5 Sistemas de ecuaciones

INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas es uno de los fundamentos de las Matemáticas. A la hora de resolver muchos problemas reales se hace patente la necesidad de los sistemas de ecuaciones.

Los alumnos deben ser capaces de reconocer ecuaciones con dos incógnitas y obtener algunas soluciones de ellas. La obtención de sistemas equivalentes a uno dado es prioritario, ya que permite hallar la solución del sistema dado fácilmente.

Se exponen a lo largo de la unidad los métodos de resolución de sistemas: método de sustitución, método de igualación y método de reducción. Se deben indicar los pasos para resolver un sistema por cada uno de los métodos mencionados, así como señalar sus similitudes y diferencias con los otros métodos. Conviene explicar también a los alumnos que la idoneidad de cada uno de ellos depende de los coeficientes de las incógnitas.

La resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones no resulta especialmente compleja en lo que a su técnica se refiere, pero habrá que insistir en la necesidad de seguir las cuatro fases del método de resolución de problemas, ya vistas en la unidad anterior.

RESUMEN DE LA UNIDAD

 Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas x e v se expresa de la forma:

$$ax + by = k$$
$$a'x + b'y = k'$$

- Resolver un sistema es encontrar dos números que, al reemplazarlos en las dos ecuaciones, satisfagan ambas simultáneamente. Un sistema es compatible si tiene solución.
- Método de sustitución: Despejar una incógnita en una ecuación y sustituirla en la otra. Resolver la ecuación que resulta. La otra incógnita se obtiene sustituyendo el valor obtenido en cualquier ecuación. Comprobar el resultado.
- Método de igualación: Despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones. Igualar las expresiones obtenidas. Resolver la ecuación que resulta. La otra incógnita se obtiene sustituyendo el valor obtenido en cualquier ecuación. Comprobar el resultado.
- Método de reducción: Buscar un sistema equivalente donde los coeficientes de una misma incógnita sean iguales y opuestos. Restar o sumar las ecuaciones, eliminando una incógnita y resolver la ecuación. La otra incógnita se obtiene sustituyendo el valor obtenido en cualquier ecuación. Comprobar el resultado.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
Identificar sistemas de ecuaciones y sus elementos.	 Sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. Coeficientes y términos independientes. Solución de un sistema. 	 Identificación de los elementos de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas. Comprobación de las soluciones de un sistema. Sistemas compatibles.
2. Resolver sistemas mediante el método de sustitución.	Método de sustitución.	Resolución de un sistema por el método de sustitución.
3. Resolver sistemas mediante el método de igualación.	Método de igualación.	Resolución de un sistema por el método de igualación.
4. Resolver sistemas mediante el método de reducción.	Método de reducción.	 Resolución de un sistema por el método de reducción. Obtención de sistemas equivalentes.
5. Resolver problemas mediante sistemas de ecuaciones.	Planteamiento, resolución y comprobación de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.	 Resolución de problemas mediante sistemas de dos ecuaciones. Comprobación de la solución.

IDENTIFICAR SISTEMAS DE ECUACIONES Y SUS ELEMENTOS

NOMBRE: ______ FECHA: _____

Un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas** es un conjunto de dos ecuaciones de las que se busca una solución común.

$$\begin{cases} ax + by = k \\ a'x + b'y = k' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{Coeficientes de las incógnitas: } a, a', b, b' \\ \text{Términos independientes: } k, k' \end{cases}$$

EJEMPLO

1 Determina las incógnitas, los coeficientes y los términos independientes de estos sistemas.

a)
$$x-2y=7$$

 $3x-y=2$

b)
$$-2x + y = -1$$

 $x - y = 0$

- Una **solución** de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es un par de números que verifica ambas ecuaciones.
- Resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es encontrar sus soluciones.
- Si un sistema tiene solución, es decir, si se pueden encontrar dos números que cumplan las dos ecuaciones, se dice que es compatible.

