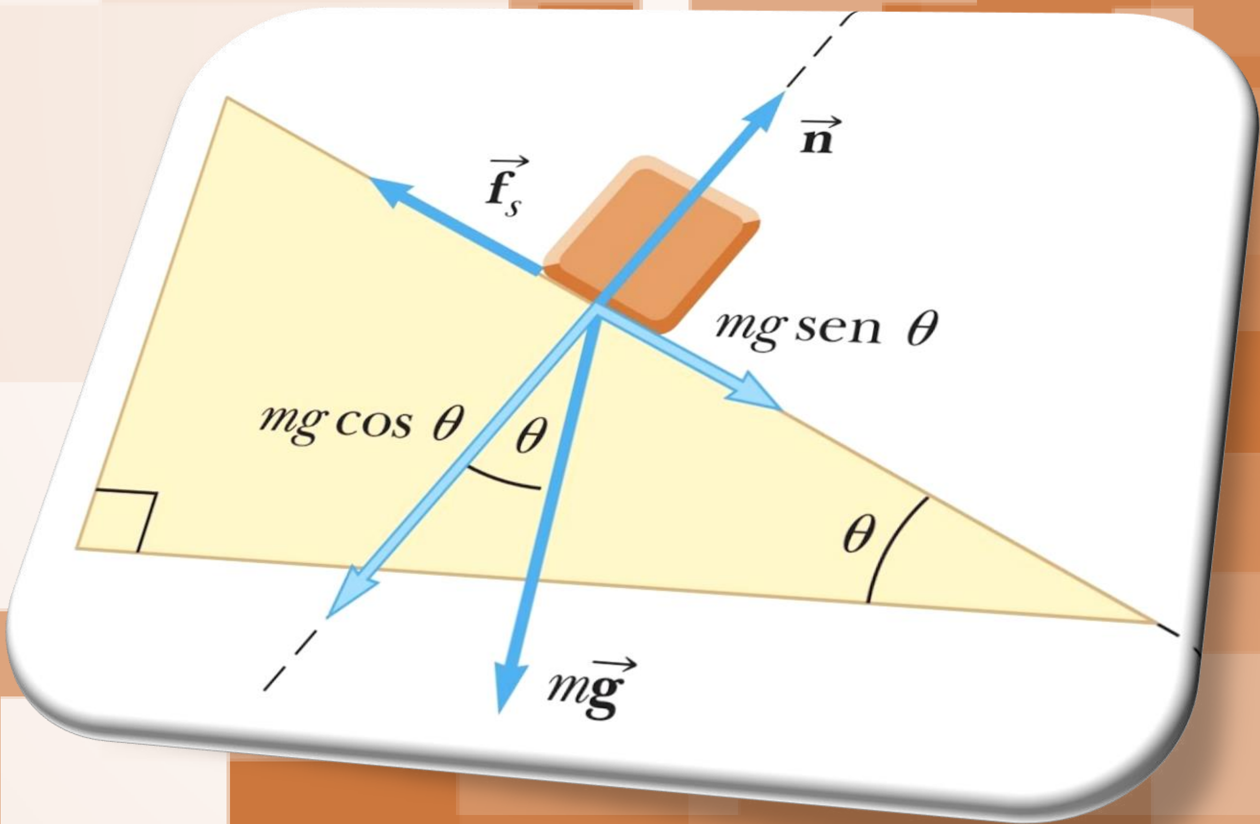
Unidad Didáctica 7

TRIGONOMETRÍA

4º ESO



© Raúl González Medina 2023

En esta unidad vas a:

1. **Medir ángulos tanto en radianes como en grados sexagesimales y cambiar de unas unidades a otras.**
2. **Conocer las razones trigonométricas de un ángulo agudo y relacionarlas.**
3. **Aprender las razones trigonométricas de los ángulos más importantes.**
4. **Reconocer las razones trigonométricas de ángulos complementarios, ángulos suplementarios, ángulos opuestos y negativos.**
5. **Calcular las razones trigonométricas conocidas una de ellas.**
6. **Reducir ángulos al primer cuadrante.**
7. **Utilizar adecuadamente, y con soltura, la calculadora para efectuar cálculos trigonométricos.**
8. **Resolver triángulos rectángulos.**
9. **Aplicar relaciones trigonométricas sencillas para el cálculo de distancias y ángulos en situaciones reales.**

