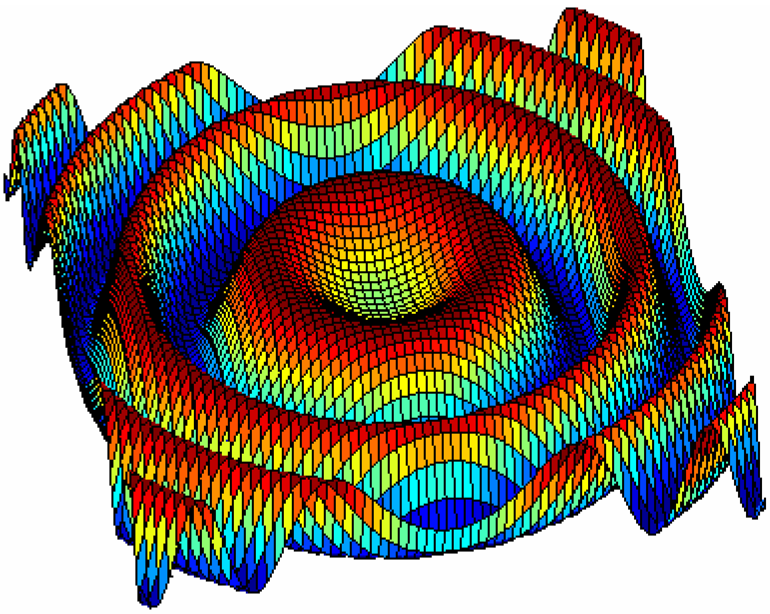
Ejercicios de matemáticas de 4º de ESO



Algunos trucos de cálculo son bastante fáciles, otros son muy difíciles. Los tontos que escriben los libros de matemáticas avanzadas pocas veces se toman la molestia de mostrar cuán fáciles son los cálculos fáciles. ***Silvanus P. Thomson.***

Edición 1.0

Índice.

Temario de 4º ESO de Matemáticas.

Decreto 23/2007, de 10 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece en la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria.

Opción A

1. Números.

1.1. Operaciones con números enteros, fracciones y decimales.
1.2. Decimales infinitos no periódicos: números irracionales.
1.3. Expresión decimal de los números irracionales.
1.4. Notación científica. Operaciones sencillas con números en notación científica con y sin calculadora.
1.5. Potencias de exponente fraccionario. Operaciones con radicales numéricos sencillos.
1.6. Interpretación y utilización de los números y las operaciones en diferentes contextos, eligiendo la notación y precisión más adecuadas en cada caso.
1.7. Proporcionalidad directa e inversa: resolución de problemas.
1.8. Los porcentajes en la economía. Aumentos y disminuciones porcentuales. Porcentajes encadenados. Interés simple y compuesto.
1.9. Uso de la hoja de calculo para la organización de cálculos asociados a la resolución de problemas cotidianos y financieros.
1.10. Intervalos: tipos y significado.
1.11. Representación de números en la recta numérica.

2. Álgebra.

2.1. Valor numérico de polinomios y otras expresiones algebraicas.
2.2. Suma, resta y producto de polinomios.
2.3. Identidades notables: estudio particular de las expresiones $(a + b)^2$, $(a – b)^2$ y $(a + b)\cdot(a – b)$. Factorización de polinomios.
2.4. Resolución algebraica y gráfica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
2.5. Resolución de problemas cotidianos y de otros campos de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas.
2.6. Resolución de otros tipos de ecuaciones mediante aproximaciones sucesivas con ayuda de la calculadora científica o gráfica.

3. Geometría.

3.1. Aplicación de la semejanza de triángulos y el teorema de Pitágoras para la obtención indirecta de medidas. Resolución de problemas geométricos frecuentes en la vida cotidiana.
3.2. Utilización de otros conocimientos geométricos en la resolución de problemas del mundo físico: medida y cálculo de longitudes, áreas, volúmenes, etc.
3.3. Iniciación a la geometría analítica plana: coordenadas de un punto; distancia entre dos puntos.

4. Funciones y gráficas.

4.1. Funciones. Estudio gráfico de una función.
4.2. Características de las graficas: crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, continuidad, simetrías y periodicidad.
4.3. Interpretación de un fenómeno descrito mediante un anunciado, tabla gráfica o expresión algebraica. Análisis de resultados utilizando el lenguaje matemático adecuado.

4.4. Estudio y utilización de otros modelos funcionales no lineales: exponencial y cuadrática. Utilización de las tecnologías de la información para su análisis.
4.5. La tasa de variación como medida de la variación de una función en un intervalo. Análisis de distintas formas de crecimiento en tablas, gráficas y enunciados verbales.

5. Estadística y probabilidad.
5.1. Estadística descriptiva unidimensional. Identificación de las fases y tareas de un estudio estadístico a partir de situaciones concretas cercanas al alumno.
5.2. Análisis elemental de la representatividad de las muestras estadísticas.
5.3. Variable discreta. Elaboración e interpretación de tablas de frecuencias y de gráficos estadísticos: gráficos de barras, de sectores, diagramas en caja y polígonos de frecuencias. Uso de la hoja de cálculo.
5.4. Cálculo e interpretación de los parámetros de centralización y dispersión para realizar comparaciones y valoraciones.
5.5. Variable continua: Intervalos y marcas de clase. Elaboración e interpretación de histogramas. Uso de la hoja de cálculos.
5.6. Azar y probabilidad. Idea de experimento aleatorio y suceso. Frecuencia y probabilidad de un suceso.
5.7. Experiencias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para la asignación de probabilidades.
5.8. Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar.

Opción B

1. Números.
1.1. Reconocimiento de números que no pueden expresarse en forma de fracción: números irracionales.
1.2. Iniciación al número real: representación sobre la recta real. Intervalos. Tipos y significado.
1.3. Interpretación y uso de los números reales en diferentes contextos eligiendo la notación y aproximación adecuadas en cada caso.
1.4. Potencias de exponente fraccionario y radicales. Radicales equivalentes. Operaciones elementales con radicales. Simplificación de expresiones radicales sencillas.
1.5. Utilización de la jerarquía y propiedades de las operaciones para realizar cálculos con potencias de exponente entero y fraccionario y radicales sencillos.
1.6. Cálculo con porcentajes. Interés compuesto.
1.7. Utilización de la calculadora para realizar operaciones con cualquier tipo de expresión numérica. Cálculos aproximados Reconocimiento de situaciones que requieran la expresión de resultados en forma radical.

2. Álgebra.
2.1. Raíces de un polinomio. Factorización de polinomios.
2.2. Regla de Ruffini. Utilización de las identidades notables y de la regla de Ruffini en la descomposición factorial de un polinomio.
2.3. Resolución algebraica de ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita.
2.4. Resolución algebraica y gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
2.5. Uso de la descomposición factorial para la resolución de ecuaciones de grado superior a dos y simplificación de fracciones.
2.6. Resolución de problemas cotidianos y de otros campos de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas.

2.7. Resolución de otros tipos de ecuaciones mediante aproximaciones sucesivas con ayuda de los medios tecnológicos.
2.8. Inecuaciones y sistemas de inecuaciones de primer grado con una incógnita. Interpretación gráfica.
2.9. Planteamiento y resolución de problemas en diferentes contextos utilizando inecuaciones.

3. Geometría.

3.1. Figuras y cuerpos semejantes: razón entre longitudes, áreas y volúmenes de figuras semejantes.
3.2. Teorema de Tales. Aplicación al cálculo de medidas indirectas.
3.3. Razones trigonométricas de un ángulo agudo. Relaciones entre ellas.
3.4. Relaciones métricas en los triángulos. Resolución de triángulos rectángulos.
3.5. Uso de la calculadora para la obtención de ángulos y razones trigonométricas.
3.6. Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes.
3.7. Iniciación a la geometría analítica plana: coordenadas de un punto; distancia entre dos puntos. Representación de las soluciones de una ecuación de primer grado con dos incógnitas.

4. Funciones y gráficas.

4.1. Funciones: Expresión algebrica, variables, dominio y estudio gráfico.
4.2. Características de las gráficas: crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, continuidad, simetrías y periodicidad.
4.3. Estudio y representación gráfica de las funciones polinómicas de primer o segundo grado, de proporcionalidad inversa y de las funciones exponenciales y logarítmicas sencillas. Aplicaciones a contextos y situaciones reales.
4.4. Uso de las tecnologías de la información en la representación, simulación y análisis gráfico.
4.5. Funciones definidas a trozos. Búsqueda e interpretación de situaciones reales.
4.6. Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión algebraica. Análisis de resultados utilizando lenguaje matemático adecuado.
4.7. La tasa de variación como medida de la variación de una función en un intervalo. Análisis de distintas formas de crecimiento en tablas, gráficas y enunciados verbales.
4.8. Interpretación, lectura y representación de gráficas en la resolución de problemas relacionados con los fenómenos naturales y el mundo de la información.

5. Estadística y probabilidad.

5.1. Estadística descriptiva unidimensional. Identificación de las fases y tareas de un estudio estadístico.
5.2. Análisis elemental de la representatividad de las muestras estadísticas.
5.3. Variable discreta. Elaboración e interpretación de tablas de frecuencias y de gráficos estadísticos: gráficos de barras, de sectores, diagramas de caja y polígonos de frecuencias.
5.4. Cálculo e interpretación de los parámetros de centralización y dispersión: media, mediana, moda, recorrido y desviación típica para realizar comparaciones y valoraciones.
5.5. Representatividad de una distribución por su media y desviación típica o por otras medidas ante la presencia de descentralizaciones, asimetrías y valores atípicos. Valoración de la mejor representatividad, en función de la existencia o no de valores atípicos.

Bibliografía de consulta y software.

- Problemas de 4º de ESO de Isaac Musat (Gratuito en www.musat.net)
- 2000 Problemas de Matemáticas. S. Álvarez Areces, M. Fernandez Flores. Ed: Everest.
- Matemáticas 4º de ESO, opción A y B. J. Colera, R. García, M.J. y otros. Ed: Anaya.
- Matemáticas 4º de ESO, opción A y B. J. R. Vizmanos, M. Anzola y otros. Ed SM.
- Matemáticas 4º de ESO, opción B. J.L. Sanchez González y Juan Vera López. Ed: Oxford educación.
- Ejercicios de repaso de 4º de ESO del Colegio de Nuestra Señora de la Consolación. Antonio Cartas Martín.

Se recomienda además, bajar de Internet el programa Graphmatica, el cual será muy útil para funciones. El Derive es también un estupendo programa, se puede bajar desde la web de Isaac Musat (www.musat.net).

Ejercicios de números.

1º Expresa los siguientes números en notación científica:

a) 1000	b) 13.15	c) 1000000	d) 0.000323
e) 0.0035	f) 0.00000034	g) 6534532	h) 0.000075
i) 34567.67	j) 0.00257	k) 34587.23	l) 25348.32

Sol: a) 10^3; b) $1.31\cdot 10$; c) 10^6; d) $3.23\cdot 10^{-4}$; e) $3.5\cdot 10^{-3}$; f) $3.4\cdot 10^{-7}$; g) $6.53\cdot 10^6$;
h) $7.5.10^{-5}$; i) $3,46.10^4$; j) $2.57.10^{-3}$; k) $3.46.10^4$; l) $2.53.10^4$.

2º Expresa con todas sus cifras los siguientes números en notación científica:

a) $4.15.10^3$ b) $1,24.10^{-3}$ c) $3,25.10^{-2}$ d) $3,14.10^5$ e) $2,18.10^4$

Sol: a) 4150; b) 0.00124; c) 0.0325; d) 314000; e) 21800.

3º Redondea hasta las milésimas los siguientes números:

a) 1.23456 b) 1.34511 c) 45.32157 d) 32.2357 e) 0.03247

Sol: a) 1.235; b) 1.345; c) 45.322; d) 32.236; e) 0.032.

4º ¿Cuántas cifras significativas reconocemos en cada uno de los siguientes números?

a) 450	b) 98.6	c) 0.0033	d) 902.10
e) 0.02173	f) 4000	g) 7.02	h) 67000000

Sol: a) tres; b) tres; c) dos; d) cinco; e) cuatro; e) cuatro; f) cuatro; g) tres; h) ocho.

5º Clasifique los siguientes números decimales y páselos a fracciones después:

a) 1.25	b) 75.2	c) 678.98	d) 9.34
e) 0.78787878…	f) 0.88888…	g) 0.678678678…	h) 0.3333…
i) 1.1111…	j) 2.33333…	k) 5.98989898…	l) 76.767676…
m) 1.258888…	n) 1.89999…	ñ) 26.415151515…	o) 98.0123123123…

Sol: a) Exacto, 27/20; b) Exacto, 376/5; c) Exacto, 33949/50; d) Exacto, 467/50;
e) Periódico puro, 26/33; f) Periódico puro, 8/9; g) Periódico puro,226/333;
h) Periódico puro, 1/3; i) Periódico puro, 10/9; j) Periódico puro, 7/3;
k) Periódico puro, 7600/99; l) Periódico mixto, 1133/900;
m) Periódico mixto, 1133/900; n) Periódico mixto, 19/10;
ñ) Periódico mixto, 8717/330; o) Periódico mixto, 979143/9990.

6º Clasifique cada uno de los siguientes números en naturales, enteros, racionales, reales y complejos ubicándolos en el conjunto numérico más pequeño al que pertenezcan:

a) 1.25	b) 2.45	c) 33	d) -45	e) 1.32461...	f) 1.11...
g) 1.21212...	h) $\sqrt{-1}$	i) $-\dfrac{6}{2}$	j) π	k) $\sqrt{4}$	l) $\sqrt{-4}$

Sol: a) $\mathbb{Q}$; b) $\mathbb{Q}$; c) $\mathbb{N}$; d) $\mathbb{Z}$; e) $\mathbb{R}$; f) $\mathbb{Q}$; g) $\mathbb{Q}$; h) $\mathbb{C}$; i) $\mathbb{Z}$; j) $\mathbb{R}$; k) $\mathbb{N}$; l) $\mathbb{C}$.

7º ¿Cuáles de los siguientes números son irracionales?

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{9}$ c) $\sqrt{-3}$ d) 2.718281… f) $\sqrt{7+\sqrt{4}}$

Sol: Solamente los de los apartados a) y d).

8º Usa tu calculadora científica para calcular los siguientes números y expresa el resultado en notación científica y con tres cifras significativas debidamente redondeadas:

a) $\sqrt[3]{2}$ b) $5.23^{6.1}$ c) $\sqrt[6]{9.5^5}$ d) $\sqrt[7]{4.56^{2.2}}$ e) $5^{5.6}$ f) $\sqrt[16]{9.81^{65}}$

Sol: a) 1.260; b) $2.41\cdot 10^4$; c) 6.53; d) 1.61; e) $8.21\cdot 10^3$; f) $1.07\cdot 10^4$.

Ejercicios de números enteros.

1º Calcula:

a) $5-3-7+1+8$ b) $2-3+4+1-8+2$
c) $1-3+5-7+9-11$ d) $2+4-6-8+10-12+14$
e) $1-2+3-4+5-6+7-8$ f) $3-2+5+7-3-5+2-2$
g) $2-1-4-6+6+7-2-5+3$ h) $2+4+5+3-4-5-7+3-6$
i) $3-2-5-2+1+2+7-4-2-1$ j) $5-6+7-2+5+8-6+3-1-7$

Sol: a) 4; b) –2; c) –6; d) 4; e) –4; f) 5; g) 0; h) –4; i) –3; j) 6.

2º Quita paréntesis y después opera:

a) $1-(7-2-10)-(3-8)$ b) $(8-4-3)-(5-8-1)$
c) $(3-5)-(1-4)+(5-8)$ d) $3-(5-8)-(11-4)+(13-9)$
e) $(2-6-3)+(5-3-1)-(2-4-6)$ f) $(8-11-5)-(12-13)+(11+4)$
g) $15+(6-18+11)-(7+15-19)-(2+6)$ h) $3-\left[(5-8)-(3-6)\right]$
i) $1-\left(3-\left[4-(1-3)\right]\right)$ j) $(2+7)-\left(5-\left[6-(10-4)\right]\right)$

Sol: a) 11; b) 5; c) –2; d) 3; e) 2; f) 8; g) 3; h) 3; i) 4; j) 4.

3º Calcula:

a) $(-7)\cdot(+11)$ b) $(-6)\cdot(-8)$ c) $(+5)\cdot(+7)\cdot(-1)$
d) $(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)$ e) $(-45):(+3)$ f) $(+85):(+17)$
g) $(+36):(-12)$ h) $(-85):(-5)$ i) $(+400):(-40):(-5)$
j) $(+400):\left[(-40):(-5)\right]$ k) $(+7)\cdot(-20):(+10)$ l) $(+7)\cdot\left[(-20):(+10)\right]$
m) $(+300):(+30)\cdot(-2)$ n) $(+300):\left[(+30)\cdot(-2)\right]$ ñ) $(+40)\cdot(-4):\left[(5)\cdot(-16)\right]$

Sol: a) –77; b) 48; c) –35; d) –24; e) –15; f) 5; g) –3; h) 17; i) 2; j) 50; k) –14; l) –14; m) –20; n) –5; ñ) 2.

4º Calcula:

a) $6\cdot4-5\cdot6-2\cdot3$ b) $15-6\cdot3+2\cdot5-4\cdot3$
c) $5\cdot(-4)+(-2)\cdot4-6\cdot(-5)-3\cdot(-6)$ d) $18-3\cdot5+5\cdot(-4)-3\cdot(-2)$
e) $(-5)\cdot(8-13)$ f) $(2+3-6)\cdot(-2)$
g) $(+4)\cdot(1-9+2):(-3)$ h) $(-12-10):(-2-6-3)$
i) $13-\left[8-(6-3)-4\cdot3\right]:(-7)$ j) $5\cdot(8-3)-4\cdot(2-7)-5\cdot(1-6)$
k) $12\cdot(12-14)-8\cdot(16-11)-4\cdot(5-17)$ l) $18-40:(5+4-1)-36:12$
m) $4+36:9-50:\left[12+(17-4)\right]$ n) $48:\left[5\cdot3-2\cdot(6-10)-17\right]$
ñ) $3\cdot4-15:\left[12+4\cdot(2-7)+5\right]$ o) $4\cdot\left[-2+3\cdot\left(4+2\right)-2\right]:7$

Sol: a) –12; b) –5; c) 20; d) –11; e) 25; f) 2; g) 8; h) 2; i) 12; j) 70; k) –16; l) 10; m) 6; n) 8; ñ) 17; o) 8.

5º Calcule los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix}-5 & 9\\ 9 & 4\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}-3 & 2\\ -9 & 9\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}5 & 7\\ 6 & -4\end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix}4 & -5\\ 0 & -7\end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix}1 & 2\\ -4 & -8\end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix}-7 & -1\\ 6 & 3\end{vmatrix}$

Sol: a) –101; b) –9; c) –62; d) –28; e) 0; f) –15;

6º Calcule los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 9 & 4 & 6 \\ 6 & 6 & -7 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 8 & -3 & 0 \\ 2 & 7 & -8 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} -6 & -9 & -5 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & 4 & -7 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} -6 & -4 & 2 \\ 1 & 6 & -9 \\ -5 & -6 & 4 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 3 & -7 & 5 \\ 0 & -4 & 4 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 7 & -7 & 5 \\ 0 & -8 & 8 \end{vmatrix}$ i) $\begin{vmatrix} -3 & -4 & -5 \\ 1 & 9 & 9 \\ 4 & -2 & -5 \end{vmatrix}$

Sol: a) 92; b) 10; c) 74; d) 53; e) 98; f) 64; g) –100; h) –200; i) 107.

7º Calcula:

a) $(-2)^7$ b) $(-3)^5$ c) $(-5)^3$ d) $(-10)^3$ e) $(-1)^{16}$ f) $(-1)^{17}$

Sol: a) –128; b) –243; c) –125; d) –1000; e) 1; f) –1.

8º Calcular:

a) $(-2)^4\cdot(-2)^3$ b) $(+2)^3\cdot(-2)^3$ c) $(-3)^2\cdot(-5)^3$ d) $(-10)^{-2}\cdot(-10)^3$

e) $(-3)^5:(-3)^3$ f) $(-5)^6:(-5)^3$ g) $(-18)^2:(-3)^3$ h) $(-24)^4:(-6)^4$

Sol: a) –128; b) –64; c) 1125; d) –10; e) 9; f) –125; g) –12; h) 256.

9º Usando la calculadora, cuales de los siguientes números son primos o compuestos:

a) 142 b) 221 c) 253 d) 129 e) 193
f) 210 g) 191 h) 199 i) 151 j) 107

Sol: Son compuestos los números de los apartados a), b), c), d) y f), el resto son primos.

10º Descompón en factores primos:

a) 48 b) 54 c) 90 d) 105 e) 120
f) 135 g) 180 h) 378 i) 700 j) 1872

Sol: a) $2^4\cdot3$; b) $2\cdot3^3$; c) $2\cdot3^2\cdot5$; d) $3\cdot5\cdot7$; e) $2^3\cdot3\cdot5$; f) $3^3\cdot5$; g) $2^2\cdot3^2\cdot5$; h) $2\cdot3^3\cdot7$; i) $2^2\cdot5^2\cdot7$; j) $2^4\cdot3^2\cdot13$.

11º Calcula el mínimo común múltiplo de:

a) 12 y 15 b) 24 y 60 c) 48 y 54 d) 90 y 150
e) 6, 10 y 15 f) 8, 12 y 18 g) 12, 24 y 36 h) 7, 11 y 13

Sol: a) 60; b) 120; c) 432; d) 450; e) 30; f) 72; g) 72; h) 1001.

12º Calcula el máximo común divisor de:

a) 16 y 24 b) 48 y 72 c) 105 y 120 d) 135 y 180
e) 8, 12 y 16 f) 45, 60 y 105 g) 24, 36 y 40 h) 20, 30 y 50

Sol: a) 8; b) 24; c) 15; d) 45; e) 4; f) 15; g) 4; h) 10.

13º Calcula el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de:

a) 20 y 25 b) 48 y 69 c) 35 y 49
d) 100, 120 y 20 e) 66, 132 y 1100 f) 320, 256 y 500
g) 25, 30, 45 y 50 h) 14, 28, 42 y 84 i) 130, 200, 250 y 420

Sol: a) mcm = 100 y mcd = 5 ; b) mcm = 1104 y mcd = 3; c) mcm = 245 y mcd = 7;
d) mcm = 600 y mcd = 20; e) mcm = 3300 y mcd = 22; f) mcm = 32000 y mcd = 4;
g) mcm = 450 y mcd = 5; h) mcm = 84 y mcd = 14; i) mcm = 273000 y mcd = 10;

14º Una sirena suena cada 32 minutos, otra cada 16 minutos y otra cada hora. A las 12 h del día 1 de enero sonaron las tres a la vez, predecir cuando volverán a sonar las tres sirenas al mismo tiempo. **Sol:** A las 20 horas del 1 de enero.

15º Un barco pasa por un puerto cada 12 días, otro cada 8 días y otro cada 20 días. Si los tres barcos coincidieron un día, ¿Cuánto tiempo pasara hasta que vuelvan a coincidir?
Sol: Pasarán 120 días.

16º Las dimensiones de un paralelepípedo son 165 m, 21 m y 3 m. Se hacen construir cajas cúbicas con las que puede llenarse completamente el paralelepípedo. Hallar la arista de estas cajas cúbicas. **Sol:** 3 m de arista.

17º Un pasillo de 860 cm de largo y 240 cm de ancho se ha embaldosado con baldosas cuadradas, de la mayor dimensión posible, para caber un número entero de veces en cada lado.
a) ¿Cuánto mide el lado de cada baldosa?
b) ¿cuántas baldosas se emplearon?
Sol: a) 20 m; b) 516 baldosas.

18º Al contar las canicas de 4 en 4, de 5 en 5 y de 6 en 6, unos niños se dan cuenta de que cada vez le sobran dos. ¿Cuántas canicas son, sabiendo que es un número comprendido entre 100 y 150? **Sol:** 122 canicas.

19º Hallar el menor número que dividido por 5, 7 y 15 da siempre de resto 2. **Sol:** 107.

20º Un comerciante quiere poner en cajas 720 limones y 2160 naranjas, de modo que todas las cajas contengan el mismo número de limones o de naranjas, si además quiere sacar el mayor número posible de cajas. Halla el número de naranjas y limones en cada caja y el número de cajas necesarias. **Sol:** 720 cajas, y en cada una un limón y tres naranjas.

21º Un carpintero quiere cortar una tabla de madera de 256 cm de largo y 96 cm de ancho, en cuadrados lo más grandes posible.
a) ¿Cuál debe ser la longitud del lado de cada cuadrado?
b) ¿Cuántos cuadrados se obtienen de la plancha de madera?
Sol: a) 32 cm; b) 24 cuadrados.

22º Un coche precisa cambar el aceite cada 8000 km, el filtro del aire cada 12000 km y las bujías cada 20000 km. ¿A qué número mínimo de kilómetros habrá que hacerle todos los cambios a la vez? **Sol:** 120000 km.

23º Los coches del tipo A hay que echarles gasolina cada 300 km, los del tipo B cada 400 km y los del tipo C cada 500 km. Suponemos además que los conductores necesitan descanso cada 150 km. Si tenemos una carretera semidesierta de tamaño 1000 km, y el gobierno nos exige colocar gasolineras y áreas de descanso con una distancia igual máximo común divisor de las cantidades anteriormente mencionadas, ¿Cuántas gasolineras con áreas de descanso tendremos que poner? **Sol:** Cada 50 km.

Ejercicios de fracciones.

1º Simplificar las siguientes fracciones:

a) $\frac{54}{72}$ b) $\frac{48}{72}$ c) $\frac{15}{60}$ d) $\frac{96}{64}$ e) $\frac{140}{40}$ f) $\frac{192}{320}$ g) $\frac{125}{100}$ h) $\frac{256}{512}$

Sol: a) 3/4; b) 2/3; c) 1/4; d) 3/2; e) 7/2; f) 3/5; g) 5/4; h) 1/2.

2º Calcula y simplifica:

a) $\frac{12}{3}+\frac{3}{2}$ b) $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$

d) $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+1$ e) $3-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$ f) $\frac{1}{6}+2-\frac{1}{3}$

g) $2-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$ h) $\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-1$ i) $\frac{1}{6}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$

j) $2-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right)$ k) $\left(3-\frac{2}{3}\right)+\left(3-\frac{1}{4}\right)$ l) $\frac{2}{3}-2+\frac{1}{2}$

ll) $3-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$ m) $\frac{1}{3}-\left(2+\frac{1}{2}\right)$ n) $\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)$

ñ) $\frac{1}{3}+\frac{5}{4}+\frac{3}{2}$ o) $\frac{4}{3}+\frac{5}{3}-\frac{3}{2}$ p) $\frac{1}{3}+\frac{9}{5}-\frac{10}{6}$

Sol: a) 11/2; b) 19/30; c) 5/12; d) 5/4; e) 19/6; f) 11/6; g) 13/6; h) –13/12; i) –2/3; j) 7/6; k) 61/12; l) –5/6; ll) 13/6; m) –13/6; n) 1/12; ñ) 37/12; o) 3/2; p) 7/15.

3º Calcula y simplifica:

a) $\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{4}$ b) $\frac{3}{4}\cdot 2$ c) $\frac{1}{3}\cdot 6$ d) $\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{5}$ e) $\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{5}$

f) $\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}$ g) $\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{10}$ h) $\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}$ i) $\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{5}$ j) $\frac{7}{4}\cdot\frac{2}{3}$

Sol: a) 5/4; b) 3/2; c) 2; d) 3/5; e) 6/5; f) 4/5; g) 1/3; h) 1/6; i) 2; j) 7/6.

4º Calcula y simplifica:

a) $\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)$ b) $\left(\frac{2}{3}-2\right)\cdot\left(3-\frac{2}{3}\right)$ c) $\left(\frac{5}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)$

d) $\left(\frac{5}{2}-1\right)\cdot 3$ e) $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}$ f) $\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{6}+\frac{3}{2}$

g) $\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)-3\cdot\frac{1}{2}$ h) $\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\right)\cdot 4+\frac{1}{3}-2$ i) $\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{4}\right)-3\cdot\frac{1}{2}$

j) $\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+2\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)$ k) $\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}-\frac{3}{2}$ l) $\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}-\left(\frac{2}{6}+1\right)$

ll) $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{4}-\frac{1}{5}\right)-\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\right)$ m) $\frac{2}{4}-\frac{1}{2}+2\cdot\left(\frac{3}{5}-\frac{6}{10}\right)+\frac{2}{5}$ n) $\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)$

ñ) $3\cdot\left(\frac{2}{4}-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)$ o) $2\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{3}\right)$ p) $\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}$

Sol: a) –3/5; b) –28/9; c) 1/9; d) 9/2; e) 0; f) 3/2; g) –25/12; h) –19/15; i) –11/6; j) –19/12; k) –17/12; l) –7/6; ll) –17/30; m) 2/5; n) 3/26; ñ) 1/3; o) 79/30; p) 1.

5º Calcula y simplifica cuando sea preciso:

a) $\frac{1}{5}:\frac{5}{4}$ b) $\frac{4}{3}:\frac{5}{3}$ c) $\frac{1}{3}:\frac{10}{6}$ d) $\frac{3}{5}:\frac{10}{3}$ e) $\frac{3}{4}:\frac{5}{7}$ f) $\frac{4}{5}:\frac{1}{3}$

Sol: a) 4/25; b) 4/5; c) 1/5; d) 9/50; e) 21/20; f) 12/5.

6º Calcula y simplifica cuando sea preciso:

a) $\frac{1}{3}+2\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{4}:\frac{1}{3}$ b) $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right):\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}$ c) $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{6}:\frac{1}{3}$

d) $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right):\frac{1}{6}+\frac{1}{2}$ e) $\left(\frac{3}{2}:\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}:\frac{3}{2}$ f) $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}:\frac{2}{3}$

g) $\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\right):\left(\frac{3}{3}-\frac{1}{4}\right)$ h) $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{3}{6}\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)^{-1}$ i) $\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right)^{-1}\cdot\frac{2}{6}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)\cdot 2$

j) $\left(\frac{2}{6}+\frac{1}{3}\right)-\frac{2}{4}+\frac{1}{3}:\frac{2}{4}$ k) $\left(\frac{3}{6}+\frac{1}{4}\right)^{2}-\frac{1}{3}:\frac{2}{4}$ l) $\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{5}\right)^{-1}\cdot\frac{5}{2}+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}$

ll) $\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)^{-1}\cdot 2+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)^{-1}$ m) $\left(\frac{3}{3}-\frac{1}{4}\right)^{-1}\cdot\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}$ n) $\left(\frac{3}{2}:\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}:\frac{1}{2}\right)$

ñ) $\left(\frac{3}{6}+\frac{1}{2}\right)^{-1}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{4}:\frac{1}{2}$ o) $\left(\frac{3}{6}+1\right)^{-1}\cdot\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{4}+\frac{9}{12}\right)$ p) $\left(\frac{3}{6}+1\right)^{-1}\cdot\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{4}+\frac{9}{12}\right)$

q) $\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$ r) $\frac{2}{3}+3:\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\right)$ s) $\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right):\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}\right)$

Sol: a) 5/3; b) –1/4; c) 67/48; d) 3/2; e) 167/36; f) 5/12; g)7/3; h) -17/48; i) 5/42; j) 5/6; k) –5/48; l) 20/3; ll) –6/5; m) 17/12; n) 11/3; ñ) 2; o) 0; p) 0; q) –1; r) 56/3; s) –15/2;

7º Calcula y simplifica cuando sea necesario:

a) $\dfrac{\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{2}-1\right)}{\frac{3}{2}-1}$ b) $\dfrac{2\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{3}\right)}{-3\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)}$ c) $\dfrac{1-\frac{2}{3}}{\frac{3}{2}-1+\frac{1}{3}}$

d) $\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}-\frac{1}{3}+1}$ e) $\dfrac{\frac{2}{3}-1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}$ f) $\dfrac{2-\frac{1}{3}+1}{\frac{3}{2}-1+\frac{1}{3}}$

g) $\dfrac{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{2}{4}+\frac{5}{3}}{\frac{6}{3}+\frac{3}{2}+\frac{5}{6}-\frac{9}{4}}$ h) $\dfrac{\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{7}{3}-\frac{5}{2}\right)}{\frac{2}{3}+\frac{-5}{4}-\left(\frac{4}{2}-\frac{3}{4}\right)}$ i) $\dfrac{\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}}{\left(\frac{2}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\cdot 2}$

j) $\dfrac{\frac{3-5}{4+2}-\frac{7+4}{3+1}-\frac{5-2}{7-1}}{\frac{6+2}{5-4}-\frac{7-3}{6-2}+\frac{2+1}{3+3}}$ k) $\dfrac{\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{4}+\frac{1}{10}\right)\cdot\frac{3}{2}-\frac{1}{5}}{\left(\frac{2}{6}+\frac{1}{3}-\frac{6}{4}\right):\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}$ l) $\dfrac{\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{6}-\frac{2}{10}\right)+\frac{1}{6}-\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{4}:\frac{2}{3}}$

m) $\dfrac{-\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+(-3+2)}{-4+3-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{4}{16}}$ n) $\dfrac{\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{4}\right)-(3+2)}{-3+(3-1)\cdot(2-3)-2}$ ñ) $\dfrac{\frac{2}{4}+\frac{1}{3}}{\frac{3}{5}}-\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{6}{4}}$

o) $\dfrac{\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right)-\frac{2}{6}-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)\cdot 4}$ p) $\dfrac{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}}$ q) $\dfrac{\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{5}{2}-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)}$

Sol: a) 5/3; b) –2/21; c) 2/5; d) 3/26; e) –10/9; f) 16/5; g) 48/25 ; h) 23/110; i) 21/50; j) –43/90; k) –57/130; l) 82/65; m) 1; n) 1/7; ñ) 5/6; o) –1/6; p) 1/6; q) –11/3.

8º Calcula y simplifica:

a) $\dfrac{\left(\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{4}\right)-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}{\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)^{-1}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}}$ b) $\dfrac{\left(\frac{3}{3}\right)^{-8}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)^{-1}}{\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)}$ c) $\dfrac{\left(\frac{2}{4}+\frac{1}{3}\right)^{-1}\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{12}\right)}{\left(\frac{3}{6}+\frac{1}{3}\right)^{-1}\left(\frac{2}{4}+\frac{3}{9}\right)}$

d) $\left[\dfrac{\left(\frac{3}{6}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{6}+\frac{1}{3}\right)^{-1}}{\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)^{-1}}\right]^{-2}$ e) $\dfrac{\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\right)^{-1}-\left(\frac{3}{6}+\frac{7}{12}\right)^{-1}}{\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{6}\right)^{-24}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)^{37}}$ f) $\dfrac{\left[\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{6}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)-1\right]^{-1}}{\left[\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{5}\right)^{-1}\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{6}\right)^{-1}\right]^{-1}}$

g) $\dfrac{\left(\frac{3}{3}+\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)^{-1}\frac{1}{2}}{\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right)^{-1}-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{6}}$ h) $\dfrac{\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{5}\right)-\frac{4}{3}:\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1/4}{1/6}\right)^{-1}}$ i) $\dfrac{\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right]^{-1}}{\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\left(3^{-1}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)^{-1}}$

j) $\dfrac{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)\cdot 3+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)^{-1}}{\left(\frac{3}{6}+\frac{1}{3}\right)^{-1}\frac{2}{4}+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)^{-1}}$ k) $\dfrac{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{-2}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}}{\left(\frac{2}{4}-\frac{3}{6}\right)\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}}$ l) $\dfrac{\left[\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right)\frac{6}{4}-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)\right]^{-1}}{2\left(\frac{2}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)}$

Sol: a) 26/81; b) 1872; c) 1; d) $(24/5)^2$; e) 0; f) 88/39; g) 26/81; h) 132/13; i) 7/384; j) –85/72; k) –49/9; l) 2.

9º Juan tiene ahorrados 18000 €. Cuando se fue de vacaciones se gastó 4/12 de sus ahorros. ¿Cuánto le queda ahorrado? **Sol:** 12000 €.

10º Entre tres empresarios deben repartirse 12000 €. El primero se lleva 7/15 del total, el segundo 5/12 del total y el tercero el resto. ¿Cuánto dinero se ha llevado cada uno?
Sol: El primero 5600 €, el segundo 5000 € y el tercero 1400 €.

11º Hoy he perdido 20 cromos que son 5/12 de los que tenía. ¿Cuántos cromos tenía? **Sol:** 48.

12º Alfonso dispone de 600 € para compras. El jueves gastó 1/5 de esa cantidad y el sábado los 3/4 de lo que le quedaba. ¿Cuánto le queda al final? **Sol:** 360 €.

Ejercicios de radicales.

1º Extrae todos los factores posibles de los siguientes radicales:

a) $\sqrt{2^5\cdot 3^{10}\cdot 7^{11}}$ b) $\sqrt[3]{2^6\cdot 3^9\cdot 5^3}$ c) $\sqrt{2^3\cdot 3^2\cdot 5^3}$ d) $\sqrt[3]{3^2\cdot 2^4\cdot 5}$

e) $\sqrt{3\cdot 2^5\cdot 5^3}$ f) $\sqrt[4]{3^6\cdot 2^4\cdot 5^5}$ g) $\sqrt{a^2\cdot b^3\cdot c}$ h) $\sqrt{x^3\cdot a^2\cdot c^3}$

Sol: a) $2^2\cdot 3^5\cdot 7^5\cdot\sqrt{2\cdot 7}$; b) $2^2\cdot 3^3\cdot 5$; c) $2\cdot 3\cdot 5\cdot\sqrt{2\cdot 5}$; d) $2\cdot\sqrt[3]{3^2\cdot 2\cdot 5}$; e) $2^2\cdot 5\sqrt{3\cdot 2\cdot 5}$; f) $3\cdot 2\cdot 5\cdot\sqrt[4]{3^2\cdot 5}$; g) $a\cdot b\cdot\sqrt{b\cdot c}$; h) $x\cdot a\cdot c\cdot\sqrt{x\cdot c}$.

