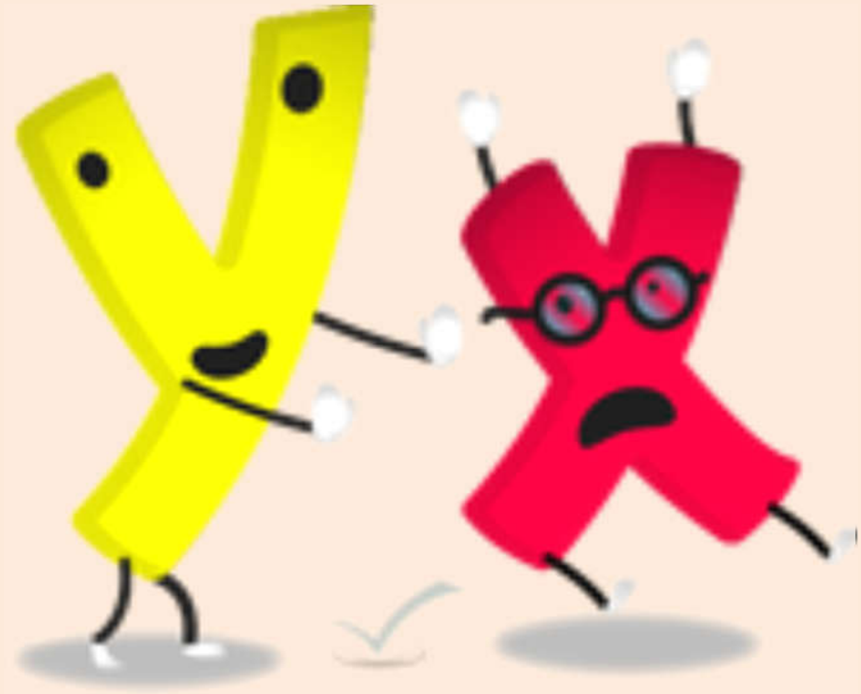
Unidad Didáctica 7: Sistemas de ecuaciones lineales

Matemáticas Académicas 3º ESO



En esta unidad vamos a:

1.- Identificar sistemas de ecuaciones y sus elementos.

2.- Saber representar una ecuación lineal en un plano cartesiano.

3.- Resolver un sistema de ecuaciones mediante alguno de los métodos.

4.- Resolver problemas sencillos con la ayuda de sistemas de ecuaciones.

Sumario

7.0.- Lectura comprensiva

Fray Luca Bartolomeo de Pacioli
1447 - 1517

En la Europa del Renacimiento, el libro de álgebra más conocido se publicó en 1494 en Italia. El nombre de la obra es *"Summa de arithmética, geométrica, proportioni et proportionalita"* del fraile, matemático, economista y profesor italiano, *Luca Pacioli*. El camino que hizo posible la *summa* había sido preparado por una generación de algebristas gracias a que el Algebra de Al-Jwarizmi ya había sido traducida al italiano para el año 1464 como muy tarde, fecha que aparece en una copia manuscrita de la colección *Plimpton* en New York. *Summa* es considerado hoy el primer libro de álgebra impreso y consiste en una impresionante recopilación de material de cuatro campos: aritmética, álgebra, geometría euclidea (muy elemental) y la contabilidad de doble entrada, que es la base de la contabilidad moderna.

La *summa* resultó ser un compendio tanto de obras que había escrito anteriormente el mismo autor, como el *"Tractatus mathematicus ad discipulos perusinos"* además de conocimientos generales de la época. La parte relativa a la aritmética trata, con mucho detalle, diversos algoritmos para multiplicar y hallar raíces cuadradas, y la sección dedicada al álgebra, las soluciones usuales de las ecuaciones lineales ($ax+b=0$) y cuadráticas ($ax^2+bx+c=0$).

Por esta época ya se utilizaban ampliamente en Italia las letras *p* y *m* para representar la suma y la resta, y Pacioli utilizó además, *co*, *ce*, *ae* para *cosa* (es decir, la incógnita), *censo* (el cuadrado de la incógnita) y *aequalis* (el cubo de la incógnita). Para la cuarta potencia usó, de manera natural, *cece* (o cuadrado del cuadrado). Pacioli creía, haciendo eco con ello de una idea que había formulado ya Omar Khayyman, que las ecuaciones cúbicas no podían ser resueltas algebraicamente. Por último, aunque sus aportaciones al álgebra tuvieron una gran importancia, la parte geométrica de la *Summa* de *Paciolo* no tuvo una especial relevancia.

Lee nuevamente el texto anterior y luego selecciona la respuesta correcta:

1.- Los siguientes enunciados son verdaderos, con excepción de:

a) El año 1494 en Italia corresponde al Renacimiento.
b) La traducción del álgebra de Al-Jwarizmi al italiano se hizo en el renacimiento.
c) "La summa", obra de Pacioli, es todo un compendio de ciencia matemática.
d) Al-Jwarizmi alcanzó su apogeo durante el renacimiento.