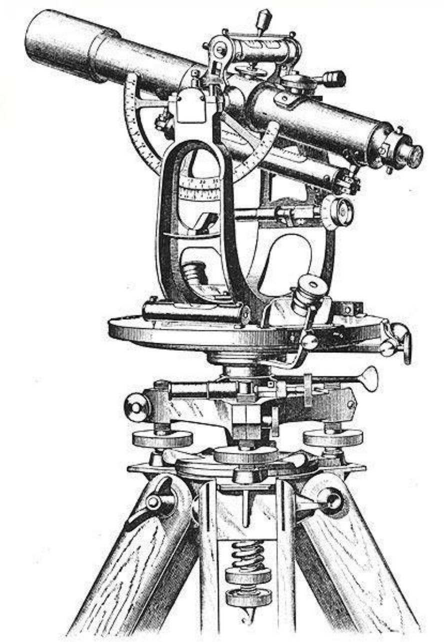
SUMARIO

7.00.- Lectura Comprensiva

La medición del mundo

Una de las historias más famosas acerca de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) nos lo presenta midiendo los ángulos del gran triángulo terrestre formado por los picos de los montes alemanes Hohenhagen, Inselsberg y Brocken, a fin de contrastar si la geometría del espacio real era o no euclídea. Pero dicha historia ha resultado controvertida y ha sido puesta en cuestión.

– El cielo estaba encapotado, la tierra, embarrada. Trepó por encima de un seto y se encontró, jadeante, sudado y cubierto de agujas de pino, delante de dos muchachas. Al preguntarle qué hacía allí, explicó, nervioso, la técnica de la triangulación: conociendo un lado y dos ángulos de un triángulo, se podían determinar los otros lados y el ángulo desconocido. Así que se escogía un triángulo en cualquier lugar de aquella tierra de Dios, se medía el lado de más fácil acceso, y se determinaban los ángulos para el tercer punto con ese aparato. Levantó el teodolito y lo giró, así asá, y fíjense ustedes, así, con dedos torpes, de un lado a otro, como si fuera la primera vez. Luego añádase una serie de tales triángulos uno junto a otro. [...]



Pero un paisaje, repuso la mayor de las dos, no era un plano.

Él la miró fijamente. Había faltado la pausa. Como si ella no precisase reflexionar.

Desde luego que no, contestó él sonriendo.

Los ángulos de un triángulo, dijo ella, sumaban en un plano ciento ochenta grados, pero no sobre una esfera. Con eso quedaba dicho todo.

Él la observó como si la viera entonces por primera vez. Ella le devolvió la mirada enarcando las cejas. Sí, dijo él. Bien. Para compensarlo, había que encoger en cierto modo los triángulos después de la medición hasta un tamaño infinitamente pequeño. En principio una sencilla operación diferencial. Aunque de esa forma... Se sentó en el suelo y sacó su bloc. De esa forma, murmuró mientras pergeñaba sus anotaciones, todavía no lo había realizado nadie. Cuando levantó la vista, se había quedado solo. [...]

Pidió por carta la mano de Johanna y fue rechazado. No tenía nada contra él, escribió ella, sólo que dudaba que la existencia a su lado fuese saludable. Sospechaba que él extraía la vida y la energía de las personas de su entorno, igual que la tierra del sol y el mar de los ríos, de que cerca de él una estaría condenada a la palidez y a la semirrealidad de una existencia de espectro. –

Pasado un tiempo, lo volvió a intentar y, esta vez, fue aceptado. «Él», uno de los protagonistas de esta historia, se llamaba Gauss y fue uno de los astrónomos, físicos y matemáticos más importantes del siglo XIX.

<u>Lee nuevamente el texto anterior y responde a las cuestiones:</u>

1.- ¿De qué famoso científico habla esta historia?

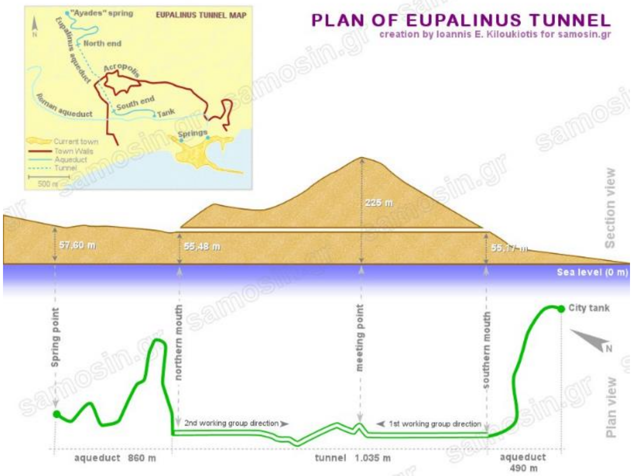
2.- ¿Por qué Johanna le rechazó la primera vez?

3.- ¿Qué es un teodolito y para que se usa?

© Raúl G.M.

7.01.- Introducción.

Una de las construcciones más notables de los antiguos griegos fue el túnel de Samos, en el que, ineludiblemente se empleó la triangulación. Se realizó en el siglo VI a.C. para llevar agua desde las fuentes del Monte Castro a la ciudad de Samos (donde nació Pitágoras), situada en aguas del mar egeo. El túnel tenía unos dos metros de diámetro y algo más de un kilómetro de longitud. Se excavó partiendo simultáneamente de sus dos extremos A y B, lo que suponía una planificación tecnológica sorprendente.