2º Calcula sin usar la calculadora las siguientes raíces:

a) $\sqrt{49\cdot 36\cdot 100}$ b) $\sqrt{25\cdot 9\cdot 100}$ c) $\sqrt{625:25}$ d) $\sqrt{16:4}$

e) $\sqrt{81\cdot 4\cdot 25}$ f) $\sqrt{36\cdot 49\cdot 9}$ g) $\sqrt{25\cdot 100}$ h) $\sqrt{81\cdot 16\cdot 25}$

Sol: a) 420; b) 150; c) 5; d) 2; e) 90; f) 216; g) 50; h) 180.

3º Calcula por descomposición factorial, las siguientes raíces:

a) $\sqrt{62500}$ b) $\sqrt{360000}$ c) $\sqrt{2025}$ d) $\sqrt{4000000}$ e) $\sqrt{2500}$

f) $\sqrt{122500}$ g) $\sqrt{22500}$ h) $\sqrt{5625}$ i) $\sqrt{3600}$ j) $\sqrt{40000}$

Sol: a) 250; b) 600; c) 45; d) 2000; e) 50; f) 350; g) 150; h) 75; i) 60; j) 200.

4º Simplifica las expresiones:

a) $3\cdot\sqrt[3]{2}+4\cdot\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{2}$ b) $2\cdot\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{3}-9\sqrt{3}$ c) $\sqrt{50}-\sqrt{72}-2\sqrt{2}$

d) $\sqrt{8}-3\cdot\sqrt{2}+4\cdot\sqrt{18}+\sqrt{50}$ e) $\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{12}+5\cdot\sqrt{27}$ f) $\sqrt{12}+5\cdot\sqrt{3}-\sqrt{27}$

g) $\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{3}$ h) $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{8}-\sqrt{2}$ i) $\sqrt{45}-\sqrt{20}+\sqrt{80}-\sqrt{5}$

j) $\sqrt{27}-\sqrt{12}-\sqrt{75}+\sqrt{3}$ k) $\sqrt{18}-3\cdot\sqrt{8}-\sqrt{2}+5\cdot\sqrt{2}$ l) $\sqrt{45}-\sqrt{20}+\sqrt{180}$

Sol: a) $5\cdot\sqrt[3]{2}$; b) $-4\sqrt{3}$; c) $-3\cdot\sqrt{2}$; d) $16\cdot\sqrt{2}$; e) $10\sqrt{2}$; f) $4\cdot\sqrt{3}$; g) 0; h) $5\sqrt{2}$; i) $4\cdot\sqrt{5}$; j) $-3\sqrt{3}$; k) $\sqrt{2}$; l) $7\cdot\sqrt{5}$.

5º Introduce en el radical los factores que aparecen fuera de él:

a) $2\cdot\sqrt{5}$ b) $5\cdot\sqrt{3}$ c) $2\cdot\sqrt[3]{3}$ d) $4\cdot\sqrt{3}$ e) $3\cdot\sqrt{2}$

f) $3\cdot\sqrt[3]{3}$ g) $2\cdot\sqrt[4]{3}$ h) $7\cdot\sqrt{3}$ i) $4\cdot\sqrt[3]{2}$ j) $2\cdot\sqrt[5]{2}$

Sol: a) $\sqrt{20}$; b) $\sqrt{75}$; c) $\sqrt[3]{24}$; d) $\sqrt{48}$; e) $\sqrt{18}$; f) $\sqrt[3]{81}$; g) $\sqrt[4]{48}$; h) $\sqrt{147}$; i) $\sqrt[3]{128}$; j) $\sqrt[5]{64}$.

6º Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\left(\sqrt[5]{3}\right)^5$ b) $\left(\sqrt[6]{2^4}\right)^3$ c) $\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\right)^2$ d) $\left(2\cdot\sqrt{3}\right)^2$ e) $\left(\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{2}\right)^6$

f) $\left(3\cdot\sqrt{2}\right)^2$ g) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ h) $\left(\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}\right)^6$ i) $\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{2}\right)^4$ j) $\left(\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2^2}\right)^3$

Sol: a) 3; b) 4; c) 6; d) 12; e) 32; f) 18; g) 3/4; h) 9/4; i) 18; j) 12.

7º Simplifica y extrae todo lo que puedas:

a) $\dfrac{3\cdot\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{3\cdot\sqrt{32}-2\cdot\sqrt{8}}{\sqrt{8}}$ c) $\dfrac{\sqrt{8}-\sqrt{32}+3\cdot\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$

Sol: a) 12; b) 4; c) 16.

8º Racionaliza las siguientes fracciones:

a) $\frac{3}{2\sqrt{5}}$ b) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$ d) $\frac{7-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ e) $\frac{\sqrt{6}-1}{2\sqrt{5}}$ f) $\frac{28}{3\sqrt{7}}$

g) $\frac{3}{\sqrt[3]{6}}$ h) $\frac{4}{\sqrt[4]{2}}$ i) $\frac{4}{\sqrt[4]{8}}$ j) $\frac{5}{\sqrt[4]{125}}$ k) $\frac{4}{\sqrt[6]{12}}$ l) $\frac{5}{\sqrt[5]{27}}$

m) $\frac{3}{\sqrt{5}+2}$ n) $\frac{8}{6-\sqrt{12}}$ ñ) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ o) $\frac{2\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2}$ p) $\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ q) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

r) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ s) $\frac{2}{1+\sqrt{2}}$ t) $\frac{7}{3-\sqrt{2}}$ u) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ v) $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+3}$ w) $\frac{10}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

Sol: a) $3\cdot\sqrt{5}/10$; b) $\sqrt{6}$; c) $4\cdot\sqrt{3}$; d) $\frac{7\sqrt{3}-6}{3}$; e) $\frac{\sqrt{30}-\sqrt{5}}{10}$; f) $\frac{4\sqrt{7}}{3}$; g) $\frac{\sqrt[3]{36}}{6}$;

h) $2\cdot\sqrt[4]{8}$; i) $2\cdot\sqrt[4]{2}$; j) $\sqrt[4]{5}$; k) $\frac{2\cdot\sqrt[6]{12^5}}{3}$; l) $\frac{5\cdot\sqrt[5]{9}}{3}$; m) $3\cdot\sqrt{5}-6$; n) $\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$;

ñ) $-\sqrt{2}-\sqrt{3}$; o) $10-4\sqrt{5}$; p) $-3-2\sqrt{2}$; q) $2\sqrt{6}-5$; r) $-\sqrt{6}-3$; s) $2\sqrt{2}-2$;

t) $3+\sqrt{2}$; u) $-1-\sqrt{15}$; v) $6\sqrt{2}-4$; w) $2\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

9º Simplifica y extrae todo lo que puedas:

a) $\frac{\sqrt{8a^3b}}{\sqrt{2ab}}$ b) $\frac{\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{ab}}$ c) $\frac{\sqrt{3a^2b}}{\sqrt{2ab}}$ d) $\frac{\sqrt[3]{ab^2c^2}}{\sqrt[3]{a^2bc}}$

e) $\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt[3]{2ab}}$ f) $\frac{\sqrt[4]{2a^2b}}{\sqrt{2a}}$ g) $\frac{\sqrt[3]{2a^3b^4c}}{\sqrt{2abc^2}}$ h) $\frac{\sqrt{2ab}\cdot\sqrt[3]{2a^2b}}{\sqrt[6]{2ab}}$

i) $\frac{\sqrt{3a^2b}}{\sqrt[3]{abc}\cdot\sqrt[6]{3bc}}$ j) $\frac{\sqrt[4]{a^3b^3}}{\sqrt{abc}}$ k) $\frac{\sqrt[3]{a^2bc^3d}}{\sqrt{ab^2c}}$

Sol: a) $2a$; b) $\sqrt[3]{b}$; c) $\sqrt{3a/2}$; d) $\sqrt[3]{bc/a}$; e) $\sqrt[6]{2ab}$; f) $\sqrt[4]{b/2}$; g) $\sqrt[6]{a^3b^5/\left(2c^4\right)}$;

h) $\sqrt[3]{2^2a^3b^2}$; i) $\sqrt[6]{3^2a^4/c^3}$; j) $\sqrt[4]{ab/c^2}$; k) $\sqrt[6]{ac^3d^2/b^4}$.

10º Demostrar que:

a) $$\frac{\sqrt[6]{ab}\cdot\sqrt[3]{a^2b^4}\cdot\sqrt{b^5}}{\sqrt[4]{a^2b^3}}=b^3\sqrt{b^3a^4}$$

b) $$\frac{\sqrt[6]{\frac{ab}{c}}\cdot\sqrt{\frac{c^2}{b}}\cdot\sqrt[4]{\frac{c^3}{ab}}}{\sqrt[4]{\frac{ab}{c}}\cdot\sqrt{\frac{b^2c}{b}}\cdot\sqrt[4]{\frac{c^3}{ab}}}=\frac{1}{b}\sqrt[12]{\frac{c^7}{ba}}$$

c) $$\frac{\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}}\cdot\sqrt{\frac{b^2}{a^3}}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}}{\sqrt{\frac{a^3}{b^2}}\cdot\sqrt[6]{\frac{b^2}{2}}\cdot\sqrt[8]{b}}=\frac{1}{a^2}\cdot\sqrt[24]{\frac{b^9 2^4}{a^4}}$$

d) $$\frac{\sqrt[3]{\frac{b^2}{c}\sqrt[4]{\frac{c}{b}\cdot\sqrt{\frac{b}{c^3}}}}}{\sqrt[6]{\frac{b}{c^2}}}=\sqrt[24]{\frac{b^{11}}{c}}$$

e) $$\frac{\sqrt[4]{\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}}}\cdot\sqrt{\frac{a}{b\sqrt{a}}}\cdot\sqrt{\frac{b^2}{\sqrt{a}}}}{\sqrt{\frac{b}{\sqrt{a}}}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}}=\sqrt{a}$$

f) $$\frac{\sqrt{\frac{a^2b}{\sqrt{a}}}}{\sqrt{\frac{a}{\sqrt{b}}}}:\sqrt{\frac{b}{a}}=\sqrt[4]{a^3b}$$

Ejercicios y problemas de ecuaciones de primer grado.

1º Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 34 = -20$ b) $9x + 8 = 7x + 6$ c) $4x + 3 = 3x + 5$
d) $7x + 9 = 3 + 9x$ e) $x - 8 = 2x - 11$ f) $x + 1 = 2x - 7$
g) $6x + 6 = 4 + 8x$ h) $9 + 9x = 17 + 5x$ i) $2x + 3 = 3x$
j) $25 - 2x = 3x + 20$ k) $4x + 1 = 3x + 3$ l) $5x - 3 = 10x - 6$
m) $1 + 8x = 31 - 16x$ n) $5x - 11 = 15x - 19$ ñ) $48 - 18x = 9x + 30$
o) $2x + 17 = 3x + 7$ p) $10 - 5x = x - 2$ q) $70 - 3x = 4x$
r) $48 - 3x = 5x$ s) $30 - 4x = -3x - 10$ t) $10x - 15 = 4x + 27$
u) $3x + 1 = 6x - 8$ v) $47 - 3x = 5 + 11x$ w) $30 - 9x = 21 - 7x$
x) $3x - 10 = 2x + 1$ y) $25 - 2x = 3x - 35$ z) $75 - 5x = 3x + 3$
A) $5 + 8x = 2x + 20$ B) $2x - 3 = x + 5$ γ) $2 - 6x = 3x - 1$

Sol: a) 7; b) –1; c) 2; d) 3; e) 3; f) 8; g) 1; h) 2; i) 3; j) 1; k) 2; l) 3/5; m) 5/4; n) 4/5; ñ) 2/3; o) 10; p) 2; q) 10; r) 6; s) 40; t) 7; u) 3; v) 3; w) 9/2; x) 11; y) 12; z) 9; α) 5/2; β) 8; γ) 1/3.

2º Resuelve las siguientes ecuaciones con paréntesis y corchetes:

a) $x - 3(x - 2) = 6x - 2$ b) $3x - 7 = 2(x + 1)$ c) $2(2 + 4x) = 3 + 12x$
d) $5x = 7(5x - 3) + 3$ e) $2(x - 5) = 3x - 17$ f) $2 + 5(x - 13) = x - 3$
g) $2x - 1 = 3(2x - 15)$ h) $2(x - 2) = -(4 - x)$ i) $2(3x - 49) = -x + 14$
j) $20 = 2x - (10 - 4x)$ k) $60x - 1 = 3(1 + 12x)$ l) $5(x - 1) + 10(x + 2) = 45$
m) $2x + 3(2x - 1) = x + 67$ n) $12x + 3(2x - 4) = 60$ ñ) $3x - (x + 1) = x - 2$
o) $x - 3(x + 5) = 3x + 10$ p) $(x - 15) = 3(x - 19)$ q) $3(2 - x) = 18x - 1$
r) $3(x + 4) = 4x + 1$ s) $10 + 5(x - 3) = 3(x + 1)$ t) $2(3 - 4x) = 2x - 9$
u) $10 - 9x = 4[x - 4]$ v) $15x = 2[1 + 9x] - 3$ w) $3[10 - x] = 2[8 - x] + 13x$
x) $x + 3 = 3[2x - 4]$ y) $3[2x - (3x + 1)] = x + 1$ z) $6x + 4 = 4[2x - 5(x - 2)]$

Sol: a) 1; b) 9; c) 1/4; d) 3/5; e) 7; f) 15; g) 11; h) 0; i) 16; j) 5; k) 1/6; l) 2; m) 10; n) 4; ñ) –1; o) –5; p) 21; q) 1/3; r) 11; s) 4; t) 3/2; u) 2; v) 1/3; w) 1; x) 3; y) –1; z) 2.

3º Resuelve las siguientes ecuaciones con denominadores:

a) $\frac{3x}{2}+2=x+4$ b) $x-8=\frac{x}{2}-\frac{x-6}{3}$ c) $x-\frac{3x}{4}=\frac{x}{7}+3$
d) $2\left(\frac{x+5}{3}\right)=x+3$ e) $\frac{9x}{4}-6=\frac{2x}{3}+\frac{1}{3}$ f) $\frac{5x}{6}-\frac{3x}{4}=x-11$
g) $\frac{3x}{5}-7=\frac{2x}{6}+1$ h) $x-10=\frac{5}{9}(x-6)$ i) $\frac{x}{3}+x=10+\frac{2x}{9}$
j) $\frac{3x}{2}+1=12-\frac{x}{3}$ k) $\frac{x}{5}+\frac{x}{2}=x-3$ l) $4x-7=\frac{5x-6}{4}$
m) $\frac{x+2}{3}=5x-4$ n) $\frac{2x-10}{3x-20}=\frac{7}{8}$ ñ) $\frac{x}{4}+\frac{3x}{6}+x=21$
o) $\frac{x}{4}-\frac{13}{6}=\frac{5x}{2}-\frac{5}{6}$ p) $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}=94$ q) $\frac{x}{3}+10=\frac{x}{5}+16$
r) $\frac{x-7}{x+3}=\frac{10}{x+3}-3$ s) $3x-9+\frac{x}{5}=2x-3$ t) $\frac{x}{4}+5=\frac{2x}{5}-2-\frac{x}{30}$
u) $\frac{3}{x-1}=\frac{x}{x-1}-1$ v) $\frac{5x}{8}-5(x-20)=\frac{18-2x}{6}$ w) $x+\frac{x+1}{5}=x+\frac{x}{2}$

Sol: a) 4; b) 12; c) 28; d) 1; e) 4; f) 12; g) 30; h) 15; i) 9; j) 6; k) 10; l) 2; m) 1; n) 12; ñ) 12; o) –16/27; p) 120; q) 45; r) 2; s) 5; t) 60; u) 2; v) 24; w) 2/3.

4º Resuelve las siguientes ecuaciones con denominadores:

a) $3x-\frac{7-x}{8}=2x-1+\frac{x-3}{4}$ b) $8-\frac{3x}{10}+\frac{2x}{4}-\frac{5x}{8}=-9$ c) $\frac{x+1}{2}+\frac{3+x}{6}=1+\frac{x}{3}$

d) $\frac{3x}{5}-2+\frac{3x}{2}-\frac{x}{10}=0$ e) $\frac{10}{x+5}+\frac{3+4x}{x+5}=3$ f) $\frac{x+2}{x-1}-\frac{x+3}{x+1}=\frac{2x+2}{x^2-1}$

g) $\frac{7x-3}{6}-\frac{3x-1}{4}=\frac{5x-1}{4}$ h) $\frac{4x-3}{6}-\frac{3x-1}{4}=\frac{4x-2}{3}-1$ i) $\frac{2x}{5}-2-\frac{x}{3}=\frac{x}{10}-3$

j) $\frac{15}{x+10}-\frac{5}{x+2}=0$ k) $\frac{2x+1}{4}-\frac{3x}{9}-2=\frac{3x-2}{4}$ l) $\frac{15}{x-2}-\frac{12x+6}{x^2-4}=\frac{18}{x+2}$

m) $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}=\frac{1}{x^2-a^2}$ n) $\frac{x}{2a}-2=\frac{1+x}{2}$ ñ) $\frac{x^2-2x+1}{x(x+1)(x-1)}=\frac{3}{2x}$

o) $\frac{x}{3}+\frac{x-5}{2}-\frac{x}{4}=\frac{5x-2}{2}$ p) $\frac{x+1}{2}+\frac{5+x}{6}=1+\frac{9-2x}{3}$ q) $\frac{x}{3}+x=\frac{2x}{6}-2(3-x)$

r) $\dfrac{1+\frac{x+1}{x-1}}{2-\frac{x-1}{x+1}}=2$ s) $\dfrac{\frac{3x}{5}-12}{x+1}=6$ t) $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}+\frac{x}{6}-x=2-x$

u) $\frac{x}{2}-\frac{x-3}{3}-x=-1-2\frac{x}{3}$ v) $\frac{2x-3}{5}-\frac{x}{2}+x=x-\frac{x}{4}$ w) $\frac{6x-3}{3}-\frac{4x-3}{5}=2x-2$

x) $\frac{x-1}{2}+x=\frac{2x+3}{3}+1$ y) $2x-\frac{x-3}{2}=x+\frac{4+x}{3}$ z) $\frac{2x-5}{5}-\frac{x}{2}+2=x+\frac{x+4}{4}$

Sol: a) –1; b) 40; c) 0; d) 1; e) 2; f) 3; g) 0; h) 1; i) 30; j) 2; k) –15/7; l) 4; m) 1/2; n) 5*a*/(1 – *a*); ñ) –5; o) –18/23; p) 2; q) 6; r) 3; s) 5; t) 6; u) 12; v) 4; w) 2; x) 3; y) –1; z) 0.

5º Resuelve las siguientes ecuaciones con denominadores:

a) $\frac{5}{x-1}-\frac{3}{x+4}-\frac{3}{x^2+3x-4}=\frac{5}{x-1}$ b) $x-\frac{x}{2}+3x=\frac{3x}{2}+\frac{5+x}{3}+x+1$

c) $\frac{x-3}{3}-\frac{3(x-2)}{2}=\frac{x-3-(x+2)}{2}$ d) $\frac{x-3}{5}-\frac{x-3}{2}=\frac{x-3}{3}-\frac{x+3}{2}$

e) $x(x-2)-\frac{x+2}{3}-\frac{x-2}{2}=(x-2)^2-4$ f) $\frac{x-3}{2}+x=\frac{2x-13}{3}+2+x$

g) $x(x-2)-\frac{x+2}{3}-\frac{x-2}{2}=(x-2)^2-4x$ h) $x-\frac{x+2}{3}+3(x-3)=2+\frac{2x+1}{3}$

i) $\frac{3(x+1)}{4}-\frac{x+3}{6}+x=2x+\frac{3-7x}{12}$ j) $\frac{2}{x+1}+\frac{3x-3}{x^2-1}=\frac{2}{x-1}+\frac{7}{x+1}$

k) $\frac{x-3}{5}-\frac{4x+3}{5}=2x+4$ l) $\frac{20}{x+1}+\frac{5x-5}{x^2-1}=\frac{52}{x-1}-\frac{40}{x+1}$

Sol: a) 0; b) 4; c) 27/7; d) 51/2; e) –2/7; f) 5; g) 22/31; h) 4; i) 0; j) 0; k) –2; l) 9.

6º Resolver la ecuación y dejar la solución en función de *a* y *b*:

$$(a+x)(b-x)-a(b+a)+x^2+a^2=\frac{b^2-ab}{a}$$

Sol: *b*/*a*.

7º ¿Qué número aumentado en 12 da 53? **Sol:** 41.

8º Un número se multiplica por 3. El resultado se divide por 2 y luego se le resta 5. Este nuevo resultado se multiplica por 10, obteniéndose así 40. ¿Cuál es el número? **Sol:** 6.

9º ¿Qué número multiplicado por 4 y sumando luego 5 al producto da 29? **Sol:** 6.

10º ¿Cual es el número al que sumando 7 a su tercera parte es igual a 62? **Sol:** 165.

11º Si a un número se le resta 40 y la diferencia se multiplica por 4, el resultado es el mismo que si al número se le resta 20 y la diferencia se multiplica por 3. Hallar el número. **Sol:** 100.

12º ¿Cuál es el número natural que aumentado en la mitad del precedente y en la tercera parte del siguiente da 42? **Sol:** 23.

13º Obtener tres números consecutivos, tales que 3 veces el tercero más 2 veces el primero exceda en 5 al triple del segundo. **Sol:** 1, 2, 3.

14º Hallar tres números impares consecutivos tales que la suma de los dos últimos sea 72.
Sol: 33, 35, 37.

15º Encontrar tres números naturales consecutivos tales que su suma sea 48. **Sol:** 15, 16, 17.

16º ¿Cuál es el número cuyos 5/3 y 7/6 difieren en 150? **Sol:** 300.

17º ¿Qué número hay que añadir a los dos términos de la fracción 5/13 para que valga 3/5? **Sol:** 7.

18º ¿Qué número hay que añadir a los dos términos de la fracción 23/40 para que esta valga 2/3?
Sol: 11.

19º Se han consumido las 4/5 partes de un bidón de aceite. Se reponen 30 litros quedando lleno hasta la mitad. Se pide la capacidad del bidón. **Sol:** 100 L.

20º Una fracción es equivalente a 5/6; si sumamos 4 a sus dos términos, resulta una fracción equivalente a 7/8. Hallar la fracción. **Sol:** 10/12.

21º En una fracción el denominador tiene 3 unidades más que el numerador. Si se suman 2 unidades al numerador, el valor de la fracción será igual a 3/2. ¿Cuál es esta fracción?
Sol: 13/10.

22º Añadiendo 7 unidades al doble de un número más los 3/2 del mismo da por resultado el séxtuplo de dicho número menos 23. ¿Cuál es ese número? **Sol:** 12.

23º Hallar un número tal que el triple de la diferencia de dicho número con 5 sea igual al doble de la suma de dicho número con 3. **Sol:** 21.

24º El triple de un número es igual al quíntuplo del mismo menos 28. ¿Cuál es este número?
Sol: 14.

25º Hallar un número que sumando su mitad, tercera parte, cuarta parte y 45 de por suma 448.
Sol: 372.

26º Preguntado un hombre por su edad, contesta: si al doble de mi edad se le quitan 20 años se obtiene lo que me falta para llegar a 100. ¿Cuál es la edad de dicha persona? **Sol:** 40 años.

27º ¿Cuántos días de vacaciones ha tenido una familia si ha pasado la tercera parte de sus vacaciones en la playa, la mitad del resto en el campo y 6 días en casa? **Sol:** 24 días.

28º Un rebaño de ovejas crece cada año en 1/3 de su número, y al final de cada año se venden 10. Después de vender las 10 del final del segundo año quedan 190 ovejas. ¿Cuántas había al principio? **Sol:** 120.

29º En un quiosco de periódicos se venden de un determinado semanario los 2/5 del número de ejemplares en la mañana. Al mediodía el encargado adquiere 10 ejemplares más. Vende durante la tarde 3/4 de las nuevas existencias y se queda con 10 ejemplares. ¿Cuántos ejemplares tenía al principio de la jornada? **Sol:** 50.

30º Un hombre se contrata por 30 días a 50 € incluyendo alimentación por cada día de trabajo. En los días que no trabaje abonará 5 € por la alimentación. Al final de los 30 días recibe 950 €. ¿Cuántos días trabajó? **Sol:** 20 días.

31º El perímetro de un triángulo isósceles es 50 cm. Cada uno de los lados iguales es 10 cm mayor que la base. ¿Cuánto vale cada lado? **Sol:** 10, 20, 20.

32º Un poste tiene bajo tierra 1/4 de su longitud, 1/3 del resto sumergido en agua, y la parte emergente mide 6 m. Halla la longitud del poste. **Sol:** 12 m.

33º Hallar la longitud de un poste que tiene bajo tierra 1/5 de su longitud, 1/4 del resto sumergido en agua, y la parte que emerge mide 12 metros. **Sol:** 20 m.

34º Halla los lados de un triángulo isósceles de 60 cm de perímetro sabiendo que la razón de uno de los lados iguales a la base es de 5/2. **Sol:** 10, 25, 25.

35º De un depósito lleno de agua se saca la mitad de contenido y después un tercio del resto, quedando en él 100 L. Calcula la capacidad del depósito. **Sol:** 300 L.

36º Después de gastar el 15% del depósito de gasolina de un coche quedan 42.5 l. ¿Cuál es la capacidad del depósito? **Sol:** 50 L.

37º Tenía muchas monedas de 1 céntimo y las he cambiado por monedas de 5 céntimos. Ahora tengo la misma cantidad pero 60 monedas menos. ¿Cuánto dinero tengo? **Sol:** 75 céntimos.

38º Un padre tiene 35 años y su hijo 15. ¿Cuántos años hace que la edad del padre era el triple que la edad del hijo? **Sol:** 5 años.

39º Un señor tiene 39 años y su hijo 9 años. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será triple que la del hijo? **Sol:** 6 años.

40º Una señora tiene 52 años y su hijo la mitad. ¿Cuántos años hace que la madre tenía 3 veces la edad del hijo? **Sol:** 13 años.

41º Un padre tiene 34 años, y las edades de sus tres hijos suman 22 años. ¿Dentro de cuántos años las edades de los hijos sumarán como la edad del padre? **Sol:** 6 años.

42º Preguntado un padre por la edad de su hijo contesta: "Si del doble de los años que tiene se le quitan el doble de los que tenía hace 6 años se tendrá su edad actual". Halla la edad del hijo en el momento actual. **Sol:** 12 años.

43º Hállese la edad de una persona, sabiendo que si se añade 7 a la cuarta parte de su edad es lo mismo que si se le quita 3 a los 2/3 de su edad. **Sol:** 24 años.

44º En la fiesta de un amigo se han repartido entre los 20 asistentes el mismo número de monedas. Como a última hora ha acudido un chico más nos han dado a todos 1 moneda menos y han sobrado 17. ¿Cuantas monedas para repartía se tenía? **Sol:** 80 monedas.

45º Un hombre recibe una paga de 2480 €. Si hubiera trabajado 5 días más y hubiera recibido 7 € menos cada día habría cobrado 2475 €. ¿Cuántos días trabajó? **Sol:** 40 días.

46º Cuántos litros de un líquido que tiene 74% de alcohol se debe mezclar con 5 litros de otro que tiene 90% de alcohol, si se desea obtener una mezcla de 84% de alcohol? **Sol:** 3 L.

47º Una fuente llena un depósito en 10 horas y otra en 15 horas. ¿Qué tardarían en llenarlo manando juntas ambas fuentes? **Sol:** 6 horas.

48º Un depósito se llena por un grifo en 8 horas y por otro en 2 horas. ¿Cuánto tardará en llenarse abriendo los dos grifos a la vez? **Sol:** En una hora y 36 minutos.

49º Un grifo llena un depósito en 2 horas, y otro grifo lo llena en 3 horas. ¿Cuánto tardará en llenarse el depósito si se abren ambos grifos a la vez? **Sol:** 1 h y 12 min.

50º Un grifo puede llenar un depósito en 10 minutos, otro grifo en 20 minutos y un desagüe puede vaciarlo, estando lleno, en 15 minutos. ¿En cuánto tiempo se llenará el depósito si estando vacío y abierto el desagüe se abren los dos grifos? **Sol:** 12 min.

51º Manando juntos dos grifos llenan un depósito en 4 horas. ¿Cuánto tardarán en llenarlo cada uno separadamente si el primer grifo invierte doble tiempo que el segundo? **Sol:** 12 h, 6 h.

52º Un grifo A llena un depósito de agua en 4 horas y otro grifo B lo llena en 6 horas. El depósito tiene un desagüe que lo vacía en 12 horas estando los grifos cerrados.¿Cuánto tiempo tardarán los dos grifos en llenar el depósito estando el desagüe abierto? **Sol:** 3 horas.

53º Dos grifos alimentan simultáneamente un depósito tardando 24 horas en llenarlo. Si se abriera cada grifo por separado el primero tardaría 2 horas menos que el segundo. ¿Cuánto tiempo tardaría cada uno de ellos en llenarlo de manera independiente? **Sol:** 6 y 4 horas.

54º En unas pruebas son eliminados en el ejercicio escrito el 20% de los alumnos presentados, y en el siguiente, el oral, la cuarta parte de los que quedaron. Aprobaron los ejercicios 120 alumnos. ¿Cuántos alumnos se presentaron?, y ¿cuál es el tanto por ciento de aprobados? **Sol:** 200, 60%.

Problemas de proporcionalidad directa.

1º Una máquina embotelladora ha llenado 135 botellas en 15 minutos. ¿Cuántas botellas llenará en hora y media? **Sol:** 810 botellas.

2º He recorrido 720 km en 9 horas, a una velocidad media de 80 km/h. ¿Cuánto habría tardado si la velocidad hubiese sido de 60 km/h? **Sol:** 6.75 horas.

3º Por 3.5 kg de chirimoyas he pagado 6.3 €. ¿Cuánto pagaré por cinco kilos? **Sol:** 9 €.

4º Si 4 entradas para el cine han costado 15.2 €, ¿cuánto costarán 5 entradas? **Sol:** 19 €.

5º El precio de un espejo de 0.3 m de ancho y 0.24 m de largo es de 90 €. ¿Qué anchura tendrá un espejo del mismo material de 0.36 m de largo que costó 126 €? **Sol:** 0.28 m.

6º Un corredor ha dado 8 vueltas a la pista en 12 min. ¿Cuántas vueltas dará, si mantiene el mismo ritmo, en 18 min? **Sol:** 12 vueltas.

7º Una población ha consumido 20000 m^3 de agua en 5 meses. ¿Cuántos metros cúbicos consumirá en un año? **Sol:** 48000.

8º Un tren ha recorrido 240 km en tres horas. Si mantiene la misma velocidad, ¿cuántos kilómetros recorrerá en las próximas dos horas? **Sol:** 160 km.

Problemas de proporcionalidad inversa.

1º Con 15 kg de alimentos se alimentan 5 personas durante 12 días. ¿Durante cuántos días se alimentarán 6 personas con los mismos alimentos? **Sol:** 10 días.

2º Seis personas efectúan un trabajo en 10 días. ¿Cuánto tardarán 8 personas en hacer el mismo trabajo? **Sol:** 7.5 días.

3º Sabiendo que dispongo de una determinada cantidad de dinero y que con ella puedo comprar 6 prendas a 4000 € cada una. ¿Cuántas prendas podría comprar si me costaran a 3000 € cada una? **Sol:** 8 prendas.

4º Un ganadero tiene 20 vacas y dispone de pienso para alimentarlas durante 60 días. Si tuviera 120 vacas ¿para cuántos días tendría pienso? **Sol:** 10 días.

5º Ocho obreros construyen una pared en 9 días. ¿Cuánto tardarían en hacerlo 6 obreros? **Sol:** 12 días.

6º Cuatro palas excavadoras hacen un trabajo de movimiento de tierras en 14 días. ¿Cuánto se tarda en hacer ese mismo trabajo si se dispusiera de 7 palas excavadoras? **Sol:** 8 días.

7º Un coche tarda 3 h en recorrer un trayecto yendo a una velocidad de 90 km/h. ¿Cuánto tardará en recorrer el mismo trayecto a 120 km/h. **Sol:** 2.25 h.

8º Un coche, a 90 km/h, hace un recorrido en 5 horas. ¿Cuánto tiempo ganaría si aumentara su velocidad en 10 km/h? **Sol:** 4.5 h.

Problemas de porcentajes.

1º Calcula el 35 % de 2.580. **Sol:** 903.

2º ¿Cuánto costará un artículo de 6700 € que sube un 12 %? **Sol:** 7504 €.

3º En una clase de 30 alumnos hoy han faltado 6. ¿Cuál es el % de ausencias? **Sol:** 20 %.

4º Si en un establecimiento me rebajan el 15 %, y pago por un objeto 255 €, ¿cuál era el precio del artículo sin la rebaja? **Sol:** 300 €.

5º A una persona le retienen de su sueldo un 12%. Si cobra mensualmente 836 €. ¿Cuál será el sueldo bruto? **Sol:** 950 €.

6º Después de haber sido aumentado su valor en un 40 % el precio de una nevera es de 301 €. ¿Cuál era su valor inicial? **Sol:** 215 €.

7º El precio de varios artículos sin IVA es de 25 € y 17.6 €. Averigua cuál es el precio final sabiendo que con el IVA suben un 16 %. **Sol:** 29 €; 20.42 €.

8º Al cabo de varios años, se ha multiplicado por 2.23 el precio de una mercancía. ¿Cuál ha sido el aumento expresado en %? **Sol:** 123%.

9º Un campesino posee 110 hectáreas de monte y decide plantar un 20% con pinos, un 25% de abetos, un 35% de roble y el resto de castaños, teniendo en cuenta que un 5% lo tuvo que dedicar a caminos, calcula:

a) ¿Qué superficie plantó de cada tipo de árboles?
b) ¿Qué porcentaje plantó de castaños?

Sol: a) 22 Ha de pinos, 27.5 Ha de abetos, 38.5 Ha de roble y 16.5 Ha de castaños.
b) El 15%.

10º En un colegio de 1.500 alumnos el 40% son chicas y el resto chicos. ¿Qué porcentaje de chicos hay? ¿Cuántas chicas hay? ¿Y chicos?. **Sol:** 60%; 600 chicas, 900 chicos.

11º El 20% de los alumnos de 1º de BAC hicieron mal un examen. Si el grupo está formado por 45 alumnos. ¿Cuántos lo hicieron bien? **Sol:** 36.

12º Al comprar una bicicleta que costaba 50 euros me hacen un descuento del 8%. ¿Cuánto dinero me rebajaron? ¿Cuánto tengo que pagar?. **Sol:** Rebajan 4 euros; Pagar 46 euros.

13º Por una factura de 800 € nos cobran 640 €. ¿Qué tanto por ciento de descuento nos han hecho? **Sol:** 20 %.

14º A una persona le retienen de su sueldo un 12 %. Si cobra mensualmente 836 €. ¿Cuál será el sueldo bruto? **Sol:** 950 €.

15º En un centro de 800 alumnos aprueban el curso en Junio 400 y en Septiembre 200. Calcula el porcentaje de aprobados en Junio, Septiembre y el total en el curso.
Sol: 50% en Junio; 25% en Septiembre; 75% en total.

Problemas de proporcionalidad compuesta.

1º Con 15 kg de alimentos se alimentan 5 personas durante 7 días. ¿Durante cuántos días se alimentarán 6 personas con 20 kg de alimentos? **Sol:** 7.77 días.

2º Seis personas hacen 20 m de muro en 10 días. ¿Cuánto tardarán 8 personas en hacer 32 m de muro? **Sol:** 12 días.

3º Sabiendo que dispongo de 240 € y que con ellas puedo comprar 6 prendas a 40 € cada una. ¿Cuántas prendas podría comprar con 360 € si me costaran a 30 € cada una?
Sol: 12 prendas.

4º Por enviar un paquete de 5 kg de peso a una población que está a 60 km de distancia, una empresa de transporte me ha cobrado 9 €. ¿Cuánto me costará enviar un paquete de 15 kg a 200 km de distancia? **Sol:** 90 €.

5º Una cuadrilla de 8 mineros abren una galería de 120 m de longitud en 12 días. Si otra cuadrilla tiene 16 mineros, ¿cuántos metros de galerías abrirán en 29 días? **Sol:** 580.

6º Si 30 máquinas fabrican 5000 m de tejido en 20 días, ¿cuántas máquinas, iguales a las anteriores, será preciso poner en marcha para producir 7000 m en 14 días? **Sol:** 60.

7º Un depósito de 500 L es llenado por un grifo de 5 cm^2 de sección en 12 horas. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse un depósito de 750 L por un grifo de 8 cm^2 de sección? **Sol:** Tardará 11 horas y 15 minutos.

8º Una instalación de alumbrado consta de 16 focos que funcionan 12 horas diarias durante 15 días, esto significa un consumo 4.2 kw/h. ¿Cuánto consumirán 28 focos funcionando 14 horas diarias durante tres semanas? **Sol:** 12.005 kw/h.

9º En una residencia con 30 estudiantes, se gastan 18 000 € en 25 días. ¿Cuánto gastarían 42 estudiantes en 34 días, viviendo en idénticas condiciones? **Sol:** 34272 €.

10 La alimentación de 12 animales durante 8 días cuesta 8000 €. ¿Cuál sería el costo de alimentación de 15 animales en 5 días? **Sol:** 6250 €.