EJEMPLO

Comprueba si el siguiente sistema de ecuaciones tiene como solución x = 4 e y = 1.

$$\begin{array}{cc} x + & y = 5 \\ x - 2y = 2 \end{array}$$

Veamos si la solución del enunciado verifica las dos ecuaciones del sistema.

$$x + y = 5$$

 $x - 2y = 2$ $\xrightarrow{x = 4, y = 1}$ $\xrightarrow{4 + 1}$ $= 5$ $\xrightarrow{}$ Cumple la ecuación. $\xrightarrow{}$ Cumple la ecuación.

Por tanto, x = 4 e y = 1 es una solución del sistema. El sistema es compatible.

2 Determina si x = 0 e y = -1 es solución de estos sistemas.

a)
$$3x - y = 1$$

 $x + 4y = 2$

b)
$$x + 4y = 2$$

 $3y = -3$

c)
$$x - y = 1$$

 $2x + 4y = -4$

RESOLVER SISTEMAS MEDIANTE EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

5

NOMBRE: _____ CURSO: ____ FECHA: ____

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el método de sustitución:

- a) Despejar la incógnita en una de las dos ecuaciones.
- b) Sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación.
- c) **Resolver** la ecuación con una incógnita que resulta.
- d) Sustituir el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener la otra incógnita.
- e) Comprobar que la solución obtenida verifica ambas ecuaciones.

EJEMPLO

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de sustitución.

$$\begin{aligned}
x + y &= 30 \\
x - y &= 10
\end{aligned}$$

a) Elegimos para **despejar** la incógnita x de la segunda ecuación.

$$x = 10 + y$$

b) Sustituimos esta incógnita en la primera ecuación.

$$x + y = 30$$
 $\xrightarrow{x = 10 + y}$ $(10 + y) + y = 30$

c) Resolvemos la ecuación obtenida.

$$(10 + y) + y = 30$$

$$10 + y + y = 30$$

$$10 + 2y = 30$$

$$2y = 30 - 10$$

$$y = \frac{20}{2}$$

$$v = 10$$

d) **Sustituimos** el valor y = 10 en la primera ecuación.

$$x + y = 30$$
$$x + 10 = 30$$
$$x = 20$$

e) Comprobamos la solución obtenida. Para ello hay que sustituir el par de valores (20, 10) en las dos ecuaciones.

$$x + y = 30$$

 $x - y = 10$ $\xrightarrow{x = 20, y = 10}$ $\xrightarrow{20 + 10 = 30}$ $\xrightarrow{\text{Cumple la ecuación.}}$ $\xrightarrow{\text{Cumple la ecuación.}}$

La solución del sistema es el par de valores x = 20 e y = 10.

Por tanto, el sistema de ecuaciones tiene solución, es decir, es un sistema compatible.

1 Resuelve el sistema de ecuaciones por el método de sustitución.

$$x + y = 5
 x - 2y = 2$$

a) Elegimos para despejar la incógnita y en la primera ecuación.

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \rightarrow y = 5 - x$$

b) Sustituimos esta incógnita en la segunda ecuación.

$$x - 2y = 2$$
 $\xrightarrow{y = 5 - x}$ $x - 2(5 - x) = 2$

c) Resolvemos la ecuación obtenida.

$$x =$$

d) Sustituimos el valor de x obtenido en una de las ecuaciones, por ejemplo, en la primera.

$$x + y = 5$$

$$y = y = 2$$

Solución del sistema: x =

$$y =$$

e) Comprobamos la solución del sistema.