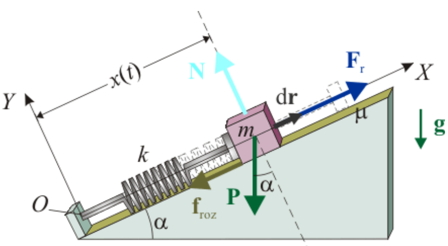
Es el primero del que se conoce el nombre del ingeniero que lo construyó, **Eupalinos de Megara**. Este ingeniero griego es hijo de Naustrophos y es famoso por su habilidad en la construcción de acueductos y túneles, así como por su conocimiento en la aplicación de técnicas matemáticas y geométricas en la construcción. El **Túnel de Eupalinos** todavía se puede visitar hoy en día y es un importante sitio arqueológico y turístico en Samos.

Se trata de una obra de un kilómetro de longitud, que trascurre bajo el monte Kastro, construida hacia el 530 a.C., durante el mandato del tirano Polícrates. El túnel se excavó manualmente en roca caliza, con una sección cuadrada de 1,75 m x 1,75 m, sirviendo de apoyo para la construcción del acueducto de la capital de la isla (que hoy es llamado Pitagoreión) y como vía de escape en caso de asedio. Se extrajeron 7.000 m^3 de roca, para lo cual se emplearon unos 4.000 esclavos y se tardó más de una década tanto para la construcción del túnel como del acueducto. El historiador Heródoto describió la obra en su Libro III.

El túnel, que estuvo funcionando durante más de mil años, fue considerado como una de las tres maravillas del Mundo Heleno, y desde luego, una de las obras maestras de la ingeniería de la antigüedad. En efecto, el problema más importante al que se tuvo que enfrentar Eupalinos fue superar los errores en la medición, de forma que los dos equipos que excavaban el túnel desde los dos extremos se encontraran. Al final solo hubo una desviación lateral de 6 m y vertical de 60 cm. A lo largo de la galería todavía se puede ver la línea de nivel que servía de guía para la excavación, que tiene una pendiente bastante regular de 0,4%. También se conservan inscripciones de los responsables de cada grupo de trabajo a lo largo del túnel. Os propongo que expliquéis cómo se podría realizar el cálculo usando únicamente triángulos rectángulos y alcanzar dicha precisión. Aunque también podéis ver alguno de los videos que os dejo en el classroom, donde se explica el procedimiento.

En esta unidad se explican y aplican los conceptos y procedimientos que conducen al concepto de razón trigonométrica, estableciéndose así los cimientos sobre los que se basa el concepto de función trigonométrica.

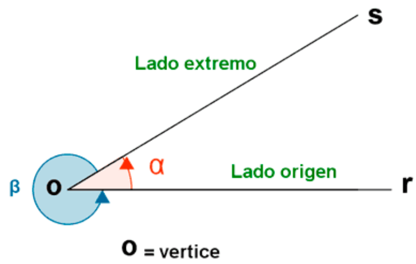
En esta unidad se trabaja aprovechando contenidos de geometría referentes a la semejanza de triángulos y se aborda **la resolución de triángulos rectángulos** remarcando de esta forma la importancia de las aplicaciones de la Trigonometría en aspectos de la vida cotidiana y en relación con otras asignaturas como la Topología, la Astronomía y sobre todo con la Física. Ejemplo de esto es la descomposición de fuerzas en un plano inclinado a la hora de calcular la aceleración del movimiento con la ayuda de la segunda ley de Newton.



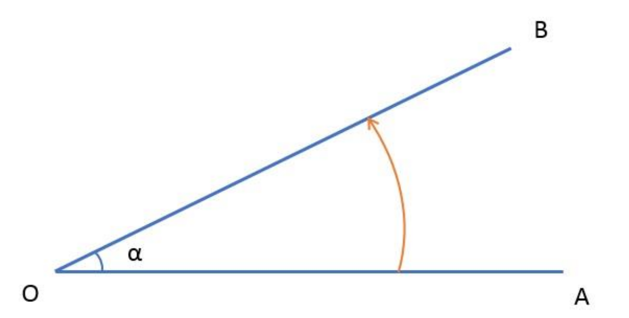
$$\sum_i \vec{F}_i = m \cdot \vec{a}$$

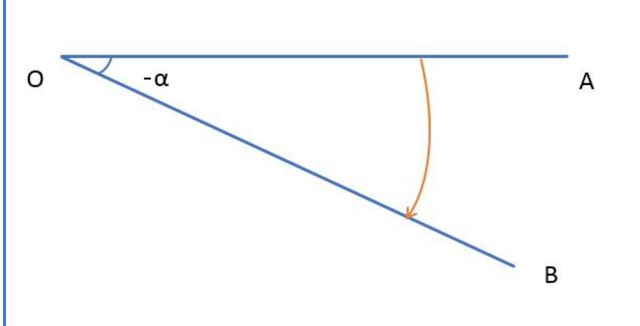
7.02.- Ángulos y sus medidas

Se le llama ángulo a la región del plano entre dos semirrectas que tienen un punto en común llamado vértice. También lo podemos definir como la amplitud de rotación o giro que describe un segmento rectilíneo en torno de uno de sus extremos tomado como vértice, desde una posición inicial hasta una posición final.



