2 Divisibilidad

INTRODUCCIÓN

El concepto de divisibilidad requiere dominar la multiplicación, división y potenciación de números naturales. Es fundamental dedicar el tiempo necesario a la práctica de la descomposición de un número en factores primos, aplicando los criterios de divisibilidad explicados y aprendiendo a distinguir entre números primos y compuestos.

El empleo de la técnica de descomposición en factores primos de un número dado nos permite obtener los múltiplos y divisores de dicho número. El cálculo del máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de varios números será el paso siguiente. Este proceso no resultará complicado, pues se trata de aplicar, paso a paso, cada uno de los conceptos vistos durante la unidad.

Todos los conceptos que se tratan en la unidad son de gran utilidad, ya que nos sirven para transmitir e interpretar informaciones relacionadas con el entorno: número de baldosas necesarias para enlosar una habitación; cómo repartir una cantidad de litros en garrafas de diferente capacidad...

Al resolver problemas de la vida real, los alumnos aplicarán de forma práctica los conceptos explicados en la unidad, por lo que es fundamental que los entiendan y practiquen.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Un número natural a es múltiplo de otro b si la división a : b es exacta. Se dice también que b es divisor de a y que a es divisible por b.
- Un número es *divisible por 2* si acaba en 0 o cifra par. Es *divisible por 3* cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 3. Es *divisible por 5* cuando acaba en 0 o 5. Y es *divisible por 10* cuando acaba en 0.
- Número primo es aquel que solo es divisible por él mismo y por la unidad. A los números que no son primos se les llama compuestos.
- La descomposición en factores primos permite expresar un número como producto de varios números primos elevados a potencias.
- El máximo común divisor (m.c.d.) de dos números es el mayor de los divisores comunes de ambos.
 Se obtiene descomponiendo cada número en producto de factores primos y multiplicando los factores comunes elevados al menor exponente.
- El mínimo común múltiplo (m.c.m.) de dos números es el menor de los múltiplos comunes. Se obtiene descomponiendo cada número en producto de factores primos y multiplicando los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
Identificar los múltiplos y divisores de un número.	Cálculo de los múltiplos y divisores de un número.Relación de divisibilidad.	Cálculo de los múltiplos y divisores de un número.
2. Comprender y aplicar los criterios de divisibilidad.	Criterios de divisibilidad por 2, 3, 5 y 10.	 Aplicación de los criterios de divisibilidad. Expresión en forma de tabla de estos criterios.
3. Diferenciar entre número primo y número compuesto. Descomposición en factores primos.	 Números primos y compuestos. Descomposición en factores primos. 	 Identificación de números primos y compuestos. Relación de divisibilidad entre dos números. Escritura de un número como producto de factores primos
4. Obtener múltiplos y divisores comunes de varios números.	 Obtención de los múltiplos y divisores comunes de varios números. Uso del m.c.d. y el m.c.m. en la resolución de problemas. 	 Cálculo de los divisores y múltiplos comunes de varios números. Aplicación de los conceptos estudiados a problemas cotidianos.

OBJETIVO 1

IDENTIFICAR LOS MÚLTIPLOS Y DIVISORES DE UN NÚMERO

NOMBRE:	CURSO:	FECHA:

Los **múltiplos** de un número son aquellos que se obtienen multiplicando dicho número por 1, 2, 3, 4, 5... es decir, por los números naturales.

Múltiplos de 4 — 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28...

EJEMPLO

En una tienda de deportes las pelotas de tenis se venden en botes de 3 unidades. ¿Cuántas pelotas puedo comprar?

3 pelotas 6 pelotas 9 pelotas 12 pelotas 15 pelotas .

 $3 \cdot 1 = 3$ $3 \cdot 2 = 6$ $3 \cdot 3 = 9$ $3 \cdot 4 = 12$ $3 \cdot 5 = 15$...

Se pueden comprar 3, 6, 9, 12, 15... pelotas.

Los números 3, 6, 9, 12, 15... son múltiplos de 3.