2 Resuelve los sistemas mediante el método de sustitución y comprueba los resultados.

a)
$$x + 3y = 8$$

 $2x - y = 9$

b)
$$-x + y = 7$$

 $3x - y = 4$

3 Resuelve mediante el método de sustitución y comprueba la solución del siguiente sistema.

$$\frac{3x-1}{5} + 2y = 1$$
$$y + \frac{3x}{2} = 2$$

a) Sacamos común denominador.

$$\frac{3x - 1}{5} + \frac{5 \cdot 2y}{5} = \frac{5 \cdot 1}{5}$$
$$\frac{2 \cdot y}{2} + \frac{3x}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2}$$

b) Quitamos los denominadores.

$$\frac{3x-1}{\mathcal{B}} + \frac{10y}{\mathcal{B}} = \frac{5}{\mathcal{B}}$$

$$\frac{2y}{2} + \frac{3x}{2} = \frac{4}{2}$$

De esta manera obtenemos:

$$3x - 1 + 10y = 5$$
$$2y + 3x = 4$$

Ahora resuélvelo tal y como has hecho en ejercicios anteriores. No olvides comprobar la solución.

4 Resuelve mediante el método de sustitución y comprueba el siguiente sistema.

$$\begin{cases} \frac{x-2}{3} + y = 4 \\ x + \frac{y}{3} = 6 \end{cases}$$

5

OBJETIVO 3

RESOLVER SISTEMAS MEDIANTE EL MÉTODO DE IGUALACIÓN

NOMBRE: ______ FECHA: _____

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el método de igualación:

- a) Despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones.
- b) Igualar las expresiones obtenidas.
- c) Resolver la ecuación de una incógnita que resulta.
- d) Sustituir el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener la otra incógnita.
- e) Comprobar la solución obtenida.

EJEMPLO

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de igualación.

$$2x - y = -1$$
$$3x + y = 11$$

a) Elegimos para **despejar** la incógnita y de las dos ecuaciones.

$$2x + 1 = y$$

$$11 - 3x = y$$

b) Igualamos las expresiones obtenidas.

$$2x + 1 = 11 - 3x$$

c) Resolvemos la ecuación obtenida.

$$2x + 1 = 11 - 3x$$
$$2x + 3x = 11 - 1$$
$$5x = 10$$
$$x = 2$$

d) **Sustituimos** el valor x = 2 en cualquiera de las ecuaciones. Elegimos la segunda.

$$3x + y = 11$$
$$3 \cdot 2 + y = 11$$
$$6 + y = 11$$
$$y = 5$$

e) Comprobamos la solución obtenida.

Para ello hay que sustituir el par de valores (2, 5) en las dos ecuaciones.

La solución del sistema es el par de valores x = 2 e y = 5.

Por tanto, el sistema de ecuaciones tiene solución, es decir, es un sistema compatible.

1 Resuelve el sistema mediante el método de igualación y comprueba la solución.

$$\begin{aligned}
x + y &= 77 \\
x - y &= 2
\end{aligned}$$

a) Despejamos la misma incógnita en las dos ecuaciones:

$$x + y = 77$$
 \rightarrow $x - y = 2$ \rightarrow

- b) Igualamos las ecuaciones obtenidas.
- c) Resolvemos la ecuación de una incógnita obtenida.
- d) Sustituimos el valor de una de las incógnitas en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema.
- e) Comprobamos la solución.

2 Resuelve los siguientes sistemas mediante el método de igualación y comprueba los resultados.

a)
$$x + 2y = 4$$

 $2x - 4y = 0$

b)
$$2x + 5y = 10$$

 $4x + 10y = 20$

3 Resuelve mediante el método de igualación y comprueba la solución del siguiente sistema de ecuaciones con fracciones.

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 4\\ x + y = 10 \end{cases}$$

a) Reducimos a común denominador.

$$\frac{3x}{\cancel{6}} + \frac{2y}{\cancel{6}} = \frac{24}{\cancel{6}}$$
$$x + y = 10$$

b) Quitamos los denominadores.

$$3x + 2y = 24$$
$$x + y = 10$$

Ahora resuélvelo tal y como has hecho en ejercicios anteriores. No olvides comprobar la solución.