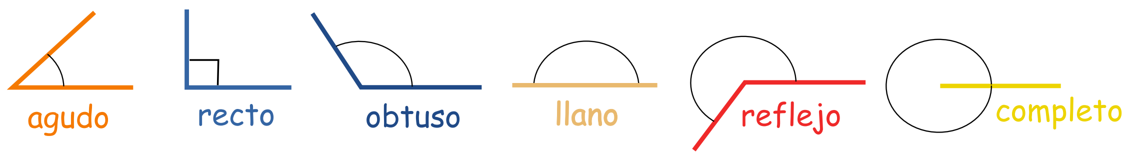
Criterio de Signos





Ángulo Positivo	Ángulo Negativo
Si la rotación es en sentido levógiro, (anti horario).	Si la rotación es en sentido dextrógiro (horario).

Según la amplitud del ángulo, los podemos clasificar en:



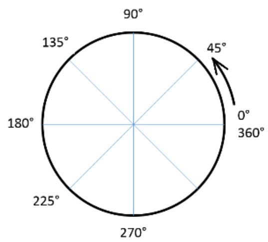
Hasta ahora, hemos utilizado el sistema sexagesimal para medir amplitudes de ángulos, o simplemente ángulos. La unidad de medida de ángulos en este sistema es el **grado**, que se expresa mediante el símbolo °, y sus submúltiplos son el **minuto** y el **segundo**.

$43° \ 23' \ 45''$ → 43 grados, 23 minutos y 45 segundos

Pues a partir de ahora podemos utilizar el sistema radial cuya unidad es el **radián** (rad)

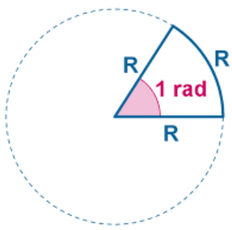
MEDIDA DE ÁNGULOS

en Grados (DEG):	***en Radianes: (RAD):***
El **grado** es el ángulo plano que teniendo vértice en el centro de un círculo, intercepta sobre la circunferencia de ese círculo un arco de longitud l.	El **radián** es el ángulo plano que teniendo su vértice en el centro de un círculo, intercepta sobre la circunferencia de ese círculo un arco de longitud igual al radio.



$$l = \frac{2\pi R}{360°}$$

Se simboliza por °



Se simboliza por rad

Para cambiar de una unidad a otra simplemente hemos de saber que 180 grados sexagesimales se corresponden con π radianes:

$$180^\circ = \pi \text{ rad}$$

Ejemplo

1.- Expresa en radianes el ángulo de 45° sexagesimales y π/3 radianes en grados.

