotriz en la bobina.

$$\varepsilon = -\frac{\Delta \phi_{\text{B}}}{\Delta t} = -\frac{\Delta \left(\vec{B} \cdot \vec{S}\right)}{\Delta t} = -\frac{\left(\vec{B}_2 \cdot \vec{S}_2 - \vec{B}_1 \cdot \vec{S}_1\right)}{\Delta t} = -\frac{\left(0 - B_1 \cdot \pi \cdot R^2\right)}{\Delta t} =$$

$$= -\frac{-B_1 \cdot \pi \cdot R^2}{\Delta t} = \frac{0.4 \text{ T} \cdot \pi \cdot \left(0.2 \text{ m}\right)^2}{0.2 \text{ s}} = 0.25 \text{ V}$$

En este caso la bobina gira en el mismo sentido que en el caso b y en diferente sentido que en el caso a.

- 24. Una espira de 5 cm radio está sometida inicialmente a un campo magnético de 0,4 T debido a un imán, cuyo eje es perpendicular al plano de la espira. A continuación giramos el imán 180°.
 - a) Indica el sentido de la corriente inducida mientras se gira
 - b) Calcula el valor de la fem media inducida si el giro se realiza en 0,1 s.
 - a) Inicialmente, con el imán en reposo, no existe corriente inducida en la espira, pues no hay variación del flujo magnético por la espira.

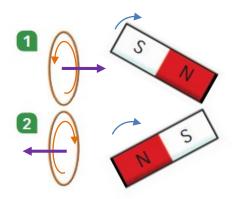


Cuando comenzamos a girar el imán, el flujo magnético varía, porque varía el producto escalar $\vec{B} \cdot \vec{S}$.

Durante la primera media vuelta se induce en la espira corriente en un sentido. A partir de la mitad del giro del imán la corriente inducida en la espira tiene el sentido opuesto.

Las líneas de campo que pasan de izquierda a derecha de la espira van disminuyendo, por lo que el campo generado por la corriente inducida en la espira tiene el sentido de izquierda a derecha. Es decir, la corriente circula en la espira en el sentido indicado.

En la segunda mitad del giro las líneas que entran en la espira por la parte derecha son cada vez más numerosas. Entonces el campo generado por la corriente inducida en la espira debe oponerse a esta dirección, y de nuevo la corriente inducida debe circular en el mismo sentido que en el caso anterior.



 Entre la posición inicial y final el campo magnético generado por el imán invierte su sentido. Si el giro se realiza en 0,1 s, el valor de la fuerza electromotriz inducida es:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta \phi_{B}}{\Delta t} = -\frac{\Delta (\vec{B} \cdot \vec{S})}{\Delta t} = -\frac{(\vec{B}_{2} \cdot \vec{S}_{2} - \vec{B}_{1} \cdot \vec{S}_{1})}{\Delta t} = -\frac{(-B_{1} \cdot S - B_{1} \cdot S)}{\Delta t} = +\frac{2 \cdot B_{1} \cdot S}{\Delta t}$$

$$= \frac{2 \cdot B_{1} \cdot \pi \cdot R^{2}}{\Delta t} = \frac{2 \cdot 0.4 \text{ T} \cdot \pi \cdot (0.05 \text{ m})^{2}}{0.1 \text{ s}} = 6.28 \cdot 10^{-2} \text{ V}$$

- 25. Un campo magnético uniforme que varía con el tiempo según la expresión: $B(t) = 3.7 \cdot \cos(8 \cdot t + \pi/4)$ (SI) atraviesa perpendicularmente una espira cuadrada de lado 60 cm.
 - a) Determina el flujo magnético que atraviesa la espira en función del tiempo.
 - b) Calcula la fem inducida en la espira y su periodo.
 - a) Como el campo magnético y la espira son perpendiculares, el flujo magnético que atraviesa la espira es:

$$\phi_{\rm B} = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S = 3.7 \cdot \cos\left(8 \cdot t + \frac{\pi}{4}\right) \cdot L^2 = 3.7 \cdot \cos\left(8 \cdot t + \frac{\pi}{4}\right) \cdot 0.6^2 = 1.33 \cdot \cos\left(8 \cdot t + \frac{\pi}{4}\right)$$
 (SI)



b) La fuerza electromotriz se calcula a partir de la variación del flujo magnético con el tiempo:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_{\rm B}}{dt} = -\frac{d\left[1,33\cdot\cos\left(8\cdot t + \frac{\pi}{4}\right)\right]}{dt} = -1,33\cdot\left(-\sin\left(8\cdot t + \frac{\pi}{4}\right)\right)\cdot 8 = 10,64\cdot\sin\left(8\cdot t + \frac{\pi}{4}\right)$$
(SI)