11º Si con 300 kg de algodón pueden trabajar 8 telares durante 2 días, a razón de 6 horas diarias, ¿cuántos kilogramos necesitarán 15 telares para trabajar 5 días, a razón de 10 horas diarias? **Sol:** 2343.75 kg.

12º Veinticinco farolas originan un gasto de 6000 € al mes, estando encendidas 6 horas diarias. ¿Qué gasto originarían 5 farolas en 45 días, encendidas durante 8 horas diarias? **Sol:** 2400 €.

13º Una persona desea hacer el Camino de Santiago a pie, para ello caminará 600 km en 25 días andando 4 horas por día. Si marcha 5 horas por día, ¿cuántos kilómetros recorrerá en 15 días? **Sol:** 450 km.

14º Una fábrica de muebles tarda 10 días con 6 carpinteros en hacer 30 armarios. Si tienen 20 días de plazo para entregar los 250 armarios de un hotel, ¿cuántos carpinteros necesitan? **Sol:** 25 carpinteros.

Ejercicios y problemas de ecuaciones de segundo grado.

1º Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x^2 - 27 = 0$ b) $2x^2 - 4x = 0$ c) $x^2 = 16$ d) $9x^2 = 4$
e) $6 - 2x^2/3 = 0$ f) $2x^2 - 32 = 0$ g) $25x^2 - 9 = 0$ h) $6x^2 - 2x = 0$

Sol: a) ±3; b) 0, 2; c) ±4; d) ±2/3; e) ±3; f) ±4; g) ±3/5; h) 0, 1/3.

2º Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(x-2)\cdot(x-3) = 0$ b) $x\cdot(2x-4) = 0$ c) $(x+1)\cdot(2x-1) = 0$
d) $(x-2)^2 = 0$ e) $7\cdot(2x-6)\cdot(x+3) = 0$ f) $(x-4)\cdot(x+3) = 0$

Sol: a) 2, 3; b) 0, 2; c) –1, 1/2; d) 2; e) ±3; f) 4, –3.

3º Mediante la siguiente fórmula:

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$ b) $x^2 - 9x + 18 = 0$ c) $x^2 - 5x + 6 = 0$
d) $x^2 + 8x + 15 = 0$ e) $x^2 - 6x - 27 = 0$ f) $x^2 - 6x + 9 = 0$
g) $x^2 + 6x = -9$ h) $4x^2 + 4x = 3$ i) $x^2 - 9x + 14 = 0$
j) $x^2 - 6x + 8 = 0$ k) $2x^2 + 10x - 48 = 0$ l) $x^2 - x = 20$
m) $x^2 = 5x + 6$ n) $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ñ) $x^2 + 10x + 25 = 0$
o) $x^2 + 9 = 10x$ p) $3x^2 - 39x + 108 = 0$ q) $2x^2 - 9x + 9 = 0$
r) $3x^2 + 2x = 8$ s) $4x^2 + 12x + 9 = 0$ t) $5x^2 + 1 = 6x$
u) $6x^2 + 1 = 5x$ v) $6x^2 - 6 = 5x$ w) $2x^2 + 7x + 6 = 0$
x) $x^2 = 2x + 3$ y) $4x^2 + 3 = 8x$ z) $x^2 - x + 1/4 = 0$

Sol: a) 3, 4; b) 3, 6; c) 2, 3; d) –5, –3; e) –3, 9; f) 3; g) –3; h) 1/2, -3/2; i) 2, 7; j) 4, 2; k) 3, – 8; l) –4, 5; m) 6, –1; n) 1, 3/2; ñ) –5; o) 1, 9; p) 4, 9; q) 3, 3/2; r) –2, 4/3; s) –3/2; t) 1, 1/5; u) 1/2, 1/3; v) –2/3, 3/2; w) –2, –3/2 ; x) -1, 3; y) 1/2, 3/2; z) 1/2.

4º Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas y bicúbicas:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ b) $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$ c) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$
d) $x^6 - 26x^3 - 27 = 0$ e) $6x^4 + 2x^2 - 8 = 0$ f) $x^4 - 4x^2 = 0$
g) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$ h) $9x^4 - 3x^2 + 4 = 0$ i) $x^4 - 6x^2 - 27 = 0$
j) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$ k) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$ l) $x^6 + 28x^3 + 27 = 0$

Sol: a) ±1, ±2; b) ±1; c) 2, 1; d) –1, 3; e) ±1; f) 0, ±2; g) ±2, ±1/2; h) ±1/3, ±2; i) ±3; j) 1, –2; k) ±2; l) –1, –3.

5º ¿Cuántas soluciones reales y diferentes pueden tener las siguientes ecuaciones de segundo grado?:

a) $x^2 - 16 = 0$ b) $x^2 + 16 = 0$ c) $x^2 + x - 6 = 0$
d) $x^2 + x + 4 = 0$ e) $x^2 + 2x + 1 = 0$ f) $x^2 - 6x + 9 = 0$
g) $x^2 + x - 2 = 0$ h) $x^2 + 2x - 3 = 0$ i) $x^2 + 5x + 10 = 0$

Sol: a) dos; b) cero; c) dos; d) cero; e) una; f) una; g) dos; h) dos.

6º Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado con denominadores:

a) $1 - \frac{x^2}{3} - \frac{3x+2}{3} = 1$ b) $(x-3)^2 - \frac{x-1}{3} = 2x$ c) $\frac{x-3}{3} - \frac{1}{x-1} = 3x$

d) $x - \frac{2}{x} + \frac{1}{2x} = 5x + 5$ e) $\frac{x-1}{x+1} - \frac{3+x}{x} = 2$ f) $\frac{x-1}{x+1} - \frac{3+x}{x-1} = 2$

g) $3x-1-\frac{3}{x}=\frac{1+3x}{4}$ h) $x+\frac{1}{x}=\frac{6}{3x}$ i) $x-2=\frac{2x-3}{x}$

j) $x+\frac{1}{x-2}=4$ k) $x^2-x=\frac{2}{9}-\frac{2x}{3}$ l) $\frac{x^2}{3}+2=\frac{5x}{3}$

m) $x+\frac{2}{x}=3$ n) $x-2=\frac{4x-8}{x}$ ñ) $\frac{x}{2}+\frac{3}{x}=\frac{2x+9}{x}$

o) $2x-2=\frac{6x}{x-1}-5$ p) $x(x+1)-\left(x+\frac{x}{2}\right)=0$ q) $\frac{x}{3}+\frac{2}{x}=\frac{3x+10}{3x}$

r) $x+3=\frac{2x+1}{x-1}$ s) $\frac{9(x-1)}{3x^2-2x-2}=\frac{1}{x}$ t) $\frac{x-3}{2(x-1)}=-\frac{1}{x}$

Sol: a) –2, –1; b) 4/3, 7; c) 5/8, 0; d) –3/4, –1/2; e) –3, –1/2; f) –3, 0; g) 1, –4/3; h) ±1; i) 3, 1; j) 3; k) –1/3, 2/3; l) 2, 3; m) 1, 2; n) 4, 2; ñ) –2, 6; o) –1/2, 3; p) 0, 1/2; q) –1, 4; r) ±2; s) 1/2, 2/3; t) –1, 2.

7º Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado con denominadores:

a) $(x-3)(x-2)+\frac{x(x-3)}{2}=(x-2)^2$ b) $(x-2)x-\frac{x+2}{3}-\frac{x^2-4}{2}=(x-2)^2-4$

c) $(x-3)^2-\frac{x-2}{3}+(3-x)(x-1)=(x-2)^2$ d) $\frac{x-3}{x}+3x-\frac{5}{x}=2x-\frac{3}{x}-3$

e) $3x-\frac{8}{x}+(x-1)^2=3(x-2)-(x-5)$ f) $\frac{(x-3)^2}{2}-x+x^2=x-(x-2)$

g) $\frac{1}{x-1}+3x+3x^2-2=\frac{3}{x-1}+3x^2$ h) $2+\frac{x+4}{3}=\frac{4x+4}{3}+\frac{2-x}{x-3}$

Sol: a) 1, 4; b) – 2/3, 4; c) –1, 8/3; d) –5, 1; e) –2, 2; f) 1, 5/3; g) 5/3, 0; h) 2, 4.

8º La suma de un número y su cuadrado es 30. Háyalo. **Sol:** 5.

9º La suma de los cuadrados de dos números consecutivos es 4141. ¿Cuáles son esos números? **Sol:** 45, 46.

10º Si de un número se resta 3, y también se le añade 3, el producto de estos resultados es 72. Halla el número. **Sol:** 9.

11º Si se añade 49 al cuadrado de cierto número, la suma es igual al cuadrado de 11. ¿Cuál es el número? **Sol:** 9.

12º Si el lado de un cuadrado aumenta en 3 cm, su superficie aumenta en 81 cm^2. Halla el lado del cuadrado. **Sol:** 12.

13º Calcula el radio de un círculo sabiendo que si aumentamos el radio en 4 cm se cuadruplica su área. **Sol:** $R = 4$.

14º Hallar el perímetro de un cuadrado sabiendo que el área es 64 m^2. **Sol:** 32 m.

15º Un campo rectangular tiene 80 m^2 de superficie y 2 metros de longitud más que de anchura. Halla las dimensiones. **Sol:** 8x10.

16º Los lados de un triángulo miden 5, 6 y 7 cm. Determina qué cantidad igual se debe restar a cada uno para que resulte un triángulo rectángulo. **Sol:** 2.

17º La diagonal de un rectángulo mide 30 cm y las dimensiones de los lados son proporcionales a 3 y 4. Halla los lados. **Sol:** 18 y 24.

18º Las dimensiones de un ortoedro son proporcionales a 3, 4 y 5. Halla estas dimensiones sabiendo que el volumen del ortoedro es 480 cm^3. **Sol:** 6, 8, 10.

19º En un triángulo rectángulo el cateto mayor mide 3 m menos que la hipotenusa y 3 m más que el otro cateto. Hallar los lados y el área del triángulo. **Sol:** 12, 9, 15; 54 m^2.

20º Un lado de un rectángulo mide 10 cm más que el otro. Sabiendo que el área del rectángulo es de 200 cm^2, hallar las dimensiones. **Sol:** 10x20.

21º Los lados de un triángulo rectángulo tienen por medida en centímetros tres números enteros consecutivos. Halla dichos números. **Sol:** 3, 4 y 5.

22º Un triángulo rectángulo tiene de hipotenusa 10 cm. Hallar los catetos sabiendo que su diferencia es de 2 cm. **Sol:** 8 y 8.

23º En un recinto cuadrado de un parque hay una arboleda. Este recinto está rodeado por un paseo de 5 m de ancho; el área del paseo es 25 m^2 más grande que la del recinto cuadrado. Hallar el área de este cuadrado. **Sol:** 100 m^2.

24º Una madre reparte entre sus hijos 24 monedas de euro en partes iguales. Si fuesen 2 hijos menos, recibiría cada uno 2 monedas más. ¿Cuántos son los hijos? **Sol:** 6 hijos.

25º Varias personas viajan en un coche que han alquilado por 342 €. Pero se les agregan 3 personas más lo cual hace bajar en 19 € a lo que antes debía pagar cada persona. ¿Cuántas personas iban al principio en el coche? **Sol:** 6.

Ejercicios y problemas de sistemas de ecuaciones lineales:

1º Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+2y=3 \\ -x+y=-1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ -x+y=-3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-y=5 \\ 2x+2y=2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x-y=3 \\ -x+3y=-1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 4x-3y=5 \\ -2x+5y=1 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x+y=1 \\ 3x+2y=0 \end{cases}$ i) $\begin{cases} 5x-y=3 \\ 2x-2y=-2 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 7x+y=8 \end{cases}$ k) $\begin{cases} x+y=7 \\ 2x-y=23 \end{cases}$ l) $\begin{cases} 5x-6y=3 \\ 7x-2y=17 \end{cases}$

m) $\begin{cases} 2x+y=9 \\ x-y=3 \end{cases}$ n) $\begin{cases} 3x+y=6 \\ 2x-3y=-7 \end{cases}$ ñ) $\begin{cases} 3x-y=-5 \\ 2x+y=0 \end{cases}$

o) $\begin{cases} 5x+3y=-1 \\ 3x+5y=-7 \end{cases}$ p) $\begin{cases} 12x-7y=3 \\ 15x-3y=21 \end{cases}$ q) $\begin{cases} 4x+12y=-8 \\ 5x-y=6 \end{cases}$

r) $\begin{cases} 3x+5y=12 \\ 5x+3y=4 \end{cases}$ s) $\begin{cases} 7x-3y=-5 \\ 5x+y=9 \end{cases}$ t) $\begin{cases} 2(x-3)=2y \\ 2x-y=5 \end{cases}$

u) $\begin{cases} 5(x+2)=y \\ 2x+y=3 \end{cases}$ v) $\begin{cases} 3x+y=5 \\ 2(x+1)=2y \end{cases}$ w) $\begin{cases} 2x+y=-5 \\ 3(x-2y)=15 \end{cases}$

x) $\begin{cases} 3x=3(y-1) \\ 2=2(2x-y) \end{cases}$ y) $\begin{cases} 2(3x-2)=-5y \\ 3(2x+3y)=12 \end{cases}$ z) $\begin{cases} x=2(4-y) \\ y-3=x-5 \end{cases}$

Sol: a) $x=1, y=1$; b) $x=1, y=0$; c) $x=2, y=-1$; d) $x=3, y=-2$; e) $x=0, y=1$; f) $x=4, y=1$; g) $x=2, y=1$; h) $x=-2, y=3$; i) $x=1, y=2$; j) $x=1, y=1$; k) $x=10, y=-3$; l) $x=3, y=2$; m) $x=4, y=1$; n) $x=1, y=3$; ñ) $x=-1, y=2$; o) $x=1, y=-2$; p) $x=2, y=3$; q) $x=1, y=-1$; r) $x=-1, y=3$; s) $x=1, y=4$; t) $x=2, y=-1$; u) $x=-1, y=5$; v) $x=1, y=2$; w) $x=-1, y=-3$; x) $x=2, y=3$; y) $x=-1, y=2$; z) $x=4, y=2$.

2º Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x+3y=x-6 \\ x-1=2y+2x \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3(x-2y+1)=-3y \\ x+5y=2x+3y+3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x-y=3(x-3+y) \\ 3x+5y=-3x+2y \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y=8 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3(x-y)=2x+1 \\ 4x-15y=-2x \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+y=3 \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x-3y=6 \\ \dfrac{x}{3}+2y=5 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 3x=6y \\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{3y}{2}-1 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x+2y=9 \\ 3x-\dfrac{y}{4}=2 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 3x+2y=0 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{2y}{3}=-1 \end{cases}$ k) $\begin{cases} \dfrac{2x-y}{x}=4 \\ 2x+3y=4 \end{cases}$ l) $\begin{cases} x+5y=2x \\ \dfrac{3x}{2}-3y=\dfrac{9}{2} \end{cases}$

Sol: a) $x=3, y=-2$; b) $x=1, y=2$; c) $x=-1, y=2$; d) $x=2, y=6$; e) $x=-5, y=-2$; f) $x=-3, y=6$; g) $x=9, y=1$; h) $x=4, y=2$; i) $x=1, y=4$; j) $x=2, y=-3$; k) $x=-1, y=2$; l) $x=5, y=1$.

3º Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{y}=2 \\ \dfrac{x}{y+1}=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x-y}{2}+\dfrac{x+y}{3}=1 \\ 2x-\dfrac{3y}{4}=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{3x}{6}+\dfrac{y}{4}=1 \\ \dfrac{2x}{10}-\dfrac{y}{6}=\dfrac{14}{15} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x=3y \\ \dfrac{2x}{3}=\dfrac{7y}{5}+3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3x-\dfrac{2y}{7}=4 \\ y-6=x-1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ \dfrac{2x}{3}-\dfrac{y}{5}=1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=0 \\ \dfrac{2x}{3}+\dfrac{3y}{4}=1 \end{cases}$ h) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}=5 \\ \dfrac{3x}{3+3y}=1 \end{cases}$ i) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-y=-2 \\ x-\dfrac{y}{2}=2 \end{cases}$

j) $\begin{cases} \dfrac{5x}{x+y}=2 \\ 3x-2y=x-2 \end{cases}$ k) $\begin{cases} \dfrac{3x}{2x+y}=2-\dfrac{1}{5} \\ 2x+3y=3 \end{cases}$ l) $\begin{cases} \dfrac{x+y-2}{x-y}=-\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{3x+y-3}{2y-x}=-\dfrac{1}{11} \end{cases}$

Sol: a) $x=3, y=2$; b) $x=2, y=4$; c) $x=3, y=-2$; d) $x=15, y=5$; e) $x=2, y=7$; f) $x=3, y=5$; g) $x=6, y=-4$; h) $x=3, y=2$; i) $x=4, y=4$; j) $x=2, y=3$; k) $x=3, y=-1$; l) $x=-1, y=5$.

4º Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones (se recomienda usar Gauss o reducción):

a) $\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+2y+2z=7 \\ x-y-z=-2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-2y+4z=1 \\ x-y-2z=0 \\ 3x-2y-z=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-y+z=5 \\ 3x-y-z=2 \\ 2x+y+z=3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y+2z=3 \\ 3x-y+z=2 \\ x-2y-z=-3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x+2y-z=-1 \\ 2x+5y+3z=3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 4x-3y+2z=-7 \\ 2x-y+5z=2 \\ x-y+z=-2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x+y-2z=-1 \\ 3x-y+z=-4 \\ 2x+2y-z=1 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 3x-y+z=3 \\ 2x+y-z=2 \\ x+y+z=3 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x-y+2z=1 \\ x+2y-z=5 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x-y+z=2 \\ 3x-2y-z=3 \\ x+y-3z=0 \end{cases}$ k) $\begin{cases} 3x-y+z=4 \\ x+y-z=0 \\ x+2y+2z=-1 \end{cases}$ l) $\begin{cases} x-y+z=3 \\ 2x-y+2z=8 \\ x+y+2z=8 \end{cases}$

m) $\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=0 \\ x+z=3 \end{cases}$ n) $\begin{cases} 3x+2y=1 \\ x-2y=3 \\ y-z=0 \end{cases}$

Sol: a) $x=1, y=2, z=1$; b) $x=1, y=1, z=0$; c) $x=1, y=-1, z=2$; d) $x=2, y=3, z=-1$; e) $x=1, y=-1, z=2$; f) $x=0, y=3, z=1$; g) $x=-1$, $y=2, z=1$; h) $x=1, y=1, z=1$; i) $x=2, y=1, z=-1$; j) $x=2, y=1, z=1$; k) $x=1, y=-1, z=0$; l) $x=4, y=2, z=1$; m) $x=2, y=-1, z=1$; n) $x=1, y=-1, z=-1$.

5º Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones (se recomienda usar Gauss o reducción):

a) $\begin{cases} x+\dfrac{y}{2}=7 \\ y+\dfrac{z}{2}=8 \\ z+\dfrac{x}{4}=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=8 \\ x-2y+z=6 \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}-\dfrac{z}{4}=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}-\dfrac{y+2}{4}=0 \\ \dfrac{x-1}{3}+\dfrac{y+z}{2}=2 \\ x+\dfrac{y-z}{4}=1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+2y+z=2 \\ x+y-2z=1 \\ x-y+\dfrac{z}{2}=-1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \dfrac{x+z}{3}=y-1 \\ x+y-z=1 \\ \dfrac{y+z}{2}=x+2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+y=5z \\ \dfrac{x+z}{3}=y+2 \\ x+2y-2z=3 \end{cases}$

Sol: a) $x=4, y=6, z=4$; b) $x=6, y=6, z=12$; c) $x=1, y=2, z=2$; d) $x=0, y=1, z=0$; e) $x=3, y=4, z=6$; f) $x=5, y=0, z=1$.

6º Dos números suman 38. Si el primero le dividimos entre 3 y el segundo entre 4, los cocientes se diferencian en 1. Halla el valor de dichos números. **Sol:** 18, 20.

7º Una pluma y su carga cuestan juntas 6 €. La pluma cuesta 4 € más que la carga. ¿Cuánto cuesta la pluma y cuánto cuesta la carga? **Sol:** 5 € la pluma y 1 € la carga.

8º Reparte 140 € entre tres personas, de manera que la primera reciba 10 más que la segunda, y ésta reciba 20 € más que la tercera. **Sol:** 60, 50, 30.

9º Tres números son tales que: el segundo más 1/4 del primero suman 68; la mitad del tercero más 3/4 del primero suman 64; y el tercero más 1/4 del segundo suman 95. Obtener dichos números. **Sol:** 32, 60, 80.

10º Halla tres números naturales consecutivos sabiendo que la suma de la mitad del primero más los 2/3 del segundo dan como resultado el tercero. **Sol:** 8, 9, 10.

11º La suma de dos números es 16 y su diferencia 4. Háyalos. **Sol:** 10, 6.

12º La suma de las cifras de un número menor que 100 es 12. Si se permutan las cifras, el nuevo número supera al anterior en 18 unidades. Hallar el número. **Sol:** 57.

13º Divide 180 en dos sumandos de modo que al dividir la mayor sea el doble de la menor. **Sol:** 120, 60.

14º Divide 33 en dos sumandos de tal forma que al sumar 2/5 del primero y 1/3 del segundo dé 12. **Sol:** 15, 18.

15º La diferencia de dos números es 1/6. El triple del mayor menos el duplo del menor es 1. Halla dichos números. **Sol:** 2/3 y 1/2.

16º Un triángulo tiene 33 cm de perímetro y es semejante a otro cuyos lados son 2 cm, 4 cm y 5 cm. ¿Cuáles son las dimensiones del triángulo? **Sol:** 6, 12, 15.

17º Los ángulos de un triángulo son proporcionales a los números 2, 2 y 4. Halla los valores de los ángulos. **Sol:** 45, 45, 90.

18º Un triángulo es semejante a otro cuyos lados son 3, 4 y 6. Halla los lados sabiendo que su perímetro es 48 cm. **Sol:** 12, 16, 20.

19º El área de un campo rectangular es 240 dm^2. La diagonal del campo mide 26 m. Halla sus dimensiones. **Sol:** 10, 24.

20º Se han comprado 6 kg de azúcar y 3 kg de café por un coste total de 8.4 €. Sabiendo que 3 kg de azúcar más 2 kg de café cuestan 4.8 €, hallar el precio del kilogramo de azúcar y el del café.
Sol: 0.8 y 1.2 €.

21º Se mezcla una cierta cantidad de café, cuyo precio es de 34 € el kilo, con 80 kilos de otro café cuyo precio es de 50 € el kilo, con el fin de obtener una mezcla que pueda venderse a 44 € el kilo. Cuántos kilos de café de 34 € deben emplearse en la mezcla? **Sol:** 44 kg.

22º Un lingote de oro cuesta 12000 € y pesa 2 kg, un lingote de plata pesa kilo y medio y su coste en el mercado es de 3000 €. Una corona de masa 1.5 kg se ha fabricado con una mezcla de oro y plata y le ha costado al joyero 7000 €. Calcular la cantidad de oro en la misma.
Sol: 1 kg.

23º Se quieren mezclar vino de 60 € con otro de 35 €, de modo que resulte vino con un precio de 50 € el litro. ¿Cuántos litros de cada clase deben mezclarse para obtener 200 L de la mezcla?
Sol: 120 litros de 60 €/L y 80 litros de 35 €/L.

24º Tenemos la opción de comprar dos clases de una mercancía de precios diferentes. Disponemos de 300 €. Si compro 10 kg de la primera clase podemos comprar 2 kg de la segunda, pero si compramos 5 kg de la primera clase solamente podemos comprar 4 kg de la segunda. ¿Cuál es el precio de cada una de las clases de dicha mercancía? **Sol:** 20 €/kg, 50 €/kg.

25º Se sabe que la Coca Cola de botella cuesta un euro por litro, y que una botella de ginebra 10 € el litro. Un empresario desea producir cubatas de 1 € de valor y de cuarto de litro de volumen. ¿Qué cantidad de ginebra empleará? **Sol:** 0.075 L.

26º Un crucero tiene habitaciones dobles (2 camas) y sencillas (1 cama). En total tiene 47 habitaciones y 79 camas. ¿Cuántas habitaciones tiene de cada tipo?
Sol: 15 individuales y 32 dobles.

27º Mi padrino tiene 80 años y me contó el otro día que entre nietas y nietos suman 8 y que si les diese 1000 ptas a cada nieta y 500 a cada nieto se gastaría 6500 ptas. ¿Cuántos nietos y nietas tiene mi padrino? **Sol:** 5 nietas y 3 nietos.

28º En un corral hay conejos y gallinas; en total, 25 cabezas y 80 patas. Calcula el número de animales de cada clase. **Sol:** 15 conejos y 10 gallinas.

29º En una granja se crían gallinas y cerdos. Si se cuentan las cabezas son 50, y las patas son 134. ¿Cuántos animales hay de cada clase? **Sol:** 17 cerdos y 33 gallinas.

30º En una lucha entre moscas y arañas intervienen 42 cabezas y 276 patas. ¿Cuántos luchadores había de cada clase? (Recuerda que una mosca tiene 6 patas y una araña 8 patas).
Sol: 25 moscas y 17 arañas.

31º En la granja se han envasado 300 L de leche en 120 botellas de 2 y 5 L. ¿Cuántas botellas de cada clase se han usado? **Sol:** 100 botellas de 2 L y 20 botellas de 5 L.

32º Tengo 30 monedas. Unas son de cinco céntimos y otras de un céntimo. ¿Puedo tener en total 78 céntimos? **Sol:** Si.

33º En una bolsa hay 16 monedas con un valor de 220 ptas. Las monedas son de 5 y 25 ptas. ¿Cuántas monedas hay de cada valor? **Sol:** 9 de 5 ptas y 7 de 25 ptas.

34º La madre de Ana tiene triple edad que ella, y dentro de 10 años sólo tendrá el doble de la que entonces tenga su hija. ¿Qué edad tiene cada una? **Sol:** 30, 10.

35º Juan tiene 3 años más que su hermano, y dentro de 3 años la suma de sus edades será de 29 años. ¿Qué edad tiene cada uno? **Sol:** 19, 13.

36º Hace 5 años la edad de un padre era el triple de la de su hijo, y dentro de 5 años sólo será el duplo. ¿Cuáles son las edades del padre y del hijo? **Sol:** El padre 35 y el hijo 15.

37º La suma de las edades de mi abuelo y mi hermano es de 56 años. Si mi abuelo tiene 50 años más que mi hermano, ¿qué edades tienen cada uno? **Sol:** 53 el abuelo y 3 mi hermano.

38º La suma de las edades de 3 personas es de 112 años. La mediana tiene 8 años más que la joven, y la mayor tiene tantos como las otras dos juntas. ¿Qué edad tiene cada una? Sol:

39º El otro día mi abuelo de 70 años de edad quiso repartir entre sus nietos cierta cantidad de dinero. Si nos daba 300 € a cada uno le sobraba 600 € y si no daba 500 € le faltaba 1000 €. ¿Cuántos nietos tiene? ¿Qué cantidad quería repartir? **Sol:** 8 nietos y 3.000 €.

40º Un empresario contrata un número de empleados por 660 €. Otro empresario contrata un empleado más, pero paga 5 € menos por cada uno de ellos y emplea la misma suma. Hallar el número de empleados y lo que gana cada uno. **Sol:** 11 empleados a 60 €.

41º Un frutero lleva al mercado 8 kg de manzanas, 10 de peras y 15 de naranjas, y lo vende todo ello en 34 €. Otro lleva 10 kg de manzanas, 12 de peras y 10 de naranjas, cobrando por todo 31.6 €. Un cliente compra 1 kg de cada clase de fruta y paga 2 €. ¿A cómo estaban los precios de cada clase de fruta aquel día? **Sol:** 1 €/kg manzana, 0.8 €/kg pera, 1.2 €/kg naranja.

42º Entre dos clases hay 60 alumnos. Si el número de alumnos de una clase es el 5/7 de la otra, ¿cuántos alumnos hay en cada clase? **Sol:** 35, 25.

43º Hallar la cantidad de vino que hay en dos vasijas, sabiendo que los 2/5 de la primera equivalen a los 2/3 de la segunda y que la mitad de la primera contiene 5 l menos que la segunda.
Sol: 50, 30.

44º Se ha comprado un número de objetos del mismo precio, por valor de 240 €. Si cada objeto costase 4 € menos, por el mismo dinero habríamos comprado 10 objetos más. ¿Cuántos objetos se han comprado y cuánto ha costado cada uno? **Sol:** 20 objetos, 12 €.

45º Un obrero ha trabajado en dos obras durante 40 días. En la primera cobra 50 € diarios, y en la segunda 75 € diarios. Sabiendo que ha cobrado en total 2.375 €. ¿Cuántos días ha trabajado en cada obra? **Sol:** 25, 15.

46º Al iniciar una batalla, los efectivos de los dos ejércitos en contienda estaban en la razón de 7 a 9. El ejército menor perdió 15000 hombres y el mayor 25000. La relación de efectivos quedó, por efecto de dichas bajas, en la de 11 a 13. Calcular el número inicial de soldados de cada ejército. **Sol:** 90000 y 70000.

47º Un padre tiene 30 años más que su hijo, y dentro de 5 años la edad del padre será triple de la del hijo. ¿Qué edad tiene cada uno? **Sol:** 40, 10.

48º Sabemos que mi tío tiene 27 años más que su hijo y que dentro de 12 años le doblará la edad. ¿Cuántos años tiene cada uno? **Sol:** Mi tío 42 y mi primo 15 años.

49º Un bisabuelo le dijo a su bisnieta. "Hoy tu edad es 1/5 de la mía y hace 7 años no era más que 1/7". ¿Qué edad tienen el bisabuelo y la bisnieta? **Sol:** 105 el bisabuelo y 21 la bisnieta.

50º Juan y Roberto comentan: Juan: "Si yo te tomo 2 monedas, tendré tantas como tú" Roberto: "Sí, pero si yo te tomo 4, entonces tendré 4 veces más que tú". ¿Cuántas monedas tienen cada uno? **Sol:** Juan tiene 8 monedas y Roberto 12 monedas.

51º En una reunión de chicas y chicos, el número de éstas excede en 26 al de aquellos. Después de haber salido 12 chicos y 12 chicas, quedan doble de éstas que de aquéllos. Halla el número de chicos y chicas que había en la reunión. **Sol:** 32 chicas y 22 chicos.

52º Calcular el número de monedas que tiene cada uno de los amigos José, Luis e Iván, sabiendo que si Iván diese 5 a José tendrían las mismas; si José diera 5 a Luis, éste tendría el cuádruple que José; además se sabe que Luis tiene la tercera parte del número de monedas que poseen los tres. **Sol:** 10, 15, 20.

53º Un granjero cuenta con un determinado número de jaulas para sus conejos. Si introduce 6 conejos en cada jaula quedan cuatro plazas libres en una jaula. Si introduce 5 conejos en cada jaula quedan dos conejos libres. ¿Cuántos conejos y jaulas hay? **Sol:** 6 jaulas y 32 conejos.

54º Un número está formado por dos cifras cuya suma es 9. El número invertido es igual al número dado más 9 unidades. Hállese dicho número. **Sol:** 45.

55º Un número consta de dos cifras cuya suma es 15. Si se toma la cuarta parte del número y se le agregan 45 resulta el número invertido. ¿Cuál es ese número? **Sol:** 96.

56º Hallar una fracción tal que si se añade 1 al numerador se convierte en 1/3 y añadiendo 1 a su denominador sea igual a 1/4. **Sol:** 4/15.

57º Encontrar un quebrado tal que añadiendo 7 a los términos de la fracción de 5/7 y quitando 5 a los términos de 1/2. **Sol:** 13/21.

Ejercicios de ecuaciones irracionales.

1º Resuelva las siguientes ecuaciones irracionales:

a) $x+\sqrt{x}=30$

b) $\sqrt{x}+1=\sqrt{x+9}$

c) $\sqrt{7-3x}-x=7$

d) $\sqrt{x+4}=3-\sqrt{x-1}$

e) $5\sqrt{x}+3=2x$

f) $3\sqrt{6x+1}-5=2x$

g) $\sqrt{4x+5}-\sqrt{3x+1}=1$

h) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+4}=6$

i) $\sqrt{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+4}}=6$

j) $1+\sqrt{x+1}=x/3$

k) $\sqrt{x^3}-2\sqrt{x}=\sqrt{x}$

l) $\sqrt{x-3}+\sqrt{x+4}=\sqrt{4x+1}$

m) $2\sqrt{x+4}=\sqrt{5x+4}$

n) $\sqrt{x^2+3x+7}=5$

ñ) $-\sqrt{x}=x+1$

o) $\sqrt{2x+5}+6=3x+3$

p) $\sqrt{3x-2}-4=0$

q) $\sqrt{2x+1}=x-1$

r) $\sqrt{3x+10}=1+\sqrt{3x+3}$

s) $\dfrac{3}{\sqrt{x}}=\dfrac{6}{\sqrt{3x+4}}$

t) $\sqrt{2}+\sqrt{\dfrac{8}{x}}=\sqrt{2x}$

u) $\sqrt{8x-4}=\sqrt{6x-5}+\sqrt{2x+9}$

v) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x+1}=\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$

w) $\dfrac{21}{\sqrt{6x+1}}-\sqrt{6x+1}=2\sqrt{3x}$

x) $\sqrt{x+6}+\sqrt{x+11}=\sqrt{5-10x}$

y) $\sqrt{9\sqrt{15-x}}=6\sqrt{2x+3}$

z) $\sqrt{x+6}+\sqrt{x+1}=\sqrt{7x+4}$

Sol: a) 25; b) 16; c) –3, –14; d) 13/9; e) 9, 1/4; f) 8, 1/2; g) 5, 1; h) 5; i) 221; j) 15, 0; k) 0, ±3; l) 12; m) 12; n) 3, –6 ; ñ) 1, 4; o) 2/9, 2; p) 6; q) 4, 0; r) 2; s) 4; t) 1, 4; u) 5; v) 5/8; w) 4/3; x) –2, 3/7; y) –1; z) $x = 3$.

2º ¿Qué número aumentado en 3 unidades su raíz cuadrada da 12? **Sol:** 81.

Ejercicios de sistemas de ecuaciones no lineales.

1º Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=7 \\ x\cdot y=12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2+y^2=169 \\ x+y=17 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{7} \\ x^2+y^2=1184 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+y=1 \\ xy+2y=2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} xy-y^2=0 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ h) $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=13 \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=1 \end{cases}$ i) $\begin{cases} \dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{y}=13 \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{y}=3 \end{cases}$

j) $\begin{cases} xy=28 \\ x^2+y^2=65 \end{cases}$ k) $\begin{cases} 2x+y^2=5 \\ 5x=9+y \end{cases}$ l) $\begin{cases} 5x+7y=61 \\ xy=8 \end{cases}$

m) $\begin{cases} x+xy+y=11 \\ xy=6 \end{cases}$ n) $\begin{cases} x^2+y^2+x-5y=24 \\ x+y=7 \end{cases}$ ñ) $\begin{cases} x^2+y^2+3x+y=20 \\ x-y=2 \end{cases}$

Sol: a) $x = 3, y = 4$; $x = 4, y = 3$; b) $x = 3, y = 4$; $x = 4, y = 3$; c) $x = 5, y = 12$; $x = 5, y = 12$;
d) $x = 20, y = 28$; $x = –20, y = –28$; e) $x = 0, y = 1$; $x = –1, y = 2$;
f) $x = y = 1$; $x = 7/5, y = 1/5$; g) $x = y = 1$; $x = 3/2, y = 0$;
h) $x = 1/3, y = 1/2$; $x = –1/2, y = –1/3$; i) $x = 1/2, y = 2/3$;
j) $x = 4, y = 7$; $x = –4, y = –7$; $x = 7, y = 4$; $x = –7, y = –4$;
k) $x = 2, y = 1$; $x = 38/25, y = –7/5$; l) $x = 1, y = 8$; $x = 56/5, y = 5/7$;
m) $x = 2, y = 3$; $x = 3, y = 2$; n) $x = –1, y = 8$; $x = 5, y = 2$; ñ) $x = 3, y = 1$; $x = –3, y = –5$.

2º Resuelve el siguiente sistema por el método de reducción y comprueba que tiene cuatro soluciones:

$$\begin{cases} x^2+y^2=74 \\ 2x^2-3y^2=23 \end{cases}$$

Sol: $x = 7, y = \pm 5$; $x = –7, y = \pm 5$.

3º Hallar dos números naturales cuya diferencia es 8 y cuyo producto es 105. **Sol:** 7, 15.

4º Dos números suman 52 y sus cuadrados 1354. Hallarlos. **Sol:** 25, 27.

5º La diferencia entre los cuadrados de dos números consecutivos es 17. ¿Cuáles son dichos números? **Sol:** 8 y 9.

6º Dos números suman 22 y la diferencia de sus cuadrados es 44. Halla estos números. **Sol:** 10, 12.

7º Dos números suman 65 y la diferencia de sus cuadrados es 325. Calculados. **Sol:** 30, 35.

8º Halla dos números sabiendo que su suma es 15 y la diferencia de sus cuadrados 15. **Sol:** 7, 8.

9º Halla dos números cuya suma es 23 y su producto 130. **Sol:** 10, 13.

10º Halla dos números consecutivos cuyo producto es 240. **Sol:** 15, 16.

11º Halla dos números cuya suma es 15 y la de sus cuadrados 117. **Sol:** 6, 9.

12º Halla dos números positivos cuya diferencia sea 3 y la suma de sus cuadrados 929. **Sol:** 20, 23.

13º La suma de los cuadrados de dos números positivos es 56. Hallar dichos números, sabiendo además que el mayor excede al menor en 2. **Sol:** 15, 13.

14º Hallar dos números sabiendo que la suma de los mismos es 9 y el producto de sus cuadrados es 400. **Sol:** 4 y 5.

