RESOLUCIÓN DE ACTIVIDADES

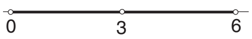
Actividades iniciales

1. Representa en la recta real los siguientes conjuntos:
***a)* [–1, 4] *b)* (–1, 4) *c)* E(–1, 4)**
***d)* E^*(3, 3) *e)* (–∞, 5] *f)* E^+(3, 3)**

[–1, 4] 

(–1, 4) 

E(–1, 4) = (–5, 3) 

E*(3, 3) = (0, 6) – {3} 

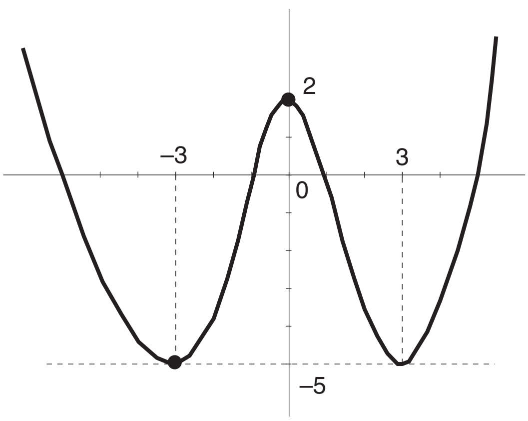
(–∞, 5) 

E^+(3, 3) = (3, 6) 

2. Estudia si los siguientes conjuntos están o no acotados. En caso afirmativo, determina, si existen, los extremos relativos, máximos y mínimos.
$A = \{x \in R \mid |x - 2| < 3\}$
$B = \{x \in R \mid 3 \le x < 4\}$
$C = (-2, 1) \cup (0, 2]$

$A = \{x \in R \mid |x - 2| < 3\} = \{x \in R \mid -1 < x < 5\}$
A está acotado superiormente por 5 e inferiormente por –1, luego, *A* está acotado. No tiene máximos ni mínimos.
$B = \{x \in R \mid 3 \le x < 4\}$
B está acotado superiormente por 4 e inferiormente por 3, luego, *B* está acotado. Tiene mínimo, el 3.
$C = (-2, 1) \cup (0, 2)$
C está acotado superiormente por 2 e inferiormente por –2, luego *C* está acotado. Tiene máximo, el 2.

3. Dibuja una gráfica de una función que responda a las siguientes características:
***a)* Dom *f* = *R*; Im *f* = [–5, +∞]**
***b)* Estrictamente decreciente en (–∞, –3); estrictamente creciente en (–3, 0).**
***c)* Simétrica respecto del eje de ordenadas.**
***d)* Máximo relativo en (0, 2) y mínimo relativo en (–3,–5).**

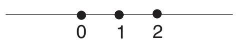


Actividades de Enseñanza-Aprendizaje

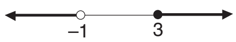
1 Representa sobre la recta real los siguientes conjuntos:
***a)* $A = \{x \in R \mid x > 3 \text{ y } x > 5\}$**
***b)* $B = \{x \in Z \mid x \ge 4 \text{ y } x < 6\}$**
***c)* $C = \{x \in N \mid x > -5 \text{ y } x \le 2\}$**
***d)* $D = \{x \in R \mid x > 2{,}5 \text{ y } x < 5{,}2\}$**
***e)* $E = \{x \in R \mid x < -1 \text{ ó } x \ge 3\}$**
***f)* $F = \{x \in Z \mid x \le 3 \text{ ó } x \ge 2\}$**
***g)* $G = (-\infty, -1) \cup [2, 5)$**
***h)* $H = (-6, -2) \cap [-4, 8)$**

a) $A = \{x \in R \mid x > 5\} = (5, +\infty)$ 

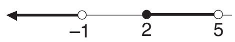
b) $B = \{x \in Z \mid 4 \le x < 6\} = \{4, 5\}$ 

c) $C = \{x \in N \mid -5 < x \le 2\} = \{0, 1, 2\}$ 

d) $D = \{x \in R \mid 2{,}5 < x < 5{,}2\} = (2{,}5; 5{,}2)$


e) $E = \{x \in R \mid x < -1 \text{ o } x \ge 3\} = (-\infty, -1) \cup [3, +\infty)$


f) $F = \{x \in Z \mid x \le 3 \text{ o } x \ge 2\} = Z$

g) $G = (-\infty, -1) \cup [2, 5)$ 

h) $H = (-6, -2) \cap [-4, 8) = [-4, -2)$ 

2 Define por comprensión, dentro del conjunto de los números, los siguientes subconjuntos:
***a)* [–3, 5] *b)* (–3, 5] *c)* (–3, 5) *d)* [–3, 5)**
***e)* [2, +∞) *f)* (2, +∞) *g)* (–∞, 2] *h)* (–∞, 2)**
***i)* E(3, 1) *j)* E^*(3, 1) *k)* E^+(3, 1) *l)* E^-(3, 1)**
***m)* E(1, 3) *n)* E(–2, 1) *o)* E^*(–3;0, 2)**