1 Fíjate en la siguiente secuencia y complétala.

- 3 es múltiplo de 3 porque 3 = $3 \cdot 1$
- 6 es múltiplo de 3 porque 6 = $3 \cdot 2$
- 9 es múltiplo de 3 porque 9 = $3 \cdot 3$
- 12 es múltiplo de 3 porque 12 $= 3 \cdot 4$
- 15 es múltiplo de 3 porque 15 = $3 \cdot \dots = 3 \cdot \dots$
- es múltiplo de 3 porque = $3 \cdot$
- ..21 es múltiplo de 3 porque ... = $3 \cdot ...$
- es múltiplo de 3 porque = 3 ·
- es múltiplo de 3 porque = 3 ·
- es múltiplo de 3 porque = $3 \cdot 10$

2 Completa las siguientes tablas.

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1				4						
3										
5							35			
7		14								70
9										

Son números

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2										
4								32		
6				24						
8		16								
10									90	

- 3 Escribe los números que faltan (en algunos apartados pueden existir varias soluciones).
 - a) 28 es múltiplo de 4 porque 28 = 4 \cdot
 - b) 35 es múltiplo de porque = \cdot 7
 - c) es múltiplo de porque =
 - d) es múltiplo de 8 porque = $8 \cdot \dots$
 - e) 30 es múltiplo de 10 porque 30 = 10 ·
 - f) 54 es múltiplo de porque = \cdot
- 4 Halla mentalmente cuatro múltiplos de:
 - a) 3

c) 9

e) 6

b) 5

d) 11

f) 8

- 5 Escribe los números que sean:
 - a) Múltiplos de 3 menores que 36.
 - b) Múltiplos de 4 menores que 60.
 - c) Múltiplos de 100 menores que 1.000.
 - d) Múltiplos de 7 que estén comprendidos entre 30 y 90.
- 6 Juan acude a unos grandes almacenes y observa que algunos artículos se venden de la siguiente forma.
 - Las cintas de vídeo en paquetes de 3 unidades.
 - Los lápices en bolsas de 2 unidades.
 - Los disquetes en cajas de 10 unidades.
 - Los CD en grupos de 5 unidades.

¿Cuántas unidades de cada artículo podríamos comprar?

Una división exacta es aquella en la que al dividir dos números entre sí su resto es cero.

Los divisores de un número son los que dividen dicho número un número exacto de veces.

6 y 8 son divisores de 24 porque dividen exactamente a 24.

EJEMPLO

Quiero guardar 18 lapiceros en bolsas, de modo que cada una de ellas contenga la misma cantidad de lapiceros sin que sobre ninguno. Tengo que ordenarlos y agruparlos de las siguientes maneras.



18 <u>1</u> 08 18 0



18 2



18 3

1 bolsa de 18 lapiceros

2 bolsas de 9 lapiceros

3 bolsas de 6 lapiceros







18 9



18 <u>18</u> 0 1

6 bolsas de 3 lapiceros

9 bolsas de 2 lapiceros

18 bolsas de 1 lapicero

- Los números 1, 2, 3, 6, 9, 18 son divisores de 18.
- Los lapiceros están agrupados en bolsas con igual cantidad de ellos.
- La división es exacta, no sobra nada:
 - -1 es divisor de 18 porque 18: 1 = 18 y el resto es 0.
 - -2 es divisor de 18 porque 18 : 2 = 9 y el resto es 0.
 - -3 es divisor de 18 porque 18: 3 = 6 y el resto es 0.
 - -6 es divisor de 18 porque 18: 6 = 3 y el resto es 0.
 - -9 es divisor de 18 porque 18: 9 = 2 y el resto es 0.
 - -18 es divisor de 18 porque 18:18=1 y el resto es 0.

	12 : 1	12 : 2	12 : 3	12 : 4	12 : 5	12 : 6	12 : 7	12 : 8	12 : 9	12 : 10	12 : 11	12 : 12
División												
Cociente												
Resto												

8 Tacha aquellos números que no sean:

Divisores de 5 = 1, 3, 5

Divisores de 25 = 1, 3, 5, 10, 20, 25

Divisores de 9 = 1, 2, 3, 6, 9

Divisores de 48 = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 16, 20, 24, 30, 45, 48

Divisores de 11 = 1, 3, 9, 11 Divisores de 100 = 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 40, 50, 60, 75, 90, 100

9 Indica si son verdaderas o falsas las afirmaciones y razona tu respuesta. El número 15 es:

a) Múltiplo de 5 V o F porque 5 · =

b) Divisor de 10 V o F porque

c) Múltiplo de 6 V o F porque

d) Divisor de 45 V o F porque

10 Halla todos los divisores de:

a) 18

d) 20

b) 22

e) 16

c) 15

f) 14

Para calcular todos los divisores de un número lo dividimos entre los números naturales menores e iguales que él. Los números que hacen que la **división** sea **exacta** son sus divisores.

En la clase de Educación Física hay 24 alumnos. ¿De cuántas maneras se podrán formar grupos iguales de alumnos sin que sobre ninguno? Razona tu respuesta.