15º Descomponer el número 15 en dos sumandos tales que el triple del cuadrado del primero y el doble del segundo sume 255. **Sol:** 9, 6.

16º Descomponer el número 10 en dos números cuyo producto sea 24. **Sol:** 4, 6.

17º Halla dos números naturales cuya suma es 12 y la suma de sus cuadrados 80. **Sol:** 4, 8.

18º Descomponer el número 15 en dos partes, cuyos cuadrados difieran en 45. **Sol:** 6, 9.

19º La suma de los cuadrados de dos números positivos es 117, y la diferencia de sus cuadrados es 45. ¿Cuáles son los números? **Sol:** 6, 9.

20º Hallar un número de dos cifras en que la cifra de las unidades sea igual al cuadrado de la cifra de las decenas y la suma de las dos cifras sea 6. **Sol:** 24.

21º La suma de dos números enteros positivos es 36. El producto del primero, aumentado en 3, por el segundo aumentado en 2, es 408. ¿Cuáles son dichos números? **Sol:** 21 y15 y también 14 y 22.

22º Para vallar una finca rectangular de 600 m^2 se han utilizado 100 m de cerca. Calcula las dimensiones de la finca. **Sol:** 30x20.

23º Calcular las dimensiones de un rectángulo de 30 cm de perímetro y 54 cm^2 de área. **Sol:** 6, 9.

24º La suma de las áreas de dos cuadrados es 100 dm^2, y su diferencia es 28 dm^2. Hallar los lados de los cuadrados. **Sol:** 6 y 8.

25º Un jardín de forma rectangular tiene 600 m^2 de superficie y su perímetro mide 100 m. ¿Cuáles son sus lados? **Sol:** 20, 30.

26º El perímetro de un triángulo rectángulo es de 56 m y la hipotenusa 25 m. Hallar los lados.
Sol: 7, 24.

27º Un cuadrado tiene 44 m^2 más de área que otro, y éste dos metros menos de lado que el primero. Hallar los lados de los dos cuadrados. **Sol:** 12, 10.

28º Calcular los tres lados de un triángulo rectángulo sabiendo que la suma de sus lados es 24 y que la suma de sus cuadrados es 200. **Sol:** 6, 8, 10.

29º Un cuadrado tiene 13 m^2 más que otro y éste 1 m menos de lado que el primero. Halla los lados de los cuadrados. **Sol:** 6, 7.

30º La hipotenusa de un triángulo rectángulo es 26 m, y la suma de los catetos es 34 m. Hallar los catetos. **Sol:** 10, 24.

31º Uno de los lados de un rectángulo mide 2 cm más que el otro. ¿Cuáles son las dimensiones si su área es 15 cm^2? **Sol:** 3x5.

32º Una habitación de suelo rectangular tiene una superficie de 30 m^2 con un perímetro de 22 m. Halla las dimensiones de la habitación. **Sol:** 5x6.

33º Se tiene un lote de baldosas cuadradas. Si se forma con ellas un cuadrado de x baldosas por lado sobran 8, y si se toman $x + 1$ baldosas por lado faltan 13. Hallar las baldosas del lote. **Sol:** 108 baldosas.

34º Un rectángulo tiene una longitud de 30 cm y una anchura de 15 cm. ¿Cuánto se debe añadir a la anchura y quitar a la longitud para que su área disminuya en 100 cm^2 y su perímetro no varíe? **Sol:** 5 cm.

35º La edad de mi tía, hoy es el cuadrado de la de su hija; pero dentro de nueve años será solamente el triple. ¿Qué edad tiene cada una? **Sol:** la tía 36 y la hija 6.

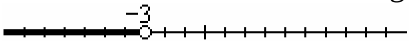
36º Hallar una fracción cuyo valor no cambia añadiendo 15 al numerador y 18 al denominador y que se triplica cuando se añade 55 al numerador y 6 al denominador. **Sol:** 20/24.

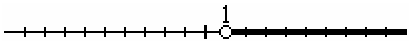
37º Al principio del curso la relación del número de alumnos de dos colegios era 7/10. Habiéndose retirado 50 alumnos del primer curso y 80 del segundo curso al fin de curso la relación es 5/7. ¿Cuál fue el número de alumnos matriculados en cada colegio? **Sol:** 350/750.

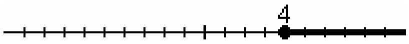
38º Hállense las dimensiones de un rectángulo sabiendo que si se añaden 8 m a la base y 5 a la altura la superficie aumenta 180 m^2. Pero si se aumenta 3 m a la base y se quitan 4 m a la altura la superficie disminuye 30 m^2. **Sol:** La base mide 12 m y la altura 10 m.

Ejercicios de inecuaciones:

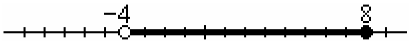
1º Escribir en forma de intervalo las siguientes regiones:

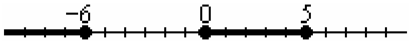
a) 

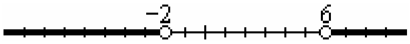
b) 

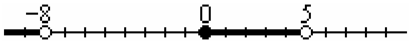
c) 

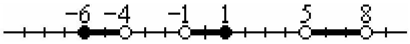
d) 

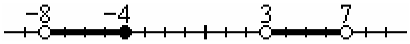
e) 

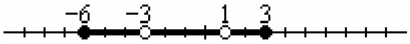
f) 

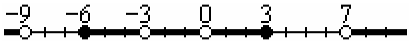
g) 

h) 

i) 

j) 

k) 

l) 

Sol: a) $(-\infty,\,-3)$; b) $(1,\infty)$; c) $[4,\infty)$; d) $(-\infty,\,1]$; e) $(-4,8]$; f) $(-\infty,-6]\cup[0,5]$;
g) $(-\infty,-2)\cup(6,\infty)$; h) $(-\infty,-8)\cup[0,\,5)$; i) $[-6,-4)\cup(-1,1]\cup(5,8)$;
j) $(-8,-4]\cup(3,7)$; k) $[-6,-3)\cup(-3,\,1)\cup(1,\,3]$;
l) $(-\infty,-9]\cup[-6,-3)\cup(-3,0)\cup(0,3]\cup(7,\infty]$.

2º Resolver las siguientes inecuaciones expresando mediante intervalos los resultados:

a) $3x<15$ b) $3x-9>0$ c) $4x-20<0$
d) $4x-8>3x-14$ e) $3x+6>2x+12$ f) $5x+3>2x+6$
g) $10-3x<4x-4$ h) $10x+24<16x+12$ i) $-2x+3\geq -3x-1$
j) $5(x+6)-5>-10$ k) $2(5-7x)\geq 52$ l) $3(2x-1)+1<-13-5x$

Sol: a) $(-\infty,5)$; b) $(3,\infty)$; c) $(-\infty,5)$; d) $(-6,\infty)$; e) $(6,\infty)$; f) $(-3,\infty)$; g) $(2,\infty)$;
h) $(2,\infty)$; i) $[-4,\infty)$; j) $(-7,\infty)$; k) $(-\infty,-3]$; l) $(-\infty,-1)$.

3º Resolver las siguientes inecuaciones expresando los resultados mediante intervalos:

a) $\dfrac{x}{10}>4x-\dfrac{78}{10}$ b) $\dfrac{2x}{3}+\dfrac{5x-1}{2}<\dfrac{26}{3}$

c) $\dfrac{3(4x-7)}{4}-\dfrac{x}{8}\geq\dfrac{3x}{8}-\dfrac{21}{4}$ d) $\dfrac{3x+5}{6}-\dfrac{5-2x}{2}\leq\dfrac{x-12}{3}$

e) $\dfrac{4-3x}{3}-\dfrac{2x-3}{4}>-\dfrac{65}{13}$ f) $\dfrac{2}{3}-x+\dfrac{1}{6}-\dfrac{x}{3}\geq\dfrac{19-22x}{18}$

Sol: a) $(-\infty,2)$; b) $(-\infty,3)$; c) $[0,\infty)$; d) $(-\infty,-2]$; e) $(-\infty,-5)$; f) $(-\infty,-2]$.

4º Resolver las siguientes inecuaciones:

a) $x^2-7x+10>0$ b) $x^2-7x+6<0$ c) $x^2-7x+12\geq 0$
d) $-2x^2-10x-8>0$ e) $x^2-6x+9>0$ f) $3x^2+5x-2\leq 0$
g) $-8x\leq -x^2-15$ h) $6x^2>12x$ i) $-27x\leq -12x^2$
j) $9x^2-6x+1\leq 0$ k) $x^2+5x-14<0$ l) $(x-2)(x+1)\geq 18$
m) $x^2+3x-54<0$ n) $x^2+3x-40>0$ Ñ) $x^2+9x+14>0$

Sol: a) $(-\infty,2)\cup(5,\infty)$; b) $(1,6)$; c) $(-\infty,3]\cup[4,\infty)$; d) $(-4,-1)$; e) $\mathbb{R}-\{3\}$;
f) $[-2,1/3]$; g) $[3,5]$; h) $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$; i) $[0,9/4]$; j) $\{1/3\}$; k) $(-7,2)$;
l) $(-\infty,-4]\cup[5,\infty)$; m) $(-9,6)$; n) $(-\infty,-8)\cup(5,\infty)$; ñ) $(-\infty,-7)\cup(-2,\infty)$.

5º Resolver las siguientes inecuaciones:

a) $\dfrac{x-2}{x+3}>0$ b) $\dfrac{x-3}{x+1}>0$ c) $\dfrac{x-3}{x+1}>0$

d) $\dfrac{2x-1}{x}>0$ e) $\dfrac{x^2+x}{x-2}>0$ f) $\dfrac{x^2-25}{x^2-7x+10}\le 0$

g) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4x-5}\ge 0$ h) $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+3x+2}\le 0$ i) $\dfrac{x^2-8x+7}{x^2-3x-10}<0$

j) $\dfrac{x^2-2x-8}{x^2-1}\ge 0$ k) $\dfrac{x^2-3x-4}{x}>0$ l) $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-4}>0$

m) $\dfrac{x^2-4x-21}{x+10}\le 0$ n) $\dfrac{x^2+4x-77}{x+8}\ge 0$ ñ) $\dfrac{x^2-4x-77}{x+5}\ge 0$

Sol: a) $(-\infty,-3)\cup(2,\infty)$; b) $(-\infty,-1)\cup[3,\infty)$; c) $(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$; d) $(0,-1]$;
e) $(-1,0)\cup(2,\infty)$; f) $[-5,2]$; g) $(-\infty,-1)\cup[2,3]\cup(5,\infty)$; h) $(-2,-1)\cup(1,3)$;
i) $(5,7)\cup(-2,1)$; j) $(-\infty,-2]\cup(-1,1)\cup[4,\infty)$; k) $(-1,0)\cup(4,\infty)$;
l) $(-\infty,-2)\cup(-1,2)\cup(3,\infty)$; m) $(-\infty,-10)\cup[-3,7]$; n) $[-11,-8]\cup[7,\infty)$;
ñ) $[-7,-5]\cup[11,\infty)$.

6º Resuelve, si se pudiese, los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases}2x-4>0\\3x+12>0\end{cases}$ b) $\begin{cases}x-5>0\\x+8>0\end{cases}$ c) $\begin{cases}2-x>0\\1+x>0\end{cases}$

d) $\begin{cases}2x+3\ge 1\\-x+2\ge -1\end{cases}$ e) $\begin{cases}2x+3\ge 1\\-x+2<-1\end{cases}$ f) $\begin{cases}2x+3<1\\-x+6<3\end{cases}$

g) $\begin{cases}3x-2<x\\6x-4>3-x\end{cases}$ h) $\begin{cases}x+3x\ge 4\\2x+3\le 10-x\end{cases}$ i) $\begin{cases}10x+2\le 3x+10\\2(x+3)\ge x\end{cases}$

j) $\begin{cases}x+3>0\\x^2+x-2<0\end{cases}$ k) $\begin{cases}x+1\le 0\\x^2+x>0\end{cases}$ l) $\begin{cases}x^2-4\le 0\\x^2-2x-3\ge 0\end{cases}$

m) $\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{3-x}>0\\2(4x-3)\le 9x-2\end{cases}$ n) $\begin{cases}(x+1)^2-x^2+x+2>0\\\dfrac{x}{x-2}>0\end{cases}$ ñ) $\begin{cases}x^2-2x-8\le 0\\\dfrac{x-1}{x+1}>0\end{cases}$

Sol: a) $(2,\infty)$; b) $(5,\infty)$; c) $(-1,2)$; d) $[-1,3]$; e) $(3,\infty)$; f) Sin solución; g) Sin solución;
h) $[1,7/3]$; i) $[-6,8/7]$; j) $(-2,1)$; k) $(-\infty,-1)$; l) $[-2,-1]$; m) $[-4,-2)\cup(2,3)$;
n) $(-1,0)\cup(2,\infty)$; ñ) $[-2,-1)\cup(1,4]$.

7º Resolver el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases}-x^2+x+2>0\\x^2+4\le (x+2)^2\\3x+5<x+7\end{cases}$$

Sol: $[0,1)$.

8º Representa las siguientes regiones:

a) $x - y \leq 0$ b) $2x + 3y < 1$ c) $x + 2y \geq 2$

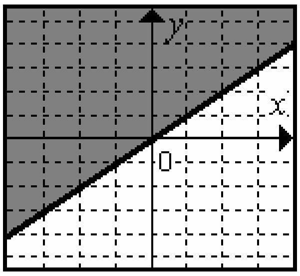
d) $6x - y \geq 3$ e) $3x - 2y \leq 2$ f) $x - 2y < 3$

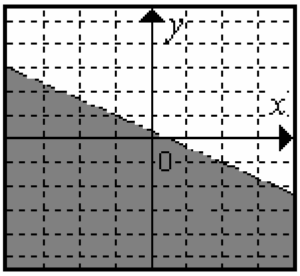
g) $3x - y \geq 3$ h) $4x - 3y \leq -1$ i) $x - 3y > -2$

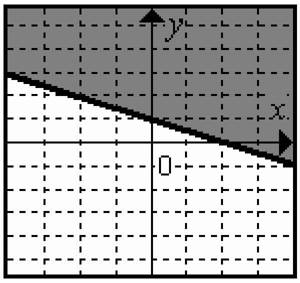
j) $2x + y \geq 4$ k) $-x - y \leq 2$ l) $x + 5y > 3$

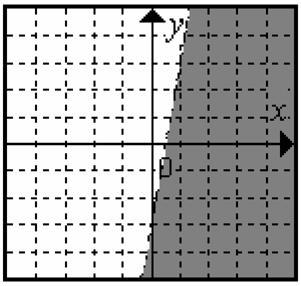
m) $x - \dfrac{y}{2} < 4$ n) $3x + \dfrac{y}{2} \geq 4$ ñ) $\dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} \leq -1$

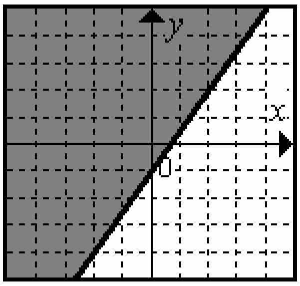
Sol:

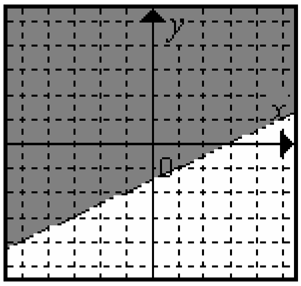
a)


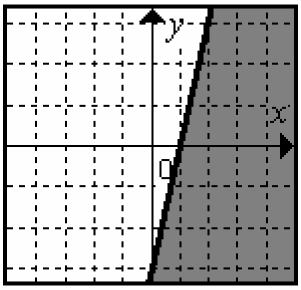
b)


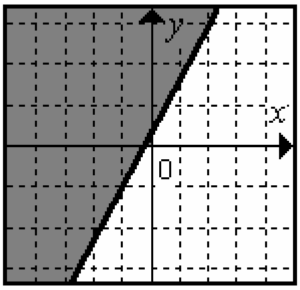
c)


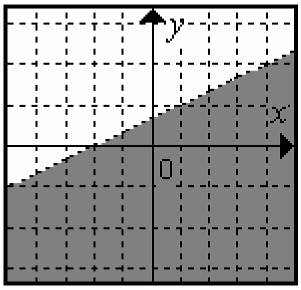
d)


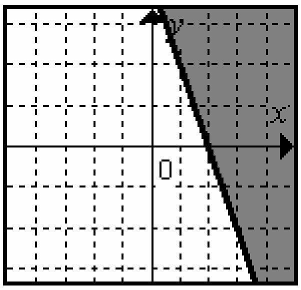
e)


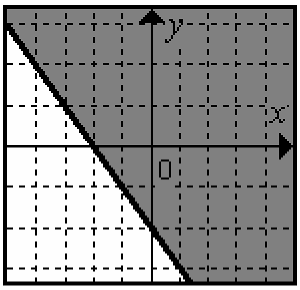
f)


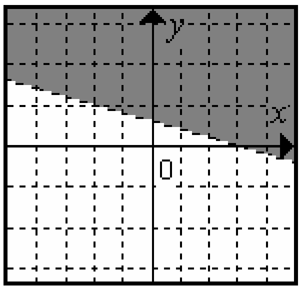
g)


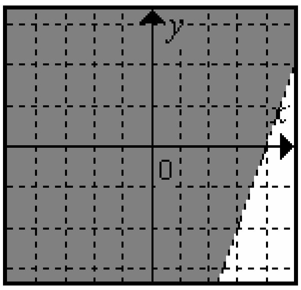
h)


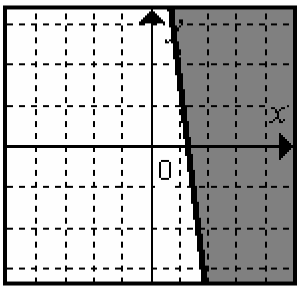
i)


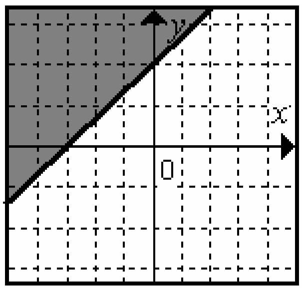
j)


k)


l)


m)


n)


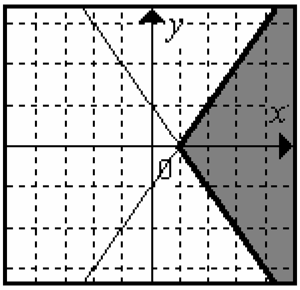
ñ)


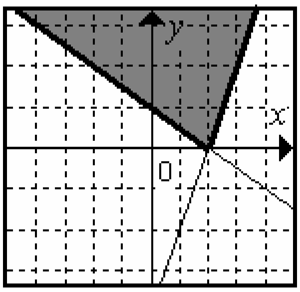
9º Representa las siguientes regiones:

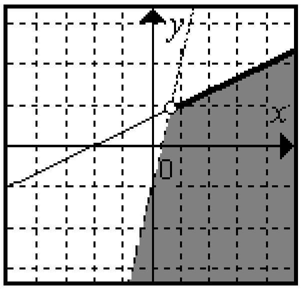
a) $\begin{cases} x+y \geq 1 \\ x-y \geq 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y \leq 2 \\ 2x-y \geq 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x+3y \leq 2 \\ 3x-y > 1 \end{cases}$

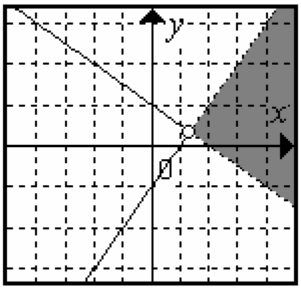
d) $\begin{cases} x+2y > 2 \\ x-y > 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x+y \leq 2 \\ x-2y > 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x-6y \leq 3 \\ 5x+y \geq 3 \end{cases}$

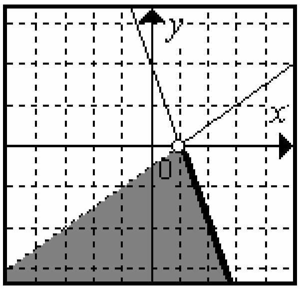
Sol:

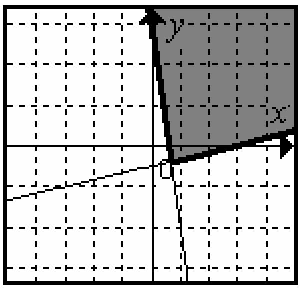
a) 

b) 

c) 

d) 

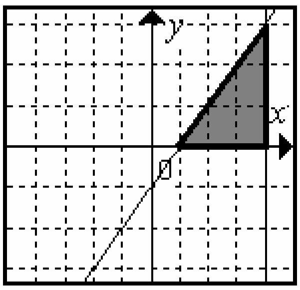
e) 

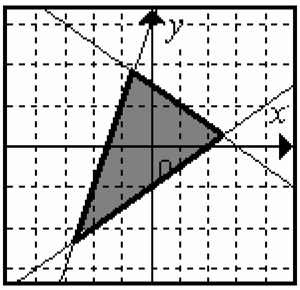
f) 

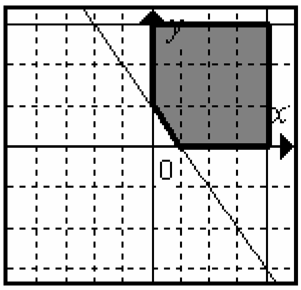
10º Representa las siguientes regiones:

a) $\begin{cases} x-y \geq 1 \\ y \geq 0 \\ x \leq 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y \leq 2 \\ x+2y \leq 3 \\ y-2x \leq 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y \geq 1 \\ y \leq 3 \\ x \geq 0 \\ x \leq 4 \end{cases}$

Sol:

a) 

b) 

c) 

Ejercicios de suma, resta, producto y división de polinomios.

1º Opera:

a) $4x^2-3x^2+x^2$ b) $7x-3x+2x$ c) $7x^3-3x^3+4x^3$

d) $7x-4x+2x$ e) $9x^5-3x^5-2x^5$ f) $2x-5x+9x$

g) $4x^3-5x^3-2x^3$ h) $x^4+7x^4-6x^4$ i) $2x^2+x^4-5x^4$

j) $3x^3-2x^3-x^3$ k) $-2x^2+5x^2-4x^2$ l) $-x^2-2x^2+5x^2$

m) $x^4-\dfrac{2x^4}{3}+\dfrac{x^4}{2}$ n) $2x-\dfrac{2x}{3}+\dfrac{x}{2}$ ñ) $\dfrac{2x^3}{3}+x^3-\dfrac{3x^3}{2}$

Sol: a) $2x^2$; b) $6x$; c) $8x^3$; d) $5x$; e) $4x^5$; f) $6x$; g) $-3x^3$; h) $2x^4$; i) $-2x^4$; j) 0; $-x^2$; m) $5x^4/6$; n) $11x/6$; ñ) $x^3/6$.

2º Reduce las siguientes expresiones:

a) $2x^2-4+3x-3x^2$ b) $3x-4x^2-4-5x+3x^2$

c) $6x-3x^3-4-4x^3+4x$ d) $7-3(x^2-1)+2(x-3)-4x+x^2$

e) $2x^3-3x^3-2(x-x^3)+4x-2x^3$ f) $3x^2-3+4x-5+3x^2$

Sol: a) $-x^2+3x-4$; b) $-x^2-2x-4$; c) $-7x^3+10x-4$; d) $-2x^2-2x+4$; e) $-x^3+2x$; f) $6x^2+4x-8$.

3º Halla el polinomio que sumado a $P(x)=4x^3-3x^2+2x$ da como resultado:

a) $2x^3-3x^2-x+2$ b) $3x^3-3x^2+1$ c) $4x^3+1$ d) $2x^3-3x^2+5x-2$

Sol: a) $-2x^3-3x+2$ -2x^3-3x+2; b) $-x^3-2x+1$; c) $3x^2-2x+1$; d) $-2x^3+3x-2$.

4º Efectúa y reduce:

a) $(x^2-3x+1)\cdot(x+2)$ b) $(2x^3-3x^2+2)(2x-1)$ c) $(x^2+x-2)(x^2+1)$

Sol: a) x^3-x^2-5x+2; b) $4x^4-8x^3+3x^2+4x-2$; c) $x^4+x^3-x^2+x-2$.

5º Efectúa y reduce:

a) $2x^2\cdot 3x-2x\cdot x^2$ b) $3x-2(7x-5)$ c) $x^2(3x-2)+3x^3$

d) $7x^2-3x(-2x)+5x^2$ e) $4x(x-2)-3x(x-1)$ f) $6x(-3x^2)-5x^2(-2x)$

Sol: a) $4x^3$; b) $-11x+10$; c) $6x^3-2x^2$; d) $18x^2$; e) x^2-5x; f) $-8x^3$.

6º Opera y reduce las siguientes expresiones:

a) $2x^2-3x(2x^2-3x)+2(x^2-2x)$ b) $3x(3-x)+4(x^2-3x)$

c) $x^2-3x(-5x)-x(x-3x)$ d) $(x^2-3x+2)\cdot(3x-2)$

e) $(x-3)(x^2-3x+1)$ f) $(x-3)\cdot(-2x+3)$

Sol: a) $-6x^3+13x^2-4x$; b) x^2-3x; c) $18x^2$; d) $3x^3-11x^2+12x-4$; e) $x^3-6x^2+10x-3$; f) $-2x^2+9x-9$.

7º Sean los polinomios:

$$P(x)=4x^3-3x^2+1 \qquad Q(x)=3x^2-3x+2$$

Calcular:

a) $P(x)-Q(x)$ b) $3\cdot P(x)+2\cdot Q(x)$ c) $P(x)+Q(x)$ d) $P(x)\cdot Q(x)$

Sol: a) $P-Q=4x^3-6x^2+3x-1$; b) $3P+2Q=12x^3-3x^2-6x+7$; c) $P+Q=4x^3-3x+3$; d) $P\cdot Q=12x^5-21x^4+17x^3-3x^2-3x+2$.

8º Sean los polinomios:

$P(x) = x^3 - x^2 - 3x + 1$ $\quad Q(x) = 2x^2 - 2x + 1$ $\quad R(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x - 1$

Calcular:

a) $P(x) + Q(x)$ b) $P(x) - Q(x)$ c) $P(x) + Q(x) + R(x)$

d) $P(x) - Q(x) + R(x)$ e) $2 \cdot P(x) - 3 \cdot Q(x)$ f) $P(x) \cdot Q(x) - R(x)$

g) $Q(x) \cdot \left(2 \cdot P(x) - R(x)\right)$ h) $P(x) + Q(x) - R(x)$ i) $Q(x) \cdot P(x) \cdot R(x)$

Sol: a) $x^3 + x^2 - 5x + 2$; b) $x^3 - 3x^2 - x$; c) $3x^3 - 5x^2 + x + 1$; d) $3x^3 - 9x^2 + 5x - 1$;
e) $2x^3 - 8x^2 - 1$; f) $2x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 13x^2 - 11x + 2$; g) $8x^4 - 32x^3 + 34x^2 - 18x + 3$;
h) $-x^3 + 7x^2 - 11x + 3$; i) $4x^8 - 20x^7 + 30x^6 + 6x^5 - 66x^4 + 77x^3 - 43x^2 + 11x - 1$.

9º Haz las divisiones siguientes, calculando su cociente y su resto:

a) $(x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2) : (x^2 - x)$ b) $(x^5 - 4x^3 + 4x^2 + 4x - 3) : (x^2 - 2)$

c) $(x^5 + 3x^4 - 2x^2 + 5x + 2) : (x^3 - x + 1)$ d) $(x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 3x + 2) : (x^2 - 1)$

e) $(x^6 - 4x^4 + x^3 + 3x^2 + x) : (x^3 - x)$ f) $(x^4 + 2x^2 - 5) : (x^2 + 3)$

Sol: a) cociente: $x^2 - 3x + 1$, resto: $x + 2$; b) cociente: $x^3 - 2x + 4$, resto: 5;
c) cociente: $x^2 + 3x + 1$, resto: $3x + 1$; d) cociente: $x^2 + 3x - 2$, resto: 0;
e) cociente: $x^3 - 3x + 1$, resto: $2x$; f) cociente: $x^2 - 1$, resto: -2.

10º En una división de polinomios, el divisor es $2x^2 - 3$, el cociente $x + 3$ y el resto $x - 1$. ¿Cuál es el dividendo? **Sol:** $x^3 + 6x^2 - 2x - 10$.

11º Calcula el cociente y el resto en las divisiones siguientes mediante el método de Ruffini:

a) $(x^5 - 2x^4 - 3x^2 + 7x + 1) : (x - 2)$ b) $(x^4 - x^3 - 2x^2 + x - 1) : (x + 1)$

c) $(2x^3 - 3x^2 + 4x - 3) : (x - 1)$ d) $(x^4 + 3x^3 - x^2 - x + 3) : (x + 3)$

e) $(-x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 2x + 7) : (x - 3)$ f) $(x^5 + x^4 - 2x^3 + 4x - 3) : (x + 2)$

Sol: a) cociente: $x^4 - 3x + 1$, resto: 3; b) cociente: $x^3 - 2x^2 + 1$, resto: -2;
c) cociente: $2x^2 - x + 3$, resto: 0; d) cociente: $x^3 - x + 2$, resto: -3;
e) cociente: $-x^3 + x^2 - 2$, resto: 1; f) cociente: $x^4 - x^3 + 4$, resto: -11.

12º Halla el resto de la división utilizando el teorema del resto:

a) $(x^5 - 2x^3 + x^2 - 1) : (x - 2)$ b) $(x^3 - 3x + 2) : (x - 1)$

c) $(2x^4 - 3x^2 + x - 1) : (x + 1)$ d) $(-x^4 - 3x^3 - 3) : (x + 2)$

e) $(x^3 - 2x^2 + x + 3) : (x - 1)$ f) $(2x^4 - 3x^2 - x + 1) : (x - 3)$

g) $(x^4 - 3x^3 + 2x) : (x - 2)$ h) $(3x^4 - 2x^3 + 3) : (x + 1)$

Sol: a) 19; b) 0; c) -3; d) 5; e) 3; f) 133; g) -4; h) 8.

13º Halla "a" para que la siguiente división sea exacta:

$$(x^5 - 3x^3 + ax^2 - 4) : (x - 2)$$

Sol: $a = -1$.

14º Halla "a" para que la siguiente división tenga de resto 2:

$$(x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 5x^3 + 4x^2 + ax + 2) : (x - 1)$$

Sol: $a = -1$.

15º Calcula el valor de k para que la división:

$$(2x^4 - 6x^3 + kx^2 - 11) : (x + 1)$$

sea exacta. **Sol:** $k = 3$.

16º Halla el valor que debe tener m para que el resto de la división

$$\left(2x^3 + xm^2 + x - 4\right) : (x - 2)$$

sea igual a 6. **Sol:** $m = -2$.

17º Calcula m para que el polinomio:

$$P(x) = 2x^3 + mx^2 + 5x + 2$$

sea divisible por (x + 1). **Sol:** $m = 5$.

Ecuaciones polinómicas con raíces enteras.

Teorema fundamental del Álgebra:

Todo polinomio de grado n, con coeficientes reales o complejos, tiene exactamente n raíces, no forzosamente distintas, es decir contadas con su orden de multiplicidad.

Factorización de un polinomio:

Consiste en expresar el polinomio como un producto de binomios:

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} \ldots + a_2 x + a_1 x + a_0 = a_n \left(x - x_1\right)^{n_1} \cdot \left(x - x_2\right)^{n_2} \cdot \ldots \cdot \left(x - x_r\right)^{n_r}$$

Con

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$$

Donde $x_1, x_2, \ldots, x_r$ son las raices mencionadas por el teorema fundamental del álgebra.

Formulas de Cardano-Vieta:

Son unas expresiones que nos permiten relacionar los coeficientes de un polinomio con sus raices.

Formulas de Cardano-Vieta para grado 2:

$$p(z) = a_2 \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$\frac{a_1}{a_2} = -(x_1 + x_2) \qquad \frac{a_0}{a_2} = x_1 \cdot x_2$$

Formulas de Cardano-Vieta para grado 3:

$$p(z) = a_3 \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$\frac{a_2}{a_3} = -(x_1 + x_2 + x_3) \qquad \frac{a_1}{a_3} = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 \qquad \frac{a_0}{a_3} = -x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

Formulas de Cardano-Vieta para grado 4:

$$p(z) = a_3 \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)(x - x_4) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$\frac{a_3}{a_4} = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \qquad \frac{a_2}{a_4} = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_4$$

$$\frac{a_1}{a_4} = -\left(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4\right) \qquad \frac{a_0}{a_3} = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$$

Ejercicios:

1º Determina las raíces de las siguientes ecuaciones:

a) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ b) $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ c) $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$

d) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ e) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$ f) $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0$

g) $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$ h) $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$ i) $x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$

j) $2x^3 + 4x^2 - 10x - 12 = 0$ k) $2x^3 - x^2 - 25x - 12 = 0$ l) $3x^3 + 6x^2 - 45x - 108 = 0$

Sol: a) $x = \pm1$, $x = 2$; b) $x = \pm1$, $x = 3$; c) $x = 1$ (doble), $x = 3$; d) $x = 1$ (doble), $x = 2$; e) $x = 1$, $x = 2$ (doble); f) $x = -2$, $x = 2$ (doble); g) $x = 2$, $x = -2$ (doble); h) $x = -1$, $x = -2$ (doble); i) $x = 2$, $x = -1$, $x = -4$; j) $x = 2$, $x = -1$, $x = -3$; k) $x = 4$, $x = -3$, $x = -1/2$; l) $x = 4$, $x = -3$ (doble).

2º Determina las raíces de las siguientes ecuaciones:

a) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ b) $x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 = 0$

c) $x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4 = 0$ d) $x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4 = 0$

e) $x^4 + 9x^3 + 30x^2 + 44x + 24 = 0$ f) $x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 20x - 24 = 0$

g) $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$ h) $x^4 - x^3 - 11x^2 + 5x + 30 = 0$

i) $2x^4 + 3x^3 - x = 0$ j) $3x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 8x + 4 = 0$

k) $7x^4 - 28x^3 + 21x^2 + 28x - 28 = 0$ l) $2x^4 - 13x^3 + 27x^2 - 23x + 7 = 0$

Sol: a) $x = 1$ (doble), $x = -1$ (doble); b) $x = -2$, $x = -1$, $x = 1$ (doble); c) $x = 2$ (doble), $x = \pm1$; d) $x = -1$ (doble), $x = -2$ (doble); e) $x = -3$, $x = -2$ (triple); f) $x = -2$ (doble), $x = 2$, $x = -3$; g) $x = \pm1$, $x = -3$, $x = 2$; h) $x = 3$, $x = -2$, $x = \pm\sqrt{5}$; i) $x = -1$ (doble), $x = 1/2$, $x = 0$; j) $x = 1$, $x = -1/3$, $x = \pm2$; k) $x = 1$ (doble), $x = 2$ (doble); l) $x = 1$ (triple), $x = 7/2$.

3º Factorice los siguientes polinomios:

a) $P(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x$ b) $P(x) = 3x^3 + 3x^2 - 18x$

c) $P(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 24$ d) $P(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$

e) $P(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 3x^2$ f) $P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 12x$

g) $P(x) = 3x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 6x + 3$ h) $P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$

i) $P(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4$ j) $P(x) = 4x^4 - 6x^3 + 2x^2$

Sol: a) $(x-1)^2\cdot(x+1)\cdot x$; b) $(x+3)\cdot(x-2)\cdot 3x$; c) $(x-1)\cdot(x+4)\cdot(x-2)\cdot(x-3)$; d) $(x^2+1)\cdot(x-2)\cdot(x-1)$; e) $x^2\cdot(x-1)^2\cdot(x-3)$; f) $(x+2)\cdot(x-3)\cdot 2x$; g) $3\cdot(x+1)^2\cdot(x^2+1)$; h) $(x-2)\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+3)$; i) $(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x^2+2)$; j) $2x^2\cdot(x-1)\cdot(2x-1)$.

4º Factorice los siguientes polinomios:

a) $P(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ b) $P(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 27$

c) $P(x) = x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 36x - 27$ d) $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

e) $P(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$ f) $P(x) = x^3 - 3x^2$

g) $P(x) = x^3 - 7x^2 + 15x - 9$ h) $P(x) = x^3 - 13x + 12$

i) $P(x) = x^3 - 2x^2 - 15x + 36$ j) $P(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$

k) $P(x) = x^3 + 7x^2 + 16x + 12$ l) $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

m) $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ n) $P(x) = x^3 - x^2 - 2x$

ñ) $P(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 9x$ o) $P(x) = x^3 + 5x^2 + 7x + 3$

p) $P(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ q) $P(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$

Sol: a) $(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+3)$; b) $(x-3)\cdot(x+3)^2$; c) $(x+1)(x-3)(x+3)^2$; d) $(x-1)(x+2)^2$;
e) $(x+2)(x-3)(x-1)^2$; f) $x^2(x-3)$; g) $(x-1)(x-3)^2$; h) $(x+4)(x-3)(x-1)$;
i) $(x+4)(x-3)^2$; j) $(x-1)^2(x+3)^2$; k) $(x+3)(x+2)^2$; l) $(x-1)(x+2)(x+3)$;
m) $(x+2)(x-3)(x-1)$; n) $x(x+1)(x-2)$; ñ) $x(x+1)(x-3)^2$; o) $(x+3)(x+1)^2$;
p) $(x-1)(x+1)(x+3)$; q) $(x-1)(x+3)(x-3)$.

4º Halla el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo en cada caso:
a) $P(x) = x^2 + 2x + 1$ y $Q(x) = 3x + 3$ b) $P(x) = x^3 - 2x^2$ y $Q(x) = x^3 - 4x$
Sol: a) mcm: $3\cdot(x + 1)^2$; mcd.:$(x + 1)$; b) mcm: $x^2\cdot(x - 4)\cdot(x + 4)$; mcd:$(x - 2)\cdot x$.