2.- Del contenido del escrito se puede inferir que:

a) El Renacimiento ha sido el movimiento que más aportes hizo a las matemáticas
b) Los científicos del modernismo han marcado la pauta en conocimientos matemáticos.
c) Las ciencias matemáticas siempre han estado en continuo desarrollo.
d) Al-Jwarizmi es el verdadero padre del álgebra.

7.1.- Introducción

Los escritos de los matemáticos de Babilonia incluían ya sistemas de ecuaciones relacionados con sencillos problemas cotidianos, como el que ves aquí, traducido de una tablilla de barro.

$$\left.\begin{array}{l} 1/4\ \textit{anchura}\ +\ \textit{longitud}\ =\ 7\ \textit{manos} \\ \textit{longitud}\ +\ \textit{anchura}\ =\ 10\ \textit{manos} \end{array}\right\} \leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{4}+y=7 \\ x+y=10 \end{cases}$$

Los resolvían apelando al ingenio en cada caso particular, sin desarrollar un método general. Y algo parecido les ocurrió a los egipcios y, después, a los griegos.

Los chinos, en el siglo ii a. C., avanzaron mucho en ese terreno, llegando a resolver con toda soltura los sistemas de ecuaciones. Pero ese saber no llegó a Occidente hasta muchos siglos más tarde.

En Europa, la aparición del álgebra simbólica a partir del siglo xv permitió su despegue definitivo, abriendo camino al descubrimiento de los métodos de resolución de ecuaciones y, paralelamente, de los conjuntos de varias ecuaciones con varias incógnitas (sistemas de ecuaciones).

Pero, ¿qué es un sistema de ecuaciones?, ¿por qué surge la necesidad de esta herramienta matemática?

Muchos problemas que aparecen en situaciones reales involucran dos o más ecuaciones con dos o más variables desconocidas. Por ejemplo:

Vas al supermercado y dos kilos de plátanos y tres kilos de peras te cuestan 7,80 euros. Mientras que a tu vecino, que compra, compra cinco kilos de plátanos y cuatro de peras le cuestan 13,20 euros. ¿Podrías con estos datos decir cuánto cuesta el kilo de plátanos, y el de peras?

7.02.- Ecuaciones lineales

Una ***ecuación*** lineal es una ecuación de primer grado en la que aparecen varias incógnitas.

Una ***ecuación lineal con dos incógnitas*** es una ecuación es una ecuación que podemos expresar de la forma:

$$ax+by=c$$

Donde x, y son las incógnitas y a,b y c son números conocidos: $\begin{cases} a \text{ y } b \text{ son los coeficientes} \\ c \text{ es el término independiente} \end{cases}$

Aunque también se pueden presentar de otras formas:

$y=mx+n$	$y-y_o=m(x-x_o)$	$ax+by-c=0$
Forma Explícita	**Forma Punto - Pendiente**	**Forma General**

La ***solución*** de una ecuación lineal con dos incógnitas es cualquier par de números, uno para cada incógnita, que hacen cierta (o también decimos, que verifican) la igualdad.

Ejemplo

La ecuación $2x+y=5$ tiene por solución: $(x=0,\ y=5)$, pero también $(x=1,\ y=3)$, pero también $(x=2;\ y=1)$ ¿existe alguna solución más?

Como ya te habrás dado cuenta, una ecuación con dos incógnitas tiene muchas soluciones ***(infinitas)***, pero no vale cualquier pareja de números, sino que los valores de x e y están relacionados *(mediante la ecuación lineal).*

Además, al igual que en el tema de ecuaciones, diremos que dos ***ecuaciones lineales*** son ***equivalentes*** si tienen las mismas soluciones.

Ejemplo

Las ecuaciones $\begin{cases} 3x+y=7 \\ 6x+2y=14 \end{cases}$ Tienen las soluciones, $(x,y)=\begin{cases} (0,7) \\ (1,4) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$ por tanto son ec. equivalentes.

Piensa y practica

1.- Averigua cuales de los siguientes pares de valores son solución de la ecuación: $3x-4y=8$

a) $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

2.- Busca tres soluciones diferentes para las siguientes ecuaciones:

a) $2x-y=5$ ***b)*** $x+2y=0$

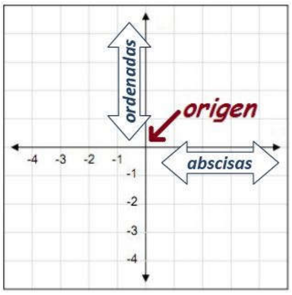
3.- Reduce a la forma general estas ecuaciones lineales:

a) $2x-5=y$ ***b)*** $x-3=2(x-y)$ ***c)*** $y=\dfrac{x+1}{2}$ ***d)*** $4x-5y=9$

7.2.1.- Representación gráfica de una ecuación

Para obtener distintas soluciones de una ecuación lineal, se puede hacer de forma gráfica. Para ello, se suele despejar una de las incógnitas en función de la otra *(normalmente la y)* y dar valores a la otra *(normalmente la x).*

Los valores obtenidos se recogen, ordenados, en una *tabla de doble entrada* y después se representan en el plano cartesiano.