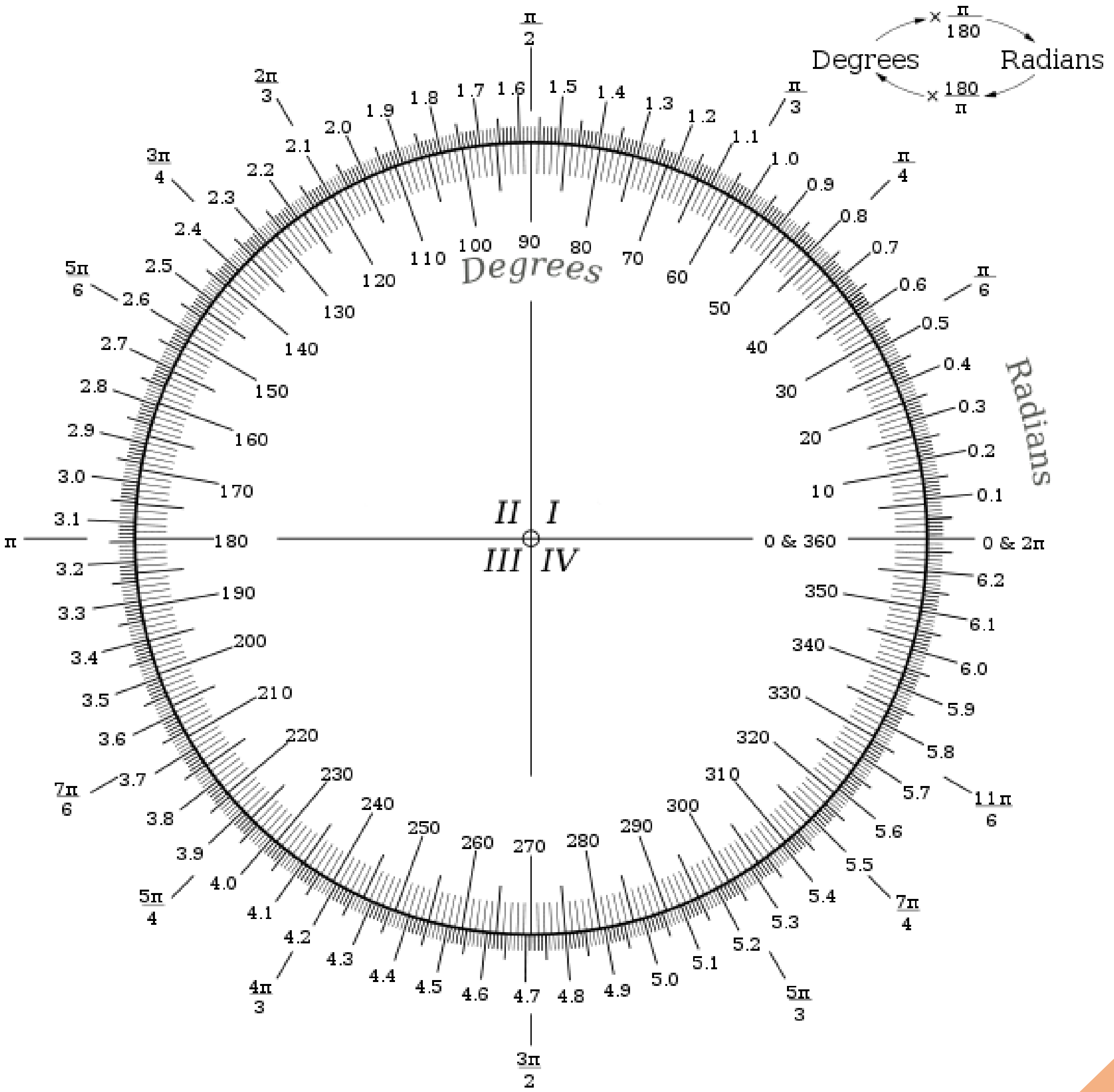
Tanto para pasar de grados a radianes y viceversa, utilizaremos una proporción o regla de 3:

$$\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{45^\circ}{x} \quad \rightarrow \quad x = \frac{45\cdot\pi}{180} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

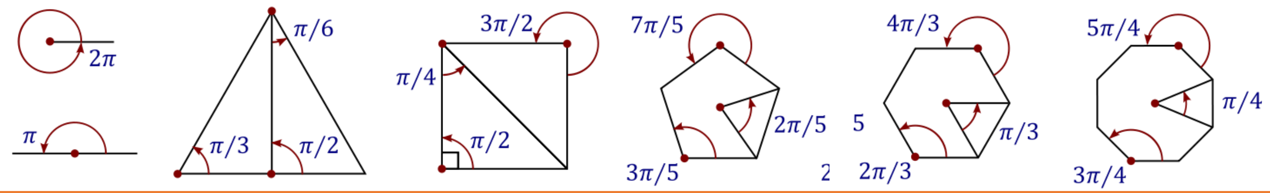
$$\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{y}{\pi/3} \quad \rightarrow \quad y = \frac{180\cdot\frac{\cancel{\pi}}{3}}{\cancel{\pi}} = \frac{180}{3} = 60^\circ$$

Por tanto 45° se corresponden con $\frac{\pi}{4}$ rad y $\frac{\pi}{3}$ rad con 60°.

Tabla de equivalencia entre grados sexagesimales y radianes																	
Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Radianes	0	π/6	π/4	π/3	π/2	2π/3	3π/4	5π/6	π	7π/6	5π/4	4π/3	3π/2	5π/3	7π/4	11π/6	2π



Ángulos en las figuras geométricas más comunes



Piensa y practica

1.- Expresa en radianes estos ángulos:

a) 180°	b) 540°	c) 900°	d) 1080°	e) 1440°

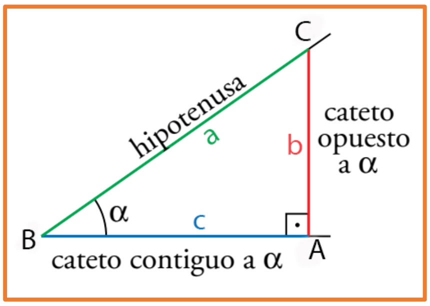
2.- Expresa en grados sexagesimales:

a) 7π rad	b) $\frac{\pi}{3}$ rad	c) $\frac{\pi}{6}$ rad	d) $\frac{3\pi}{4}$ rad	e) $\frac{2\pi}{5}$ rad

7.03.- Razones trigonométricas de un ángulo agudo.