5º Halla el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de:
$f(x) = x^2 - x$ $g(x) = x^2 - 1$ $h(x) = x^2 - 2x + 1$
Sol: mcm: $x\cdot(x - 1)^2(x + 1)$; mcd: $(x - 1)$.

6º Halla el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de:
$f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ $g(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 27$ $h(x) = x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 36x - 27$
Sol: mcm: $(x + 1)\cdot(x - 1)\cdot(x - 3)\cdot(x + 3)^2$; mcd: $(x + 3)$.

7º Halla el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de:
$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ $g(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$ $h(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
Sol: mcm: $(x - 1)^2\cdot(x + 2)^2\cdot(x - 3)$; mcd: $(x - 1)\cdot(x + 2)$.

8º Halla el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de:
$f(x) = x^3 - 7x^2 + 15x - 9$ $g(x) = x^3 - 13x + 12$ $h(x) = x^3 - 2x^2 - 15x + 36$
Sol: mcm: $(x - 3)^2\cdot(x + 4)\cdot(x - 1)$; mcd: $(x - 3)$.

9º Halla el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de:
$f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$ $g(x) = x^3 + 7x^2 + 16x + 12$ $h(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$
Sol: mcm: $(x - 1)^2\cdot(x + 3)^2\cdot(x + 2)^2$; mcd: $(x + 3)$.

10º Halla el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de:
$f(x) = x^3 - 3x^2$ $g(x) = x^3 - x^2 - 2x$ $h(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 9x$
Sol: mcm: $x^2\cdot(x - 3)^2\cdot(x + 1)\cdot(x - 2)$; mcd: x.

11º Halla el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de:
$f(x) = x^3 + 5x^2 + 7x + 3$ $g(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ $h(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$
Sol: e) mcm: $(x - 3)\cdot(x + 3)\cdot(x + 1)^2\cdot(x - 1)$; mcd: $(x + 3)$.

12º Halla el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de:
$f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 24x + 36$ $g(x) = 4x^3 - 28x + 24$ $h(x) = 2x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 36x$
Sol: mcm: $12x\cdot(x + 3)^2\cdot(x - 1)\cdot(x - 2)^2$; mcd: $(x - 2)\cdot(x + 3)$.

Identidades notables.

1º Desarrolla los siguientes cuadrados notables:

a) $(x+1)^2$ b) $(x-4)^2$ c) $(x-3)^2$ d) $(x+3)^2$

e) $(x-5)^2$ f) $(3x-2)^2$ g) $(2x-3)^2$ h) $(3+2x)^2$

i) $(4x-2)^2$ j) $(3x-5)^2$ k) $(3-4x)^2$ l) $(2x-x^2)^2$

m) $(3x+2)^2$ n) $(2x-1)^2$ ñ) $(x-y)^2$ o) $(3-x^2)^2$

p) $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)^2$ q) $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^2$ r) $\left(\frac{x}{2}+x^2\right)^2$ s) $\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{4}y\right)^2$

t) $\left(\frac{2x}{3}-3\right)^2$ u) $\left(\frac{2}{3}+2x\right)^2$ v) $\left(\frac{x}{2}-2\right)^2$ w) $\left(\frac{2}{5}+3x\right)^2$

Sol: a) $x^2 + 2x + 1$; b) $x^2 - 8x + 16$; c) $x^2 - 6x + 9$; d) $x^2 + 6x + 9$; e) $x^2 - 10x + 25$; f) $9x^2 - 12x + 4$; g) $4x^2 - 12x + 9$; h) $9 + 12x + 4x^2$; i) $16x^2 - 16x + 4$; j) $9x^2 - 30x + 25$; k) $9 - 24x + 16x^2$; l) $4x^2 - 4x^3 + x^4$; m) $9x^2 + 12x + 4$; n) $4x^2 - 4x + 1$; ñ) $x^2 - 2xy + y^2$; o) $9 - 6x^2 + x^4$; p) $\frac{x^2}{4}+\frac{xy}{3}+\frac{y^2}{9}$; q) $4x^2-4+\frac{1}{x^2}$; r) $\frac{x^2}{4}+x^3+x^4$; s) $\frac{x^2}{4}-\frac{3xy}{4}+\frac{9y^2}{16}$; t) $\frac{4x^2}{9}-4x+9$; u) $\frac{4}{9}+\frac{8x}{3}+4x^2$; v) $\frac{x^2}{4}-2x+4$; w) $\frac{4}{25}+\frac{12x}{5}+9x^2$.

2º Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia:

a) x^2-6x+9 b) x^2-4x+4 c) $4x^2-12x+9$ d) $x^2+8x+16$

e) $x^2+10x+25$ f) $x^2+12x+36$ g) $9x^2-12x+4$ h) $4x^2+8x+4$

i) $\frac{x^2}{4}+3x+9$ k) $\frac{1}{x^2}-4+4x^2$ l) $x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}$ m) $\frac{9x^2}{25}-2x+\frac{25}{9}$

Sol: a) $(x-3)^2$; b) $(x-2)^2$; c) $(2x-3)^2$; d) $(x+4)^2$; e) $(x+5)^2$; f) $(x+6)^2$; g) $(3x-2)^2$; h) $(2x-2)^2$; i) $\left(\frac{x}{2}+3\right)^2$; k) $\left(\frac{1}{x}-2x\right)^2$; l) $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$; m) $\left(\frac{3x}{5}+\frac{5}{3}\right)^2$.

3º Desarrolla los siguientes productos notables:

a) $(2+x)\cdot(2-x)$ b) $(x+3)\cdot(x-3)$ c) $(x-a)\cdot(x+a)$ d) $(3-2x)\cdot(3+2x)$

e) $(2x-5)\cdot(2x+5)$ f) $(a-3b)\cdot(a+3b)$ g) $(x^2+1)\cdot(x^2-1)$ h) $(x^3-x)\cdot(x^3+x)$

i) $\left(\frac{1}{2}-x^2\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+x^2\right)$ j) $\left(2-\frac{1}{x}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{x}\right)$ k) $\left(\frac{1}{2}-x^2\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+x^2\right)$

l) $\left(2x+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(2x-\frac{1}{3}\right)$ m) $\left(\frac{a}{3}+b\right)\cdot\left(\frac{a}{3}-b\right)$ n) $\left(\frac{x}{2}-3\right)\cdot\left(\frac{x}{2}+3\right)$

Sol: a) $4-x^2$; b) x^2-9; c) x^2-a^2; d) $9-4x^2$; e) $4x-25$, f) a^2-9b^2; g) x^4-1; h) x^6-x^2; i) $\frac{1}{4}-x^4$; j) $4-\frac{1}{x^2}$; k) $\frac{1}{4}-x^4$; l) $4x^2-\frac{1}{9}$; m) $\frac{a^2}{9}-b^2$; n) $\frac{x^2}{4}-9$.

4º Expresa como el producto notable de suma por diferencia:

a) $x^2 - y^2$ b) $4x^2 - 9y^2$ c) $x^2 - 25$ d) $9x^2 - 4$

e) $25x^2 - 16$ f) $49 - 4x^2$ g) $x^4 - 9$ h) $4x^2 - 16$

Sol: a) $(x - y)\cdot(x + y)$; b) $(2x - 3y)(2x + 3y)$; c) $(x - 5)\cdot(x + 5)$; d) $(3x - 2)\cdot(3x + 2)$;

e) $(5x - 4)\cdot(5x + 4)$; f) $(7 - 2x)\cdot(7 + 2x)$; g) $(x^2 + 3)\cdot(x^2 - 3)$; h) $(2x^2 - 4)\cdot(2x^2 + 4)$.

Ejercicios algebraicos de simplificaciones en fracciones.

1º Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{48a}{72ab}$ b) $\dfrac{25a^2b}{75ab^2}$ c) $\dfrac{96m^3n^2}{32m^4n^3}$ d) $\dfrac{15a^3b^2}{5ab^4}$

e) $\dfrac{121a^4c^5d^7}{11ac^5d^8}$ f) $\dfrac{7mn^4p^6}{21m^2np^7}$ g) $\dfrac{12a^4b^2c}{3a^3bc}$ h) $\dfrac{10a^2bc}{-5ab}$

i) $\dfrac{-15a^2bc^2d^3}{5abc^2d^3}$ j) $\dfrac{-12a^2x}{-28ax^2}$ k) $\dfrac{10ab^2x^4y^2}{15b^3x^2y^3z}$ l) $\dfrac{-20abc^3}{2ab^2}$

m) $\dfrac{-18a^3bc^2x}{-36a^4b^2x}$ n) $\dfrac{3a^2b}{18a^3b^2}$ ñ) $\dfrac{-12acx^2}{26a^2c^2x}$ o) $\dfrac{38m^3n^4r^2}{57m^4n^4r}$

Sol:

a) $\dfrac{2}{3b}$ b) $\dfrac{a}{3b}$ c) $\dfrac{3}{mn}$ d) $\dfrac{3a^2}{b^2}$ e) $\dfrac{11a^3}{d}$ f) $\dfrac{n^3}{3mp}$ g) $4ab$ h) $-2ac$

i) $-\dfrac{3a}{d}$ j) $\dfrac{3a}{7x}$ k) $\dfrac{2ax^2}{5byz}$ l) $\dfrac{-10c^3}{b}$ m) $\dfrac{c^2}{2ab}$ n) $\dfrac{1}{6ab}$ ñ) $\dfrac{-6x}{13ac}$ o) $\dfrac{r}{3m}$

2º Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{b+b^2}{a+ab}$ b) $\dfrac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}$ c) $\dfrac{x^2-x}{xy-x}$ d) $\dfrac{x^3-1}{x-1}$

e) $\dfrac{x^2y-xy}{x^2-1}$ f) $\dfrac{x^2-9y^2}{ax+3ay}$ g) $\dfrac{ax+by}{ax^2+bxy}$ h) $\dfrac{ax^2-a^3}{bx^2-a^2b}$

i) $\dfrac{4a^2b^3-8a^3b^3}{12a^2b^4+4a^4b^4}$ j) $\dfrac{35xz-45yz}{7x-9y}$ k) $\dfrac{(a-b)^2}{a^2-b^2}$ l) $\dfrac{2a^2+4ab}{3ab+6b^2}$

m) $\dfrac{8a-16b}{24}$ n) $\dfrac{42}{18a+24b}$ ñ) $\dfrac{14x+21y}{50x+75y}$ o) $\dfrac{27m-36n}{36m-48n}$

p) $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{3a+3b}$ q) $\dfrac{m^2-n^2}{m^2+2mn+n^2}$ r) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$ s) $\dfrac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$

t) $\dfrac{6xy^2-6xz^2}{3xy-3xz}$ u) $\dfrac{(a+b)^2-4ab}{a-b}$ v) $\dfrac{(a-b)^2+4ab}{a+b}$ w) $\dfrac{2m^2-2n^2}{4m+4n}$

Sol:

a) $\dfrac{b}{a}$ b) $\dfrac{a+b}{a-b}$ c) $\dfrac{x-1}{y-1}$ d) x^2+x+1 e) $\dfrac{xy}{x+1}$

f) $\dfrac{x-3y}{a}$ g) $\dfrac{1}{x}$ h) $\dfrac{a}{b}$ i) $\dfrac{1-2a}{3b+a^2b}$ j) $5z$

k) $\dfrac{a-b}{a+b}$ l) $\dfrac{2a}{3b}$ m) $\dfrac{a-2b}{3}$ n) $\dfrac{7}{3a+4b}$ ñ) $\dfrac{7}{25}$

o) $\dfrac{3}{4}$ p) $\dfrac{a+b}{3}$ q) $\dfrac{m-n}{m+n}$ r) $\dfrac{x-3}{x}$ s) $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}$

t) $2(y+z)$ u) $a-b$ v) $a+b$ w) $\dfrac{m-n}{2}$

3º Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{12x^2y-18xy^2}{10ax^3y^2-15ax^2y^3}$ b) $\dfrac{uv-3u+2v-6}{uv-5v-3u+15}$ c) $\dfrac{xy-4y-5x+20}{xy-24+6x-4y}$

d) $\dfrac{xw+xz-wy-yz}{wx+wy+zx+yz}$ e) $\dfrac{-bd+ac+bc-ad}{ac+bd-ad-bc}$ f) $\dfrac{km+7m+kn+7n}{kn-4m-4n+km}$

g) $\dfrac{2p-qr-2q+pr}{pr+6p-qr-6q}$ h) $\dfrac{uw-4u+3vw-12v}{uw-4u-5vw+20v}$ i) $\dfrac{6xz+14y+7xy+12z}{7xy+6xz-7y-6z}$

j) $\dfrac{2ac-ad+10bc-5bd}{2ac+ad+10bc+5bd}$ k) $\dfrac{3jm+21jn-2km-14kn}{3jm-18jn-2km+12kn}$ l) $\dfrac{xz+wx-yz-wy}{4x^2-4y^2}$

m) $\dfrac{ac-bd-ad+bc}{2a^2+4ab+2b^2}$ n) $\dfrac{3p^2-6pq+3q^2}{pr-p-qr+q}$ ñ) $\dfrac{c^2+6c+8}{c^2+7c+10}$

o) $\dfrac{d^2-8d+15}{d^2-2d-15}$ p) $\dfrac{x^2+xy-xz-yz}{x^2+xy+xz+yz}$ q) $\dfrac{mp-mq+np-nq}{5p^2-5q^2}$

r) $\dfrac{(x^2-1)(x^2-2x+1)}{x(x^2-1)-(x^2-1)}$ s) $\dfrac{5a^2c+10abc+5b^2c}{15ac+15bc}$ t) $\dfrac{8p^2-16pq+8q^2}{8p^2-8q^2}$

u) $\dfrac{u^4-v^4}{u^2-v^2}$ v) $\dfrac{a^2x-2ax+x}{2a^3-6a^2+6a-2}$ w) $\dfrac{(m+n)^3-4mn(m+n)}{m^2-n^2}$

Sol:

a) $\dfrac{6}{5axy}$ b) $\dfrac{u+2}{u-5}$ c) $\dfrac{y-5}{y+6}$ d) $\dfrac{x-y}{x+y}$ e) $\dfrac{a+b}{a-b}$ f) $\dfrac{k+7}{k-4}$

g) $\dfrac{2+r}{r+6}$ h) $\dfrac{u+3v}{u-5v}$ i) $\dfrac{x+2}{x-1}$ j) $\dfrac{2c-d}{2c+d}$ k) $\dfrac{m+7n}{m-6n}$ l) $\dfrac{z+w}{4(x+y)}$

m) $\dfrac{c-d}{2(a+b)}$ n) $\dfrac{3(p-q)}{r-1}$ ñ) $\dfrac{c+4}{c+5}$ o) $\dfrac{d-3}{d+3}$ p) $\dfrac{x-z}{x+z}$ q) $\dfrac{m+n}{5(p+q)}$

r) $x-1$ s) $\dfrac{a+b}{2}$ t) $\dfrac{p-q}{p+q}$ u) u^2+v^2 v) $\dfrac{x}{2(a-1)}$ w) $m-n$

4º Opera y simplifica:

a) $\dfrac{b}{3a}\cdot\dfrac{6a}{5b^2}$ b) $\dfrac{3x^2y}{4ab^2}\cdot\dfrac{4ab}{3xy}$ c) $\dfrac{10a^2b^3c}{4a^2}\cdot\dfrac{2a^3b}{a^2b^2d}$ d) $\dfrac{2xy^4}{3a^3b}\cdot\dfrac{5x^3y}{7ab^4}$

e) $\dfrac{3z}{2x}\cdot\dfrac{17z}{19x^3}$ f) $\dfrac{-x^3y^4}{x^4y^5}\cdot\dfrac{x^7y^8}{-x^{15}y^3}$ g) $\dfrac{14a^3b}{15xy^3}\cdot\dfrac{5xy^2}{7a^2b}$ h) $\dfrac{(4xy^2)^4}{16(2x^2y^4)^2}\cdot\dfrac{xy}{4}$

i) $\left(\dfrac{x^4y}{x^3y^2}\right)^2\cdot\left(\dfrac{x^3y}{yx^2}\right)^{-2}$ j) $\dfrac{x^2y^3}{(a^3b^4)^5}\cdot\dfrac{(a^2b^3)^4}{(x^2y)^5}$ k) $\dfrac{(x^3y)^2}{(xy^{10})^3}\cdot\dfrac{y^{20}x}{y^{-7}x^3}$ l) $\dfrac{(xyz^2)^3}{(x^2yz)^{-2}}\cdot\dfrac{xyz^{-1}}{(x^3y^2)^2}$

Sol:

a) $\dfrac{2}{5b}$ b) $\dfrac{x}{b}$ c) $\dfrac{5ab^2c}{d}$ d) $\dfrac{10x^4y^5}{21a^4b^5}$ e) $\dfrac{51z^2}{38x^4}$ f) $\dfrac{y^4}{x^9}$

g) $\dfrac{a}{y}$ h) $\dfrac{x}{y}$ i) $\dfrac{1}{y^2}$ j) $\dfrac{1}{x^8y^2a^7b^8}$ k) $\dfrac{1}{xy}$ l) $x^2y^2z^7$

5º Opera y simplifica:

a) $\dfrac{6ab}{3c-d}\cdot\left(\dfrac{c+d}{4}-\dfrac{d}{3}\right)$ b) $\dfrac{i^2+9i+18}{i^2+8i+15}\cdot\dfrac{i^2+7i+10}{i^2+11i+18}$ c) $\dfrac{t^2-10t+16}{t^2-9t+14}\cdot\dfrac{t^2-10t+21}{t^2+2t-15}$

d) $\dfrac{n^2+n-2}{n^2-2n-8}\cdot\dfrac{n-4}{n-1}$ e) $\dfrac{l^2-4l-45}{l^2-5l-36}\cdot\dfrac{l^2-16}{l^2+10l+25}$ f) $\dfrac{6x+5}{3x+3}\cdot\dfrac{x+1}{6x^2-7x-10}$

g) $\dfrac{a^2-x^2}{a+x}\cdot\dfrac{a^2+x^2}{a-x}$ h) $\dfrac{a-1}{2a+1}\cdot\dfrac{1-4a^2}{ab-b}$ i) $\dfrac{a^2-b^2}{3c-3d}\cdot\dfrac{c-d}{a+b}$

j) $\dfrac{a^2-4}{a+3}\cdot\dfrac{a^2-9}{a+2}\cdot\dfrac{a}{a-3}$ k) $\dfrac{(ax+b)^2}{ax-b}\cdot\dfrac{3\left(a^2x^2-b^2\right)}{(ax+b)^3}$

Sol:

a) $\dfrac{ab}{2}$ b) $\dfrac{i+6}{i+9}$ c) $\dfrac{t-8}{t+5}$ d) 1 e) $\dfrac{l-4}{l+5}$ f) $\dfrac{1}{3(x-2)}$

g) a^2+x^2 h) $1-2a$ i) $\dfrac{a+b}{3}$ j) a^2-2a k) 3

6º Opera y simplifica:

a) $\dfrac{3x}{4y}:\dfrac{2x}{5y^2}$ b) $5ab:\dfrac{5a^2b}{2c}$ c) $\dfrac{2xy^2}{7ab}:4x^2y^2$

d) $\dfrac{35a^2}{18b^3}:\dfrac{14ab^2}{9b^3}$ e) $\dfrac{3x^2y^2}{5ab^2}:\dfrac{6x^2y}{15a^2b^2}$ f) $\dfrac{a^5b^8c^7}{a^4b^6c^{10}}:\dfrac{a^6b^8c^9}{a^3b^2c^5}$

g) $\dfrac{a}{b-c}:\dfrac{a}{b}$ h) $(a+b):\dfrac{a+b}{a-b}$ i) $\dfrac{1}{a+b}:\dfrac{1}{a^2-b^2}$

j) $\dfrac{a+b}{a-b}:\dfrac{a^2-b^2}{a+b}$ k) $\dfrac{x^3-x}{3x-6}:\dfrac{5x+5}{2x-4}$ l) $\dfrac{6x^2+9xy}{a^3}:\dfrac{12x^3+18x^2y}{a}$

Sol:

a) $\dfrac{15y}{8}$ b) $\dfrac{2c}{a}$ c) $\dfrac{1}{14abx}$ d) $\dfrac{5a}{4b^2}$ e) $\dfrac{3ay}{2}$ f) $\dfrac{1}{a^2b^4c^7}$

g) $\dfrac{b}{b-c}$ h) $a-b$ i) $a-b$ j) $\dfrac{a+b}{(a-b)^2}$ k) $\dfrac{2x(x-1)}{15}$ l) $\dfrac{1}{2xa^2}$

7º Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^2+8x+7}{x^2+9x+14}$ b) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}$ c) $\dfrac{x^2-1}{x^2+8x+7}$

d) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^3+3x^2+3x+1}$ e) $\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$ f) $\dfrac{x^3+3x^2-4x-12}{x^3+4x^2+x-6}$

g) $\dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^3-2x^2-x+2}$ h) $\dfrac{x^3-1}{x^3+2x^2+2x+1}$ i) $\dfrac{x^3-x^2+4x-4}{x^3-2x^2+4x-8}$

j) $\dfrac{x^3-6x^2+9x-4}{x^3-3x^2-6x+8}$ k) $\dfrac{2x^3-7x^2+7x-2}{4x^3-9x^2-x-6}$ l) $\dfrac{3x^3-11x^2+8x+4}{2x^3-3x^2-12x+20}$

Sol:

a) $\dfrac{x+1}{x+2}$ b) $\dfrac{x+2}{x+1}$ c) $x-1$ d) $\dfrac{1}{x+1}$ e) $\dfrac{x+1}{x+3}$ f) $\dfrac{x-2}{x-1}$

g) $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ h) $\dfrac{x-1}{x-2}$ i) $\dfrac{x-1}{x-2}$ j) $\dfrac{x-1}{x+2}$ k) $\dfrac{2x-1}{4x+3}$ l) $\dfrac{3x+1}{2x+5}$

8º Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^4+10x^3+35x^2+50x+24}{x^4+8x^3+17x^2-2x-24}$ b) $\dfrac{x^4-4x^3+6x^2-4x+1}{2x^4-5x^3+3x^2+x-1}$

c) $\dfrac{x^4-2x^2+1}{x^4+3x^2+x-3x-2}$ d) $\dfrac{x^4-10x^3+37x^2-60x+36}{x^4-5x^3+7x^2-5x+6}$

Sol:

a) $\dfrac{x+1}{x-1}$ b) $\dfrac{x-1}{2x+1}$ c) $\dfrac{x-1}{x+2}$ d) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+1}$

9º Opera y simplifica las siguientes expresiones algebraicas:

a) $\dfrac{\dfrac{9+6x+x^2}{9-x^2}\cdot\dfrac{3x^2-x^3}{3x^2+x^3}}{\dfrac{4x^2-16}{2x-4}:\dfrac{2x^2-8x+8}{x-2}}$ b) $\dfrac{\dfrac{1+2x+x^2}{x^2-1}\cdot\dfrac{4x^2-4x}{x+1}}{\dfrac{2x^2+14x+20}{x^3-50+2x^2-25x}:\dfrac{x-5}{2x^3-20x^2+50x}}$

c) $\dfrac{\dfrac{x^3+x^2-6x}{x^2+x}-\dfrac{x^2-9}{x^3+6x^2+9x}}{\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+x}}$ d) $\dfrac{\dfrac{x^2-1}{x^2+2x+1}\cdot\dfrac{2x^2-8x-10}{x-1}}{\dfrac{2x+2}{x^2+x-2}:\dfrac{x+1}{x^3-4x^2-7x+10}}$

e) $\dfrac{\dfrac{x^2-3x-10}{x^3-2x^2-4x+8}\cdot\dfrac{x^2-4}{x-5}}{\dfrac{x+2}{3-x}\cdot\dfrac{6x-2x^2}{2x^2-4x}}$ f) $\dfrac{\dfrac{a^2-1}{a^2+1}-\dfrac{a^2+1}{a^2-1}}{\dfrac{a-1}{a+1}-\dfrac{a+1}{a-1}}:\left(\dfrac{a^2+1}{a}-\dfrac{a^2-2a+1}{(a-1)^2}\right)$

g) $\dfrac{\left(\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-9}\cdot\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2}\right):\left(\dfrac{x^2+x-2}{x^2+4x+4}\right)}{\dfrac{2x^2-2x}{3x^2+3x-6}-\dfrac{3x^2+12x+12}{2x}}$

Sol: a) 1; b) 1; c) 1; d) 1; e) 1; f) 1; g) 1.

10º Demostrar que:

a) $\dfrac{a^2+4ac+3ab+3c^2+5bc+2b^2}{a^2+2ac+ab-3c^2-5bc-2b^2}=\dfrac{a+b+c}{a-b-c}$

b) $\dfrac{a^2+ac+2ab+ad+bc+b^2+bd}{a^2+2ac+ad+c^2+cd-b^2-bd}=\dfrac{a+b}{a-b+c}$

c) $\dfrac{a^4-a^2c^2-2a^2bc-2a^2b^2+b^2c^2+2b^3c+b^4}{a^3-a^2b-ab^2-2abc-ac^2+b^3+2b^2c+bc^2}=a+b$

d) $\dfrac{acx+abc-bxz-abz-cxy-acy+xyz+ayz}{xyz+cxy-bxz-bcx+ayz+acy-abz-abc}=\dfrac{z-c}{z+c}$

e) $\dfrac{x^4+a^2x^3+x^3-a^4x-a^2x-a^4}{x^4+bx^3+a^2x^3+a^2bx^2-a^2x^2-a^2bx-a^4x-a^4b}=\dfrac{x+1}{x+b}$

f) $\dfrac{bxz+abx+xz^2+axz-abz-a^2b-az^2-a^2z}{ab^2x+b^2xz+axz+xz^2-a^2b^2-ab^2c-a^2z-az^2}=\dfrac{z+b}{z+b^2}$

g) $\dfrac{2xz^2+bxz+axz+abx-a^2x+2z^2+bz+az+ab-a^2}{2xz^2-bxz+3axz-abx+a^2x+2z^2-bz+3az-ab+a^2}=\dfrac{2z+b-a}{2z-b+a}$

Ejercicios de introducción a los logaritmos:

1º Calcular los valores de los siguientes logaritmos sin usar la calculadora:

a) $\log_2 8$ b) $\log_3 9$ c) $\log_4 2$ d) $\log_{27} 3$

e) $\log_5 0.2$ f) $\log_2 0.25$ g) $\log_{0.5} 16$ h) $\log_{0.1} 100$

Sol: a) 3; b) 2; c) 0.5; d) 1/3; e) –1; f) –2; g) –4; h) –2.

2º Opera sin usar la calculadora:

a) $\log_3 27 + \log_3 1$ b) $\log_5 25 - \log_5 5$ c) $\log_4 64 + \log_8 64$

d) $\log 0.1 - \log 0.01$ e) $\log 5 + \log 20$ f) $\log 2 - \log 0.2$

Sol: a) 3; b) 1; c) 5; d) 1; e) 2; f) 1.

3º Opera sin usar la calculadora:

a) $\dfrac{\log 32}{\log 2}$ b) $\dfrac{\log 3}{\log 81}$ c) $(\log_2 3)\cdot(\log_3 4)$ d) $\dfrac{\log_9 25}{\log_3 5}$

Sol: a) 5; b) 0.25; c) 2; d) 1.

4º Sabiendo que:

$\log 2 = 0.301$ $\log 3 = 0.477$ $\log 7 = 0.845$

Calcule sin usar la tecla log de la calculadora el valor de los siguientes logaritmos:

a) $\log 8$ b) $\log 9$ c) $\log 5$ d) $\log 54$

e) $\log 75$ f) $\log 0.25$ g) $\log(1/6)$ h) $\log(1/36)$

i) $\log(1/98)$ j) $\log(2/3)$ k) $\log 0.3$ l) $\log 1.25$

Sol: a) 0.903; b) 0.954; c) 0.699; d) 1.732; e) 1.875; f) –0.602; g) –0.778; h) –1.556; i) –1.991; j) –0.176; k) –0.523; l) 0.097.

5º Conocidos los valores de los logaritmos $\ln a = 0.6$ y $\ln b = 2.4$, calcule:

a) $\ln\sqrt{a}$ b) $\ln\sqrt[4]{b}$ c) $\ln\sqrt{ab}$ d) $\ln\left(\sqrt[3]{\dfrac{ab}{e^2}}\right)$ e) $\ln\left(\dfrac{\sqrt{a^{-3}}}{\sqrt[3]{b^2}}\right)$

Sol: a) 0.3; b) 0.6; c) 1.5; d) 1/3; e) –2.5.

6º Halla:

a) $\log_2\left(\dfrac{\sqrt[3]{64}\cdot 2^3}{2^4\cdot\sqrt{128}}\right)$ b) $\log_3\left(\dfrac{\sqrt{3^3\cdot 9\cdot 3^{-1}}}{81^2\cdot 3^{-2}}\right)$ c) $\log\left(\dfrac{0.01\cdot\sqrt[3]{100}}{10^{-1}\cdot 0.1}\right)$ d) $\log_5\left(\dfrac{5^{-2}\cdot\sqrt{625}}{25\cdot\sqrt{125}}\right)$

e) $\log_2\left(\dfrac{\sqrt{64}\cdot 2^3}{32\cdot\sqrt{8}}\right)^2$ f) $\log\sqrt[3]{\dfrac{1000\cdot 10^{-2}}{10^5\cdot 10^{-1}}}$ g) $\ln\left(\dfrac{e^3\cdot\sqrt{e^3}}{e^2\cdot e^{-4}}\right)$ h) $\log_3\left(\dfrac{27\cdot 3}{3^2\cdot\sqrt{81}}\right)$

i) $\log_5\left(\dfrac{125\cdot\sqrt{625}}{5^2\cdot 25^2}\right)$ j) $\log_4\left(\dfrac{16\cdot 2}{2^2\cdot\sqrt{8}}\right)$

Sol: a) –5/2; b) –9/2; c) 2/3; d) –7/2; e) –1; f) –1; g) 13/2; h) 0; i) –1; j) 3/4.

Ejercicios de ecuaciones logarítmicas y exponenciales.

1º Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log(2x) = -1$ b) $\log x^2 = \dfrac{1}{2}$ c) $\log(3x) = 2$

d) $\log x = -1$ e) $\log x = \dfrac{3}{2}$ f) $\log(3x^2) = -2$

g) $5\log(2x) = 20$ h) $\log\left(\dfrac{2x-4}{5}\right) = 2$ i) $\log(x+1)^2 = 2$

j) $3\log(5x) = -9$ k) $\log x^3 = 3$ l) $\log_2\left(\dfrac{x^2}{4}\right) = 2$

m) $\log_3\left(\dfrac{x+2}{3}\right) = 1$ n) $\log_5(5x) = 2$ ñ) $\ln(x+e) = 1$

Sol: a) 1/20; b) $\pm\sqrt[4]{10}$; c) 100/3; d) 1/10; e) $10\sqrt{10}$; f) $\sqrt{3}/30$; g) 5000; h) 252;
i) 9, –11; j) 1/5000; k) 10; l) 4; m) 7; n) 5; ñ) 0.

2º Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log x + \log 50 = \log 100$ b) $\log x^3 = \log 6 + 2\log x$

c) $\log x = 1 + \log(22 - x)$ d) $2\log x - \log(x-16) = 2$

e) $\log x + \log 20 = 3$ f) $3\log x + 2\log x^2 = \log 128$

g) $1 - \log x = 2 - 2\log x$ h) $\log x - \log 2 = 1 + \log(21 - x)$

i) $\log(7x+15) - \log 5 = 1$ j) $2\log x - \log(x^2 - 2x + 6) = 0$

k) $2\log x = \log(10 - 3x)$ l) $\log(2x-3) + \log(3x-2) = 2 - \log 25$

m) $(x^2 - x + 3)\log(4) = \log 1 - \log 64$ n) $\log 8 + (x^2 - 5x + 7)\log 3 = \log 24$

ñ) $2\log(5x+4) - 2\log 2 = \log(x+4)$ o) $\log(35 - x^3) = 3\log(5 - x)$

p) $2\log x = 3 + \log(x/10)$ q) $\log x + \log(x+3) = 2\log(x+1)$

r) $\log 2 + \log(11 - x^2) = 2\log(5 - x)$ s) $\log_2(\log_2(x^2)) = 2$

t) $\log_5(x^2) + \log_5 10 = \log_5 x + \log_5 50$ u) $\log_3\sqrt{x} + \log_3(9x) - 5 = \log_3(x/3)$

v) $\log(7-3x) - \log(1-x) = \log 5$ w) $\log(2x+16) - \log 18 = \log x$

x) $\log(x+1) = \log\left(\sqrt{x-1}\right) + \log\left(\sqrt{x+4}\right)$ y) $\log(x-1) + \log(3x-5) = \log(2x-3)$

Sol: a) 20; b) 6; c) 20; d) 80, 20; e) 50; f) 2; g) 10; h) 20; i) 5; j) 3; k) 2; l) 2;
m) No tiene solución; n) 3, 2; ñ) 0; o) 3, 2; p) 100; q) 1; r) 1/3, 3; s) ±4; t) 5; u) 81;
v) –1; w) 1; x) 5; y) 2.

3º Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\dfrac{\log 2 + \log(11 - x^2)}{\log(5-x)} = 2$ b) $\log x = \dfrac{2 - \log x}{\log x}$

c) $\dfrac{\log(35 - x^3)}{\log(5-x)} = 3$ d) $\log_5 x + \dfrac{\log_5 125}{\log_5 x} = \dfrac{7}{2}$

Sol: a) 3, 1/3; b) 10, 1/100; c) 3, 2; d) 25, $\sqrt{125}$.

4º Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log_x 27 = 3$ b) $\log_x 20 = 1$ c) $4\log_x 125 = 12$

d) $6\log_x 27 = 18$ e) $\log_x 4 + \log_x 8 = 5$ f) $\log_x 3 + \log_x 9 = 3$

g) $\log_x 108 + \log_x 2 = 3$ h) $4\log_x 2 + 3\log_x 8 = 13$ i) $\log_x 4 + 2\log_x 32 = 7$

Sol: a) 3; b) 20; c) 5; d) 3; e) 2; f) 3; g) 6; h) 2; i) 2.

5º Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones logarítmicas:

a) $\begin{cases} 2\log x - 5\log y = -1 \\ 3\log x + 2\log y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4\log x - 3\log y = -1 \\ \log(xy) = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \log x + \log y^3 = 5 \\ \log(x^3/y^2) = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log(x^2 y) = 2 \\ \log(x/y) = 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ x - y = 999/10 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \log x^2 - 3\log y = 2 \\ \log(x/y^2) = 3 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \log x - \log y = 7 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$ h) $\begin{cases} \log x + 3\log y = 5 \\ \log(x^2/y) = 3 \end{cases}$ i) $\begin{cases} 2\log x^2 - \log y^2 = 4 \\ 2\log x + \log y^2 = 2 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x - y = 15 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$ k) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 5 \\ \log_2 x^2 - \log_2 y = 1 \end{cases}$ l) $\begin{cases} \log x^2 - 3\log y = -1 \\ \log(xy^2) = 3 \end{cases}$

m) $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$ n) $\begin{cases} \log x + \log y = \log 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ ñ) $\begin{cases} \log x - \log y = 1 \\ x^2 - y^2 = 11 \end{cases}$

Sol: a) x = 100, y = 10; b) x = 100, y = 1000; c) x = 100, y = 10; d) x = 10, y = 1; e) x = 100, y = 1/10; f) $x = 10^{-5}$, $y = 10^{-4}$; g) $x = 10^5$, $y = 10^{-2}$; h) x = 100, y = 10; i) x = 100, y =1; j) x = –5, y = –20; x = 20, y = 5; k) x = 4, y = 8; l) x = y = 10; m) x = 100, y = 10; n) x = 1, y = 2; x = 2, y = 1; ñ) 10/3, –1/3.

6º Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $3^x = 9$ b) $2^x = 128$ c) $5^x = 125$

d) $2\cdot5^x = 50$ e) $4^{x+1} = 16$ f) $6^{3x} = 216$

g) $2^{2x-1} = 4$ h) $6^{12-3x} = 216$ i) $2^{1-x^2} = 1/8$

j) $5^{-x} = 1/25$ k) $4^x = 2$ l) $9^{x+2} = 1$

m) $8^{x^2+3x+2} = 1$ n) $2^{x+2} = 0.5^{2x-1}$ ñ) $\sqrt[3]{a^{7-x}} = a^2$

o) $(4^{3-x})^{2-x} = 1$ p) $(2/7)^5 = 3.5^{x+1}$ q) $10^{x^2-11x+30} = (2\cdot5)^2$

r) $3^{2x-1} = \sqrt[3]{9^{x^2-1/4}}$ s) $4^x\cdot5^{x-1} = 1600$ t) $3^{x-1}\cdot2^x = 12$

Sol: a) 2; b) 7; c) 3; d) 2; e) 1; f) 1; g) 3/2; h) 3; i) ±2; j) 2; k) ; l) –2; m) –2, –1; n) –1/3; ñ) 1; o) 3, 2; p) –6; q) 7, 4; r) 11/2, 1/2; s) 3; t) 2.

7º Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $5^x + 5^{x-1} = 30$ b) $4^x - 5\cdot2^x + 4 = 0$ c) $7^{2x+3} - 8\cdot7^{x+1} + 1 = 0$

d) $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 117$ e) $3^{2(x+1)} - 28\cdot3^x + 3 = 0$ f) $2^{2x} - 3\cdot2^{x+1} + 8 = 0$

g) $9^x - 3^x - 6 = 0$ h) $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = 31/5$ i) $2^x + 2^{1-x} = 3$

j) $\dfrac{4^{x-1}}{2^{x+2}} = 128$ k) $5^x - \dfrac{5}{5^{x-1}} - 24 = 0$ l) $\dfrac{6^{x+2}}{6^{2-x^2}} = 1$

Sol: a) 2; b) 2, 0; c) –1, –2; d) 3; e) –2, 1; f) 2, 1; g) 1; h) 0; i) 1, 0; j) 11; k) 2; l) –1, 0.