a) $[-3, 5] = \{x \in R \mid -3 \le x \le 5\}$
b) $(-3, 5] = \{x \in R \mid -3 < x \le 5\}$
c) $(-3, 5) = \{x \in R \mid -3 < x < 5\}$
d) $[-3, 5) = \{x \in R \mid -3 \le x < 5\}$
e) $[2, +\infty) = \{x \in R \mid x \ge 2\}$
f) $(2, +\infty) = \{x \in R \mid x > 2\}$
g) $(-\infty, 2] = \{x \in R \mid x \le 2\}$
h) $(-\infty, 2) = \{x \in R \mid x < 2\}$
i) $E(3, 1) = (2, 4) = \{x \in R \mid 2 < x < 4\}$
j) $E^*(3, 1) = (2, 4) - \{3\} = \{x \in R \mid 2 < x < 4;\ x \ne 3\}$
k) $E^+(3, 1) = (3, 4) = \{x \in R \mid 3 < x < 4\}$
l) $E^-(3, 1) = (2, 3) = \{x \in R \mid 2 < x < 3\}$
m) $E(1, 3) = (-2, 4) = \{x \in R \mid -2 < x < 4\}$
o) $E^*(-3; 0{,}2) = (-3{,}2; -2{,}8) - \{-3\} = \{x \in R \mid -3{,}2 < x < 2{,}8;\ x \ne -3\}$

3 Dibuja los intervalos $I_1 = (-\infty, 5)$, $I_2 = (-5, +\infty)$, $I_3 = (0, 8]$. Halla el conjunto $I_1 \cap I_2 \cap I_3$ y define este conjunto por comprensión.

$I_1 = (-\infty, 5)$ 

$I_2 = (-5, +\infty)$ 

$I_3 = (0, 8]$ 

$I_1 \cap I_2 \cap I_3 = (0,5)$ 

$\{x \in R \mid 0 < x < 5\}$

4 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**
a) **$[1, 5] \cup E(7, x) = [1, 10)$**
b) **$E(3, 2) \cap E(2, +1) = (1, x)$**
c) **$(-2, 3] \cap E(x, 2) = (-1, 3)$**
d) **$[2, x) \cup [4, 8] = [2, 8]$**

a) $[1, 5] \cup (7 - x, 7 + x) = [1, 10) \Rightarrow x = 3$
b) $E(3, 2) \cap E(2, 1) = (1, x) \Rightarrow (1, 5) \cap (1, 3) = (1, x) \Rightarrow x = 3$
c) $(-2, 3] \cap (x - 2, x + 2) = (-1, 3) \Rightarrow x = 1$
d) $[2, x) \cup [4, 8] = [2, 8] \Rightarrow x \in [4, 8]$

5 **Estudia la acotación de los conjuntos *N, Z, Q* y *R*.**

N está acotado inferiormente por 0, superiormente no está acotado; luego no está acotado.
Z, Q, R no están acotados ni superior ni inferiormente.

6 **Estudia si los siguientes conjuntos están o no acotados. Determina, si existen, los extremos máximo y mínimo.**
a) **$A = (-5, 7)$**
b) **$B = [-5, 7]$**
c) **$C = [-5, 7)$**
d) **$D = (-5, 7]$**
e) **$E(-3, 1)$**
f) **$F = (-6, 1) \cup [0, 3)$**
g) **$G = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$**
h) **$H = [-6, 1] \cap (0, 3)$**
i) **$I = \{x \in R \mid x > 3 \text{ o } x < 1\}$**
j) **$J = \left\{x \in R \mid x = \frac{1}{3^n};\ n \in N\right\}$**

Los conjuntos *A, B, C, D* están acotados inferiormente por cualquier número menor o igual que (–5) y superiormente por cualquier número mayor o igual que 7; luego estos conjuntos están todos acotados.
- *A* no tiene máximos ni mínimos.
- *B* tiene mínimo en –5 y máximo en 7.
- *C* tiene mínimo en –5 y no tiene máximo.
- *D* tiene máximo en 7 y no tiene mínimo.
- $E(-3, 1) = (-4, -2)$ está acotado y no tiene máximo ni mínimo.
- $F = (-6, 1) \cup [0, 3) = (-6, 3)$ está acotado y no tiene máximo ni mínimo.
- $G = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ no está acotado superiormente, por tanto *G* no está acotado.
- $H = [-6, 1] \cap (0,3) = (0, 1]$ está acotado y tiene máximo en 1.
- $I = \{x \in R \mid x > 3 \text{ o } x < 1\} = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ no está acotado.
- $J = \{x \in R \mid x = \frac{1}{3^n};\ n \in N\} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots\right\}$

  J está acotado superiormente por $\frac{1}{3}$, pero no está acotado inferiormente, luego no está acotado. Tiene máximo en $\frac{1}{3}$

7 **Escribe los siguientes conjuntos en forma de intervalos y represéntalos gráficamente:**
a) **$A = \{x \in R \mid |x| \leq 3\}$**
b) **$B = \{x \in R \mid |x - 2| < 1\}$**
c) **$C = \{x \in R \mid |3 - x| < 2\}$**
d) **$D = \{x \in R \mid 2|x + 1| \leq 5\}$**

a) $A = \{x \in R \mid |x| \leq 3\} = [-3, 3]$ 

b) $B = \{x \in R \mid |x - 2| < 1\} = (1, 3)$ 

c) $C = \{x \in R \mid |3 - x| < 2\};\ -2 < 3 - x < 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow -5 < -x < -1 \Rightarrow 5 > x > 1 \Rightarrow 1 < x < 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow C = (1, 5)$ 

d) $D = \{x \in R \mid 2|x + 1| \leq 5\}$
$-5 \leq 2x + 2 \leq 5 \Rightarrow -7 \leq 2x \leq 3 \Rightarrow -3{,}5 \leq x \leq 1{,}5$
$D = [-3{,}5; 1{,}5]$ 