Cuando hablamos de **razón** nos estamos refiriendo a un cociente. Como vamos a ver, las **razones trigonométricas** relacionan lados y ángulos a través de cocientes.

A partir de cualquier ángulo agudo α (menor de 90°) es posible construir un triángulo rectángulo ABC como el que puedes apreciar en la siguiente figura.



Teniendo en cuenta dicha figura geométrica y fijándonos en el ángulo α formado en el vértice B, es posible obtener una serie de razones que reciben el nombre de razones trigonométricas conocidas como **seno, coseno, tangente, cosecante y cotangente**.

Seno del ángulo α : El seno de un ángulo agudo α, es el cociente entre la longitud del cateto opuesto (b) al ángulo y la longitud de la hipotenusa (a). Se representa como sen(α) o sin(α).

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\text{Cateto Opuesto (b)}}{\text{Hipotenusa (a)}} = \frac{b}{a}$$

Coseno del ángulo α : El coseno de un ángulo agudo α, es el cociente entre la longitud del cateto contiguo (b) al ángulo α y la longitud de la hipotenusa (a). Se representa como cos(α).

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Cateto Contiguo (c)}}{\text{Hipotenusa (a)}} = \frac{c}{a}$$

Tangente del ángulo α : La tangente de un ángulo agudo α, es el cociente entre el seno y el coseno o, dicho de otra manera, el cociente entre la longitud del cateto opuesto (b) y la longitud del cateto contiguo (c). Se representa como tg(α) o tan(α).

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\dfrac{\text{Cateto Opuesto (b)}}{\text{Hipotenusa (a)}}}{\dfrac{\text{Cateto Contiguo (c)}}{\text{Hipotenusa (a)}}} = \frac{\text{Cateto Opuesto (b)} \cdot \cancel{\text{Hipotenusa (a)}}}{\text{Cateto Contiguo (c)} \cdot \cancel{\text{Hipotenusa (a)}}} = \frac{\text{Cateto Opuesto (b)}}{\text{Cateto Contiguo (c)}} = \frac{b}{c}$$

El seno y el coseno de un ángulo agudo son siempre mayores que 0, porque estamos dividiendo distancias positivas, y menores que 1, puesto que la hipotenusa siempre es mayor que cualquiera de los catetos. En el caso de la tangente puede tomar cualquier valor positivo.

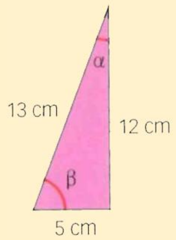
$$0 \le \operatorname{sen}(\alpha) \le 1 \qquad\qquad 0 \le \cos(\alpha) \le 1$$

El seno, el coseno y la tangente son las razones trigonométricas principales. El resto, como vamos a ver, se pueden obtener simplemente haciendo el valor inverso de estas, de ahí que se llamen usualmente razones inversas. Como se trata del inverso multiplicativo o recíproco (inverso respecto a la operación de multiplicación), también se suelen llamar razones recíprocas.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS O RECÍPROCAS		
Secante de α	Cosecante de α	Cotangente de α
Es la inversa del coseno	**Es la inversa del seno**	**Es la inversa de la tangente**
$\sec(\alpha)=\frac{1}{\cos(\alpha)}=\frac{\text{Hipotenusa (a)}}{\text{Cateto Contiguo (c)}}=\frac{a}{c}$	$\csc(\alpha)=\frac{1}{\text{sen}(\alpha)}=\frac{\text{Hipotenusa (a)}}{\text{Cateto Opuesto (b)}}=\frac{a}{b}$	$\text{cotg}\,(\alpha)=\frac{1}{\text{tg}(\alpha)}=\frac{\text{Cateto Contiguo (c)}}{\text{Cateto Opuesto (b)}}=\frac{c}{b}$

Ejemplo

2.- Halla las razones trigonométricas principales de los ángulos que aparecen en la figura:

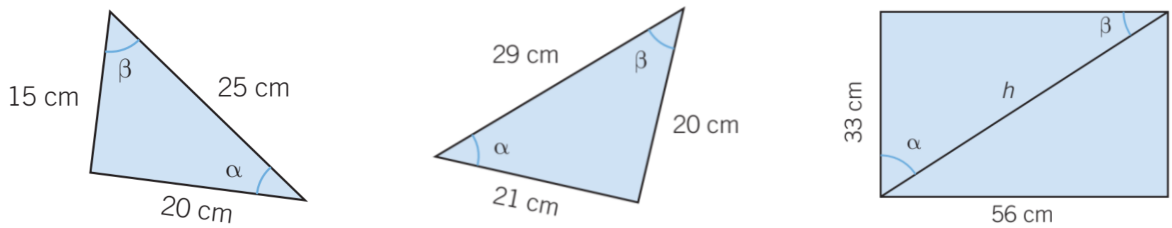


$\text{sen}(\alpha)=\frac{5}{13}=0{,}385$ $\qquad \cos(\alpha)=\frac{12}{13}=0{,}923$ $\qquad \text{tg}(\alpha)=\frac{5}{12}=0{,}417$