El periodo de giro de la espira se calcula a partir de la expresión incluida dentro de la función trigonométrica presente en la ecuación de la fuerza electromotriz en función del tiempo:

$$\varepsilon = 10,64 \cdot \text{sen}\left(8 \cdot t + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow \omega = 8 \quad (SI) \rightarrow \frac{2\pi}{T} = 8 \quad (SI) \rightarrow T = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4} \text{ s} = 0,785 \text{ s}$$

26. Una espira circular plana de 0,2 m² de área se sitúa en un campo magnético uniforme cuyo módulo varía con el tiempo según la expresión $B(t) = 1,5 \cdot \text{sen}(4 \cdot t + \pi)$ (SI).

Si la normal a su superficie de la espira forma un ángulo de 60° con la dirección del campo, ¿cuánto vale la fem inducida en la espira en el instante t = 10 s?

La fuerza electromotriz se calcula a partir de la variación del flujo magnético. En este caso el campo magnético y la normal a la superficie de la espira forman 60°. Por tanto:

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\phi_{\rm B}}{dt} = -\frac{d(\vec{B} \cdot \vec{S})}{dt} = -\frac{d(B \cdot S \cdot \cos 60^{\circ})}{dt} = -\frac{d[1, 5 \cdot \sin(4 \cdot t + \pi) \cdot 0, 2 \cdot \cos 60^{\circ}]}{dt} =$$

$$= -1, 5 \cdot 0, 2 \cdot \cos 60^{\circ} \cdot \cos(4 \cdot t + \pi) \cdot 4 = -0, 6 \cdot \cos(4 \cdot t + \pi)$$

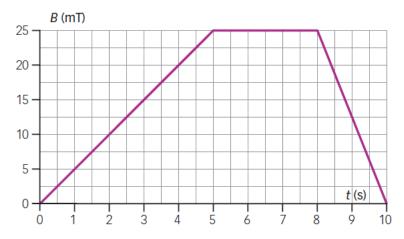
Entonces, en el instante t = 10 s tenemos:

$$\varepsilon(10 \text{ s}) = -0.6 \cdot \cos(4 \cdot 10 + \pi) = -0.40 \text{ V}$$

Se ha tenido en cuenta que la cantidad que queda dentro de la función coseno es:

$$\cos(40+\pi) = \cos(40+\pi-2\pi\cdot6) = \cos(5,44248) = 0,667$$

27. Una bobina de 2000 espiras cuadradas y 2,5 cm de lado penetra perpendicularmente en un campo magnético que varía en función del tiempo según la siguiente gráfica.



- a) Determina la ecuación que relaciona el flujo magnético con el tiempo.
- b) Calcula la fem inducida en cada uno de los intervalos.
- a) En el primer tramo el campo magnético aumenta, por lo que también irá aumentando el flujo magnético. La expresión del campo magnético en función del tiempo es:
 - Entre 0 y 5 s. Aquí el campo aumenta linealmente con el tiempo.

$$B(t) = 0 + m \cdot t$$



m es la pendiente de la recta en la gráfica. Se puede deducir así:

$$m = \frac{B_{5s} - B_{0s}}{5 - 0} = \frac{0.025 - 0}{5} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ T/s}$$

Por tanto, el campo en este intervalo de tiempo es

$$B(t) = 5 \cdot 10^{-3} \cdot t$$
 (unidades SI)

• Entre 5 y 8 s. En este caso el campo magnético no varía:

$$B(t) = 25 \cdot 10^{-3}$$
 (unidades SI)

• Entre 8 y 10 s. Ahora el campo disminuye linealmente con el tiempo.

$$B(t) = 25 \cdot 10^{-3} + k \cdot (t-8)$$

k es la pendiente de la recta en la gráfica. Se puede deducir así:

$$k = \frac{B_{10 \text{ s}} - B_{8 \text{ s}}}{10 - 8} = \frac{0 - 25 \cdot 10^{-3}}{2} = -1,25 \cdot 10^{-2} \text{ T/s}$$

Por tanto, el campo en este intervalo de tiempo es:

$$B(t) = 25 \cdot 10^{-3} - 1,25 \cdot 10^{-2} \cdot (t - 8)$$
 (unidades SI)

Para cada intervalo el flujo magnético valdrá:

• Entre 0 y 5 s. Aquí el campo aumenta linealmente con el tiempo.