8 **Estudia la acotación de $A \cup B$ y de $A \cap B$ sabiendo que *A* y *B* son dos conjuntos de números reales acotados.**

- *A* acotado ⇒ existen P_1 y K_1 cotas inferior y superior, respectivamente, de modo que para todo $x \in A \Rightarrow P_1 \leq x \leq K_1$.
- *B* acotado ⇒ existen P_2 y K_2 cotas inferior y superior, respectivamente de modo que para todo $x \in B \Rightarrow P_2 \leq x \leq K_2$.
- Veamos si $A \cap B$ está acotado.

  $$\text{Sea } x \in A \cap B \Rightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow P_1 \leq x \leq K_1 \\ \text{y } x \in B \Rightarrow P_2 \leq x \leq K_2 \end{cases}$$

  Sea K = mínimo (K_1, K_2) y P = máximo $(P_1, P_2) \Rightarrow$
  $\Rightarrow P \leq x \leq K \Rightarrow (A \cap B)$ está acotado.
- Veamos si $A \cup B$ está acotado:
  Sea $x \in A \cup B \Rightarrow$

  $$\Rightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow P_1 \leq x \leq K_1 \Rightarrow A \cup B \text{ acotado} \\ x \in B \Rightarrow P_2 \leq x \leq K_2 \Rightarrow A \cup B \text{ acotado} \\ x \in A \text{ y } x \in B \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow A \cup B \text{ acotado} \end{cases}$$

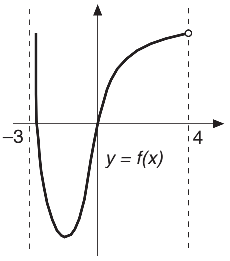
9 **Encuentra, si existen, el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos:**
a) **$A = \{x \in R \mid 1 < x \leq 3\}$**
b) **$B = \left\{\frac{n + 2}{n + 1} \mid n \in N\right\}$**

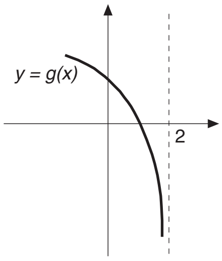
Ínfimo de *A* es 1 y supremo de *A* es 3

Ínfimo de *B* es 1 y supremo de *B* es $\frac{3}{2}$

pues $B = \left\{\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots\right\}$

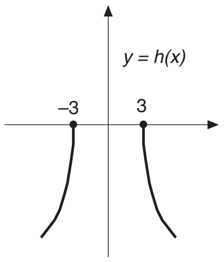
10 **Estudia el dominio de las siguientes funciones:**

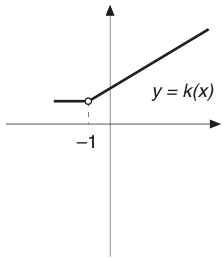




$$l(x) = x^3 - 2x^2 \qquad m(x) = \frac{3}{x^2+4}$$

$$p(x) = 3^{x^2-9} \qquad q(x) = ln\ (x^2 - 6x)$$





$$n(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 7x + 12} \qquad o(x) = \sqrt[4]{2x - 5}$$

$$r(x) = cos\ (\sqrt[3]{x+5}) \qquad s(x) = tg\left(\frac{2x}{x+3}\right)$$

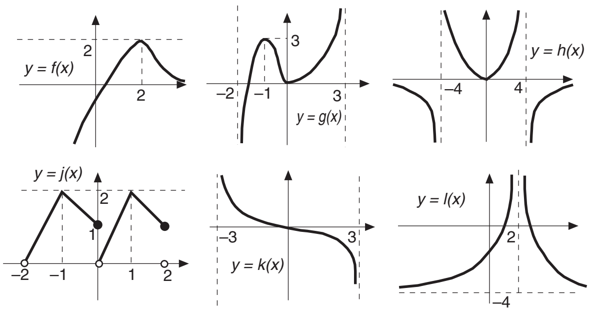
Dom f = (–3, 4)
Dom g = (–∞, 2)
Dom h = (–∞, -3] ∪ [3, +∞)
Dom k = *R* – {–1}
Dom l = *R*
Dom m = *R*
Dom n = *R* – {3, 4}
Dom o = $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$
Dom p = *R*
Dom q = (–∞, 0) ∪ (6, +∞)
Dom r = *R*
Dom s = *R* – {–3}

11 **Estudia la simetría y periodicidad de las siguientes funciones:**

$f(x) = x^4 - 2x^2$
$g(x) = cos\ (2x)$
$h(x) = \dfrac{x}{x-1}$
$k(x) = |sen\ x|$
$l(x) = x \cdot e^{x^2}$
$m(x) = |x - 2|$
$n(x) = [x - E[x]]^2$
$o(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