$\text{sen}(\beta)=\frac{12}{13}=0{,}923$ $\qquad \cos(\beta)=\frac{5}{13}=0{,}385$ $\qquad \text{tg}(\beta)=\frac{12}{5}=2{,}40$

Piensa y practica

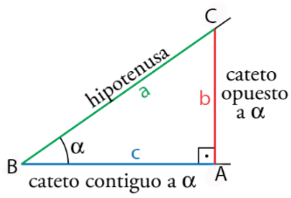
3.- Dadas las siguientes figuras, calcula en cada una de ellas las razones trigonométricas de los ángulos α y β:



7.04.- Relaciones entre las razones trigonométricas.

Los valores de **sen**, **cos** y **tg** de un mismo ángulo no son independientes, sino que están relacionados, de tal modo que conociendo uno de ellos, podemos calcular los otros dos. La expresión que los relaciona se llama identidad fundamental de la trigonometría y viene dada por:

$$\boxed{\text{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1}$$



DEMO

Sabemos que en cualquier triángulo rectángulo ocurre que: $b^2+c^2=a^2$, si dividimos todo por a^2, llegamos a:

$\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2}{a^2}$ simplificando $\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}=1$ agrupando llegamos a $\left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2=1$. Como $\frac{b}{a}$ se corresponde con el seno de α, y $\frac{c}{a}$ se corresponde con el coseno, si sustituimos $(\text{sen}\ \alpha)^2+(\cos\ \alpha)^2=1$. Cqd.

Nota: En lugar de $(\text{sen}\ \alpha)^2$ se suele escribir como $\text{sen}^2\alpha$

Si en la expresión fundamental de la trigonometría, dividimos todo por $\cos^2 \alpha$, llegamos a:

$$\operatorname{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1 \quad \rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen}^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}+\frac{\cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}=\frac{1}{\cos^2(\alpha)} \quad \rightarrow \quad \operatorname{tg}^2(\alpha)+1=\frac{1}{\cos^2(\alpha)}$$

Así que, resumiendo, las relaciones entre las razones trigonométricas son:

$$\boxed{\operatorname{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1 \qquad \operatorname{tg}(\alpha)=\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} \qquad \operatorname{tg}^2(\alpha)+1=\frac{1}{\cos^2(\alpha)}}$$

Como hemos dicho con anterioridad, estas tres expresiones las vamos a utilizar, sobre todo, para conocida una de las razones trigonométricas de un ángulo agudo, poder calcular las demás.

Ejemplo

3.- Sabiendo que cos α = 0,63, calcula las otras dos razones trigonométricas, sen α y tg α.

Si cos (α)=0,63, podemos calcular el seno, usando la identidad fundamental de la trigonometría, $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, en la que despejaremos el seno:

$$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \quad \rightarrow \quad \operatorname{sen}^2\alpha=1-\cos^2\alpha \quad \rightarrow \quad \operatorname{sen}\alpha=+\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-0{,}63^2}=0{,}78$$

Y con el seno y el coseno, ya podemos calcular la tangente:

$$\operatorname{tg}(\alpha)=\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} \quad \rightarrow \quad \operatorname{tg}(\alpha)=\frac{0{,}78}{0{,}63}=1{,}24$$

Por tanto, sen α =0,78 y tg α=1,24

4.- Sabiendo que tg α = 2, calcula las otras dos razones trigonométricas, sen α y cos α.

Si llamamos s al sen α y c al cos α, mediante la ecuación fundamental de la trigonometría y la definición de tangente, podemos plantear un sistema de ecuaciones no lineales:

$$\operatorname{tg}(\alpha)=\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} \quad \rightarrow \quad 2=\frac{s}{c} \quad \rightarrow \quad s=2c \qquad \text{y} \qquad s^2+c^2=1$$

$$\begin{cases} s=2c \\ s^2+c^2=1 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sustituyendo}} (2c)^2+c^2=1 \quad \rightarrow \quad 4c^2+c^2=1 \quad \rightarrow \quad 5c^2=1 \quad \rightarrow \quad c^2=\frac{1}{5} \quad \rightarrow \quad c=+\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Como } \cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5} \text{ y } \operatorname{sen}\alpha=2\cos\alpha \quad \rightarrow \quad \operatorname{sen}\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Por tanto, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}=0{,}45$ **y** $\operatorname{sen}\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}=0{,}89$

Piensa y practica

4.- Si el seno de un ángulo agudo **β** es 0,6, calcula las otras razones trigonométricas
5.- Si la tangente de un ángulo agudo **α** es $\frac{\sqrt{2}}{2}$ calcula tanto el seno como el coseno de dicho ángulo.
5.- Decide si existe un ángulo **α** que cumpla las siguientes condiciones: sen **α** = 0,5736 y cos **α** = 0,8192
6.- Decide si existe un ángulo **β** que cumpla las siguientes condiciones: cos **α** = 0,3240 y tg **α** = 0,4663

Además de para calcular las restantes razones trigonométricas de un ángulo agudo conocida una de ellas, también las podemos utilizar para verificar o demostrar otras. Para ello intentaremos llegar a la identidad fundamental de la trigonometría, o a otra identidad como 1=1.