12 Completa con la palabra adecuada, múltiplo o divisor.

a) 25 es de 5	d) 11 es de 33
b) 60 es de 120	e) 100 es de 25
c) 16 es de 8	f) 7 es de 63

Múltiplo y **divisor** son dos conceptos relacionados entre sí. En una división exacta de dos números existe una relación llamada *divisibilidad*.

- El número mayor es **múltiplo** del menor.
- El número menor es divisor del mayor.

- 13 Dados los números 15, 10, 1, 25, 5, 8, 20, 45, 2, 12, indica cuáles son:
 - a) Divisores de 50.
 - b) Múltiplos de 3.

Observa estos números: 9, 25, 15, 20, 48, 100, 45, 5, 2, 22, 3. Forma, al menos, 4 parejas que verifiquen la relación de divisibilidad.

COMPRENDER Y APLICAR LOS CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

NOMBRE: _____

Los criterios de divisibilidad son una serie de normas que permiten saber si un número es divisible por 2, 3, 5, 10...

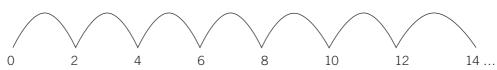
Esta es también una manera fácil de realizar divisiones exactas. A continuación, vamos a hallar estos criterios.

EJEMPLO

OBJETIVO 2

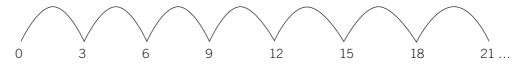


Un atleta recorre una distancia en saltos de 2 metros.



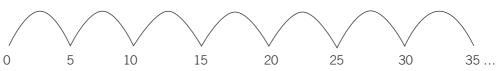
Una rana recorre una distancia en saltos de 3 metros.





Una garza recorre una distancia en saltos de 5 metros.





Un canguro recorre una distancia en saltos de 10 metros.





- Los saltos del atleta tienen algo en común: al dividirlos entre 2, la división es exacta: el resto es cero; son múltiplos de 2 y la distancia entre ellos es la misma, 2 metros.
 - Los números que acaban en 0, 2, 4, 6 y 8 son divisibles por 2. Esta es la regla de divisibilidad por 2.
- Los saltos de la rana tienen algo en común: al dividirlos entre 3, la división es exacta: el resto es cero; son múltiplos de 3 y la distancia entre ellos es la misma, 3 metros.

Observa que si sumamos sus cifras, el número obtenido es múltiplo de 3. Esta es la regla de divisibilidad por 3.

- 3, 12, 21... Sus cifras suman 3, que es múltiplo de 3.
- 6, 15, 24... Sus cifras suman 6, que es múltiplo de 3.
- 9, 18, 27... Sus cifras suman 9, que es múltiplo de 3.
- Los saltos de la garza tienen algo en común: al dividirlos entre 5, la división es exacta: el resto es cero; son múltiplos de 5 y la distancia entre ellos es la misma, 5 metros.
 - Los números que acaban en 0 o en 5 son divisibles por 5. Esta es la regla de divisibilidad por 5.
- Los saltos del canguro tienen algo en común: al dividirlos entre 10, la división es exacta: el resto es cero; son múltiplos de 10 y la distancia entre ellos es la misma, 10 metros.

Los números que acaban en 0 son divisibles por 10. Esta es la regla de divisibilidad por 10.

1 Indica cuál de los números cumple los criterios de divisibilidad de la tabla (algunos números pueden serlo por varios).

	DIVISIBLE POR 2	DIVISIBLE POR 3	DIVISIBLE POR 5	DIVISIBLE POR 10
18				
35				
40				
84				
100				
150				
1.038				
480				
1.002				
5.027				

- 2 De los números 230, 496, 520, 2.080, 2.100, 2.745 y 455, di:
 - a) ¿Cuáles son múltiplos de 2?
 - b) ¿Y múltiplos de 3?
 - c) ¿Cuáles son múltiplos de 5?
 - d) ¿Y múltiplos de 10?
- 3 Completa las cifras que faltan en cada número para que se cumpla el criterio de divisibilidad que se indica (pueden existir varias soluciones).

	DIVISIBLE POR 2	DIVISIBLE POR 3	DIVISIBLE POR 5	DIVISIBLE POR 10
36	364	369	365	360
35.02				
96			No puede ser. No acaba en 0 ni en	
1.40				
8.85				
4379	No puede ser. No acaba en 0, ni en 2			

OBJETIVO 3

NÚMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS. DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS

NOMBRE: ______ FECHA: _____

Número primo: solo tiene dos divisores, él mismo y la unidad.