- $f(x) = x^4 - 2x^2$; $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) = f(-x) \Rightarrow$ simétrica respecto al eje de ordenadas. No periódica.
- $g(x) = cos\ 2x$; $g(-x) = cos\ 2(-x) = cos\ 2x \Rightarrow g(x) = g(-x)$ $\Rightarrow$ simétrica respecto al eje de ordenadas. Periódica de período $\prod$.
- $h(x) = \dfrac{x}{x-1}$. No simétrica, ni periódica.
- $k(x) = |\text{sen}\ x|$. Simétrica respecto al eje de ordenadas. Periódica de período $\prod$.
- $l(x) = x\ e^{x^2}$. Simétrica respecto al origen de coordenadas, pues $l(-x) = -x\ e^{x^2} = -l(x)$. No periódica.
- $m(x) = |x - 2|$ ni simétrica ni periódica.
- $n(x) = [x - E(x)]^2$ no simétrica y periódica de período 1.
- $o(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. Simétrica respecto al origen de coordena pues $o(-x) = -o(x)$. No periódica.

12 **Analiza en cada una de las siguientes funciones el dominio, el recorrido, la simetría, la periodicidad, la acotación, monotonía, extremos absolutos y relativos.**



$\boxed{y = f(x)}$

Dom f = R; Im f = (-∞, 2]; ni simétrica ni periódica; Acotada superiormente por 2; estrictamente creciente de (–∞, 2) y estrictamente decreciente (2, +∞). Máximo relativo en (2, 2).

$\boxed{y = g(x)}$

Dom g = (–2, 3); *Im g = R*; ni simétrica ni periódica; no acotada; Estrictamente creciente en (–2, –1) ∪ (0, 3) y estrictamente decreciente en (–1, 0). Máximo relativo en (–1, 3) y mínimo relativo en (0, 0).

$\boxed{y = h(x)}$

Dom h = (–∞, –4) ∪ (–4, 4) ∪ (4, +∞) = R – {–4, 4}; *Im h = R*; simétrica respecto al eje de ordenadas; no periódica; no acotada; estrictamente creciente en (0, 4) ∪ (4, +∞) y estrictamente decreciente en (–∞, –4) ∪ (–4, 0). Mínimo relativo en (0, 0).

$\boxed{y = j(x)}$

Dom j = R; Im j = (0, 2]; no simétrica; periódica de período 2; acotada inferiormente por 0 y superiormente por 2. Estrictamente creciente en (0, 1) y estrictamente decreciente en (1, 2), considerando la función en (0, 2).

$\boxed{y = k(x)}$

Dom k = (–3, 3); *Im k = R*; simétrica respecto al origen de coordenadas; no periódica; no acotada; estrictamente decreciente en (–3, 3).

$\boxed{y = l(x)}$

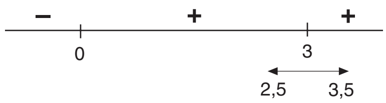
Dom $l = R - \{2\}$; *Im* $l = (-4, +\infty)$; ni simétrica ni periódica; acotada inferiormente por -4, en general no acotada; estrictamente creciente en $(-\infty, 2)$ y decreciente estrictamente en $(2, +\infty)$.

13 **Prueba, usando las definiciones de extremos relativos, que la función $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$ tiene un mínimo relativo en el punto $(1, -4)$ y un máximo relativo en el punto $(3, 0)$.**

- Para probar que existe un mínimo relativo en $(1, -4)$ tomamos un entorno $E^*(1; 0{,}5)$ $\forall x \in E^*(1; 0{,}5) \Rightarrow f(x) > f(1)$ $\Rightarrow f(x) - f(1) > 0 \Rightarrow -x^3 + 6x^2 - 9x - (-4) > 0$.
  Es decir: $x^3 - 6x^2 + 9x - 4 < 0$.
  Veamos el signo de $x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = (x-1)^2\,(x-4)$

  Luego $\forall x \in E^*(1; 0{,}5) \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 4 < 0 \Rightarrow f(x) > f(1) \Rightarrow$ f tiene un mínimo relativo en $x = 1$; $y = f(1) = -4$.

- Para probar que existe un máximo relativo en $(3, 0)$ tomamos un entorno $E^*(3; 0{,}5)$ y veamos que $f(x) < f(3)$ $\forall x \in E^*(3; 0{,}5)$.
  Veamos que $f(x) - f(3) < 0 \Rightarrow -x^3 + 6x^2 - 9x < 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x > 0 \Rightarrow x\,(x-3)^2 > 0$



  $\Rightarrow \forall x \in E^*(3; 0{,}5) \Rightarrow f(x) < f(3)$ luego tiene máximo relativo en $(3, 0)$.