El ***plano cartesiano*** son dos ejes perpendiculares, uno horizontal, el eje x, también llamado *eje de abscisas* y un eje vertical, el eje y, también llamado *eje de ordenadas*. El punto donde se cruzan ambos ejes se denomina punto O, y se le denomina *Origen de coordenadas.*

Ejemplo

Vamos a representar las distintas soluciones de la ecuación:

$$3x+y=45$$

Para ello, lo primero es despejar la variable y:

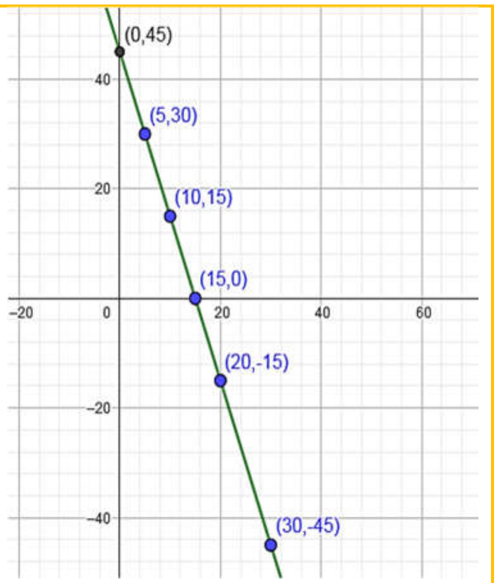
$$y=45-3x$$

Una vez despejada, hacemos una tabla de doble entrada

x	0	5	10	15	20	30
y	45	30	15	0	-15	-45

Y una vez hecho esto se representan todos los puntos *(x,y)* en el plano cartesiano y, cómo podemos observar, quedan alineados en una recta.

Recta de ecuación : $3x+y=45$



Por tanto, a la hora de hacer la representación gráfica de una ecuación, hemos de tener en cuenta que:

- Cada ecuación lineal tiene una recta asociada en el plano.
- Cada punto de esa recta representa una de las infinitas soluciones de la ecuación lineal.

Piensa y practica

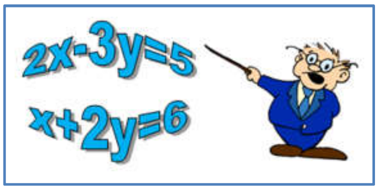
4.- Representa gráficamente las siguientes ecuaciones lineales:

a) $2x-y=1$ ***b)*** $2x+y=0$

7.03.- Sistemas de Ecuaciones lineales

Un ***sistema de ecuaciones lineales*** son dos ecuaciones lineales de las que se busca una solución común.

$$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ex=f \end{cases} \qquad \textit{ejemplo}: \begin{cases} 3x+2y=5 \\ x-y=12 \end{cases}$$



Donde a,b,d,e son los ***coeficientes*** y c y f son los ***términos independientes***.

La ***solución*** de un sistema es un par de números, uno para x y otro para y ***(x,y)*** que hace ciertas (o que verifica) las dos ecuaciones lineales a la vez.

Ejemplo

La solución del sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+2y=7 \\ 3x-y=7 \end{cases}$ es $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \rightarrow (x,y)=(3,2)$ porque al sustituir x por 3 e y por 2, vemos que se verifican ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} x+2y=7 \\ 3x-y=7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3+2\cdot 2=3+4=7 \\ 3\cdot 3-2=9-2=7 \end{cases}$$

Piensa y practica

5.- ¿Cuál de los siguientes pares de números son solución del sistema? $\begin{cases} 2x+3y=12 \\ 3x-2y=5 \end{cases}$

a) $(x,y)=(1,2)$	**b)** $(x,y)=(2,3)$	**c)** $(x,y)=(3,1)$	**d)** $(x,y)=(3,2)$

7.04.- Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Visto todo lo anterior, ***resolver un sistema de ecuaciones***, será encontrar ese par de números *(x,y)* que verifiquen las dos ecuaciones a la vez.

Existen *cuatro métodos* diferentes para resolver un sistema, uno de ellos gráfico y otros tres algebraicos.

Veamos paso a paso cada uno de ellos.

7.4.1.- Método gráfico

Como vimos en el punto segundo de este capítulo, cada ecuación lineal tiene una recta asociada en el plano.

El ***método gráfico*** consiste en representar gráficamente las rectas de las dos ecuaciones en la misma gráfica (o mismo sistema de ejes cartesianos) y el punto donde se corten será la solución del sistema.

<u>Los pasos a seguir son los siguientes:</u>

1. Despejamos la y en las dos ecuaciones.
2. Realizamos la tabla de valores de cada una de ellas.
3. Representamos gráficamente las dos ecuaciones.
4. El punto de cruce de ambas rectas es la solución del sistema.

Ejemplo

Resuelve por el método gráfico el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x-y=4 \\ 2x+y=2 \end{cases}$

Si numeramos las ecuaciones, el trabajo nos resultará más fácil: $\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases} x-y=4 \\ 2x+y=2 \end{cases}$

x	y
0	-4
2	-2
4	0
6	2

De la ecuación (1), despejamos y: $y = x - 4$

Nos inventamos algunos valores para x, los sustituimos en la ecuación y calculamos los valores de y.