$$\phi_{\rm B}(t) = 2000 \cdot B(t) \cdot S = 2000 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot t \cdot 0,025^2 = 6,25 \cdot 10^{-3} \cdot t \text{ (unidades SI)}$$

Entre 5 y 8 s. En este caso el campo magnético no varía y tampoco lo hace el flujo magnético.

$$\phi_{\rm B}(t) = 2000 \cdot B(t) \cdot S = 2000 \cdot 25 \cdot 10^{-3} \cdot 0,025^2 = 3,125 \cdot 10^{-2}$$
 Wb

• Entre 8 y 10 s. Ahora el campo disminuye linealmente con el tiempo.

$$\phi_{\rm B}(t) = 2000 \cdot B(t) \cdot S = 2000 \cdot \left[25 \cdot 10^{-3} - 1,25 \cdot 10^{-2} \cdot (t-8) \right] \cdot 0,025^{2} =$$

$$= 3,125 \cdot 10^{-2} - 1,563 \cdot 10^{-2} \cdot (t-8) \text{ (unidades SI)}$$

- b) La fem inducida se calcula a partir de la derivada del flujo magnético con respecto al tiempo:
 - Entre 0 y 5 s. Aquí el campo aumenta linealmente con el tiempo.

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_{B}(t)}{dt} = -\frac{d(6.25 \cdot 10^{-3} \cdot t)}{dt} = -6.25 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

 Entre 5 y 8 s. En este caso el campo magnético no varía y tampoco lo hace el flujo magnético. Por tanto, la fem inducida es cero.

$$\epsilon = 0 V$$

• Entre 8 y 10 s. Ahora el campo disminuye linealmente con el tiempo.

$$\epsilon = -\frac{d\phi_{\rm B}(t)}{dt} = -\frac{d\Big[3,125\cdot10^{-2} - 1,563\cdot10^{-2}\cdot(t-8)\Big]}{dt} = -\Big(-1,563\cdot10^{-2}\Big) = 1,56\cdot10^{-2} \text{ V}$$

- 28. Se coloca una espira circular de 3 cm de radio en un campo magnético constante de 0,5 T que forma un ángulo de 60° respecto de la normal a la espira.
 - a) Calcula el flujo magnético que atraviesa la espira. ¿Se induce una fuerza electromotriz en la espira?
 - b) En un momento determinado el campo magnético disminuye linealmente hasta 0 T durante 100 ms. Calcula la fuerza electromotriz inducida en la espira.
 - a) El flujo magnético viene dado por la siguiente expresión:

$$\phi_{\rm R} = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos 60^{\circ} = 0.5 \text{ T} \cdot \pi \cdot (0.03 \text{ m})^{2} \cdot \cos 60^{\circ} = 7.07 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

No se induce ninguna fuerza electromotriz en la espira porque el flujo magnético es constante.



b) Si el campo disminuye linealmente durante 100 ms, sí habrá variación en el flujo magnético y, por tanto, se inducirá una fem en la espira.

El campo magnético disminuye linealmente y se anula en 100 ms. Por tanto:

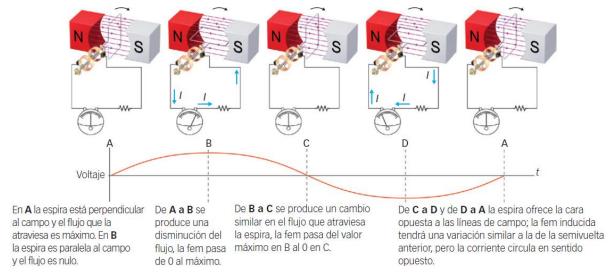
$$B(t) = B_0 + \frac{B_{\text{Final}} - B_0}{\Delta t} \cdot t = 0.5 \text{ T} + \frac{0 - 0.5 \text{ T}}{0.1 \text{ s}} \cdot t = 0.5 \text{ T} - 5 \cdot t \text{ (unidades SI)}$$

Por tanto, la fuerza electromotriz será:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_{\text{B}}(t)}{dt} = -\frac{d(\vec{B} \cdot \vec{S})}{dt} = -\frac{d[B(t) \cdot S \cdot \cos 60^{\circ}]}{dt} = -\frac{d[(0,5-5 \cdot t) \cdot \pi \cdot 0,03^{2} \cdot \cos 60^{\circ}]}{dt} =$$

$$= 5 \cdot \pi \cdot 0,03^{2} \cdot \cos 60^{\circ} = 7,07 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

- 29. El generador de corriente alterna es un dispositivo capaz de transformar otro tipo de energía en energía eléctrica.
 - a) Describe brevemente el funcionamiento de un generador de corriente alterna. Haz un esquema.
 - b) ¿Aumenta o disminuye la fuerza electromotriz inducida si hacemos girar la espira más rápido en un alternador?
 - a) En un generador de corriente alterna el movimiento relativo entre una bobina y un imán hace que se genere corriente eléctrica. En el alternador se produce una corriente alterna, ya que en medio ciclo las cargas circulan en un sentido, y en el siguiente medio lo hacen en sentido opuesto. La ley de Faraday permite obtener la función matemática de la fem que se obtiene en el alternador. La variación del flujo magnético sobre las espiras produce la corriente eléctrica.