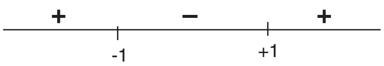
14 **Resuelve las ecuaciones:**

a) $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = \dfrac{x-1}{x+1}$ ***b)*** $x^2 - 2\,|x| - 3 = 0$

a) $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = \dfrac{x-1}{x+1} \Rightarrow \dfrac{x-1}{x+1} \geq 0$

Resolvemos esta inecuación: $\dfrac{x-1}{x+1} \geq 0$

Hallamos los ceros y estudiamos los signos: $x = 1$ $x = -1$



Solución: $(-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$

b) $x^2 - 2\,|x| - 3 = 0$ $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$

- Si $x \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2}$
  $\Rightarrow \boxed{x = 3}$ $\boxed{x = -1}$. Sólo vale $\boxed{x = 3}$, pues $x \geq 0$
- Si $x < 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$ $\boxed{x = -3}$
  Sólo vale $\boxed{x = -3}$, pues $x < 0$

15 **Dada la función $f(x) = ln \left[\dfrac{1-x}{1+x}\right]$, demuestra que $\forall\, a,b \in (-1, 1)$ se cumple que: $f(a) + f(b) = f\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)$**

$f(a) = ln\,\dfrac{1-a}{1+a}$

$f(b) = ln\,\dfrac{1-b}{1+b}$

$f(a) + f(b) = ln\,\dfrac{1-a}{1+a} + ln\,\dfrac{1-b}{1+b} = ln\left[\left[\dfrac{1-a}{1+a}\right] \cdot \left[\dfrac{1-b}{1+b}\right]\right] =$

$= ln\,\dfrac{1+ab-a-b}{1+a+b+ab}$ (1)

$f\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right) = ln\left[\dfrac{1 - \dfrac{a+b}{1+ab}}{1 + \dfrac{a+b}{1+ab}}\right] = ln\,\dfrac{1+ab-a-b}{1+a+b+ab}$ (2)

Como (1) = (2), queda probada la igualdad pedida.

16 **Sabiendo que $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$, halla $f(x)$.**

$f(x+1) = x^2 - 3x + 2$
Hacemos $x + 1 = t \Rightarrow x = t - 1$
$f(t) = (t-1)^2 - 3(t-1) + 2 = t^2 - 5t + 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(t) = t^2 - 5t + 6$, luego:

$$\boxed{f(x) = x^2 - 5x + 6}$$

17 **Para qué valores de «a» la función $f(x) = x^3 + ax$ es estrictamente creciente en todo su dominio de definición.**

f es estrictamente creciente si siendo $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
$\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) < 0$
$f(x_1) = x_1^3 + ax_1$
$f(x_2) = x_2^3 + ax_2$
$\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 + ax_1 - (x_2^3 + ax_2) = (x_1^3 - x_2^3) + a\,(x_1 - x_2)$
$(x_1^3 - x_2^3) + a\,(x_1 - x_2) < 0$
$(x_1 - x_2)\,(x_1^2 + x_2\,x_1 + x_2^2 + a) < 0$ (1)
Como $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 < 0$. La igualdad (1) será cierta si $x_1^2 + x_2\,x_1 + x_2^2 + a > 0$

$\Rightarrow \boxed{a > 0}$, pues como $x_1 < x_2$, entonces

$x_1^2 + x_2\,x_1 + x_2^2 > 0 \Rightarrow$ queda $\underline{a > 0}$.

18 **Indica cuáles de las siguientes funciones son pares, cuáles impares y cuáles ni pares ni impares:**

$f(x) = ln\left[x + \sqrt{1+x^2}\right]$ $g(x) = |x| - x^2$

$h(x) = sen\ x + cos\ x$ $k(x) = log\left[\dfrac{2-x}{2+x}\right]$

- $f(x) = ln\left[x + \sqrt{1+x^2}\right]$
  $f(-x) = ln\left[-x + \sqrt{1+(-x)^2}\right] = ln\left[-x + \sqrt{1+x^2}\right]$
  $-f(-x) = -ln\left[-x + \sqrt{1+x^2}\right] = ln\left[-x + \sqrt{1+x^2}\right]^{-1} =$

$$= ln\,\frac{1}{-x+\sqrt{1+x^2}} = ln\,\frac{-x-\sqrt{1+x^2}}{(-x+\sqrt{1+x^2})\,(-x-\sqrt{1+x^2})} =$$
$$= ln\left[x+\sqrt{1+x^2}\right]$$

Como $f(x) = -f(-x) \Rightarrow f$ es una función impar.

- $g(x) = |x| - x^2$; $g(-x) = |-x| - (-x)^2 = |x| - x^2$
  g es una función par, pues $g(x) = g(-x)$
- $h(x) = sen\,x + cos\,x$; $h(-x) = sen(-x) + cos(-x) =$
  $= -sen\,x + cos\,x \Rightarrow h(x)$, no es ni par ni impar
- $k(x) = log\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$
  $$k(-x) = log\left[\frac{2-(-x)}{2+(-x)}\right] = log\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$$
  $$-k(-x) = -log\left(\frac{2+x}{2-x}\right) = log\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{-1} = log\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$$
  Luego, como $k(x) = -k(-x) \Rightarrow k(x)$, es una función impar.