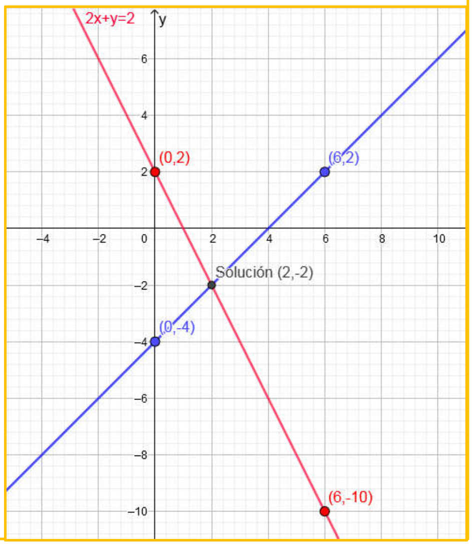
x	y
0	2
2	-2
4	-6
6	-10

Repetimos el proceso con la otra ecuación:

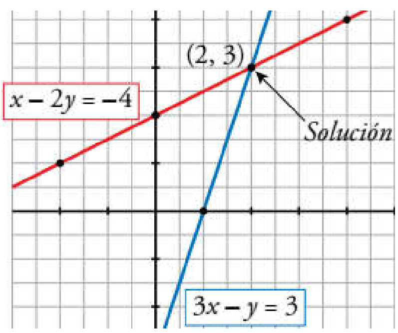
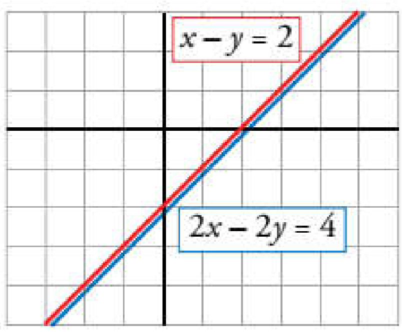
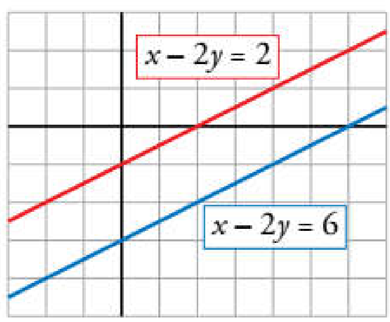
de la ecuación (2), despejamos y: $y = 2 - 2x$

Nos inventamos algunos valores para x, los sustituimos en la ecuación y calculamos los valores de y.

Después representamos ambas rectas en el mismo plano cartesiano.



Según sea su representación gráfica, podemos clasificar los sistemas de ecuaciones en:

S.C.D.	S.C.I.	S.I
Sistema compatible determinado	Sistema compatible indeterminado	Sistema incompatible
Con una solución	***Infinitas soluciones***	***Sin solución***
$\begin{cases} x-2y=-4 \\ 3x-y=3 \end{cases}$	$\begin{cases} x-y=2 \\ 2x-2y=4 \end{cases}$	$\begin{cases} x-2y=2 \\ x-2y=6 \end{cases}$
		
Las rectas son secantes	Las rectas son coincidentes	Las rectas son paralelas

7.4.2.- Método de Sustitución

El ***método de sustitución*** consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituirla en la otra.

Este método es aconsejable cuando alguna de las incógnitas tiene coeficiente 1.

Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Despejamos de una de las ecuaciones una de las incógnitas.
2. Sustituimos en la otra ecuación y obtenemos una ecuación de primer grado.
3. Resolvemos la ecuación y obtenemos el valor de una de las incógnitas.
4. Sustituimos este valor en la expresión del paso (1) y obtenemos el valor de la otra incógnita.
5. Damos la solución del sistema indicando de qué tipo de sistema se trata.

Ejemplo

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de sustitución: $\begin{cases} x-y=4 \\ 2x+y=2 \end{cases}$

Si numeramos las ecuaciones $\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases} x-y=4 \\ 2x+y=2 \end{cases}$

1 ***Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.*** *(la que nos parezca más fácil de despejar)*

De la ecuación (2) despejamos la y:

$$2x+y=2 \quad \rightarrow \quad y=2-2x$$

2 ***Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación, obteniendo una ecuación con una sola incógnita.***

En la ecuación (1) sustituimos la y por lo obtenido en el paso anterior:

$$x-y=4 \quad \rightarrow \quad x-(2-2x)=4$$
$$x-2+2x=4 \quad \rightarrow \quad 3x-2=4$$

3 ***Se resuelve esta ecuación.***

Resolvemos la ecuación obtenida:

$$3x-2=4 \quad \rightarrow \quad 3x=6 \quad \rightarrow \quad x=\frac{6}{3}=2$$

4 ***El valor obtenido se sustituye en la ecuación en la que aparecía la incógnita despejada.***

Sustituimos en la ecuación (2) el valor obtenido para x, y obtenemos el valor de y:

$$y=2-2x \quad \rightarrow \quad y=2-2\cdot(2)=2-4=-2$$

5 ***Se ha obtenido, así, la solución. Es conveniente indicar cómo es el sistema.***

La solución del sistema es:

$$x=2 \qquad y=-2 \quad \rightarrow \quad (x,y)=(2,-2)$$

Por tanto el sistema es: $S.C.D.\{x=2;\ y=-2\}$

Piensa y practica

6.- Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución.

a) $\begin{cases} x+6=6 \\ 3x-5y=2 \end{cases}$	**b)** $\begin{cases} 3x+10y=-1 \\ x+2y=1 \end{cases}$	**c)** $\begin{cases} 5x-3y=50 \\ 4x+y=23 \end{cases}$	**d)** $\begin{cases} 5x+y=6 \\ 3x-y=2 \end{cases}$

7.4.3.- Método de Igualación

El ***método de igualación*** consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones e igualar las dos expresiones resultantes.