8º Calcula el valor de *x*:

a) $2^x = 3$ b) $4^{x+1} = 7$ c) $3^{x+1} = 12$ d) $7^{x-2} = 2$

Sol: a) 1.585; b) 0.4037; c) 1.2616; d) 2.3562.

9º Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones logarítmicas:

a) $\begin{cases} 3\cdot 2^x - 4\cdot 7^y = -172 \\ 7\cdot 2^x + 2\cdot 7^y = 154 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4^{x+1} - 6^y = 40 \\ 2\cdot 4^x - 6^y = -88 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3^x + 2^y = 31 \\ 3^{x+1} - 2^{y+2} = 65 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2\cdot 3^{x+1} - 5^{y+2} = -2639 \\ 4\cdot 3^x + 5^y = 449 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 5^{x+y} = 25^3 \\ 5^{x-y} = 25 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 15\cdot 5^{x-1} - 6^y = 339 \\ 3\cdot 5^x + 2\cdot 6^{y+1} = 807 \end{cases}$

g) $\begin{cases} a^{x+y} = a^4 \\ a^{x-y} = a^2 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 8^y \cdot 2^{2x} = 128 \\ 3^{2y} \cdot 3^{x-1} = 27 \end{cases}$ i) $\begin{cases} 3^{3x-y} = \sqrt{3^{10}} \\ 3^{2x+y} = 3 \end{cases}$

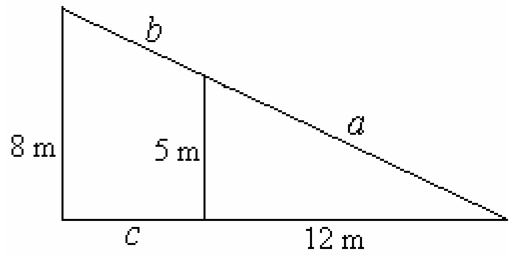
j) $\begin{cases} 3\cdot 2^x - 2\cdot 3^y = -6 \\ 4\cdot 2^x - 3\cdot 3^y = -11 \end{cases}$ k) $\begin{cases} 3\cdot 2^x - 5\cdot 3^y = 3 \\ 2^{x+1} + 3^{y+1} = 59 \end{cases}$ l) $\begin{cases} 2^x - 3^{y-1} = 5 \\ 2^{x+1} + 8\cdot 3^y = 712 \end{cases}$

m) $\begin{cases} 2\cdot 3^x + 2^{y+3} = 86 \\ 3^x - 2^y = 23 \end{cases}$ n) $\begin{cases} 2^{x+2y} = 32 \\ 5^{2x-y} = 1 \end{cases}$

Sol: a) *x* = 3, *y* = 2; b) *x* = *y* = 3; c) *x* = 3, *y* = 2; d) *x* = *y* = 4; e) *x* = 4, *y* = 2; f) *x* = 3, *y* = 2; g) *x* = 3, *y* = 1; h) *x* = –70, *y* = 49; i) *x* = 6/5, *y* = –7/5; j) *x* = *y* = 2; k) *x* = *y* = 4; l) *x* = 5, *y* = 4; m) *x* = 3, *y* = 2; n) *x* = 1, *y* = 2.

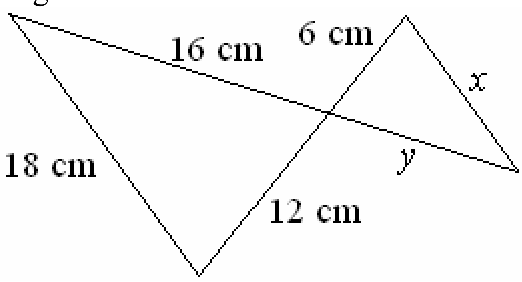
Ejercicios de semejanza de triángulos:

1º Calcular a, b y c en la figura:



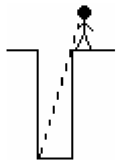
Sol: $a = 13$ m, $b = 7.8$ m, $c = 7.2$ m.

2º Hallar x e y en el dibujo siguiente:

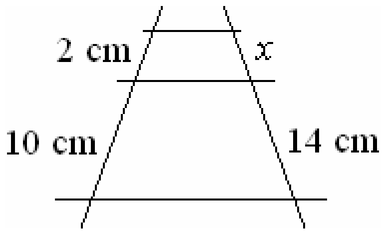


Sol: $x = 9$, $y = 8$.

3º Tenemos un pozo cuadrado de anchura es 1.2 m. Un observador cuyos ojos están a 1.7 m de alto, observa a 0.4 m del borde, el borde de la pared que da con el fondo del pozo tal y como indica el dibujo a la derecha. Determina la profundidad del pozo. **Sol:** 5.1 m.

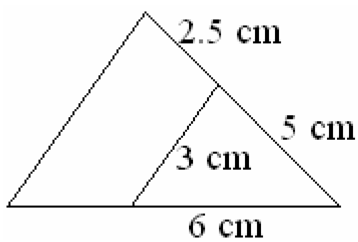


4º Calcula el valor de x.



Sol: 5.6 cm.

5º Calcular el valor de todos los lados del triángulo ampliación del pequeño teniendo en cuenta que son semejantes:



Sol: 7.5 cm, 4.5 cm y 9 cm.

6º Los catetos de un triángulo rectángulo miden 24 m y 10 m. ¿Cuánto miden los catetos de un triángulo semejante al primero cuya hipotenusa mide 52 m? **Sol:** 48 y 20 m.

7º Calcular la altura de un edificio que proyecta una sombra de 6.5 m a la misma hora que un poste de 4.5 m de altura da una sombra de 0.90 m. **Sol:** 32.5 m.

Ejercicios y problemas de trigonometría.

1º Expresa en radianes los siguientes ángulos:

a) 315º b) 300º c) 135º d) 2210º e) 945º f) –1500º g) 1650º

Sol: a) 5.50 rad; b) 5.24 rad; c) 2.36 rad; d) 38.57 rad; e) 16.49 rad; f) –26.18 rad; g) 28.80 rad.

2º Expresa en grados sexagesimales los siguientes ángulos:

a) $\pi/6$ rad b) $9\pi/5$ rad c) 5π rad d) $11\pi/3$ rad
e) $26\pi/5$ rad f) $17\pi/18$ rad g) $215\pi/4$ rad

Sol: a) 30º; b) 324º; c) 900º; d) 660º; e) 936º; f) 170º; g) 9675º.

3º Reduce los siguientes ángulos:

a) 730º b) 529º c) 2952º d) 9π rad e) $55\pi/6$ rad f) $217\pi/4$ rad

Sol: a) 10º; b) 169º; c) 72º; d) π rad; e) $7\pi/6$ rad; f) $\pi/4$ rad.

4º En una circunferencia de radio 6 cm, tenemos un arco de 4.5 cm de longitud. ¿Cuántos radianes mide el ángulo central que determina? ¿Cuantos grados sexagesimales?
Sol: 0.75 rad; 42.97º.

5º Halla la longitud del arco de circunferencia que determina un ángulo de 1.7 radianes, sabiendo que la longitud de la circunferencia es de 9.3 cm. **Sol:** 2.52 cm.

6º Calcula el valor de las restantes razones trigonométricas sin calcular el valor de α en los casos siguientes:

a) $\sin\alpha = 1/4 \quad \alpha \in [0,\ 90^\circ]$ b) $\sin\alpha = -1/3 \quad \alpha \in [180^\circ,\ 270^\circ]$
c) $\sin\alpha = \sqrt{3}/2 \quad \alpha \in [0,\ 90^\circ]$ d) $\cos\alpha = 0.8 \quad \alpha \in [0,\ 90^\circ]$
e) $\tan\alpha = 2 \quad \alpha \in [0,\ 90^\circ]$ f) $\cos\alpha = 3/5 \quad \alpha \in [270^\circ, 360^\circ]$
g) $\cos\alpha = -1/3 \quad \alpha \in [90^\circ, 180^\circ]$ h) $\sec\alpha = -3/2 \quad \alpha \in [180^\circ, 270^\circ]$

Sol: a) $\cos\alpha = \sqrt{15}/4$, $\sec\alpha = 4/\sqrt{15}$, $\mathrm{cosec}\,\alpha = 4$, $\tan\alpha = 1/\sqrt{15}$, $\mathrm{cotan}\,\alpha = \sqrt{15}$;
b) $\cos\alpha = -\sqrt{8}/3$, $\sec\alpha = -3/\sqrt{8}$, $\mathrm{cosec}\,\alpha = -3$, $\tan\alpha = 1/\sqrt{8}$, $\mathrm{cotan}\,\alpha = \sqrt{8}$;
c) $\cos\alpha = 1/2$, $\sec\alpha = 2$, $\mathrm{cosec}\,\alpha = 2/\sqrt{3}$, $\tan\alpha = \sqrt{3}$, $\mathrm{cotan}\,\alpha = 1/\sqrt{3}$;
d) $\sin\alpha = 0.6$, $\sec\alpha = 1.25$, $\mathrm{cosec}\,\alpha = 1.\widehat{6}$, $\tan\alpha = 0.75$, $\mathrm{cotan}\,\alpha = 1.\widehat{3}$;
e) $\sin\alpha = 2/\sqrt{5}$, $\cos\alpha = 1/\sqrt{5}$, $\sec\alpha = \sqrt{5}$, $\mathrm{cosec}\,\alpha = \sqrt{5}/2$, $\mathrm{cotan}\,\alpha = 1/2$;
f) $\sin\alpha = -4/5$, $\sec\alpha = 5/3$, $\mathrm{cosec}\,\alpha = -5/4$, $\tan\alpha = -4/3$, $\mathrm{cotan}\,\alpha = -3/4$;
g) $\sin\alpha = \sqrt{8}/3$, $\sec\alpha = -3$, $\mathrm{cosec}\,\alpha = 3/\sqrt{8}$, $\tan\alpha = -\sqrt{8}$, $\mathrm{cotan}\,\alpha = -1/\sqrt{8}$;
h) $\sin\alpha = -\sqrt{5}/3$, $\cos\alpha = -2/3$, $\mathrm{cosec}\,\alpha = -3/\sqrt{5}$, $\tan\alpha = \sqrt{5}/2$, $\mathrm{cotan}\,\alpha = 2/\sqrt{5}$;

7º Calcula con la calculadora un valor de α expresado en grados en los siguientes casos:

a) $\sin\alpha = 0.6018$ b) $\cos\alpha = 0.6428$ c) $\tan\alpha = 2.7475$

Sol: a) 36.9º; b) 49.9º; c) 70.0º.

8º Sabiendo que:

$$\sin(17^\circ) = 0.29$$

Calcula:

a) $\sin(73^\circ)$ b) $\tan(73^\circ)$

Sol: a) 0.96; b) 3.27.

9º Utilizando únicamente la tabla de las razones trigonométricas conocidas:

	0º	30º	45º	60º	90º
Sinα	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cosα	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
Tanα	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Calcular las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de los siguientes ángulos:

a) 120º b) 135º c) 150º d) 180º e) 210º f) 225º
g) 240º h) 270º i) 300º j) 315º k) 330º l) 360º

Sol: a) sin(120º) = $\sqrt{3}$/2, cos(120º) = –1/2, tan(120º) = $-\sqrt{3}$;
b) sin(135º) = $\sqrt{2}$/2, cos(135º) = $-\sqrt{2}$/2, tan(135º) = –1;
c) sin(150º) = $\sqrt{3}$/2, cos(150º) = –1/2, tan(150º) = $-\sqrt{3}$;
d) sin(180º) = 0, cos(180º) = –1, tan(180º) = 0;
e) sin(210º) = –1/2, cos(210º) = $-\sqrt{3}$/2, tan(210º) = $1/\sqrt{3}$;
f) sin(225º) = $-\sqrt{2}$/2, cos(225º) = $-\sqrt{2}$/2, tan(225º) = 1;
g) sin(240º) = $-\sqrt{3}$/2, cos(240º) = –1/2, tan(240º) = $\sqrt{3}$;
h) sin(270º) = –1, cos(270º) = 0, tan(270º) = ±∞;
i) sin(300º) = $-\sqrt{3}$/2, cos(300º) = 1/2, tan(300º) = $-\sqrt{3}$;
j) sin(315º) = $-\sqrt{2}$/2, cos(315º) = $\sqrt{2}$/2, tan(315º) = –1;
k) sin(330º) = –1/2, cos(330º) = $\sqrt{3}$/2, tan(330º) = $-1/\sqrt{3}$;
l) sin(360º) = 0, cos(360º) = 1, tan(330º) =0.

10º Resuelve, sin emplear calculadora, los triángulos en los que se conocen estos datos:
a) $a = 20$, $\beta = 45º$ y $\gamma = 75º$.
b) $b = 12$, $\alpha = 15º$ y $\beta = 30º$.
c) $\alpha = 90º$, $\beta = 60º$ y $a = 20$.

Sol: a) $\alpha = 60º$, $b = 20\sqrt{2/3}$ $c = 10(\sqrt{2}+1)$; b) $\gamma = 135º$, $a = 12\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $c = 12\sqrt{2}$
c) $\gamma = 30º$, $a = 10\sqrt{3}$, $c = 10$.

11º Calcula β en un triángulo de lado a = 10, b = 5 y c = 5·√3. **Sol:** 30º.

12º En un triángulo isósceles el ángulo que determinan los lados iguales mide 52.34º y el lado desigual 55 cm. Calcula su perímetro y su área. **Sol:** 145 cm; 979.9 cm^2.

13º En un terreno horizontal se divisa una torre desde un punto A bajo un ángulo de 30º. Si nos aproximamos 20 m se llega a un punto B, desde el que observamos la torre bajo un ángulo de 45º. Calcula la altura de la torre. **Sol:** 27.32 m.

14º En un triángulo isósceles los dos lados iguales miden 10 cm y su área vale 48 cm^2. Calcula el valor de sus ángulos. **Sol:** 73.74º, 53.1º y 53.1º.

15º Calcular la altura del pico de una montaña, sabiendo que, en ese momento del día, el Sol incide con sus rayos sobre el suelo con un ángulo de 75º y provoca una sombra sobre el suelo de 53 metros. **Sol:** 197.8 m.

16º Una escalera de 12m de largo esta apoyada en una pared con un ángulo de 60º respecto al suelo. Calcular la altura de la pared hasta donde apoya la escalera, y la separación de ésta a la pared. **Sol:** 10.4 m de altura y 6 m de separación.

17º La sombra de un árbol mide 50 m y el ángulo que forman los rayos del sol con el suelo es de 60º. ¿Cuál es la altura del árbol? **Sol:** 86.6 m.

18º En el parque de atracciones observas a tu amigo en lo alto de la Noria con un ángulo de 60º. Calcular a la altura que se encuentra, sabiendo que tú estás a 50m de la Noria.
Sol: 86.6 m.

19º Daniel observa a sus compañeros, que están en lo alto de un campanario, con un ángulo de 80º. Calcular la altura a la que se encuentran sabiendo que Daniel está a 10 metros del edificio. **Sol:** 56.7 m.

20º Observas el nido de un águila, en una pared vertical de una montaña, con un ángulo de 70º. Calcular la altura a la que se encuentra el nido, sabiendo que estás a 40m de esa pared. **Sol:** 109.9 m.

21º Una escalera de bomberos de 10 m de longitud se ha fijado en un punto de la calzada. Si se apoya sobre una de las fachadas forma un ángulo con el suelo de 45º y si se apoya sobre la otra fachada forma un ángulo de 30º. Calcular:

a) La anchura de la calle.
b) La altura de la escalera sobre la fachada de 30º.
c) La altura de la escalera sobre la fachada de 45º.

Sol: a) 15.7 m; b) 7.07 m; c) 5.

22º Dos amigos parten de un mismo punto A y siguen direcciones que forman entre sí un ángulo de 35º. Tras caminar 50 m y 75 m, respectivamente, se sitúan en dos puntos B y C. Calcula la distancia que les separa y los ángulos B y C del triángulo ABC (Peligro, presencia de ángulo obtuso). **Sol:** 44.51 m, 104.9º y 40.1º

23º Calcula la altura de una torre, si situándonos a 20 m de su pie vemos la parte más alta bajo un ángulo de 45º. **Sol:** 20 m.

24º En un solar de forma triangular dos de sus lados miden 6 y 10 m respectivamente y el ángulo comprendido se midió con un teodolito y resultó ser de 30º. ¿Cuál es su superficie? **Sol:** 15 m^2.

25º Los padres de Pedro tienen una parcela en el campo de forma triangular. Cuyos lados miden 20, 22 y 30 m. Pedro quiere calcular los ángulos. ¿Cuáles son esos ángulos?.
Sol: 41.8º, 47.16º y 91.04º.

26º Estando situado a 100 m de un árbol, veo su copa bajo un ángulo de 30º. Mi amigo ve el mismo árbol bajo un ángulo de 60º. ¿A qué distancia está mi amigo del árbol?
Sol: 100/3 m.

27º Un avión que está volando a 500 m de altura distingue un castillo con un ángulo de depresión de 15º ¿A qué distancia del castillo se halla? **Sol:** 1932 m

28º Un avión vuela durante dos horas a 200 km/h en dirección NO. Calcula la distancia que recorre hacia el Norte y hacia el Oeste. **Sol:** $x = y = 282.8$ km.

29º El ángulo de elevación de una torreta eléctrica es de 45º a una distancia de 10 m de la torreta. Si el observador se encuentra a 1 m sobre el suelo. Calcula la altura de la torreta. **Sol:** 11 m.

30º Dos móviles parten de un punto al mismo tiempo, siguiendo dos trayectorias rectilíneas que forman entre sí un ángulo de 135º y con velocidades de 10 y 20 m/s respectivamente. Al cabo de cinco minutos ¿qué distancia los separa? **Sol:** 8394 m.

31º Desde cierto lugar del suelo se ve el punto más alto de una torre, formando la visual un ángulo de 30º con la horizontal. Si nos acercamos 50 m a la torre, ese ángulo se hace de 60º. Calcula la altura de la torre. **Sol:** $25\sqrt{3}$ m.

32º Un avión vuela horizontalmente a una determinada altura "h". Cuando se encuentra sobre la vertical de un punto A, ve la torre del aeropuerto bajo un ángulo de depresión de 30º. Al aproximarse 1000 m ve la misma luz bajo un ángulo de 60º. Halla:

a) La altura a la que vuela el avión
b) La distancia del punto A a la torre del aeropuerto.

Sol: a) $500\sqrt{3}$ m; b) 1500 m.

33º Calcula la longitud de los lados de un paralelogramo cuyas diagonales son de 20 y 16 cm. y las diagonales forman entre sí un ángulo de 37º. **Sol:** 6 y 17.1 cm.

34º Calcula el área del decágono regular de 10 cm de lado. **Sol:** 765 cm^2.

35º Calcular el área de un dodecágono de 4cm de lado. **Sol:** 179.1 cm^2.

36º La longitud del lado de un octógono es de 16 cm. Calcular su área. **Sol:** 1236 cm^2.

37º Calcula el área de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 12 m. **Sol:** 342.4 m^2.

38º En una circunferencia de 10 cm de radio se traza una cuerda de 6 cm. Averigua el ángulo central que abarca dicha cuerda. **Sol:** 34.9º.

39º Calcula los ángulos de un rombo cuyas diagonales miden 14 cm y 8 cm. **Sol:** 120.5º; 59.5º.

40º Dos personas, que están separadas 6 km, observan un avión que vuela de uno de ellos hacia el otro. Uno de ellos lo observa bajo un ángulo de 30º, mientras el otro lo hace bajo un ángulo de 15º. Calcular la altura a la que vuela el avión. **Sol:** 1.10 km.

41º Desde un punto determinado del mar, el capitán de un barco observa la luz de un faro con una inclinación de 15º. Su situación es dramática, le queda combustible para recorrer 10 km y no sabe si llegará a tierra. Tras recorrer 2 km en dirección hacia el faro vuelve a comprobar la inclinación de la luz del faro que ahora resulta de 25º. En estos momentos el capitán ya conoce lo que le interesa. Calcular:

a) La altura del faro.
b) La distancia a la que se encuentra del faro.

Sol: a) 1.26 km; b) 2.71 km.

42º Un submarino desciende hacia el fondo del mar con una inclinación de 35º. Cuando llega al fondo, y después de realizar los pertinentes trabajos, asciende a la superficie con un ángulo de 45º. Cuando ha emergido completamente comprueba que se ha desplazado 200 metros desde el punto donde empezó la inmersión. Se pide calcular la profundidad del mar en el punto en el que estuvo trabajando el submarino. **Sol:** 82.4 m.

43º Dos personas separadas por una llanura de 2 km, observan sobre la llanura un globo aerostático con ángulos de 30º y 45º respectivamente. Hallar la altura a la que vuela dicho artefacto. **Sol:** 732 m.

44º Acaban de colocar una antena de 7 metros en lo alto de un edificio. El extremo superior de la antena se ve bajo un ángulo de 85º, mientras que la base se ve bajo a un ángulo de 80º. Calcular la altura del edificio y la distancia que te separa de él.
Sol: Distancia de 1.21 m y altura de 6.89 m.

45º En el tejado de un edificio están colocando una antena. Desde la calle veo la base de ella con un ángulo de 70º mientras que el extremo superior lo veo con un ángulo de 80º. Si la antena mide 10m, calcular la altura del edificio y la distancia que me separa de él. **Sol:** Estoy a 3.42 m del edificio y su altura es de 9.4 m.

46º Desde un puesto de caza, un cazador apunta con su escopeta a una tórtola, que se encuentra posada en la copa de un árbol, con un ángulo de 50º. Cuando iba a disparar la tórtola salió volando y se posó en una rama 4m más abajo; al apuntarla con su escopeta lo hace bajo un ángulo de 40º. ¿Qué altura tiene el árbol?, ¿Qué distancia me separa de él? **Sol:** Altura 13.5 m y distancia 11.3 m.

47º Pablo observa desde la ventana de su casa un accidente con un ángulo de 60º; como es muy curioso y desde allí no lo ve muy bien, decide subir a la azotea del edificio, que se encuentra 10 m más arriba. Desde allí, con unos prismáticos, se empapa de todo mirando con un ángulo de 40º. Determinar la altura del edificio de Pablo. **Sol:** 19.4 m.

48º Calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo sabiendo que un cateto mide 75 cm y sabiendo que la longitud de la bisectriz del ángulo opuesto al otro cateto mide 94 cm. **Sol:** 274.52 cm.

49º La base de un triángulo isósceles mide 55 cm y los lados iguales 39 cm. Calcular el valor de sus ángulos. **Sol:** Los lados iguales 45.16º y el desigual 89.68º.

50º Una de las alturas de un triángulo isósceles mide 33 cm y forma un ángulo de 55º con dos de sus lados. Determinar todos los lados.
Sol: Dos lados son iguales y miden 57.53 cm y el otro vale 66.33 cm.

51º Calcular el lado del pentágono regular inscrito en una circunferencia cuyo diámetro es 30 cm. **Sol:** 17.63 cm.

52º Calcular la base y la altura de un rectángulo, sabiendo que su diagonal mide 84 cm y uno de los ángulos adyacentes a ella, 72.48º. **Sol:** 80.24 cm, 24.84 cm.

53º Un ángulo de un rombo mide 62º. La diagonal menor, 34 cm. Calcular el perímetro y el área. **Sol:** 132 cm; 962 cm^2.

Ejercicios de ecuaciones trigonométricas:

56º Calcular todas las soluciones a las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\sin(2x)=1$ b) $\sin\left(x/2\right)=\sqrt{2}/2$ c) $\sin(x+30^\circ)=-1$

d) $\cos(x-45^\circ)=-1$ e) $\cos(3x)=1/2$ f) $\cos(2x+60^\circ)=1$

g) $\tan(6x-60^\circ)=-1$ h) $\tan(5x)=1$ i) $\tan(3x+45^\circ)=\sqrt{3}$

Sol: a) x = 45º + 180ºk; b) x = 90º + 720ºk, x = 270º + 720ºk; c) x = 240º + 360ºk;
d) x = 225º + 360ºk; e) x = 20º + 120ºk, x = –20º + 120ºk; f) x = –30º + 180ºk;
g) x = 5º + 60ºk; h) x = 9º + 36ºk; i) x = 5º + 60ºk.

57º Calcular todas las soluciones a las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\sin^2(2x)=3/4$ b) $\sin^2(3x)=1/4$ c) $\sin^2(x+45^\circ)=1$

d) $\cos^2(2x)=3/4$ e) $\cos^2(3x)=1/4$ f) $\cos^2(x+45^\circ)=1$

g) $\tan^2(x)=1$ h) $\tan^2(x-45^\circ)=0$ i) $\tan^2(3x-60^\circ)=3$

Sol: a) x = 30º + 180ºk, x = 60º + 180ºk, x = 120º + 180ºk, x = 150º + 180ºk;
b) x = 10º + 120ºk, x = 50º + 120ºk, x = 70º + 120ºk, x = 110º + 120ºk;
c) x = 45º + 180ºk;
d) x = 15º + 180ºk, x = 75º + 180ºk, x = 105º + 180ºk, x = 115º + 180ºk;
e) x = 20º + 120ºk, x = 40º + 120ºk, x = 80º + 120ºk, x = 100º + 120ºk;
f) x = –45º + 180ºk; g) x = 45º + 90ºk; h) x = 45º + 180ºk; i) x = 40º + 60ºk, x = 60ºk.

58º Calcular todas las soluciones a las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\sin^2 x-\cos^2 x=1/2$ b) $\cos^2 x=\sin^2 x$ c) $\sin^2 x+\cos^2 x=2-\cos^2 x$

d) $5\cos^2 x+\sin^2 x=4\cos x$ e) $\sin^2 x+\cos(2x)=1/4$ f) $\tan^2 x+2=3\tan x$

g) $2\sin^2 x=\tan x$ h) $\cos(2x)+5\cos x+3=0$ i)

Sol: a) x= 60 + 180k, x = –60 + 180k; b) x = 45 + 180k, x = 135 + 180k; c) x = 180k;
d) $x=60+360k$, $x=-60+360k$; e) x = 60 + 180k, x = 120 + 180k;
f) x = 45 + 180k; g) x = 45 + 180k, x = 180k; h) x = –30 + 360k; x = –150 + 360k.

59º Calcular todas las soluciones a las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\sin(2x)=-1/2$ b) $\tan x=1$

c) $\cos(2x)=\cos x$ d) $\sin(2x)=\cos x$

e) $\sin(2x+60)=\sin(x-60)$ f) $\cos(2x)=\cos(x+90)$

g) $\sin(2x-15)=\cos(x+15)$ h) $\sin x\cos x=1/2$

i) $\tan x\sec x=\sqrt{2}$ j) $\cos(8x)+\cos(6x)=2\cdot\cos(210)\cdot\cos x$

Sol: a) x = 105 + 180k, x = –15 + 180k; b) x = 45 + 180k; c) x = 120k;
d) x = 30 + 120k, x = 90 + 120k; e) x = 60 + 120k, –120 + 90k; f) x = 90 + 360k;
g) x = 30 + 120k, x = 330 + 360k; h) x = 45 + 180k;
i) x = –45 + 360k, x = –135 + 360k; j) x = 90 + 180k; x = ±30º 360·k/7.

Ejercicios de demostración de igualdades trigonométricas:

60º Verifique las siguientes igualdades trigonométricas a partir de las igualdades más elementales:

a) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin(2x)$

b) $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

c) $\cos^2 x = \dfrac{\text{cotan}^2 x}{1 + \text{cotan}^2 x}$

d) $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$

e) $\cos^2 x = \dfrac{1}{1 + \tan^2 x}$

f) $\sin^2 x = \dfrac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

g) $\dfrac{\sin x - \text{cosec}\, x}{\cos x - \sec x} = \text{cotan}^3 x$

h) $\sec^2 x + \text{cosec}^2 x = \dfrac{4}{\sin^2(2x)}$

i) $\dfrac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \dfrac{\tan\left(\dfrac{x+y}{2}\right)}{\tan\left(\dfrac{x-y}{2}\right)}$

j) $\dfrac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\sin(x+y) + \sin(x-y)} = \tan y$

k) $\dfrac{\tan^2(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} = \dfrac{1 - \cos x}{2}$

l) $\tan x = \text{cotan}\, x - 2\,\text{cotan}(2x)$

m) $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = \text{cosec}\, x - \text{cotan}\, x$

n) $\dfrac{\tan x}{\tan(2x) - \tan x} = \cos(2x)$

ñ) $\tan(45 + x) - \tan(45 - x) = 2\tan(2x)$

o) $\dfrac{\cos(x+y)\cdot\cos(x-y)}{\cos x - \sin y} = \cos x + \sin y$

p) $\dfrac{\sin x + \cos x}{\cos x} = \sin x \cdot \sec x + 1$

q) $\sin x + \text{cotan}\, x = \cos x \cdot \tan x + \text{cosec}\, x$

r) $\sec(x \pm y) = \dfrac{\sec(x)\sec(y)\text{cosec}(x)\text{cosec}(y)}{\text{cosec}(x)\text{cosec}(y) \mp \sec(x)\sec(y)}$

s) $\text{cosec}(x \pm y) = \dfrac{\sec(x)\sec(y)\text{cosec}(x)\text{cosec}(y)}{\sec(x)\text{cosec}(y) \pm \text{cosec}(x)\sec(y)}$

61º En matemáticas, toda función periódica es posible aproximarla a una suma o serie de funciones trigonométricas seno y coseno denominada serie de Fourier. A continuación aparecen los desarrollos en serie de Fourier de algunas potencias de funciones trigonométricas. Demostrar y verificar las igualdades tal y como se hizo en el ejercicio anterior:

a) $\sin^2 x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos(2x)$

b) $\cos^2 x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos(2x)$

c) $\sin^3 x = \dfrac{3}{4}\sin x - \dfrac{1}{4}\sin(3x)$

d) $\cos^3 x = \dfrac{3}{4}\cos x + \dfrac{1}{4}\cos 3x$

e) $\sin^4 x = \dfrac{3}{8} - \dfrac{1}{2}\cos(2x) + \dfrac{1}{8}\cos(4x)$

f) $\cos^4 x = \dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{2}\cos(2x) + \dfrac{1}{8}\cos(4x)$

e) $\sin^5 x = \dfrac{5}{8}\sin x - \dfrac{5}{16}\sin(3x) + \dfrac{\sin(5x)}{16}$

f) $\cos^5 x = \dfrac{5}{8}\cos x + \dfrac{5}{16}\cos(3x) + \dfrac{\cos(5x)}{16}$

Ejercicios de vectores:

1º Realizar las siguientes operaciones aritméticas:

a) $(2,\ 3)+(1,\ 1)-(3,\ 2)$ b) $(1,-3)-(1,-1)-(2,\ 2)$ c) $(4,-3)-(6,-1)+(3,\ 2)$

d) $(7,\ 10)+(1,\ 1)-(2,\ 2)$ e) $(3,\ 1)+(1,\ 3)-(2,\ 5)$ f) $(2,-1)+(-1,\ 3)+(1,\ 1)$

Sol: a) (0, 2); b) (–2, –4); c) (1, 0); d) (6, 9); e) (2, –1); f) (2, 3).

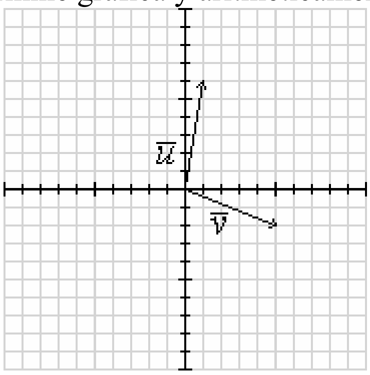
2º Realizar las siguientes operaciones aritméticas:

a) $3\cdot(2,\ 3)$ b) $5\cdot(1,\ 2)$ c) $5\cdot(6,-1)$ d) $-3\cdot(4,-3)$

Sol: a) (6, 9); b) (5, 10); c) (30, –5); d) (–12, –9).

3º Observando las gráficas, determine en cada caso el valor de los vectores $\overline{u}$ y $\overline{v}$. Determine gráfica y aritméticamente el vector $\overline{u}+\overline{v}$.