- b) Si hacemos girar la espira más rápido, el flujo magnético sobre la espira variará más rápidamente, y entonces su derivada también lo hará, por lo que la fuerza electromotriz inducida será más intensa.
- 30. Una espira de 2 cm de radio gira en el seno de un campo magnético de 0,12 T con un periodo de 0,02 s. Calcula:
 - a) La frecuencia de la corriente inducida en la espira.
 - b) El flujo del campo magnético a través de la espira en función del tiempo.
 - c) El valor máximo de la fuerza electromotriz inducida en la espira.
 - a) La frecuencia de la corriente inducida será la misma que la frecuencia de giro de la espira. Es decir:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,02 \text{ s}} = 50 \text{ Hz}$$



b) El flujo magnético que atraviesa la espira depende del tiempo. Si suponemos que en el instante inicial la espira está perpendicular al campo magnético:

$$\begin{split} & \phi_{\rm B} = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos\left(\omega \cdot t\right) = B \cdot S \cdot \cos\left(2\pi \cdot f \cdot t\right) = \\ & = 0.12 \, \text{T} \cdot \pi \cdot \left(0.02 \, \text{m}\right)^2 \cdot \cos\left(2\pi \cdot 50 \cdot t\right) = 1.51 \cdot 10^{-4} \cdot \cos\left(100\pi \cdot t\right) \, \, \text{(unidades SI)} \end{split}$$

c) La fuerza electromotriz se calcula a partir de la variación con el tiempo del flujo magnético sobre la espira. Es decir:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_{\rm B}(t)}{dt} = -\frac{d\left[1,51\cdot10^{-4}\cdot\cos\left(100\pi\cdot t\right)\right]}{dt} = -1,51\cdot10^{-4}\cdot100\cdot\pi\cdot\left[-\text{sen}\left(100\pi\cdot t\right)\right]$$
$$= +4,74\cdot10^{-2}\cdot\text{sen}\left(100\pi\cdot t\right) \text{ (unidades SI)}$$

Por tanto, el valor máximo de la fuerza electromotriz se alcanza cuando el seno alcanza su valor máximo, 1:

$$|\epsilon_{máx.}| = +4,74 \cdot 10^{-2} \text{ V}$$

FÍSICA EN TU VIDA

1. ¿Por qué las cuerdas de la guitarra se comportan como imanes? Explícalo con un esquema.

Porque circula corriente eléctrica por ellas y entonces producen un campo magnético alrededor de ellas, tal y como hacen otros hilos de corriente. Por eso decimos que se comportan como un imán: porque producen un campo magnético alrededor.

2. Explica cómo se genera la corriente eléctrica que llega al amplificador de una guitarra eléctrica.

Cuando se pulsa una cuerda de la guitarra, el campo magnético que produce la cuerda se convierte en un campo variable con el tiempo, y esto provoca una corriente eléctrica en la pastilla que se transmite al amplificador.

3. ¿Cómo se provoca la variación de flujo magnético que induce la corriente en una guitarra, variando la superficie o variando la intensidad del campo sobre las bobinas situadas bajo las cuerdas?

Variando la intensidad, ya que al pulsar las cuerdas de la guitarra, estas vibran y se acercan y se alejan consecutivamente a las bobinas.

4. ¿De qué tipo será la corriente inducida en el bobinado de las pastillas, continua o alterna?

Alterna, puesto que las cuerdas suben y bajan, lo que hace que el flujo magnético aumente en un semiciclo y disminuya en el semiciclo siguiente.

5. Los vecinos de personas que practican con instrumentos musicales se quejan a menudo de las molestias ocasionadas por el sonido: ¿qué soluciones se te ocurren?

Respuesta personal. Una solución en instrumentos con salida de auriculares es usarla todo lo posible. Además, otra posible solución es aislar bien las paredes de la estancia donde se practica habitualmente. Existen aislantes sonoros bastante eficientes. Y, por supuesto, no tocar a horas en los que las molestias pueden ser más acusadas, evitando las primeras horas de la mañana y las últimas del día.