Número compuesto: tiene más de dos divisores.

EJEMPLO

Los 5 jugadores de un equipo de baloncesto quieren saber de cuántas maneras pueden formar grupos iguales para realizar sus entrenamientos.

Se pueden agrupar en conjuntos de 1 y de 5 jugadores.

El número 5 solo tiene dos divisores: 5 y 1 (él mismo y la unidad). Se dice que es un número primo.

De igual manera ocurre con los 7 jugadores de un equipo de balonmano.

El número 7 solo tiene dos divisores: 7 y 1. Es un número primo.

Tengo 8 libros para colocar en una estantería. ¿Cuántos grupos iguales de ellos puedo formar?

Los puedo colocar en grupos de 1, 2, 4 y 8 libros.

El número 8 tiene varios divisores. Se dice que es un número compuesto.

1 Halla los números primos que hay desde 70 hasta 100 (escríbelos en rojo).

70	71	72					80
	81			85			
					97		100

- 2 Clasifica los números en primos o compuestos: 6, 15, 7, 24, 13, 2, 20, 11 y 10.
 - a) Números primos:
 - b) Números compuestos:
- 3 Un equipo de fútbol tiene 11 jugadores.
 - a) ¿De cuántas maneras se pueden colocar formando grupos iguales de jugadores?
 - b) Si se une al entrenamiento otro jugador, ¿cómo se agruparían?

DIVISORES DE UN NÚMERO

- Para obtener todos los divisores de un número lo dividimos entre los números naturales menores e iguales que él, y aquellos números con los que se obtenga una **división exacta** serán sus divisores.
- Si los números son muy grandes existe una manera más sencilla de hacerlo, y consiste en **descomponer el número en producto de números primos**, y expresar sus divisores mediante la combinación de esos números (llamados **factores**).

EJEMPLO

Determina los divisores de 36.

- 1.º Descomponemos en factores primos el número 36.
 - Se coloca el número.
 - Se traza una línea vertical a su derecha.
 - Se comienza a dividir entre los sucesivos números primos: 2, 3, 5, 7...
 - Acabamos de dividir cuando el último número es un número primo (cociente 1).

36 | 2 - El primer número primo por el que es divisible 36 es 2:
$$36:2=18$$
18 | 2 - El primer número primo por el que es divisible 18 es 2: $18:2=9$
9 | 3 - El primer número primo por el que es divisible 9 es 3: $9:3=3$
3 | 3 - El primer número primo por el que es divisible 3 es 3: $3:3=1$

Podemos expresar el número 36 como producto de otros números primos:

$$36 = \ 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \ \cdot 3^2 = 4 \cdot 9$$

2.º Colocamos en fila el 1 y las potencias sucesivas del primer factor primo. En este caso sería desde 2 hasta $2^2 = 4$.

2 4

3.º Multiplicamos cada número de la fila anterior por el siguiente factor primo, 3.

1 2 4 3 6 12

4.º Multiplicamos cada número de la primera fila por la siguiente potencia de 3. En este caso sería $3^2 = 9$.

1 2 4 3 6 12 9 18 36

5.º Ordenando los números, los divisores de 36 son: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

4 Descompón el número 45 en factores primos.

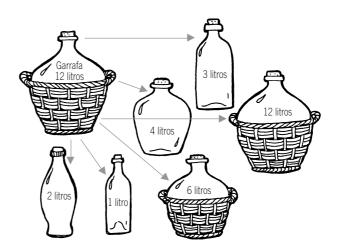
1.° 45 | 3 — El primer número primo por el que es divisible 45 es 3:
$$45:3=15$$
15 | 3 — El primer número primo por el que es divisible 15 es 3: $15:3=5$
5 — El primer número primo por el que es divisible 5 es 5: $5:5=1$

Podemos expresar el número 45 así: $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 3^2 \cdot 5 = 9 \cdot 5$.

- 2.º Colocamos en fila el 1 y las potencias sucesivas del primer factor primo. En este caso sería desde 3 hasta $3^2 = 9$.
 - 1 3 9
- 3.º Multiplicamos cada número de la fila anterior por el siguiente factor primo, 5.
 - 1 3 9 5 15 45
- 4.º Ordenando los números, los divisores de 45 son:

5 Descompón como producto de factores primos los números 50 y 60.

- 6 Quiero guardar 40 latas en cajas iguales sin que sobre ninguna. ¿De cuántas maneras puedo hacerlo?
- 7 María desea distribuir el agua de una garrafa de 12 litros en envases que contengan el mismo número de litros.
 - a) ¿Qué capacidades tendrán los recipientes?
 - b) ¿Cuántos necesitará en cada caso?