- ***Este método es aconsejable cuando una misma incógnita es fácil de despejar en ambas ecuaciones.***

Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Despejamos la misma incógnita en cada una de las ecuaciones.
2. Igualamos ambas expresiones, lo cual da lugar a una ecuación de primer grado.
3. Resolvemos la ecuación, obteniendo el valor de una de las incógnitas.
4. Sustituimos dicho valor en una de las dos expresiones obtenida en el paso (1), normalmente la más fácil y obtenemos el valor de la otra incógnita.
5. Damos la solución del sistema indicando de qué tipo de sistema se trata.

Ejemplo

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de igualación: $\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

Si numeramos las ecuaciones $\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

1 ***Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones.*** *(la que nos parezca más fácil de despejar)*

De la ecuación (1) despejamos la y:

$$2x + y = 2 \quad \rightarrow \quad y = 2 - 2x$$

De la ecuación (2) despejamos la y:

$$x - y = 4 \quad \rightarrow \quad y = x - 4$$

2 ***Se igualan ambas expresiones y se obtiene una ecuación con una sola incógnita.***

Igualamos ambas expresiones:

$$\left.\begin{matrix} y = 2 - 2x \\ y = x - 4 \end{matrix}\right\} \quad \rightarrow \quad 2 - 2x = x - 4$$

3 ***Se resuelve esta ecuación.***

Resolvemos la ecuación obtenida:

$$2 - 2x = x - 4 \quad \rightarrow \quad 6 = 3x \quad \rightarrow \quad x = \frac{6}{3} = 2$$

4 ***El valor obtenido se sustituye en una de las ecuaciones del paso (1).*** *La que nos resulte más sencilla.*

Sustituimos en alguna de las ecuaciones del paso (1):

$$y = 2 - 2x \quad \rightarrow \quad y = 2 - 2\cdot(2) = 2 - 4 = -2$$

5 ***Se ha obtenido, así, la solución. Es conveniente indicar cómo es el sistema.***

La solución del sistema es:

$$x = 2 \qquad y = -2 \quad \rightarrow \quad (x, y) = (2, -2)$$

Por tanto el sistema es: $S.C.D.\{x = 2;\ y = -2\}$

Piensa y practica			
7.- Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación.			
a) $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + y = 13 \end{cases}$	**b)** $\begin{cases} 3x - 5y = 9 \\ 6x - 2y = -6 \end{cases}$	**c)** $\begin{cases} x - 3y = 21 \\ 2x + 5y = -35 \end{cases}$	**d)** $\begin{cases} 4(x - 3) + y = 0 \\ 3(x + 3) - y = 18 \end{cases}$

7.4.4.- Método de reducción

El ***método de reducción*** consiste en preparar las dos ecuaciones para que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente en ambas ecuaciones, pero con distinto signo. Sumando las ecuaciones resultantes, miembro a miembro, se obtiene otra ecuación con solo una incógnita (se ha reducido el número de incógnitas, de ahí su nombre).

- ***Este método es aconsejable cuando una misma incógnita tiene en ambas ecuaciones el mismo coeficiente (restamos las ecuaciones) o los coeficientes son iguales pero con signo opuesto (sumamos las ecuaciones).***

Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Preparamos ambas ecuaciones multiplicándolas por los números que nos convenga, *normalmente la primera por el coeficiente de la x (o de la y) de la segunda y la segunda por el opuesto del coeficiente x (o el de la y) de la primera ecuación.*
2. Sumamos las dos ecuaciones y desaparece una de las incógnitas. ***(Reducción)***
3. Resolvemos la ecuación resultante.
4. Sustituimos dicho valor en una de las dos ecuaciones, normalmente la más fácil y obtenemos el valor de la otra incógnita.
5. Damos la solución del sistema indicando de qué tipo de sistema se trata.