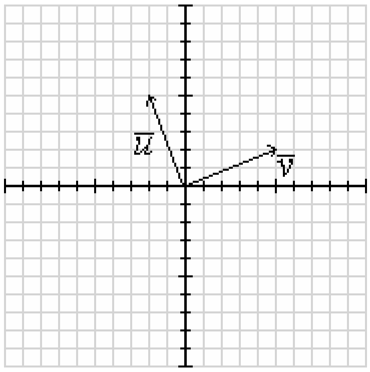
a)



$\overline{u}=$ $\overline{v}=$

$\overline{u}+\overline{v}=$

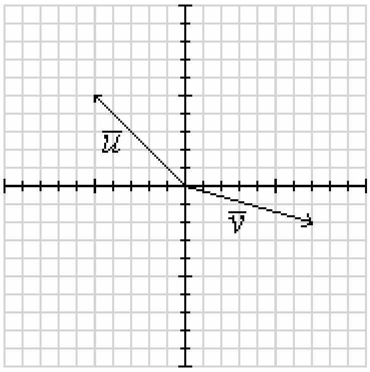
b)



$\overline{u}=$ $\overline{v}=$

$\overline{u}+\overline{v}=$

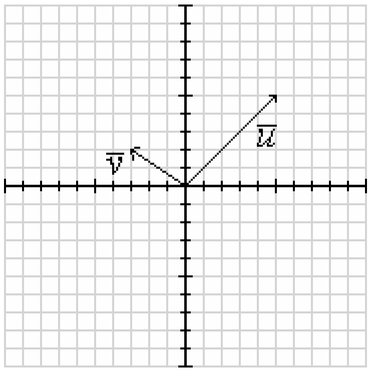
c)



$\overline{u}=$ $\overline{v}=$

$\overline{u}+\overline{v}=$

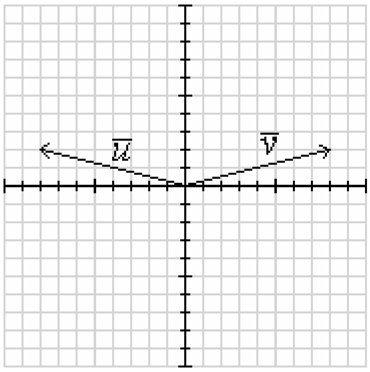
d)



$\overline{u}=$ $\overline{v}=$

$\overline{u}+\overline{v}=$

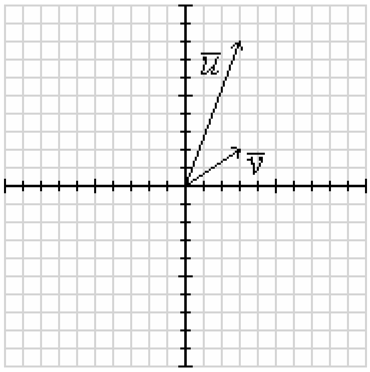
e)



$\overline{u}=$ $\overline{v}=$

$\overline{u}+\overline{v}=$

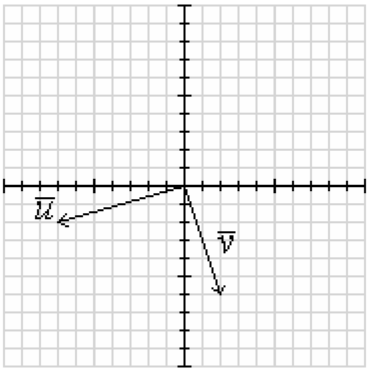
f)



$\overline{u}=$ $\overline{v}=$

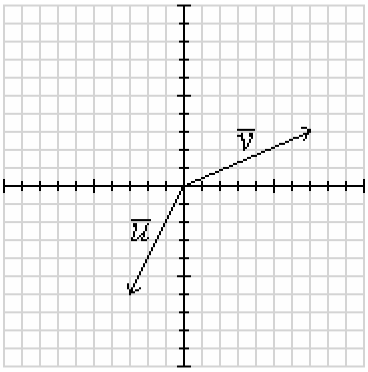
$\overline{u}+\overline{v}=$

g)



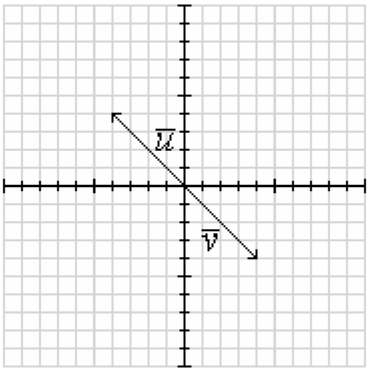
$\overline{u} =$ $\overline{v} =$
$\overline{u} + \overline{v} =$

h)



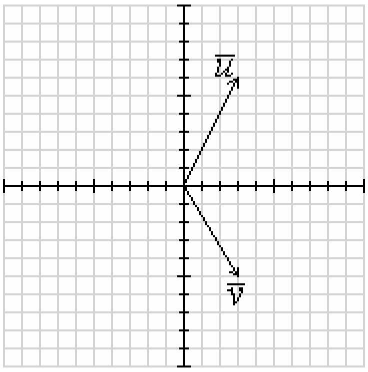
$\overline{u} =$ $\overline{v} =$
$\overline{u} + \overline{v} =$

i)



$\overline{u} =$ $\overline{v} =$
$\overline{u} + \overline{v} =$

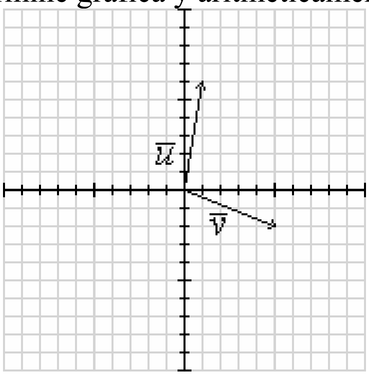
j)



$\overline{u} =$ $\overline{v} =$
$\overline{u} + \overline{v} =$

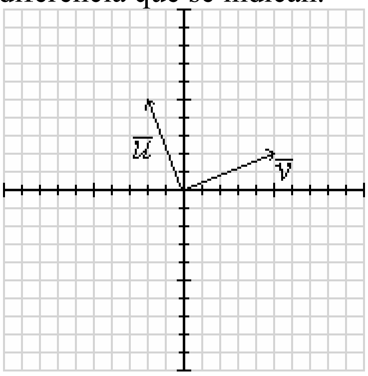
4º Determine gráfica y aritméticamente los vectores diferencia que se indican.

a)



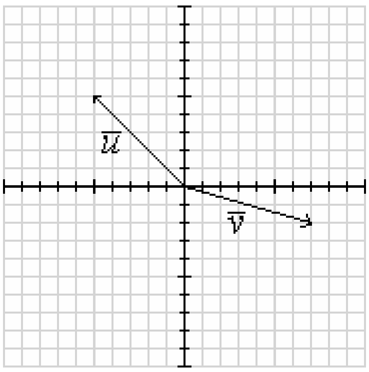
$\overline{u} =$ $\overline{v} =$
$\overline{u} - \overline{v} =$

b)



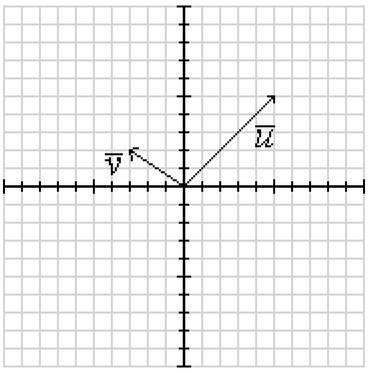
$\overline{u} =$ $\overline{v} =$
$\overline{u} - \overline{v} =$

c)



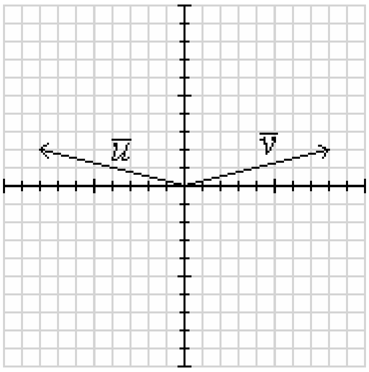
$\overline{u} =$ $\overline{v} =$
$\overline{v} - \overline{u} =$

d)



$\overline{u} =$ $\overline{v} =$
$\overline{v} - \overline{u} =$

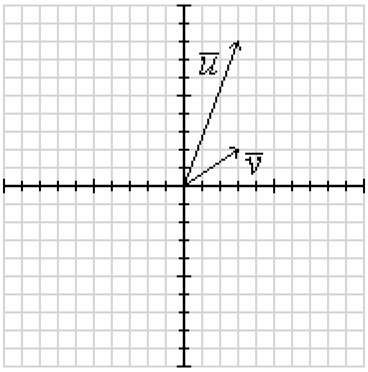
e)



$\overline{u} =$ $\qquad$ $\overline{v} =$

$\overline{u} - \overline{v} =$

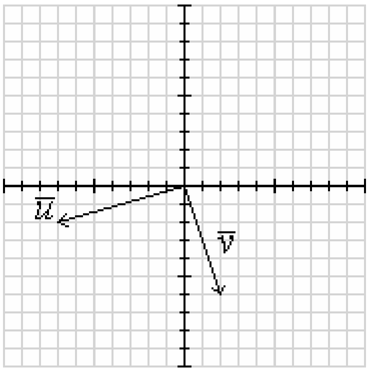
f)



$\overline{u} =$ $\qquad$ $\overline{v} =$

$\overline{v} - \overline{u} =$

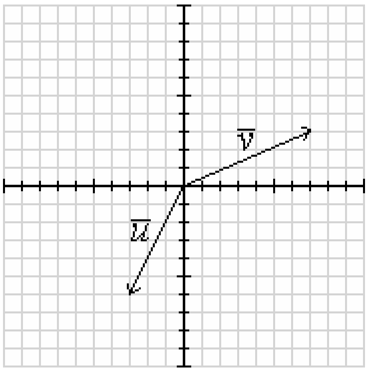
g)



$\overline{u} =$ $\qquad$ $\overline{v} =$

$\overline{u} - \overline{v} =$

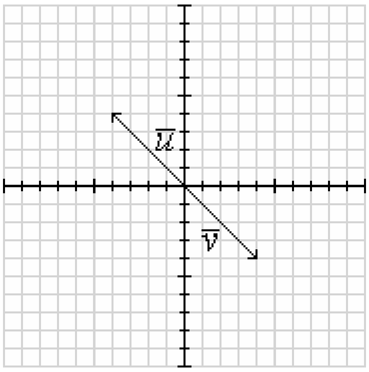
h)



$\overline{u} =$ $\qquad$ $\overline{v} =$

$\overline{u} - \overline{v} =$

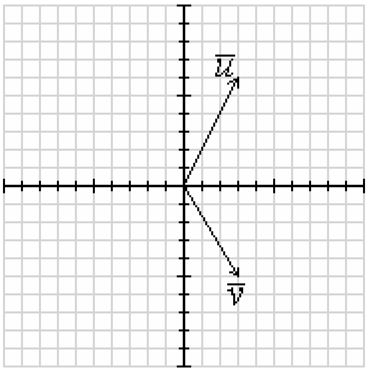
i)



$\overline{u} =$ $\qquad$ $\overline{v} =$

$\overline{u} - \overline{v} =$

j)

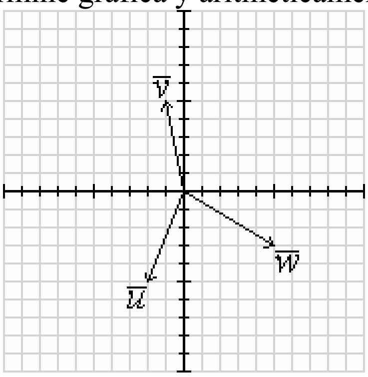


$\overline{u} =$ $\qquad$ $\overline{v} =$

$\overline{v} - \overline{u} =$

5º Determine gráfica y aritméticamente el vector $\overline{u} + \overline{v} + \overline{w}$.

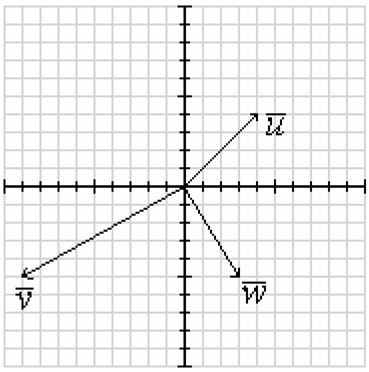
a)



$\overline{u} =$ $\qquad$ $\overline{v} =$ $\qquad$ $\overline{w} =$

$\overline{u} + \overline{v} + \overline{w} =$

b)

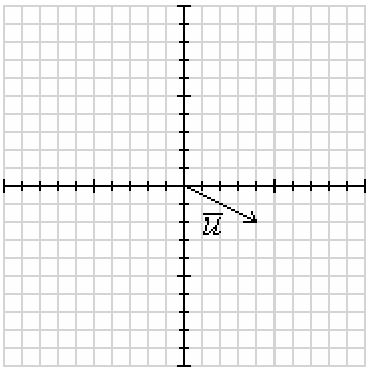


$\overline{u} =$ $\qquad$ $\overline{v} =$ $\qquad$ $\overline{w} =$

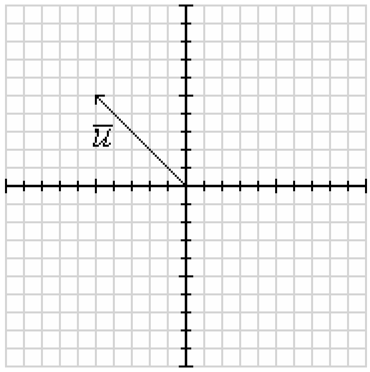
$\overline{u} + \overline{v} + \overline{w} =$

6º Dibuje en los gráficos las siguientes operaciones aritméticas realizadas a los vectores:

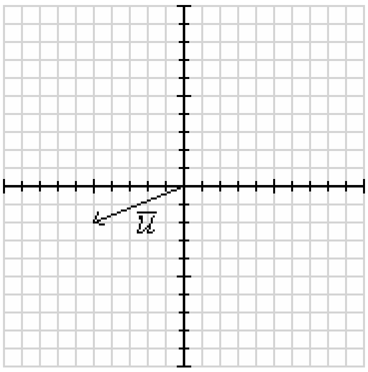
a) $2 \cdot \overline{u} =$



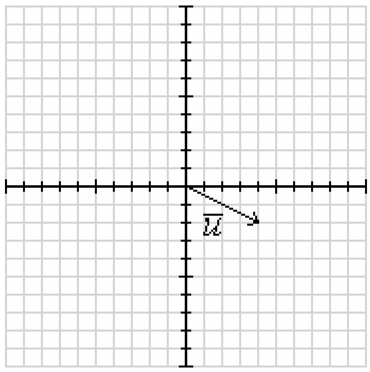
b) $\overline{u} / 5 =$



b) $-\overline{u} =$



c) $-2 \cdot \overline{u} =$



7º Calcula el módulo y el argumento de los siguientes vectores:

a) $\overline{v} = (6,\ 0)$ b) $\overline{v} = (0,\ 3)$ c) $\overline{v} = (1,\ 2)$ d) $\overline{v} = (3,\ -4)$ e) $\overline{v} = (-2,\ -1)$

Sol: a) $|\overline{v}| = 6$, $\theta = 0^{\circ}$; b) $|\overline{v}| = 3$, $\theta = 90^{\circ}$; c) $|\overline{v}| = \sqrt{5}$, $\theta = 63.43^{\circ}$;
d) $|\overline{v}| = 5$, $\theta = -53.13^{\circ}$; e) $|\overline{v}| = \sqrt{5}$, $\theta = 206.56^{\circ}$.

8º Calcula el vector unitario de los siguientes vectores:

a) $\overline{v} = (6,\ 0)$ b) $\overline{v} = (0,\ 3)$ c) $\overline{v} = (1,\ 2)$ d) $\overline{v} = (3,\ -4)$ e) $\overline{v} = (-2,\ -1)$

Sol: a) $(1,\ 0)$; b) $(0,\ 1)$; c) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$; d) $\left(\frac{3}{5},\ \frac{-4}{5}\right)$; e) $\left(\frac{-2}{\sqrt{5}},\ \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$.

9º Hallar un vector de módulo 10 en la dirección de $\overline{u} = (4, 3)$. **Sol:** (8, 6).

10º Partiendo de los siguientes vectores:

$\overline{u} = (6,\ 0)$ $\overline{v} = (0,\ 3)$ $\overline{w} = (1,\ 2)$ $\overline{r} = (3,\ -4)$ $\overline{s} = (-2,\ -1)$

Calcula los siguientes productos escalares:

a) $\overline{u} \cdot \overline{v}$ b) $\overline{v} \cdot \overline{w}$ c) $\overline{s} \cdot \overline{u}$ d) $\overline{r} \cdot \overline{w}$ e) $\overline{r} \cdot \overline{s}$

Sol: a) 0; b) 6; c) –12; d) –5; e) –2.

11º Un vector tiene de módulo 4 y otro vector tiene módulo 5. Si el ángulo formado por los dos vectores es de 60º, calcule el producto escalar de los dos vectores. **Sol:** 10.

12º Comprueba que el ángulo formado por los vectores:

$$\bar{u} = \left(\sqrt{3}+1, \sqrt{3}-1\right) \qquad \bar{v} = \left(\sqrt{3}-1, \sqrt{3}+1\right)$$

Es de 60º.

13º Calcula *x* e *y* para que los vectores:

$$\bar{u} = (2, y) \qquad \bar{v} = (x, 1)$$

Formen un ángulo de 90º. Además, $|\bar{v}| = \sqrt{5}$. **Sol:** $x = \pm 2$, $y = \mp 4$.

14º Dados los vectores:

$$\bar{u} = (2, y) \qquad \bar{v} = (1, -1)$$

Determina *x* para que dichos vectores formen un ángulo de 45º. **Sol:** *x* = 0.

15º Sabiendo que $\bar{u} = \left(\sqrt{3}, 1\right)$ forma un ángulo de 60º con un vector $\bar{v}$, de módulo igual al módulo de $\bar{u}$, calcular las componentes de $\bar{v}$. **Sol:** $\bar{v} = (0, 2)$ y $\bar{v} = \left(\sqrt{3}, -1\right)$

16º Dados los vectores:

$$\bar{u} = (1, 4) \qquad \bar{v} = (6, 2)$$

Determina el ángulo que forma la bisectriz de estos vectores con el eje OX. **Sol:** 57.5º.

17º Calcular *x* de modo que:

$$\bar{u} = (1, x) \qquad \bar{v} = (-3, x)$$

Sean ortogonales. **Sol:** $x = \pm\sqrt{3}$.

18º Hallar el producto escalar de los vectores $\bar{u} = (6, -4)$ y $\bar{v} = (4, 5)$. **Sol:** –4.

19º Halla $\bar{u}\cdot\bar{v}$ si $\bar{u} = (2, 4)$, $|\bar{v}| = 2$ y el ángulo que forman los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ es de 60º.
Sol: 3.16.

20º Calcular los ángulos y la longitud de los lados del triángulo ABC, sabiendo que las coordenadas de sus vértices son los puntos A(0, 0), B(1, 3) y C(4, 2).
Sol: $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{BC}\right| = \sqrt{10}$; $\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{20}$; $\widehat{\overline{AB},\overline{AC}} = \widehat{\overline{AC},\overline{BC}} = 45^\circ$; $\widehat{\overline{AB},\overline{BC}} = 90^\circ$.

21º Hallar el área de un triángulo de vértices A(1, 3), B(3, 6) y C(7, 2). **Sol:** 20 u^2.

22º Hallar el producto escalar y el ángulo que forman entre si los vectores:

$$\bar{v} = (3, 4) \qquad \bar{w} = (-4, 3)$$

Sol: $\bar{u}\cdot\bar{v} = 0$; $\widehat{\bar{u},\bar{v}} = 0^\circ$.

23º Demostrar que los vectores:

$$\bar{v} = (\cos\alpha, -\sin\alpha) \qquad \bar{u} = (\sin\alpha, \cos\alpha)$$

son perpendiculares y unitarios.

24º Se tiene los vectores:

$$\overline{u} = (4,0) \qquad \overline{v} = (1,5)$$

Calcular el ángulo que forman entre si los vectores $\overline{w}$ y $\overline{r}$ sabiendo que:

$$\overline{w} = \overline{u} + \overline{v} \qquad \overline{r} = \overline{u} - \overline{v}$$

Sol: 104.04º.

25º Si $\overline{a}$, $\overline{b}$ y $\overline{c}$ son tres vectores de igual módulo y $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$, calcular el ángulo que forman entre si $\overline{a}$ y $\overline{b}$. **Sol:** 120º.

26º Dos vectores $\overline{a}$ y $\overline{b}$ son tales que:

$$|\overline{a}| = 10 \qquad |\overline{b}| = 5 \cdot \sqrt{6} \qquad |\overline{a} + \overline{b}| = 20$$

Hallar su producto escalar, el ángulo que forman entre ellos y los ángulos que forman cada uno de ellos con el vector suma.

Sol: $\overline{a} \cdot \overline{b} = 75$; $\widehat{\overline{a} \cdot \overline{b}} = 52.24^{\circ}$; $\widehat{\overline{a}, (\overline{a} + \overline{b})} = 28.95^{\circ}$; $\widehat{\overline{b}, (\overline{a} + \overline{b})} = 23.28^{\circ}$.

27º Calcular los valores de m y n para que los vectores:

$$\overline{u} = \left(-\frac{3}{5}, m \right) \qquad \overline{v} = \left(n, \frac{5}{9} \right)$$

a) Sean unitarios.
b) Sean ortogonales.

Sol: a) $m = \pm 4/5$, $n = \pm \sqrt{56}/9$; b) $n = m = 0$.

28º Hallar el producto escalar de los vectores:

$$\overline{x} = 2\overline{u} - 3\overline{v} \qquad \overline{y} = 3\overline{u} + 2\overline{v}$$

Sabiendo que $\overline{u}$ y $\overline{v}$ forman 60º y que $|\overline{u}| = 4$ y $|\overline{v}| = 5$. **Sol:** –104.

Ejercicios de rectas:

Resumen de teoría:

Ecuación vectorial.

$$\boxed{\begin{array}{c} \overline{r} = \overline{r}_0 + \overline{v}_0 t \\ (x,y) = (x_0, y_0) + (v_x, v_y)t \end{array}}$$

Ecuación paramétrica.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} x = x_0 + v_x t \\ y = y_0 + v_y t \end{array}\right\}}$$

Ecuación continua.

$$\boxed{\frac{x-x_0}{v_x} = \frac{y-y_0}{v_y}}$$

Ecuación punto pendiente.

$$\frac{x-x_0}{v_x} = \frac{y-y_0}{v_y} \rightarrow y - y_0 = \frac{v_y}{v_x}(x-x_0)$$

$$\boxed{y - y_0 = m(x-x_0)}$$

Ecuación explícita.

$$y = mx - mx_0 + y_0 \rightarrow \boxed{y = mx + n}$$

Ecuación implícita:

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

Ecuación de la recta que pasa por 2 puntos:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}}$$

Pendiente de una recta:

$$\boxed{m = -\frac{a}{b} = \frac{v_y}{v_x} = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}}$$

Ejercicios de tipos de rectas:

1º Encuentra la ecuación vectorial, paramétrica y continua de la recta que pasa por los puntos A = (3, 2) y B = (1, –1).
Sol: $(x, y) = (3, 2) + t\cdot(2, 3)$; $\{x = 3 + 2\cdot t; y = 2 + 3\cdot t\}$; $(x – 3)/2 = (y – 2)/3$.

2º Escribe en formas explícita y continua la ecuación de la recta: $2x + 3y = 6$.
Sol: $y = (–2/3)x + 2$; $(x – 3)/3 = y/(–2)$.

3º Dada la recta r: $x + 3y + 2 = 0$, en forma implícita, escribirla en forma explícita, continua y vectorial. **Sol:** $y = (–1/3)x-2/3$; $(x – 1)/3 = (y + 1)/(–1)$; $(x, y) = (1, –1)+ t\cdot(3, –1)$.

4º ¿Cuál es la ecuación paramétrica de la recta que pasa por los puntos P = (2, 1) y Q = (1, –2). ¿Para qué valores del parámetro se obtienen los puntos P y Q y el punto medio de P y Q?. **Sol:** $\{x = 2 + t; y = 1 + 3\cdot t\}$; $t = 0$; $t = –1$; $t = –1/2$.

5º Dada la recta r: $x + y + 1 = 0$, en forma implícita, escribirla en forma explícita, continua y vectorial. **Sol:** $y = – x – 1$; $(x – 1)/1 = y/(–1)$; $(x, y) = (1, 0)+ t\cdot(1, –1)$.

6º Escribe en forma explícita e implícita la ecuación de la recta $2x + y = 2$.
Sol: $y = – 2x + 2$; $2x + y – 2 = 0$.

7º Escribe la ecuación paramétrica y continua de la recta: $x + 2y = 4$.
Sol: $\{x = – 2\cdot t; y = 2 + t\}$; b) $x/(–2) = (y – 2)/1$

8º
a) ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos A(2, 2) y B(0, 4)?
b) Escribe las ecuaciones explícita e implícita de la recta que pasa por los puntos P(1, 4) y Q(2, 3).

Sol: a) $m = –1$; b) $y = –x + 5$; $x + y – 5 = 0$.

Elementos y características de la recta:

9º ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos A(0, 1) y B(3, 4)? **Sol:** $m = 1$.

10º ¿Cuál es el vector de dirección y la pendiente de las siguientes rectas?:

a) $y = 3x - 2$. b) $(x - 1)/2 = (y + 2)/4$

Sol: a) $\overline{v} = (1, 3)$; $m = 3$; b) $\overline{v} = (2, 4)$; $m = 2$.

Ejercicios de rectas que pasan por dos puntos:

11º Deduce la ecuación de la recta cuyos puntos de intersección con los ejes son A(6, 0) y B(0, –2). **Sol:** $x - 3y - 6 = 0$.

12º ¿Pertenece el punto P(3, 3) a la recta que pasa por los puntos A(1, –1) y B(2, 1)? **Sol:** Sí.

13º Determina el valor de k para que los puntos A(2, –1), B(1, 4) y C(k, 9) estén alineados. **Sol:** $k = 0$.

Rectas paralelas y perpendiculares:

Pendiente en paralelas: $\boxed{m_{\parallel} = m}$

Pendiente en perpendiculares: $\boxed{m_{\perp} = -1/m}$

14º Calcula la ecuación de la recta perpendicular a r que pasa por el punto P en los casos:

a) $r \equiv \{x = 2 - 3t;\ y = 1 + t\}$ P(3, 1) b) $r \equiv \dfrac{(x-1)}{2} = \dfrac{y}{3}$ P(0, 5)

c) $r \equiv y = 2x - 1$ P(1, 2) d) $r \equiv 2x - 3y + 2 = 0$ P(0, 0)

Expresar los resultados en forma explicita.

Sol: a) $y = 3x - 8$; b) $y = -\dfrac{2}{3}x + 5$; c) $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2}$; d) $y = -\dfrac{3}{2}x$.

15º Halla la ecuación de s que es perpendicular a $r \equiv x + y - 1 = 0$ y pasa por el punto A(2, 1). **Sol:** $x - y - 1 = 0$.

16º Hallar la ecuación de la recta que pasa por B(3, 1) y es paralela a la que pasa por los puntos A(2, 0) y C(2, –1). **Sol:** $y = 1$.

17º Hallar la ecuación de la recta perpendicular a la recta $x + y - 1 = 0$ que pasa por el punto A(2, 1). **Sol:** $x - y - 1 = 0$.

18º Halla la ecuación de la recta perpendicular a la recta $x + y - 1 = 0$ en el punto de abscisa 3. **Sol:** $x - y - 5 = 0$.

19º Halla la ecuación de la recta perpendicular al vector $\overline{w}(2, 1)$ y que corta a $y = x - 2$ en el punto de ordenada 3. **Sol:** $2x + y - 13 = 0$

20º Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (2, –1) que es paralela a la que pasa por los puntos (2, 0) y (1, 3). **Sol:** $3x + y - 7 = 0$.

21º Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas:

$$2x + 3y + 1 = 0 \qquad x - y - 2 = 0$$

y es perpendicular a la recta $3x + 5y = 15$. **Sol:** Pto corte: (1, –1); $5x - 3y + 5 = 0$.

22º Halla la ecuación de la recta perpendicular a la $3x - 4y + 1 = 0$ que pasa por el punto (1, 0). **Sol:** $4x + 3y - 4 = 0$.

24º Calcula el valor de a y b para que las rectas:

$$r_1 \equiv ax - y + 2 = 0 \qquad r_2 \equiv bx + 6y - 9 = 0$$

sean perpendiculares y, además, la segunda pase por el punto P(1, 1). **Sol:** $a = 2$; $b = 3$.

25º Calcula el valor de m para que las rectas:

$$r_1 \equiv mx + 2y + 6 = 0 \qquad r_2 \equiv 2x + y - 1 = 0 \qquad r_3 \equiv x - y - 5 = 0$$

Pasen, las tres, por un mismo punto. **Sol:** $m = 0$; P(2, –3).

26º Determina m y n sabiendo que la recta $2x + ny = 0$ pasa por el punto (1, 2) y es paralela a la recta $mx - 2y + 3 = 0$. **Sol:** $m = 4$; $n = -1$.

27º Dadas las rectas:

$$r_1 \equiv 3x + y - 3 = 0 \qquad r_2 \equiv -2x + ay - 8 = 0$$

Determinar "a" para que forman un ángulo de 45º. **Sol:** $a = 1$.

28º Dada la recta $mx - 3y + m - 4 = 0$. Calcular m para que:

a) Dicha recta pase por el punto (1, –2).
b) Dicha recta sea paralela a la recta (x – 1)/3 = (y – 2)/2.

Sol: a) $m = -1$; b) $m = 2$.

29º Hallar el valor de "a" y de "b" para que las rectas:

$$r_1 \equiv ax + 2y - 8 = 0 \qquad r_2 \equiv 2x + by - 3 = 0$$

se corten en el punto (2, 1). **Sol:** $a = 3$; $b = -1$.

30º Los puntos B(1,4) y C(8,3) son vértices de un triángulo rectángulo. Si BC es la hipotenusa, hallar el vértice A, sabiendo que está en la recta $y = x - 1$. **Sol:** (2,1), (7,6).

Ejercicios de distancias entre rectas:

31º Calcula la distancia entre las recta paralelas:

a) $r_1 \equiv x + y - 2 = 0$ y $r_2 \equiv x + y + 1 = 0$
b) $r_1 \equiv y - x + 3 = 0$ y $r_2 \equiv x - y + 2 = 0$

Sol: a) $3/\sqrt{2}$; b) $5/\sqrt{2}$.

32º Calcula la distancia entre las rectas paralelas:

$$r_1 \equiv 3x + 4y - 15 = 0 \qquad r_2 \equiv 3x + 4y - 40 = 0$$

Sol: 5.

33º Hallar la distancia entre las rectas:

$$r_1 \equiv 12x - 5y + 2 = 0 \qquad r_2 \equiv 12x - 5y + 5 = 0$$

Sol: 3/13.

34º Hallar un punto de la recta $r \equiv x + y - 2 = 0$ que equidiste de los puntos A(1, 3) y B(1, 1). **Sol:** (0, 2).

Problemas geométricos con puntos, segmentos y rectas:

35º Busca todos aquellos puntos P que estando situados sobre el segmento AB, A(1, 2) y B(4, –1) dividan a este en dos partes de tal forma que una parte sea el doble que la otra.
Sol: P = (2, 1); P' = (3, 0).

36º Las coordenadas del punto medio del segmento AB son (2, 1). Calcula las coordenadas del punto A sabiendo que las coordenadas de B son (1, 2). **Sol:** (3, 0).

37º Sabiendo que A(2, 4) y C(6, 0). Hallar las coordenadas del punto B de modo que:

$$\overline{CA} = \frac{\overline{CB}}{4}$$

Sol: (3, 3).

38º Se tiene el cuadrilátero ABCD con A(3, 2); B(1, –2); C(–1, –1); D(1, 3). Comprueba que es un paralelogramo y calcula su centro y su área. **Sol:** (1,1/2); A = 10 u^2.

39º Calcula el área del cuadrilátero de vértices A(2,0), B(4,4), C(0,3) y D(-2,-1). **Sol:** 14 u^2.

40º Dados los puntos:

A(1, 3) B(5, 7) C(7, 5) D(3, 1)

Calcula los puntos medios de sus lados y comprueba que forman un paralelogramo.
Sol: $P_{m,\text{AB}} = (3,5)$, $P_{m,\text{BC}} = (6,6)$, $P_{m,\text{CD}} = (5,3)$, $P_{m,\text{DA}} = (2,2)$.

41º Un cuadrado de vértice A en el punto (0, 1) y su centro el punto (2, 1). Calcula las coordenadas de los otros tres vértices. **Sol:** (2, 3), (4, 1), (2, –1)

42º De un cuadrado ACBD conocemos 2 vértices opuestos A(1, 2) y B(8, 3) Hallar sus otros dos vértices. **Sol:** C(4, 6), D(5, –1).

43º Un cuadrado tiene por vértices contiguos los puntos A(0, 3) y B(2, 5). Calcula sus otros 2 vértices. ¿Cuántas soluciones tiene el problema?
Sol: Dos soluciones: C(2, 1), D(4, 3); C'(–2, 5), D'(0, 7).

44º Determina el vértice D del paralelogramo ABCD, sabiendo que A(1, –2); B(3, –1) y C(0, 3). **Sol:** D(–2, 2).

45º Sean las rectas:

$$r_1 \equiv 2x + 3y - 4 = 0 \qquad r_2 \equiv x - 2y - 2 = 0$$
$$r_3 \equiv -4x - 6y + 22 = 0 \qquad r_4 \equiv 2x - 4y + 10 = 0$$

¿determinan un paralelogramo? En caso afirmativo calcular sus vértices.
Sol: (–1, 2), (1, 3), (4, 1), (2, 0).

46º Dadas las rectas:

$$r_1 \equiv 2x - 3y - 3 = 0 \qquad r_2 \equiv 3x - y - 1 = 0 \qquad r_3 \equiv \{x = 3 - 4t;\ y = 1 + 2t\}$$

Calcula el área del triángulo que determinan. **Sol:** 5/2.

47º Calcula el área del triángulo que tiene sus vértices en los puntos A(1, 4), B(3, –2) y C(–1, 0). **Sol:** 10 u^2.

Ejercicios de circunferencias, elipses, hipérbolas y parábolas:

Ejercicios de circunferencias.

1º Halla el centro y el radio de las circunferencias:

a) $x^2+y^2-2x+2y-23=0$ b) $x^2+y^2-2y-8=0$

c) $x^2+y^2-2x-6y+6=0$ d) $x^2+y^2-2y=0$

e) $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ f) $x^2+y^2-10x+8y+5=0$

g) $2x^2+2y^2-12x-16y=0$ h) $2x^2+2y^2-2x-2y+0.5=0$

i) $x^2+y^2-8x=0$ j) $x^2+y^2+3y=0$

Sol: a) C(1, –1), R = 5; b) C(0, 1), R = 3; c) C(1, 3), R = 2; d) C(0, 1), R = 1; e) C(2, –1), R = 3; f) C(5, –4). R = 6; g) C(3, 4). R = 5; h) C(1/2, –1/2). R = 1/2; i) C(4, 0), R = 4; j) C(0, –3/2), R = 3/2.

2º ¿Cuáles de las siguientes expresiones representan circunferencias?

a) $x^2-y^2+x+2y+5=0$ b) $x^2+y^2+xy+3y-3=0$

c) $2x^2+2y^2-8y-10=0$ d) $x^2-y^2-4x-4y+2=0$

e) $2x^2+2y^2-2x-2y-1=0$ f) $x^2+y^2-4x-2y=-1$

g) $x^2+y^2-xy+x-1=0$ h) $x^2-2y+4=-y^2$

Sol: a) No; b) No; c) Sí; d) No; e) Si; f) Si; g) No; h) Si.

3º Halla la ecuación de la circunferencia con centro C(2, 0) y radio 3.
Sol: $x^2+y^2-4x-5=0$.

4º Halla la ecuación de la circunferencia con centro C(–2, 3) y radio 4.
Sol: $(x+2)^2+(y-3)^2=16$.

5º Encuentre la ecuación de la circunferencia de centro en C(–3, 2) y radio 6.
Sol: $x^2+y^2+6x-4y-23=0$.

6º Halla la ecuación de la circunferencia que es tangente al eje de abscisas y cuyo centro es el punto C(1, 2). **Sol:** $(x-1)^2+(y-2)^2=4$.

7º Halla la ecuación de la circunferencia que es tangente al eje de abscisas y cuyo centro es el punto C(2, 3). **Sol:** $(x-2)^2+(y-3)^2=9$.

8º Halla la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro tiene por extremos los puntos A(2, 2) y B(4, –6). **Sol:** $(x-3)^2+(y+2)^2=17$.

9º Halla la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro tiene por extremos los puntos A(1, 1) y B(3, –1). **Sol:** $(x-2)^2+y^2=2$.

10º Calcula m para que el radio de la circunferencia $x^2+y^2+mx+4y+4=0$ sea 1. **Sol:** ±2.

11º Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(3, 0), B(–3, 0) y C(0, 9).
Sol: $x^2+(y-4)^2=25$.

12º Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(2, 3), B(0, –1) y C(–1, 0).
Sol: $(x-1)^2+(y-1)^2=5$.

13º Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(0, 6), B(4, –2) y C(9, 3). Encuentre las coordenadas del centro y el radio. **Sol:** $(x-4)^2+(y-3)^2=25$.

14º Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro es C(–1, 3) y pasa por el punto P(–2, 1).
Sol: $(x+1)^2+(y-3)^2=5$.

15º Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro es (1, –1) y pasa por el punto (3, 2).
Sol: $(x-1)^2+(y+1)^2=13$.

16º Halla la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto de intersección de las rectas:

$$r_1 \equiv 2x-3y+4=0 \qquad r_2 \equiv x+y-3=0$$

y su radio es 3. **Sol:** $(x-1)^2+(y-2)^2=9$.

17º Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el origen y tiene su centro en el punto común a las rectas:

$$r_1 \equiv x+3y-6=0 \qquad r_2 \equiv x-2y-1=0$$

Sol: $x^2+y^2-6x-2y=0$.

18º Halla la ecuación de una circunferencia concéntrica a la circunferencia:

$$x^2+y^2-4x+2y+4=0$$

y cuyo radio es 2. **Sol:** $(x-2)^2+(y+1)^2=4$.

19º Halla la ecuación de una circunferencia concéntrica a la circunferencia:

$$x^2+y^2-2x+2y-2=0$$

y cuyo radio es 3. **Sol:** $(x-1)^2+(y+1)^2=9$.

20º Calcula la longitud de la cuerda que determina la recta $r \equiv x-3=0$ al cortar a la circunferencia $C \equiv x^2+y^2-4x-6y+8=0$. **Sol:** 5.

21º Estudia la posición relativa de las siguientes parejas de circunferencias:

a) $C_1 \equiv x^2+y^2-2x-2y-7=0$ y $C_2 \equiv x^2+y^2+2y-3=0$.

b) $C_1 \equiv x^2+y^2-2x-2y-8=0$ y $C_2 \equiv x^2+y^2+-4x-20y+64=0$.

c) $C_1 \equiv x^2+y^2-4x-2y+4=0$ y $C_2 \equiv x^2+y^2+2x+2y-2=0$.

Sol: a) secantes; b) tangentes; c) exteriores.

22º Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(–1, 4) y B(3, 0) y cuyo centro está situado en la recta $r \equiv x+2y-5=0$. **Sol:** $(x-1)^2+(y-2)^2=8$.

23º Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(4, 3) y B(–2, 3) y tiene su centro en la recta $r \equiv 2x-y-1=0$. **Sol:** $(x-1)^2+(y-1)^2=13$.

24º Calcula la longitud de una cuerda determinada por la recta $r \equiv x+y-4=0$ al cortar a la circunferencia $(x-1)^2+(y-1)^2=4$. **Sol:** $2\sqrt{2}$.

25º Calcular para qué valores del parámetro "a" la recta $r \equiv 2x+y-a=0$ es tangente a la circunferencia $x^2+y^2-2x=4$. **Sol:** $a=7$, $a=-3$.

26º Dada la circunferencia $(x-5)^2+(y-2)^2=8$, halla las ecuaciones de las rectas tangentes trazadas desde el punto P(1, 2). **Sol:** $x+y-3=0$, $x-y+1=0$.

27º Determine los puntos comunes a la circunferencia C y a la recta r:

$$C \equiv x^2+y^2=9 \qquad\qquad r \equiv 2x-\sqrt{5}y-9=0$$

Sol: $P\left(2,-\sqrt{5}\right)$.

28º Calcula las potencias de los puntos O(0, 0); A(3, 0) y B(4, 0) respecto a la circunferencia $x^2+y^2-9=0$. Estudia con los signos de la potencia, la posición relativa de dichos puntos respecto a la circunferencia.
Sol: $P(\text{O})=-9 \Rightarrow$ Interior; $P(\text{A})=0 \Rightarrow$ En la circunferencia; $P(\text{B})=7 \Rightarrow$ Exterior.

29º ¿Qué posiciones ocupan los puntos A(–1, 0); B(3 , 3); C(2, 2); D(5, –1) respecto a la circunferencia: $x^2+y^2-6x-2y+6=0$?
Sol: A exterior, B en la circunferencia, C interior, D exterior.

30º Calcula los ejes radicales a las circunferencias:

a) $C_1 \equiv x^2+y^2-4x+6y-10=0$ y $C_2 \equiv x^2+y^2+2x-4y-8=0$.

b) $C_1 \equiv x^2+y^2-4=0$ y $C_2 \equiv x^2+y^2+4x+6y-12=0$.

c) $C_1 \equiv x^2+y^2-10x-2y+1=0$ y $C_2 \equiv (x-3)^2+(y+2)^2=9$.

d) $C_1 \equiv x^2+y^2-6x-1=0$ y $C_2 \equiv x^2+y^2-2x+6y=0$.

Sol: a) $3x-5y+1=0$; b) $4x+6y-8=0$; c) $4x+6y+3=0$; e) $4x+6y+1=0$

31º Dadas las circunferencias:

$$C_1 \equiv x^2+y^2-4x-6y+8=0 \qquad\qquad C_2 \equiv x^2+y^2-2x-4y=0$$

hallar las coordenadas del punto P, que tiene igual potencia respecto de ambas y pertenece a la recta $r \equiv x-y+2=0$. **Sol:** (1, 3).

32º Dadas las circunferencias:

$$C_1 \equiv x^2+y^2=4 \qquad\qquad C_2 \equiv x^2+y^2-6x-8y=6$$

halla las coordenadas de un punto que tiene igual potencia respecto de las dos circunferencias, y que equidista de los ejes coordenados.

33º Halla la circunferencia circunscrita al triángulo cuyos lados están sobre las rectas:

$$r_1 \equiv x-2y+1=0 \qquad r_2 \equiv x+3y-14=0 \qquad r_3 \equiv 2x+y-3=0$$

Sol: $(x-2)^2+(y-4)^2=10$.