OBJETIVO 4

OBTENER DIVISORES Y MÚLTIPLOS COMUNES DE VARIOS NÚMEROS

IOMBRE:	CLIDCO	FFOLIA
IOMBRE:	CURSO:	
	001\30	I LUITA;

EJEMPLO

DIVISORES COMUNES

Juan tiene 12 locomotoras de juguete y Pedro 18 aviones. Quieren hacer grupos de manera que tengan el mismo número de juguetes en cada uno.

Juan podrá hacer los siguientes grupos.

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3$$

Vamos a calcular sus divisores:

- 1	00	n	M	T)R	۸c

- 1 grupo de 12 locomotoras
- 2 grupos de 6 locomotoras

 3 grupos de 4 locomotoras
- _____
- 4 grupos de 3 locomotoras 6 grupos de 2 locomotoras
- 12 grupos de 1 locomotora

Pedro podrá hacer los siguientes grupos.

$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9$$

Vamos a calcular sus divisores:

AVIONES

- 1 grupo de 18 aviones
- 2 grupos de 9 aviones
- 3 grupos de 6 aviones
- 6 grupos de 3 aviones
- 9 grupos de 2 aviones
- 18 grupos de 1 avión

Juan y Pedro pueden juntar sus juguetes en grupos iguales de 1, 2, 3 y 6.

1, 2, 3 y 6 son los divisores comunes de ambos números.

6 es el mayor grupo que ambos pueden formar con el mismo número de locomotoras y aviones.

6 es el mayor de los divisores comunes, y se llama máximo común divisor (m.c.d.).

1 Halla los divisores comunes de:

a) 25 y 30

c) 15 y 20

b) 9 y 12

- d) 16 y 24
- 2 Calcula el mayor de los divisores comunes de cada pareja de números del ejercicio anterior, es decir, el máximo común divisor (m.c.d.).

EJEMPLO

MÚLTIPLOS COMUNES

Ana va a nadar al polideportivo cada 2 días y Eva cada 3. ¿Cada cuánto tiempo coincidirán en el polideportivo?

Ana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Eva	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Ana va los días 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20...

Eva va los días 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21...

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20... son los múltiplos de 2.

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21... son los múltiplos de 3.

6, 12, 18... son los múltiplos comunes de 2 y 3.

6 es el menor de los múltiplos comunes, y se llama mínimo común múltiplo (m.c.m.).

3 Halla los 5 primeros múltiplos comunes de:

a) 5 y 10

c) 10 y 25

b) 4 y 6

d) 12 y 15

- 4 Calcula el menor de los múltiplos comunes de cada pareja de números del ejercicio anterior, es decir, el mínimo común múltiplo (m.c.m.).
- Un barco sale de un puerto cada 4 días, otro cada 5 y un tercero cada 7 días. ¿Cuándo vuelven a coincidir los tres barcos en el puerto?

- 6 ¿Cuál de las series está formada por múltiplos de 4? ¿Y por múltiplos de 5? ¿Y por múltiplos de 39?
 - a) 1, 4, 9, 16, 25...
 - b) 0, 5, 10, 15, 20...
 - c) 1, 8, 27, 64...
 - d) 0, 8, 16, 24, 32, 40...
 - e) 0, 39, 78, 117, 156...
- 7 Completa la tabla indicando SÍ o NO.

	DIVISIBLE POR 2	DIVISIBLE POR 3	DIVISIBLE POR 5
640			
1.876			
2.987			
345			
876			

- 8 Obtén el m.c.d. de los siguientes números.
 - a) 24 y 36
- d) 6 y 14
- g) 25 y 50
- j) 28 y 35

- b) 12 y 14
- e) 9 y 10
- h) 14 y 42
- k) 42 y 28

- c) 16 y 18
- f) 5 y 15
- i) 6 y 15
- l) 4 y 6

- 9 Obtén el m.c.m. de los siguientes números.
 - a) 24 y 36
- d) 6 y 14
- g) 25 y 50
- j) 28 y 35

- b) 12 y 14
- e) 9 y 10
- h) 14 y 42
- k) 42 y 28

- c) 16 y 18
- f) 5 y 15
- i) 6 y 15
- l) 4 y 6