4 Resuelve mediante el método de igualación y comprueba el siguiente sistema.

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 6$$

$$\frac{x}{3} + \frac{2y}{9} = 6$$

5

OBJETIVO 4

RESOLVER SISTEMAS MEDIANTE EL MÉTODO DE REDUCCIÓN

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el método de reducción:

- a) **Buscar un sistema equivalente** donde los coeficientes de una misma incógnita sean iguales u opuestos.
- b) Restar o sumar las dos ecuaciones obtenidas, eliminando así una incógnita.
- c) Resolver la ecuación que resulta.
- d) Sustituir el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener la otra incógnita.
- e) Comprobar la solución obtenida.

EJEMPLO

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de reducción.

$$x + 2y = 25$$

 $2x + 3y = 40$

a) **Obtenemos** un sistema equivalente.

Elegimos una incógnita en las dos ecuaciones, en este caso x.

Multiplicamos la primera ecuación por 2.

$$2(x + 2y = 25) 2x + 3y = 40$$

Ahora el sistema equivalente es:

$$2x + 4y = 50$$
$$2x + 3y = 40$$

b) **Restamos** las dos ecuaciones del sistema para eliminar la x.

$$\begin{array}{ccc}
2x + 4y = 50 \\
- & (2x + 3x = 40)
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{c}
2x + 4y = 50 \\
-2x - 3y = -40 \\
y = 10
\end{array}$$

c) Resolvemos la ecuación de una incógnita que resulta.

$$y = 10$$

d) **Sustituimos** el valor obtenido en una de las dos ecuaciones del sistema, en este caso en la primera ecuación.

$$x + 2y = 25$$
$$x + 2 \cdot 10 = 25$$
$$x = 5$$

e) Comprobamos el resultado.

$$\begin{array}{c} x + 2y = 25 \\ 2x + 3y = 40 \end{array} \} \xrightarrow{x = 5, y = 10} \begin{array}{c} 5 + 2 \cdot 10 = 25 \\ 2 \cdot 5 + 3 \cdot 10 = 40 \end{array} \} \xrightarrow{25 = 25}$$

La solución del sistema es el par de valores x = 5 e y = 10.

Por tanto, el sistema de ecuaciones tiene solución, es decir, es un sistema compatible.

5

1 Resuelve el siguiente sistema por el método de reducción y comprueba el resultado.

$$3x - 2y = -10 4x + 5y = 140$$

a) Obtenemos un sistema equivalente. Elegimos una incógnita, por ejemplo la y.

Multiplicamos la primera ecuación por 5 y la segunda ecuación por 2.

$$5(3x - 2y = -10)$$

$$2(4x + 5y = 140)$$

$$15x - 10y = -50$$

$$8x + 10y = 280$$
Sistema equivalente.

b) Sumamos las dos ecuaciones para eliminar la y.

$$\begin{array}{r}
 15x - \cancel{10}y = -50 \\
 + 8x + \cancel{10}y = 280 \\
 \hline
 23x = 230
 \end{array}$$

c) Resolvemos la ecuación obtenida.

$$x =$$

- d) Sustituimos el valor obtenido en cualquiera de las ecuaciones del sistema y obtenemos el valor de *y*.
- e) Comprobamos la solución.
- 2 Resuelve por el método de reducción el sistema y comprueba el resultado.

$$3x + 2y = 26$$
$$2x - 3y = -13$$

Elegimos una incógnita:

¿Por qué número tenemos que multiplicar las ecuaciones para que esa incógnita desaparezca al sumarlas?

RESOLVER PROBLEMAS MEDIANTE SISTEMAS DE ECUACIONES

Para **resolver un problema** mediante un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, hay que realizar los siguientes pasos.

- a) Comprender el problema.
- b) Plantear las ecuaciones y formar el sistema de ecuaciones.
- c) Resolver el sistema de ecuaciones, mediante cualquiera de los tres métodos.
- d) **Comprobar** que la solución cumple las condiciones del enunciado.

EJEMPLO

La suma de las edades de dos hermanos es 29 y, dentro de 8 años, la edad del mayor será el doble que la edad del menor. ¿Cuántos años tiene cada hermano?