Ejemplo

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de reducción: $\begin{cases} 2x-3y=9 \\ 5x+4y=11 \end{cases}$

Si numeramos las ecuaciones $\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}\begin{cases} 2x-3y=9 \\ 5x+4y=11 \end{cases}$

1 ***Elegimos la variable que queremos reducir (eliminar),*** *(la que nos parezca más fácil)*	Vamos a reducir la x.
2 ***Multiplicamos la ecuación (1) por el coeficiente x de la ecuación (2) y multiplicamos la ecuación (2) por el opuesto del coeficiente de la x en la ecuación (1).*** (Siempre y cuando ambos coeficientes tengan el mismo signo. Si tuvieran distinto signo multiplicaríamos una por el coeficiente de la otra y viceversa)	Multiplicamos la ecuación (1) por 5, el coeficiente x de la ecuación (2), y la ecuación (2) por -2, el opuesto del coeficiente x de la ecuación (1), porque ambas tienen el mismo signo: $\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}\begin{cases} 2x-3y=9 \\ 5x+4y=11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5(2x-3y=9) \\ -2(5x+4y=11) \end{cases}$ Obteniendo: $\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}\begin{cases} 10x-15y=45 \\ -10x-8y=-22 \end{cases}$
3 ***Se suman ambas ecuaciones y se obtiene una ecuación de primer grado.***	Se suman las dos ecuaciones para reducir la variable x: $\begin{array}{rrcr} & \cancel{10x} & -15y & = & 45 \\ + & \cancel{-10x} & -8y & = & -22 \\ \hline & 0x & -23y & = & 23 \end{array}$
4 ***Resolvemos la ecuación y obtenemos el valor de una de las incógnitas.*** *La que no hemos reducido.*	Resolvemos la ecuación: $-23y=23 \quad \rightarrow \quad y=\dfrac{23}{-23}=-1$
5 ***El valor obtenido se sustituye en una de las ecuaciones del sistema y calculamos la otra incógnita.*** *La que nos resulte más sencilla.*	En la ecuación (1), sustituimos y por -1: $2x-3y=9 \rightarrow 2x-3(-1)=9$ $2x+3=9 \rightarrow 2x=9-3 \rightarrow 2x=6$ $x=\dfrac{6}{2}=3$
6 ***Se ha obtenido, así, la solución. Es conveniente indicar cómo es el sistema.***	La solución del sistema es: $x=3 \quad y=-1 \quad \rightarrow \quad (x,y)=(3,-1)$ Por tanto el sistema es: $S.C.D.\{x=3;\ y=-1\}$

Cuando en un sistema multiplicamos alguna de las ecuaciones, o incluso ambas, por números, encontramos otro sistema, con la misma solución que el anterior. Por eso decimos que es un ***sistema equivalente***.

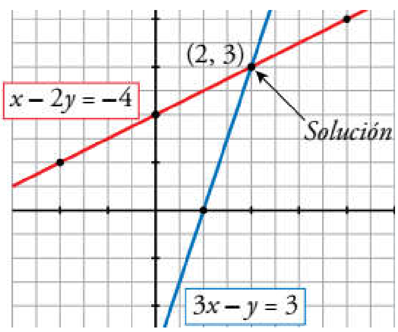
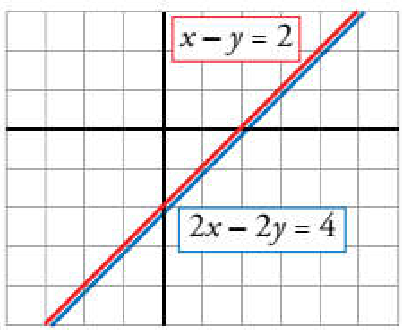
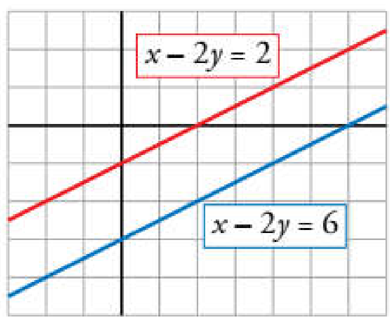
Se dice que ***dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes*** cuando tienen las mismas soluciones, es decir, toda solución del primero lo es también del segundo y, recíprocamente, cada solución del segundo es también solución del primero.

$$\underbrace{\begin{cases} 2x-3y=9 \\ 5x+4y=1 \end{cases}}_{\text{Sistema 1}} \rightarrow \begin{cases} 5(2x-3y=9) \\ -2(5x+4y=11) \end{cases} \rightarrow \underbrace{\begin{cases} 10x-15y=45 \\ -10x-8y=-22 \end{cases}}_{\text{Sistema 2}}$$

Los sistemas 1 y 2 son sistemas equivalentes, porque el segundo lo hemos conseguido multiplicando las ecuaciones del primero por 5 y -2 respectivamente.

Piensa y practica			
8.- Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción.			
a) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 6x+5y=3 \end{cases}$	**b)** $\begin{cases} 2x-3y=9 \\ 5x+4y=11 \end{cases}$	**c)** $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 5x-6y=4 \end{cases}$	**d)** $\begin{cases} 5x+y=6 \\ 3x-2y=14 \end{cases}$

Podemos diferenciar los distintos tipos de sistemas sin necesidad de utilizar el método gráfico, para ello tenemos que observar a las expresiones que llegamos manipulando las distintas ecuaciones; si llegamos a expresiones del tipo $0x+0y=0 \quad \rightarrow \quad 0=0$ diremos que el sistema es ***compatible indeterminado***, (infinitas soluciones) y si llegamos a expresiones del tipo $0x+0y=k \quad \rightarrow \quad 0=k$, donde k es un número cualquiera (distinto de cero), diremos que el ***sistema es incompatible*** (Sin solución). Resumiendo:

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES		
S.C.D.	**S.C.I.**	**S.I**
Sistema compatible determinado	Sistema compatible indeterminado	Sistema incompatible
Con una solución	***Infinitas soluciones***	***Sin solución***
$\begin{cases} x-2y=-4 \\ 3x-y=3 \end{cases}$	$\begin{cases} x-y=2 \\ 2x-2y=4 \end{cases}$	$\begin{cases} x-2y=2 \\ x-2y=6 \end{cases}$
		
Las rectas son secantes	Las rectas son coincidentes	Las rectas son paralelas
Manipulando las ecuaciones resolvemos el sistema y encontramos los valores de x e y.	Manipulando las ecuaciones llegamos a expresiones de la forma: $0x+0y=0 \quad \rightarrow \quad 0=0$	Manipulando las ecuaciones llegamos a expresiones: $0x+0y=k \quad \rightarrow \quad 0=k$

7.05.- Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones lineales

Los sistemas de ecuaciones nos permiten resolver una gran cantidad de problemas, presentados generalmente de manera verbal. Tal y como decía *Newton*, el paso fundamental en la resolución de esta clase de problemas está en la adecuada interpretación del enunciado a través de un sistema de ecuaciones.

Este proceso recibe el nombre de ***modelación del problema***.

Para resolver un problema referente a números o de relaciones entre cantidades, basta traducir dicho problema del lenguaje verbal al lenguaje algebraico.

Isaac Newton

A continuación se presenta una secuencia de pasos, que permite de forma general, enfrentar de manera ordenada la resolución de un problema mediante sistemas de ecuaciones.

1) Lectura y comprensión del enunciado.
2) Asignar la incógnita o incógnitas.
3) Establecer relaciones entre las variables del problema.
4) Plantear las ecuaciones ayudándonos del lenguaje algebraico.
5) Resolver el sistema de ecuaciones mediante alguno de los distintos métodos.
6) Analizar la solución de la ecuación en el problema y verificar la solución.
7) Dar la respuesta al problema planteado

En algunos casos, será más sencillo plantear un problema algebraico complejo mediante un sistema de ecuaciones que mediante una única ecuación con una incógnita.

7.5.1.- Ejemplos de problemas resueltos mediante sistemas de ecuaciones

Veamos algunos ejemplos de problemas resueltos mediante sistemas de ecuaciones:

1.- Un librero ha vendido 45 libros, unos a 32 € y otros a 28 €. Si por la venta de todos ellos obtuvo 1.368 €, ¿Cuántos libros de cada clase vendió?

Si llamamos x a los libros de 32€ e y a los libros de 28 €, podemos plantear un sistema de ecuaciones:

$$\begin{matrix}\text{Ecuación libros:}\\ \text{Ecuación euros:}\end{matrix}\begin{cases} x+y=45 \\ 32x+28y=1.368 \end{cases} \xrightarrow{\text{Por sustitución}} \begin{cases} y=45-x \\ 32x+28(45-x)=1.368 \end{cases}$$

Despejamos y en la ecuación primera y lo sustituimos en la segunda:

$$32x+1260-28x=1360 \quad \to \quad 32x-28x=1360-1260 \quad \to \quad 4x=108$$

$$x=\frac{108}{4}=27 \quad \xrightarrow{\text{Sustituyendo en la y}} \quad y=45-x \quad \to \quad y=45-27=18$$

Por tanto vendió 27 libros a 32 € y 18 libros a 28 €.

2.- Un obrero ha trabajado en dos obras durante 40 días. En la primera cobra 50 € diarios, y en la segunda 75 € diarios. Sabiendo que ha cobrado en total 2.375 €. ¿Cuántos días ha trabajado en cada obra?

Si llamamos x a los días trabajados en una obra e y a los trabajados en la otra, podemos plantear un sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{r}\text{Ecuación días:}\\ \text{Ecuación euros:}\end{array}\begin{cases}x+y=40\\ 50x+75y=2.375\end{cases}\xrightarrow{\text{Por sustitución}}\begin{cases}y=40-x\\ 50x+75(40-x)=2.375\end{cases}$$

Despejamos y en la ecuación primera y lo sustituimos en la segunda:

$$50x+3000-75x=2375\quad\to\quad 50x-75x=2375-3000\quad\to\quad -25x=-625$$

$$x=\frac{-625}{-25}=25\quad\xrightarrow{\text{Sustituyendo en la } y}\quad y=40-x\quad\to\quad y=40-25=15$$

Así que el obrero trabajó 25 días en la primera obra y 15 días en la segunda.

3.- Se tienen 250 monedas, unas son de 2 céntimos de euro y otras de 5 céntimos de euro. Si en total suman 6,5 euros, calcula cuantas monedas hay de cada tipo.