19 **Demuestra que $f(x) = x^n$ con $n \in N$ es estrictamente creciente en $(0, +\infty)$. Demuestra, asimismo, que en $(-\infty, 0)$ la función es estrictamente creciente si n es impar y estrictamente decreciente si n es par.**

- $f(x) = x^n$
  $\forall\, x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0)$ hemos de demostrar:
  $f(x) = x^n \Rightarrow f(0) = 0$
  Si $x > 0 \Rightarrow x^n > 0 \Rightarrow f(x) > f(0)\ \forall n \Rightarrow$
  $\Rightarrow f$ es estrictamente creciente en $(0, +\infty)$
- Veamos que pasa si $x < 0$:
  $x^n < 0$ si n es impar $\Rightarrow f(x) < f(0) \Rightarrow f$ creciente
  $x^n > 0$ si n es par $\Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow f$ decreciente

20 **Dadas las funciones $f(x) = 1$; $g(x) = x^2 + 1$; $h(x) = \frac{1}{x^2+1}$; halla las funciones:**

a) $g \circ f \circ h$ ***b)*** $f \circ g \circ h$ ***c)*** $h \circ g \circ f$

a) $(g \circ f \circ h)\,(x) = (g \circ f)\left[h(x)\right] = (g \circ f)\left(\frac{1}{x^2+1}\right) =$
$$= g\left[f\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\right] = g(1) = \boxed{2}$$

b) $(f \circ g \circ h)\,(x) = (f \circ g)\left[h(x)\right] = (f \circ g)\left[\frac{1}{x^2+1}\right] =$
$$= f\left[g\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\right] = f\left[\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2 + 1\right] = \boxed{1}$$

c) $(h \circ g \circ f)\,(x) = (h \circ g)\left[f(x)\right] = (h \circ g)\left[1\right] =$
$$= h\left[g(1)\right] = h\left[2\right] = \frac{1}{2^2+1} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

21 **La función $f(x) = \left(\frac{x+2}{x}\right)^3$ es una función compuesta de dos funciones, ¿cuáles son?**

$f(x) = (g \circ h)\,(x)$ siendo $h(x) = \frac{x+2}{x}$ y $g(x) = x^3$

Comprobación:
$$(g \circ h)\,(x) = g\left[h(x)\right] = g\left[\frac{x+2}{x}\right] = \left(\frac{x+2}{x}\right)^3 = f(x)$$

21 **Sea la función $f(x) = \frac{3x-1}{4}$ y $g(x) = 2 - 5\,x$. Comprueba que $\left[f \circ g\right]^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.**

- $(f \circ g)\,(x) = f\left[g(x)\right] = f\left[2-5x\right] = \frac{3(2-5x)-1}{4} = \frac{5-15x}{4}$
  $$y = \frac{5-15x}{4} \Rightarrow x = \frac{5-4y}{15} \Rightarrow (f \circ g)^{-1}(x) = \frac{5-4x}{15}$$
- $f(x) = \frac{3x-1}{4} \Rightarrow y = \frac{3x-1}{4} \Rightarrow x = \frac{1+4y}{3} \Rightarrow$
  $$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1+4x}{3}$$
- $g(x) = 2 - 5x \Rightarrow y = 2 - 5x \Rightarrow x = \frac{2-y}{5} \Rightarrow$
  $$\Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{2-x}{5}$$
  $$(g^{-1} \circ f^{-1})\,(x) = g^{-1}\left[f^{-1}(x)\right] = g^{-1}\left[\frac{1+4x}{3}\right] =$$
  $$= \frac{2-\frac{1+4x}{3}}{5} = \frac{5-4x}{15} \Rightarrow \boxed{(g^{-1} \circ f^{-1})\,(x) = \frac{5-4x}{15}}$$

Luego queda probado que: $(f \circ g)^{-1}\,(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})\,(x)$.

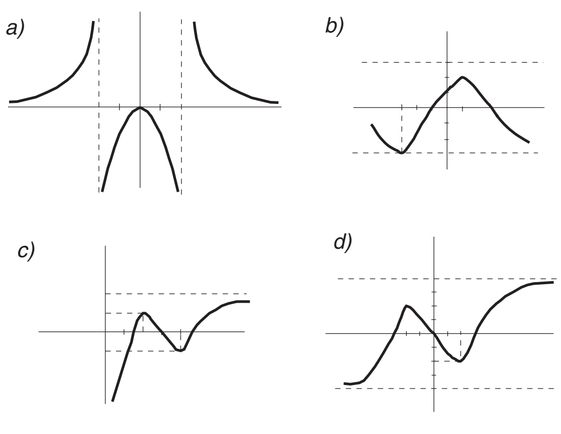
23 **Dibuja las gráficas correspondientes a las funciones que verifican las siguientes condiciones:**

a) ***Dom f = R*** **– {+2, –2};** ***Im f = R*** **; estrictamente creciente en (–∞, –2) ∪ (–2, 0); estrictamente decreciente en (0, +2) ∪ (2, +∞) y** ***f*** **es par.**

b) ***Dom f = R*** **;** ***Im f*** **= [–3, 3); mínimo relativo en (–3, –3) y máximo relativo en el punto (1, 2).**

c) ***Dom f*** **= (0, +∞); f acotada superiormente por 2; máximo relativo en (2, 1) y mínimo relativo en el punto (4, –1).**

d) ***Dom f = R*** **;** ***Im f*** **= (–4, 4); máximo relativo en (–2, 2); mínimo relativo en el punto (2, –2) y** ***f*** **impar.**