- a) Leemos el problema las veces que sea necesario hasta comprender su enunciado.
- b) Planteamos las ecuaciones y formamos el sistema.
 - Elegimos las incógnitas: x = edad del hermano mayory = edad del hermano menor
 - Planteamos el problema:

	HOY	DENTRO DE 8 AÑOS
Hermano mayor	X	 <i>x</i> + 8
Hermano menor	У	 <i>y</i> + 8
	x + y = 29	x + 8 = 2(y + 8)

Las dos edades suman 29.

La edad del mayor será el doble de la del menor.

- Formamos el sistema de ecuaciones: x + y = 29x + 8 = 2(y + 8)
- c) Resolvemos el sistema de ecuaciones. Eligiendo el método de sustitución, despejamos *x* en la primera ecuación y sustituimos en la segunda.

$$x = 29 - y \rightarrow (29 - y) + 8 = 2(y + 8)$$

 $29 - y + 8 = 2y + 16$
 $29 + 8 - 16 = 2y + y \rightarrow 21 = 3y \rightarrow y = 7$

Sustituimos y = 7 en la primera ecuación: $x + 7 = 29 \rightarrow x = 29 - 7 = 22$

Por tanto: x = 22 años tiene el hermano mayor.

y = 7 años tiene el hermano menor.

d) Comprobamos que la solución cumple las condiciones del enunciado: sustituimos los valores obtenidos de x e y (x = 22 e y = 7) en las dos ecuaciones.

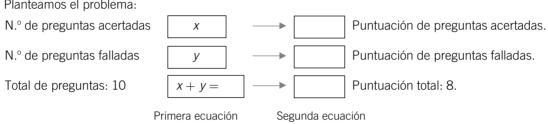
$$\begin{array}{c} x + y = 29 \\ x + 8 = 2(y + 8) \end{array} \xrightarrow{x = 22, y = 7} \begin{array}{c} 22 + 7 = 29 \\ 22 + 8 = 2 \cdot (7 + 8) \end{array} \rightarrow 30 = 14 + 16 \rightarrow 30 = 30$$

Por tanto, x = 22 e y = 7 es solución del problema.

- 1 Un alumno realiza un examen de diez preguntas. Por cada pregunta acertada le dan 2 puntos y por cada pregunta que falla le quitan 1 punto. Sabiendo que la calificación final fue de 8 puntos, ¿cuántos aciertos y fallos tuvo?
 - a) Leemos despacio el problema.
 - b) Planteamos las ecuaciones y formamos el sistema.

•	Elegimos las incógnitas:	<i>X</i> =

• Planteamos el j	problema:
-------------------	-----------



• Formamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = \square \\ \square \end{cases}$$

c) Ahora resolvemos el sistema. Elegimos el método de resolución más adecuado.

d) Comprobamos el resultado.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

- 2 En un hotel hay 120 habitaciones dobles e individuales. Si el número total de camas es 195, ¿cuántas habitaciones hay de cada tipo?
 - a) Leemos despacio el problema.
 - b) Planteamos las ecuaciones y formamos el sistema.
 - Elegimos las incógnitas: $x = \dots$
 - Planteamos el problema:

Habitaciones dobles x Camas en habitaciones dobles.

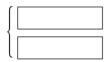
Habitaciones individuales y Camas en habitaciones individuales.

Total de habitaciones: 120 Total de camas: 195.

Primera ecuación Segunda ecuación

 $y = \dots$

• Formamos el sistema de ecuaciones:



c) Elegimos un método de resolución y resolvemos el problema.

d) Comprobamos el resultado.

	_
_	
_	1
•	J

3 Calcula dos números cuya suma es 10 y su diferencia es 6.

4 En un corral hay 25 ovejas y gallinas y contando las patas hay 80 en total. ¿Cuántas ovejas y gallinas son?

5 Paloma tiene monedas de 2 € y 1 €. Sabiendo que tiene 20 monedas y que el valor de todas es 33 €, calcula el número de monedas que tiene de cada tipo.

	MONEDAS	VALOR DE LAS MONEDAS
De 1 €		
De 2 €		
Total de monedas: 20		Valor total: 33 €.