Si llamamos x a las monedas de 2 céntimos e y a las de 5 céntimos podremos plantear un sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{r}\text{Ecuación monedas:}\\ \text{Ecuación dinero:}\end{array}\begin{cases}x+y=250\\ 0,02x+0,05y=6,5\end{cases}\xrightarrow{\text{Buscamos un sistema equivalente sin decimales}}\begin{cases}x+y=250\\ 2x+5y=650\end{cases}$$

Y mediante el método de sustitución, despejando y en la primera ecuación y sustituyéndolo en la segunda, llegamos a:

$$\begin{cases}y=250-x\\ 2x+5\cdot(250-x)=650\end{cases}$$

Que resolviendo nos da:

$$2x+1250-5x=650\quad\to\quad 2x-5x=650-1250\quad\to\quad -3x=-600$$

$$x=\frac{-600}{-3}=200\quad\xrightarrow{\text{Sustituyendo en la } y}\quad y=250-x\quad\to\quad y=250-200=50$$

Por lo tanto, hay 200 monedas de 2 céntimos y 50 de 5 céntimos.

4.- En una granja se crían gallinas y conejos. Si en total son 100 animales y las patas suman 230. ¿Cuántos conejos y gallinas hay en la granja?

Si llamamos x a las gallinas e y a los conejos podremos plantear un sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{r}\text{Ecuación animales:}\\ \text{Ecuación patas:}\end{array}\begin{cases}x+y=100\\ 2x+4y=230\end{cases}$$

Despejando y en la primera ecuación y sustituyéndola en la segunda, (método de sustitución) llegamos a:

$$\begin{cases}y=100-x\\ 2x+4\cdot(100-x)=230\end{cases}$$

Que resolviendo nos da:

$$2x+400-4x=230\quad\to\quad 2x-4x=230-400\quad\to\quad -2x=-170$$

$$x=\frac{-170}{-2}=85\quad\xrightarrow{\text{Sustituyendo en la } y}\quad y=100-x\quad\to\quad y=100-85=15$$

Por lo que, en la granja, hay 85 gallinas y 15 conejos.

5.- La semana pasada, dos entradas de cine y una caja de palomitas nos costaron 10 €. Hoy, por cuatro entradas y tres cajas de palomitas hemos pagado 22 €. ¿Cuánto cuesta cada cosa?

Si llamamos x a lo que nos cuesta cada entrada e y a lo que cuesta cada caja de palomitas, ya podemos plantear un sistema:

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}2x+y=10\\4x+3y=22\end{cases}$$

Si multiplicamos la primera ecuación por (-3) y sumamos, por reducción llegamos a:

$$\begin{cases}-3\cdot(2x+y=10)\\4x+3y=22\end{cases}\rightarrow\begin{cases}-6x-3y=-30\\4x+3y=22\end{cases}\rightarrow\begin{array}{ccc}-6x & -3y & =-30\\ \underline{4x} & \underline{+3y} & \underline{=+22}\\ -2x & 0 & =-8\end{array}$$

Una ecuación de primer grado en x, que resolviendo:

$$-2x=-8 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-8}{-2}=4$$

Obtenido el valor de x=4, y sustituyendo en la ecuación (1), calculamos el valor de y:

$$2x+y=10 \quad\rightarrow\quad 2\cdot 4+y=10 \quad\rightarrow\quad 8+y=10 \quad\rightarrow\quad y=18-8=2 \quad\rightarrow\quad y=2$$

Por tanto: x=4 e y=2.

La entrada al cine cuesta 4 € y las palomitas cuestan 2 €.

7.06.- Autoevaluación

1.- Representa gráficamente las siguientes ecuaciones lineales:

a) $y=2x-1$ b) $2x+3y=3$

2.- Resuelve gráficamente este sistema:

$$\begin{cases}x+y=7\\3x-y=9\end{cases}$$

3.- Resuelve por el método de sustitución:

$$\begin{cases}x-y=6\\2x+3y=7\end{cases}$$

4.- Clasifica los siguientes sistemas según sus soluciones:

$$a)\begin{cases}6x-3y=9\\2x-y=3\end{cases}\qquad b)\begin{cases}x-y=2\\2x+y=7\end{cases}$$

$$c)\begin{cases}x+3=0\\2y+6=0\end{cases}\qquad d)\begin{cases}2x+y=5\\4x+2y=9\end{cases}$$

5.- La suma de dos números es 977 y su diferencia es 31, ¿Cuáles son esos números?

6.- En la cafetería, ayer pagamos 3€ por dos cafés y una tostada. Sin embargo, hoy nos han cobrado 6,30€ por tres cafés y tres tostadas. ¿Cuánto cuesta cada cosa?

7.- La base de un rectángulo es 8 cm más larga que su altura y su perímetro mide 42 cm. Calcula las dimensiones de dicho rectángulo.

8.- Un agricultor comprueba que en el segundo de sus dos depósitos de agua para riego hay 10 litros más que en el primero. Al traspasar 18 litros del segundo al primero, éste contiene el doble de agua que el segundo. ¿Qué cantidad de agua tenía cada depósito?

9.- Resuelve los siguientes sistemas por el método más conveniente:

$$a)\begin{cases}1,5x+0,25y=-2\\2x-0,5y=-6\end{cases}\qquad b)\begin{cases}\dfrac{x+1}{3}+y=1\\[2mm]\dfrac{x-3}{4}+2y=1\end{cases}$$