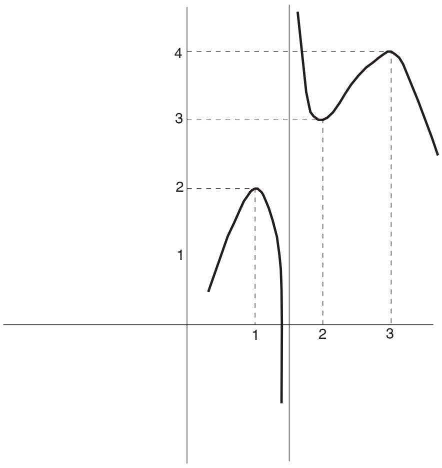
24 **Encuentra el dominio de las siguientes funciones:**

$$f(x) = \frac{ln\ x}{x} \qquad g(x) = \frac{e^x}{x} \qquad h(x) = \frac{x}{e^x}$$

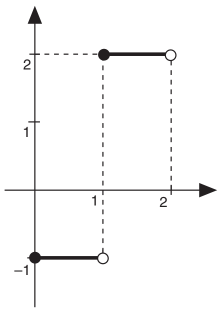
Dom $f = R^+ - \{0\} \Rightarrow$ *Dom* $f = (0, +\infty)$
Dom $g = R - \{0\}$
Dom $h = R$

Actividades propuestas en pruebas de acceso a la Universidad

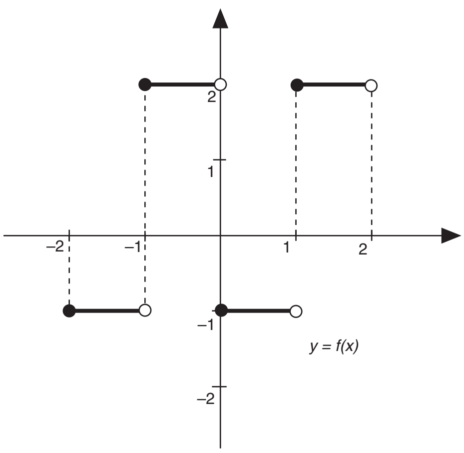
25 **Dibuja, si es posible, la gráfica de una función f que verifique $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4$ y que alcance en $x = 1$ y $x = 3$ sendos máximos relativos y en $x = 2$ un mínimo relativo.**



26 **La figura adjunta representa la gráfica de una función $y = f(x)$ en el intervalo [0, 2). Dibuja la gráfica de dicha función en el intervalo [–2, 2) y determina su expresión analítica en cada uno de los siguientes casos:**
a) ***f*** **es periódica de período 2.**
b) ***f*** **es par.**
c) ***f*** **es impar.**

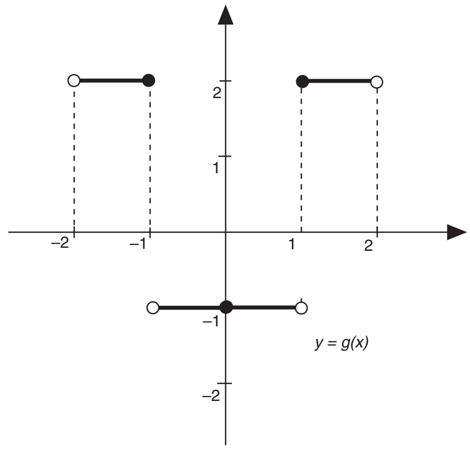


a)



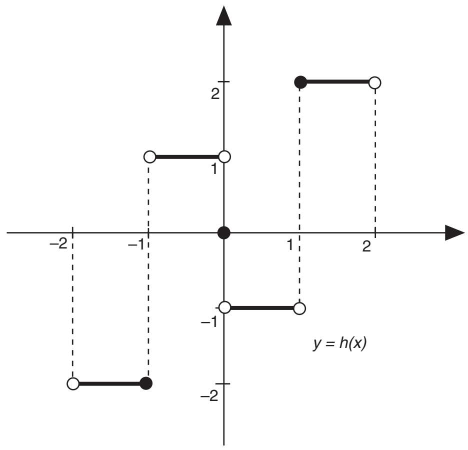
$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } 0 \le x < 1 \text{ y } -2 \le x < -1 \\ 2 \text{ si } 1 \le x < 2 \text{ y } -1 \le x < 0 \end{cases}$$

b)



$$g(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } -1 < x < 1 \\ 2 \text{ si } -2 < x \le -1 \text{ y } 1 \le x < 2 \end{cases}$$

c)



$$h(x) = \begin{cases} -2 \text{ si } -2 < x \le -1 \\ 1 \text{ si } -1 < x \le 0 \\ -1 \text{ si } -0 \le x < 1 \\ 2 \text{ si } 1 \le x < 2 \\ o \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

27 **Estudia el dominio de las funciones:**

$$f(x) = ln\left(\frac{x+2}{x^2}\right) \qquad g(x) = \frac{x\ (lnx)^2}{(x-1)^2}$$

Dom $f = \left\{x \in R \mid \frac{x+2}{x^2} > 0\right\} = [-2, 0) \cup (0, +\infty)$

Dom $g = \{x \in R \mid (x-1)^2 \neq 0 \text{ y } x > 0\} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ *Dom* $f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

28 **Un establecimiento de hostelería abre sus puertas a las 9 de la noche, sin ningún cliente, y las cierra cuando todos se han marchado. Se supone que la función que representa el número de clientes, *C*, en función del número de horas que lleva abierto el establecimiento, *h*, es: $C = 80h - 10h^2$.**
a) **Determina el número máximo de clientes que van una determinada noche al establecimiento.**

b) **Si deseamos ir cuando haya menos de 150 personas y más de 70, ¿entre qué horas debemos hacerlo?**