Ejemplo

5.- Demuestra la siguiente expresión trigonométrica: $\dfrac{1-sen\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{1+sen\alpha}$

Si multiplicamos en cruz:

$$\frac{1-sen\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{1+sen\alpha} \quad\rightarrow\quad (1-sen\alpha)\cdot(1+sen\alpha)=\cos^2\alpha \quad\rightarrow\quad 1-sen^2\alpha=\cos^2\alpha \quad\rightarrow\quad 1=sen^2\alpha+\cos^2\alpha \quad\rightarrow\quad 1=1$$

Llegamos a la identidad fundamental de la trigonometría, por tanto quedaría demostrado, ya que 1 es igual a 1. C.q.d.

Piensa y practica

7.- Demuestra las siguientes identidades trigonométricas

a) $sen^2x-\cos^2y=sen^2y-\cos^2x$ b) $\tan^2x=sen^2x+sen^2x\cdot\tan^2x$ c) $\dfrac{sen\alpha\cdot\cos\alpha}{tg\alpha}=1-sen^2\alpha$

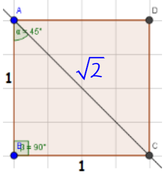
d) $(1+tg^2\alpha)\cdot\cos^2\alpha=1$ e) $\cos\alpha+\dfrac{sen^2\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{1}{\cos\alpha}$ f) $\cos^4x-sen^4x=2\cdot\cos^2x-1$

7.05.- Razones trigonométricas de los ángulos 30°, 45° y 60°.

Los triángulos rectángulos cuyos ángulos agudos son 45°, 30° o 60° aparecen con mucha frecuencia, por lo que resultan especialmente interesantes en geometría. Así que, vamos a hallar las razones trigonométricas de estos ángulos que como veremos se pueden calcular de forma exacta.

ÁNGULO de 45°

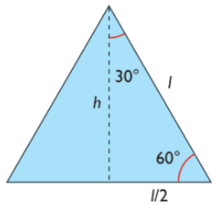
Utilizamos un cuadrado de lado unidad, en el que la diagonal, **d**, la calculamos mediante Pitágoras y vale $d=\sqrt{2}$



Aquí, tenemos que: $\begin{cases} sen\,45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ Cos\;45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ y de donde $\rightarrow$ $\tan 45^\circ=\dfrac{sen\;45}{cos\;45}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1$

ÁNGULO de 30°

Utilizaremos un triángulo equilátero de lado l, en el que calculamos su altura en función de dicho lado utilizando el teorema de Pitágoras:



$$h=\sqrt{l^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3l^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}l$$

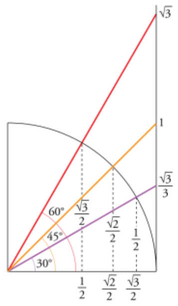
De aquí, tenemos que: $\begin{cases} sen\;30^\circ=\dfrac{l/2}{l}=\dfrac{1}{2} \\ \cos 30^\circ=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}l}{l}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ de donde $\rightarrow$ $\tan 30^\circ=\dfrac{Sen\;30^\circ}{\cos 30^\circ}=\dfrac{1/2}{\sqrt{3}/2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

ÁNGULO de 60°

De forma similar, y usando el mismo triángulo: $\begin{cases} sen\;60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}\cdot\frac{l}{2}}{l}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 60^\circ=\dfrac{l/2}{l}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ $\rightarrow$ $\tan 60^\circ=\dfrac{Sen\;60^\circ}{\cos 60^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}/2}{1/2}=\sqrt{3}$

Por tanto tenemos que: $sen\;45^\circ=\cos\;45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $sen\;30^\circ=\cos\;60^\circ=\dfrac{1}{2}$ $sen\;60^\circ=\cos\;30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

De donde podemos deducir que sí α y β son dos **ángulos complementarios**, ocurre que: $\begin{cases} sen\;\alpha=\cos\;\beta \\ \cos\;\alpha=sen\;\beta\end{cases}$



7.06.- Rezones trigonométricas de un ángulo cualquiera.

7.07.- Signo de las razones trigonométricas

7.08.- Relaciones trigonométricas entre las razones de ciertos ángulos.

7.09.- Resolución de triángulos rectángulos

1.11.- Autoevaluación

© Intergranada.com

2022