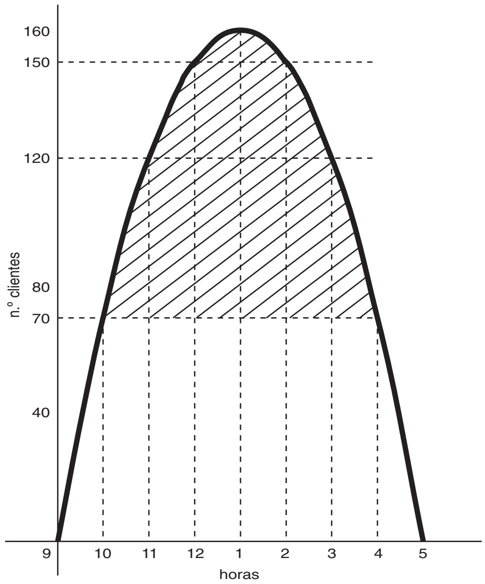
c) **Si deseamos ir cuando haya menos de 150 personas y más de 70 y, además, queremos que durante nuestra estancia disminuya el número de clientes, ¿entre qué horas debemos ir?**

d) **¿A qué hora cierra el establecimiento?**

$C = 80\,h - 10\,h^2$ $\quad$ C = número de clientes

h = n.º de horas a partir de 9

Hacemos un gráfico que ilustre la situación:



a) El número máximo de clientes es de 160.

$$b)\ 70 < 80\ h - 10\,h^2 < 150 \Rightarrow \begin{cases} 10\,h^2 - 80\,h + 70 < 0 \\ \text{y } 10\,h^2 - 80\,h + 150 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} \text{Sol} = (1, 7) \\ \text{Sol} = (-\infty, 3) \cup (5, +\infty) \end{cases}\right\} \Rightarrow \text{Solución} = (1, 3) \cup (5, 7)$$

Hay que ir entre las 10 y las 12 de la noche o bien entre las 2 y las 4 de la madrugada.

Corresponde a la zona rayada de la gráfica.

c) Debemos ir entre las 2 y las 4 de la madrugada. Corresponde a la zona de la derecha, dentro de la zona rayada.

d) El establecimiento cierra a las 5 de la madrugada.

29 **Se sabe que $y = f(x)$, $y = g(x)$ son dos funciones crecientes en $x = a$. Analiza si la curva $y = f(x) - g(x)$ ha de ser, entonces, creciente en $x = a$. Si la respuesta es afirmativa, justifícala y en caso contrario pon un contraejemplo.**

La curva $y = f(x) - g(x)$ no tiene por qué ser creciente. Por ejemplo:

$f(x) = x$ es creciente en $x = 1$

$g(x) = 2x$ es creciente en $x = 1$

$y = f(x) - g(x) = x - 2x = -x$ es decreciente en $x = 1$.

30 **Define y dibuja la función:**

$$f(x) = \big|\,|x| - 1\,\big| + \big|x^2 + 2|x|\,\big|.$$

$$\big|\,|x| - 1\big| = \begin{cases} |x| - 1 \text{ si } |x| - 1 \ge 0 \\ -\big[|x| - 1\big] \text{ si } |x| - 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 1 \text{ si } x \ge 1 \\ -x - 1 \text{ si } x \le -1 \\ -x + 1 \text{ si } 0 < x < 1 \\ x + 1 \text{ si } -1 < x < 0 \end{cases}$$

$$\big|x^2 + 2|x|\,\big| = x^2 + 2|x| = \begin{cases} x^2 + 2x \text{ si } x \ge 0 \\ x^2 - 2x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{f}(x) = \big|\,|x| - 1\big| + \big|x^2 + 2|x|\,\big| = \begin{cases} x^2 - 3x - 1 \text{ si } x \le -1 \\ x^2 - x + 1 \text{ si } -1 < x < 0 \\ x^2 + x + 1 \text{ si } 0 \le x < 1 \\ x^2 + 3x - 1 \text{ si } x \ge 1 \end{cases}$$

31 **La función $f(x) = \dfrac{ln\ x}{x}$ tiene un máximo relativo en el punto de abscisa «e». Demuestra que se verifica: $x^e < e^x$; $\forall\ x > 0$.**

La función $f(x) = \dfrac{ln\ x}{x}$ tiene un máximo relativo en el punt

$$p\,\big(e, f(e)\big) = \left(e, \frac{1}{e}\right). \text{ Luego } \frac{ln\ x}{x} < \frac{1}{e} \Rightarrow e\ ln\,x < x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ln\ x^{e} < x \Rightarrow \boxed{x^{e} < e^{x}}\ \forall x > 0$$

32 **Calcula el valor de $a = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + ...}}}$ sabiendo que es solución de la ecuación: $x^4 - 4\,x^2 - x + 2 = 0$**

La ecuación $x^4 - 4x^2 - x + 2 = 0$ tiene como soluciones:

$$x = 2\ ;\ x = -1\ ;\ x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\ ;\ x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$a = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + ...}}} \Rightarrow a^2 = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + ...}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - 2 = a \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2 \text{ ó } a = -1$$

La solución válida es $\boxed{a = 2}$, pues a no puede ser < 0