Ejercicios de elipses.

1º Encuentra los semiejes, vértices, focos y averigua la excentricidad de las elipses:

a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ b) $9x^2+25y^2=900$ c) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$

d) $16x^2+25y^2=400$ e) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{5}=1$ f) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$

Sol: a) $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$, $V_a(\pm5, 0)$, $V_b(0, \pm3)$, $F(\pm4, 0)$, $e = 4/5$;
b) $a = 10$, $b = 6$, $c = 8$, $V_a(\pm10, 0)$, $V_b(0, \pm6)$, $F(\pm8, 0)$, $e = 4/5$;
c) $a = 13$, $b = 12$, $c = 5$, $V_a(\pm13, 0)$, $V_b(0, \pm12)$, $F(\pm5, 0)$, $e = 5/13$;
d) $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$, $V_a(\pm 5,0)$, $V_b(0, \pm 4)$, $F(\pm 3,0)$, $e = 3/5$;
e) $a = 5$, $b = \sqrt{5}$, $c = 2\sqrt{5}$, $V_a(\pm 5,0)$, $V_b(0, \pm\sqrt{5})$, $F(\pm 2\sqrt{5},0)$, $e = 2\sqrt{5}/5$;
f) $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{2}$, $c = 1$, $V_a(\pm\sqrt{3},0)$, $V_b(0, \pm\sqrt{2})$, $F(\pm 1,0)$, $e = 1/\sqrt{3}$.

2º Halla la ecuación de la elipse centrada en el origen cuyo eje mayor mide 12 y pasa por el punto (3, 4).

Sol: $\frac{x^2}{36}+\frac{3y^2}{64}=1$

3º Halla la ecuación de la elipse cuya suma de distancias a los focos F(±8, 0) vale 20.

Sol: $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$.

4º Halla la ecuación de la elipse cuyos focos son (±1,0) y cuyo eje mayor tiene de longitud 4.

Sol: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

5º Halla la ecuación de la elipse cuya distancia focal es 16, su semieje mayor es 17 y su centro es el origen de coordenadas.

Sol: $\frac{x^2}{289}+\frac{y^2}{225}=1$.

6º Halla la ecuación de la elipse cuyo centro es (0, 0), un foco (3, 0) y un vértice es (4, 0)

Sol: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$.

7º Determina el dominio y recorrido de la elipse:

$$\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{64}=1$$

Sol: Dom:[-12, 12], Rec: [-8, 8]

8º Halla la ecuación de la elipse con centro en el origen sabiendo que los radios vectores de un punto P son $r = 4$ y $r' = 6$ y que la distancia focal es 8.

Sol: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

9º Hallar la ecuación de la elipse, centrada en el origen, sabiendo que la distancia focal es 6 y que los radio vectores de uno de sus puntos son 2 y 8.

Sol: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

10º Halla la ecuación de la elipse centrada en el origen a partir de su excentricidad e = 0.5 y distancia focal 1.

Sol: $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{3}=1$.

11º Halla la ecuación de la elipse de centro el origen de coordenadas y que pasa por los puntos (6, 2) y (4, 3).

Sol: $\frac{x^2}{52}+\frac{y^2}{13}=1$.

12º Hallar el valor de k para que la recta:

$$r \equiv x+y-4=0$$

sea tangente a la elipse:

$$E \equiv x^2+3y^2=4k\,.$$

Sol: $k = 3$.

13º Halla la ecuación de la recta tangente a la elipse:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

en el punto de abscisa 5. **Sol:** $0y+x-5=0$.

14º Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse:

$$x^2+\frac{y^2}{2}=1$$

paralelas a la recta $y=x$. **Sol:** $y=x\pm\sqrt{3}$.

15º Hallar la posición relativa de las rectas:

$$r_1 \equiv x-y-1=0 \qquad r_2 \equiv x+y-1=0 \qquad r_3 \equiv x+y+4=0$$

respecto de la elipse:

$$E \equiv 2x^2+3y^2=11$$

Sol: r_1: recta secante; r_2: recta secante; r_3: recta exterior.

16º Hallar el centro, semiejes y focos de la elipse:

$$4x^2+9y^2-48x+72y+144=0$$

Sol: C(6, –4); semiejes $a = 6$, $b = 4$; $\mathrm{F}\left(6\pm2\sqrt{5},-4\right)$.

Ejercicios de hipérbolas.

1º Determina los valores de *a*, *b*, *c*, la excentricidad, las asíntotas, las coordenadas de los vértices y focos de las siguientes hipérbolas:

a) $9x^2 - 16y^2 = 144$ b) $\dfrac{y^2}{144} - \dfrac{x^2}{25} = 1$ c) $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{64} = 1$

d) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ e) $\dfrac{x^2}{6} - \dfrac{y^2}{2} = 1$ f) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

Sol: a) $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$, $e = 5/3$, $y = \pm 3x/4$, V($\pm$ 6,0), F($\pm$ 10,0);
b) $a = 5$, $b = 12$, $c = 13$, $e = 13/12$, $y = \pm 12x/5$, V(0, $\pm$ 12), F(0, $\pm$ 13);
c) $a = 6$, $b = 8$, $c = 10$, V($\pm$ 6, 0), F($\pm$ 10, 0), $y = \pm 4x/3$, $e = 5/3$;
d) $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, $e = 5/3$, $y = \pm 4x/3$, V($\pm$ 3,0), F($\pm$ 5,0);
e) $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{8}$, $y = \pm x/\sqrt{3}$, V($\pm\sqrt{6}$,0), F($\pm\sqrt{8}$,0);
f) $a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{5}$, e=$\sqrt{5}$/3, $y = \pm 2x/3$, V($\pm$ 3,0), F($\pm\sqrt{5}$,0).

2º Calcula los elementos principales de la hipérbola $4x^2 - 9y^2 = 36$.
Sol: $a = 3$, $b = 2$; $c = \sqrt{13}$.

3º Escribe la ecuación reducida de la hipérbola en la que uno de los focos es F(17, 0) y uno de los vértices V(15, 0).
Sol: $\dfrac{x^2}{225} - \dfrac{y^2}{64} = 1$.

4º Halla la ecuación de la hipérbola incidente con los puntos A(4, $\sqrt{6}$) y B(12, $6\sqrt{2}$).
Sol: $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{2} = 1$.

5º Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por los puntos (4, 3) y (2, 1).
Sol: $2x^2 - 3y^2 = 5$.

6º Una hipérbola tiene por asíntotas $y = \pm 2x$ y es incidente con el punto P(6, 4). Halla su ecuación.
Sol: $\dfrac{x^2}{32} - \dfrac{y^2}{128} = 1$.

7º De una hipérbola se conoce $a = 4$ y que el ángulo que forman las asíntotas es 90º. Halla la ecuación de la hipérbola.
Sol: $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} = 1$.

8º Calcula *m* para que la recta $y = x + m$ sea tangente a la hipérbola:

$$x^2 - 2y^2 = 4$$

Sol: $m = \pm\sqrt{2}$.

9º Halla *b* para que $2x^2 + by^2 = 3$ sea la ecuación de una hipérbola equilátera. **Sol:** $b = -2$.

10º Halla la ecuación de la hipérbola de excentricidad $2\sqrt{2}$ y de distancia focal 12.
Sol: $14x^2 - 2y^2 = 63$.

11º Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto (2, 3) y tiene de distancia focal 4. **Sol:** $3x^2 - y^2 = 3$.

12º Halla la ecuación de la hipérbola horizontal cuya distancia de sus vértices es 9 y la distancia focal es 8. **Sol:** $7x^2 - 9y^2 = 63$.

13º Determina las coordenadas del centro, de los focos, de los vértices, la excentricidad y las asíntotas de las siguientes hipérbolas:

a) $4x^2 - 3y^2 - 8x - 8 = 0$ b) $y^2 - 2x^2 - 4x - 4y = 0$

c) $9x^2 - 4y^2 - 36x - 24y - 36 = 0$ d) $5x^2 - 4y^2 + 10x + 8y - 19 = 0$

Sol: a) C(1, 0), $\text{F}\left(1 \pm \sqrt{7},\ 0\right)$, $\text{V}\left(1 \pm \sqrt{3},\ 0\right)$, $e = \sqrt{21}/3$; $y = \pm(2x-2)/\sqrt{3}$.

b) C(–1, 2), $\text{F}\left(-1,\ 2 \pm \sqrt{2}\right)$, $\text{V}\left(-1,\ 2 \pm \sqrt{3}\right)$, $e = \sqrt{6}/2$; $y = \pm(2x-2)/\sqrt{3}$;

c) C(2, –3), $\text{F}\left(2 \pm \sqrt{13},\ -3\right)$, $\text{V}(4, -3)$, $\text{V}'(0, -3)$, $e = 2\sqrt{2}$; $y = \pm\sqrt{2}(x+1)+2$;

d) C(–1, 1), $\text{F}(2,\ 1)$, $\text{F}'(-4,\ 1)$ $\text{V}(-3, 1)$, $\text{V}'(1, 1)$, $e = 3/2$; $y = 1 \pm \sqrt{5}(x+1)/2$;

14º La distancia focal de una hipérbola es 12, y la curva pasa por el punto P(8, 14). Hallar su ecuación.
Sol: $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{252} = 1$.

15º Determina la ecuación reducida de una hipérbola sabiendo que un foco dista de los dos vértices de la hipérbola en 50 y 2.
Sol: $\dfrac{x^2}{576} - \dfrac{y^2}{100} = 1$.

16º Hallar la ecuación de la hipérbola que tiene su centro en el origen, un vértice en (6, 0) y por una de sus asíntotas la recta de ecuación $y = 4x/3$.
Sol: $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{64} = 1$

17º Partiendo de la ecuación de la hipérbola equilátera $xy = 8$, determina las coordenadas de sus focos, de sus vértices y la ecuación de la hipérbola referida a sus ejes.
Sol: $\text{F}\left(\pm 6\sqrt{2},\ \pm 6\sqrt{2}\right)$; $\text{V}\left(\pm 3\sqrt{2},\ \pm 3\sqrt{2}\right)$; $x^2 - y^2 = 36$.

18º Una hipérbola equilátera pasa por el punto (4, 1/2). Halla su ecuación referida a sus asíntotas como ejes, y las coordenadas de los vértices y los focos.
Sol: $xy = 2$; $\text{V}\left(\pm\sqrt{2},\ \pm\sqrt{2}\right)$; $\text{V}(\pm 2, \pm 2)$.

Ejercicios de parábolas.

1º Encuentra el vértice, el foco, el eje y la directriz de las siguientes parábolas:

a) $y^2 = 16x$ b) $y^2 - 4y - 8x + 36 = 0$ c) $x^2 - 4x - 16y + 36 = 0$

d) $y^2 = 4x$ e) $y^2 + x = 0$ f) $x^2 - y = 0$

g) $y^2 + 8y - 6x + 4 = 0$ h) $y^2 + 6y - 8x - 31 = 0$ i) $x^2 + 12x - 4y - 8 = 0$

Sol: a) V(0, 0), F(4, 0), eje: $y = 0$, directriz: $x = -4$;
b) V(2, 2), F(4, 2), eje: $y = 2$, directriz: $x = 0$;
c) V(2, 2), F(2, 6), eje: $x = 2$, directriz: $y = -2$;
d) V(0, 0), F(1, 0), eje: $x = 0$, directriz: $x = -1$;
e) V(0, 0), F(–1/4, 0), eje: $y = 0$, directriz: $x = 1/4$;
f) V(0, 0), F(0, 1/4), eje: $y = 0$, directriz: $y = -1/4$;
g) V(–2, –4), F(–1/2, –4), eje: $y = -4$, directriz: $x = -7/2$;
h) V(–5, –3), F(–3, –3), eje: $y = -3$, directriz: $x = -7$;
i) V(–6, –11), F(–6, –11), eje: $x = -6$, directriz: $y = -12$.

2º Hallar la ecuación de la parábola de vértice (2, 4) y de directriz $x = 1$.
Sol: $y^2 - 8y - 4x + 24 = 0$.

3º Hallar la ecuación de la parábola de foco (6, –2) y de directriz $x = 2$.
Sol: $y^2 + 4y - 8x + 36 = 0$.

4º Hallar la de la parábola que tiene de vértice V(0, 0), de eje el de ordenadas y que pasa por el punto (6, –3). **Sol:** $x^2 = -12y$.

5º Hallar la ecuación de la parábola que tiene de vértice V(2, 1) y de foco F(4, 1).
Sol: $y^2 - 2y - 8x + 17 = 0$.

6º Halla k para que la recta $r \equiv y - 2x + k = 0$ sea tangente a la parábola: $y = 2x^2 - 1$.
Sol: $k = -3/2$.

7º Una parábola tiene por vértice V(3, –2) y foco F(3, 0). Halla las ecuaciones del eje, de la directriz y de la parábola. **Sol:** Eje: $x = 3$, Directriz: $y = -4$, Parábola: $(x-3)^2 = 8(y+2)$.

8º Hallar la ecuación de la parábola que tiene de vértice (2, 3), eje paralelo al eje de ordenadas y que pasa por el punto (4, 5). **Sol:** $x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$.

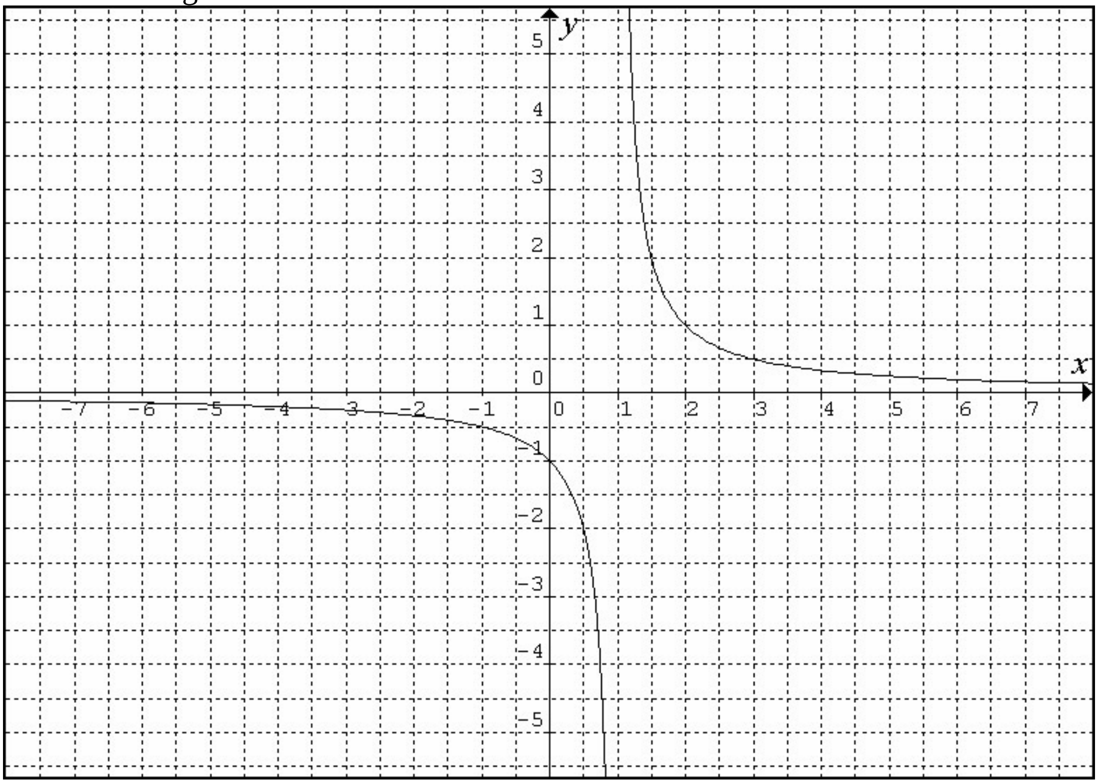
9º Hallar la ecuación de la parábola, de eje paralelo al eje de abscisas, que pasa por los puntos (–2, 1), (1, 2) y (–1, 3). **Sol:** $5y^2 + 2x - 21y + 20 = 0$.

10º Halla la ecuación de la parábola de eje vertical que pasa por los puntos A(6, 1), B(-2, 3) y C(16, 6). **Sol:** $x^2 - 24y - 10x + 48 = 0$.

11º Escribe la ecuación de la parábola de foco F(1, 0) y directriz $r \equiv x + y = 0$.
Sol: $x^2 + y^2 - 2xy - 4x + 1 = 0$.

Ejercicios de discusión de gráficas de funciones:

1º Partiendo de la gráfica de la función.



Calcule los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0} f(x) \qquad \lim_{x\to 1} f(x) \qquad \lim_{x\to 3} f(x) \qquad \lim_{x\to \infty} f(x) \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x)$$

Determinar:

a) El dominio y continuidad de la función.
b) La derivabilidad de la función.
c) El recorrido.
d) Las asíntotas verticales y horizontales.
e) Los puntos de corte con los ejes.
f) El crecimiento y decrecimiento.
g) Los máximos y mínimos.
h) La concavidad y convexidad.
i) La tasa de variación media en el intervalo [2, 3].

Sol:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -1 \qquad \lim_{x\to 1} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to 3} f(x) = 0.5 \qquad \lim_{x\to \infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$$

a) Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$. Discontinua en x = 1. Contínua en $\mathbb{R} - \{1\}$.

b) Derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$. Las funciones no son derivables en las discontinuidades.

c) Recorrido $\mathbb{R} - \{0\}$.

d) Asíntota vertical en x = 1 y asíntota horizontal y = 0.

e) Con el eje x no hay puntos de corte, con el eje y hay punto de corte en (0, –1).

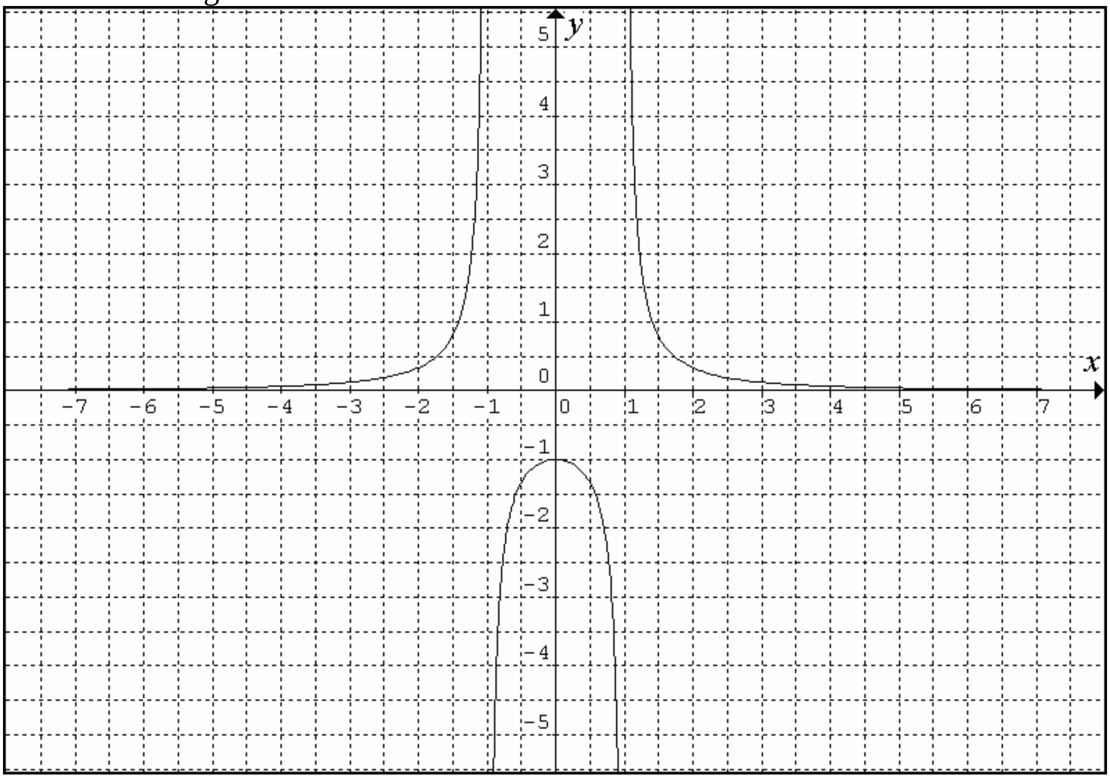
f) Siempre es decreciente, excepto en x = 1 en el que la función no está definida.

g) No tiene máximos ni mínimos.

h) $\cap$ Cóncava en $(-\infty, 1)$ y $\cup$ convexa en $(1, \infty)$.

i) $\text{TVM}[2, 3] = \dfrac{f(3) - f(2)}{3-2} = \dfrac{0.5-1}{3-2} = -\dfrac{1}{2}$.

2º Partiendo de la gráfica de la función.



Calcule los siguientes límites:

$\lim_{x\to 0} f(x)$ $\lim_{x\to 1} f(x)$ $\lim_{x\to -1} f(x)$ $\lim_{x\to \infty} f(x)$ $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

Determinar:

a) Dominio y continuidad de la función.
b) Derivabilidad de la función.
c) Recorrido.
d) Asíntotas verticales y horizontales.
e) Puntos de corte con los ejes.
f) Crecimiento y decrecimiento.
g) Máximos y mínimos.
h) Concavidad y convexidad.
i) Puntos de inflexión.

Sol:

$\lim_{x\to 0} f(x) = -1$ $\lim_{x\to 1} f(x) = \pm\infty$ $\lim_{x\to -1} f(x) = \pm\infty$ $\lim_{x\to \infty} f(x) = 0$ $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$

a) Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$. Discontinua en $x = \pm 1$. Contínua en $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$.

b) Derivable en $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$. Las funciones no son derivables en las discontinuidades.

c) Recorrido $(-\infty, -1] \cup (0, \infty)$.

d) Asíntotas verticales en $x = 1$ y $x = -1$, asíntota horizontal $y = 0$.

e) Con el eje x no hay puntos de corte, con el eje y hay punto de corte en (0, –1).

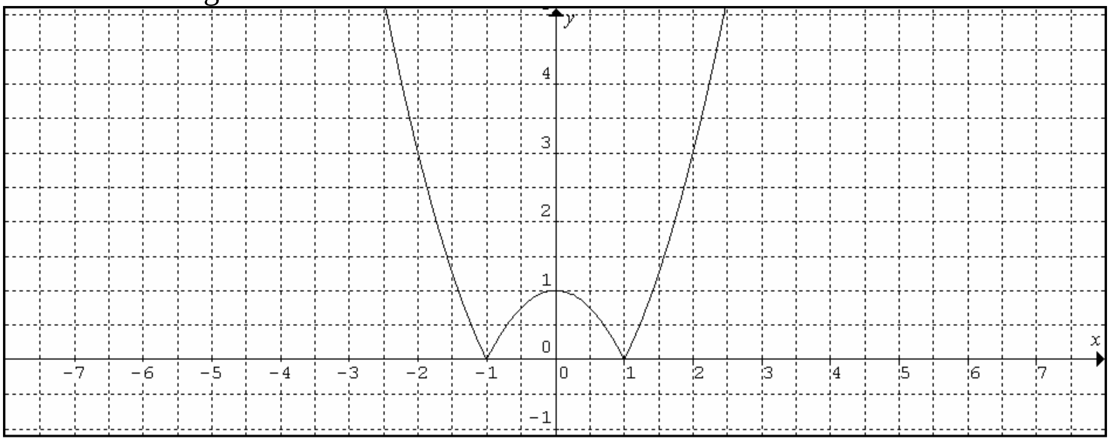
f) Decreciente en $(0, \infty) - \{1\}$ y creciente $(-\infty, 0) - \{-1\}$

g) Tiene un máximo relativo en (0, –1). No hay mínimos

h) $\cap$ Cóncava en $(-1, 1)$ y $\cup$ convexa en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

i) No tiene puntos de inflexión.

3º Partiendo de la gráfica de la función.



Calcule los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0} f(x) \qquad \lim_{x\to 1} f(x) \qquad \lim_{x\to -1} f(x) \qquad \lim_{x\to \infty} f(x) \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x)$$

Determinar:

a) Dominio y continuidad de la función.
b) Derivabilidad de la función.
c) Recorrido.
d) Asíntotas verticales y horizontales.
e) Puntos de corte con los ejes.
f) Crecimiento y decrecimiento.
g) Máximos y mínimos.
h) Concavidad y convexidad.
i) Puntos de inflexión.
j) La tasa de variación media en los intervalos [–2, –1] y [0, 1].

Sol:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 1} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to -1} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to \infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty$$

a) Dom $f(x) = \mathbb{R}$. Contínua en $\mathbb{R}$.

b) Derivable en $\mathbb{R} - \{-1,\ 1\}$. Las funciones no son derivables en los picos.

c) Recorrido $[0, \infty)$.

d) Sin asíntotas.

e) Puntos de corte con el eje *x* en (–1, 0) y (1, 0). Con el eje *y*, punto de corte en (0, 1).

f) Decreciente en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ y creciente $(-1, 0) \cup (1, \infty)$.

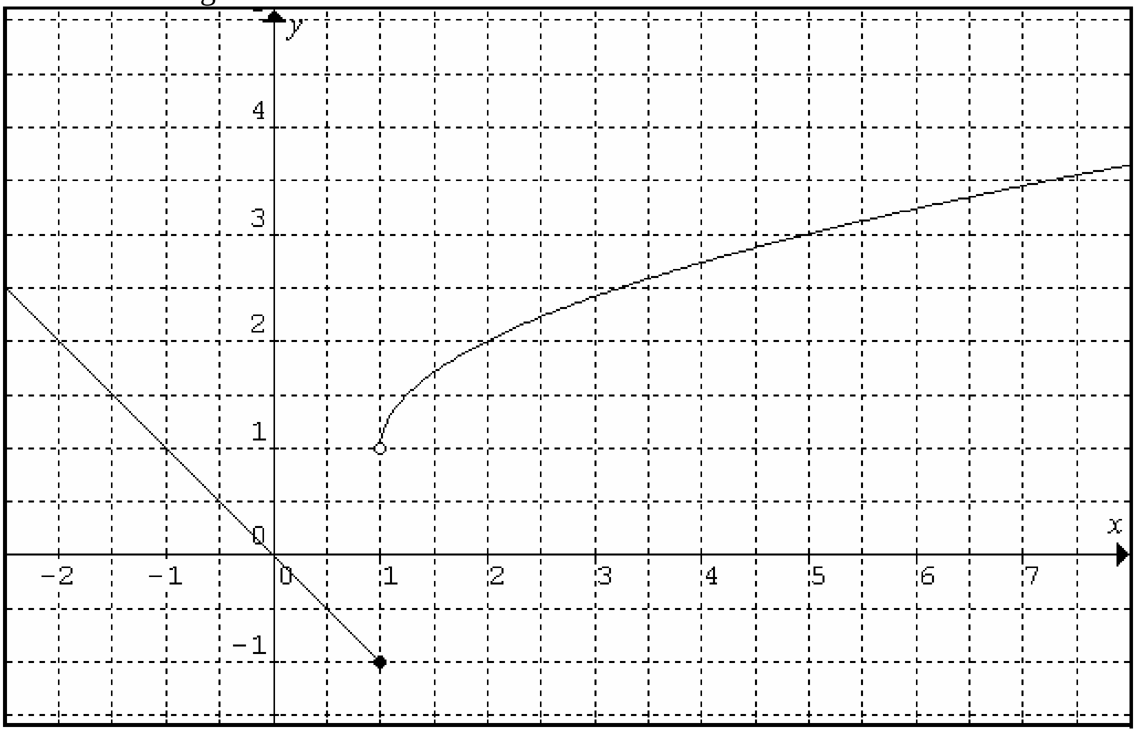
g) Tiene un máximo relativo en (0, –1). Mínimos absolutos en (–1, 0) y (1, 0).

h) $\cap$ Cóncava en $(-1, 1)$ y $\cup$ convexa en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

i) Puntos de inflexión en $x = -1$ y en $x = 1$.

j) $\text{TVM}[-2,-1] = \dfrac{f(-1) - f(-2)}{-1-(-2)} = \dfrac{0-3}{-1+2} = -3$; $\text{TVM}[0,1] = \dfrac{f(1) - f(0)}{1-0} = \dfrac{0-1}{1} = -1$.

4º Partiendo de la gráfica de la función.



Calcule los siguientes límites:

$\lim_{x\to 0} f(x)$ $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ $\lim_{x\to \infty} f(x)$ $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

Determinar:

a) El dominio y continuidad de la función.
b) La derivabilidad de la función.
c) El recorrido.
d) Las asíntotas verticales y horizontales.
e) Los puntos de corte con los ejes.
f) El crecimiento y decrecimiento.
g) Los máximos y mínimos.
h) La concavidad y convexidad.
i) La tasa de variación media en el intervalo [2, 5] y [0, 1].

Sol:

$\lim_{x\to 0} f(x)=0$ $\lim_{x\to 1^-} f(x)=-1$ $\lim_{x\to 1^+} f(x)=1$ $\lim_{x\to \infty} f(x)=\infty$ $\lim_{x\to -\infty} f(x)=\infty$

a) Dom $f(x)=\mathbb{R}$. Contínua en $\mathbb{R}-\{1\}$.

b) Derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$. Las función no es derivable en discontinuidades.

c) Recorrido $[-1,\infty)$.

d) Sin asíntotas verticales u horizontales.

e) Punto de corte con el eje x y el eje $y$en (0, 0).

f) Decreciente en $(-\infty,1)$ y creciente $(1,\infty)$.

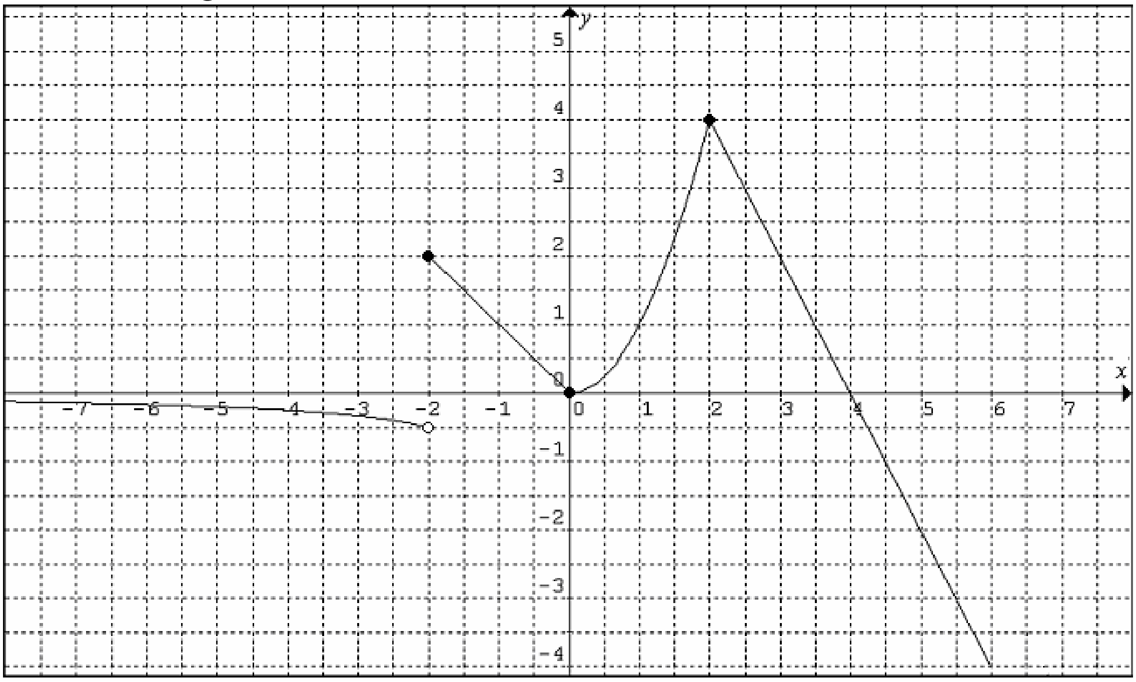
g) Tiene un mínimo absoluto en (1, –1). No hay máximos.

h) $\cap$ Cóncava en $(1,\infty)$.

i) No hay puntos de inflexión.

j) $\text{TVM}[2,\ 5]=\dfrac{f(5)-f(2)}{5-2}=\dfrac{3-2}{3}=\dfrac{1}{3};\ \text{TVM}[0,\ 1]=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=\dfrac{-1-0}{1}=-1$

5º Partiendo de la gráfica de la función:



Calcule los siguientes límites:

$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$ $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

Determinar:

a) El dominio y continuidad de la función.
b) La derivabilidad de la función.
c) El recorrido.
d) Las asíntotas verticales y horizontales.
e) Los puntos de corte con los ejes.
f) El crecimiento y decrecimiento.
g) Los máximos y mínimos.
h) La concavidad y convexidad.
i) La tasa de variación media en el intervalo [0, 2] y [2, 4].

Sol:

$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=2$ $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=0.5$ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\infty$

a) $\text{Dom } f(x)=\mathbb{R}$. Contínua en $\mathbb{R}-\{-2\}$.

b) Derivable en $\mathbb{R}-\{\pm 2,0\}$ porque en x = 0 hay discontinuidad y en x = ±2 hay picos.

c) Recorrido $(-\infty,\ 4]$.

d) Sin asíntotas verticales. Asíntota horizontal en y = 0 hacia $-\infty$.

e) Punto de corte con el eje x y el eje $y$en (0, 0). Punto de corte con el eje x en (4, 0).

f) Decreciente en $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$ y creciente $(0,2)$.

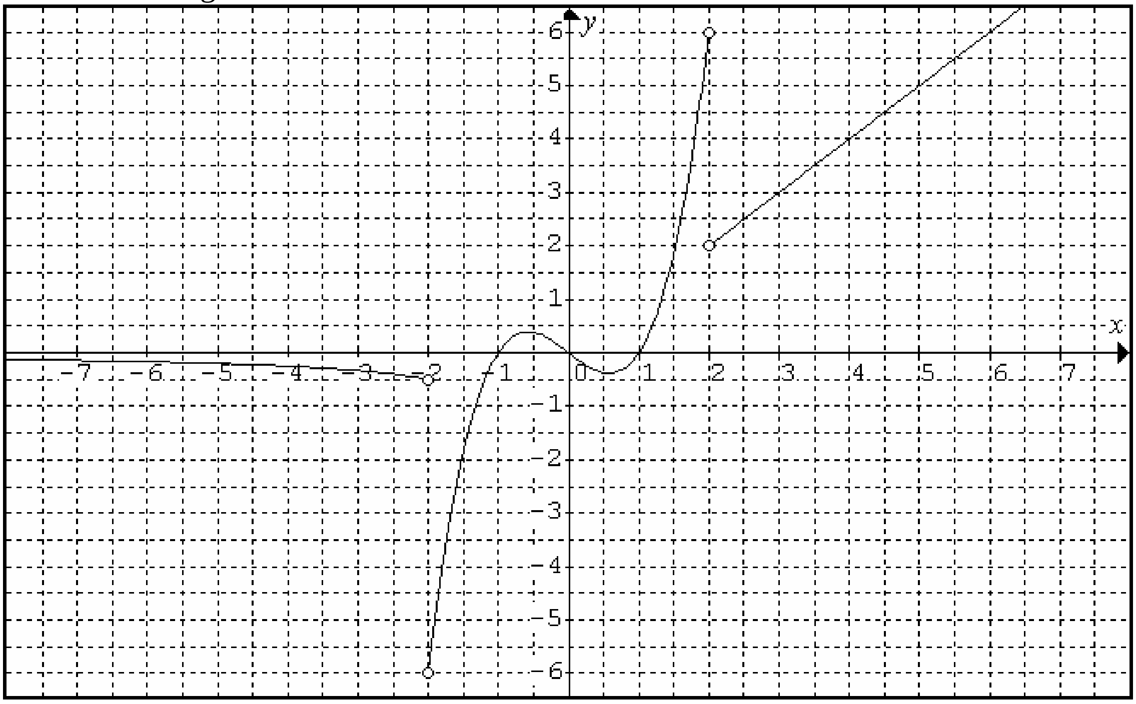
g) Máximo absoluto en (2, 4). Máximo relativo en (–2, 2). Mínimo relativo en (0, 0).

h) $\cap$ Cóncava en $(-\infty,-2)$, $\cup$ convexa en $(0,\ 2)$

i) No hay puntos de inflexión.

j) $\text{TVM}[0,\ 2]=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=\dfrac{4-0}{2}=2$; $\text{TVM}[2,\ 4]=\dfrac{f(4)-f(2)}{4-2}=\dfrac{0-4}{2}=-2$

6º Partiendo de la gráfica de la función:



Calcule los siguientes límites:

$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$ $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$ $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

Determinar:

a) El dominio y continuidad de la función.
b) La derivabilidad de la función.
c) El recorrido.
d) Las asíntotas verticales y horizontales.
e) Los puntos de corte con los ejes.
f) El crecimiento y decrecimiento.
g) Los máximos y mínimos.
h) La concavidad y convexidad.
i) La tasa de variación media en el intervalo [–1, 1] y [3, 4].

Sol:

$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -0.5$ $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -6$ $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \nexists$ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 6$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 2$ $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \nexists$ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$

a) Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$. Continua en $\mathbb{R} - \{\pm 2\}$.

b) Derivable en $\mathbb{R} - \{\pm 2\}$ porque en x = ±2 hay discontinuidades de salto finito.

c) Recorrido $(-6,\ \infty)$.

d) Sin asíntotas verticales. Asíntota horizontal en y = 0 hacia $-\infty$.

e) Punto de corte con el eje x y el eje $y$en (0, 0). Puntos de corte con el eje x en (±1, 0).

f) Decreciente en $(-\infty, -2) \cup (-0.6, 0.6)$ y creciente $(-2, -0.6) \cup (0.6,\ \infty) - \{2\}$.

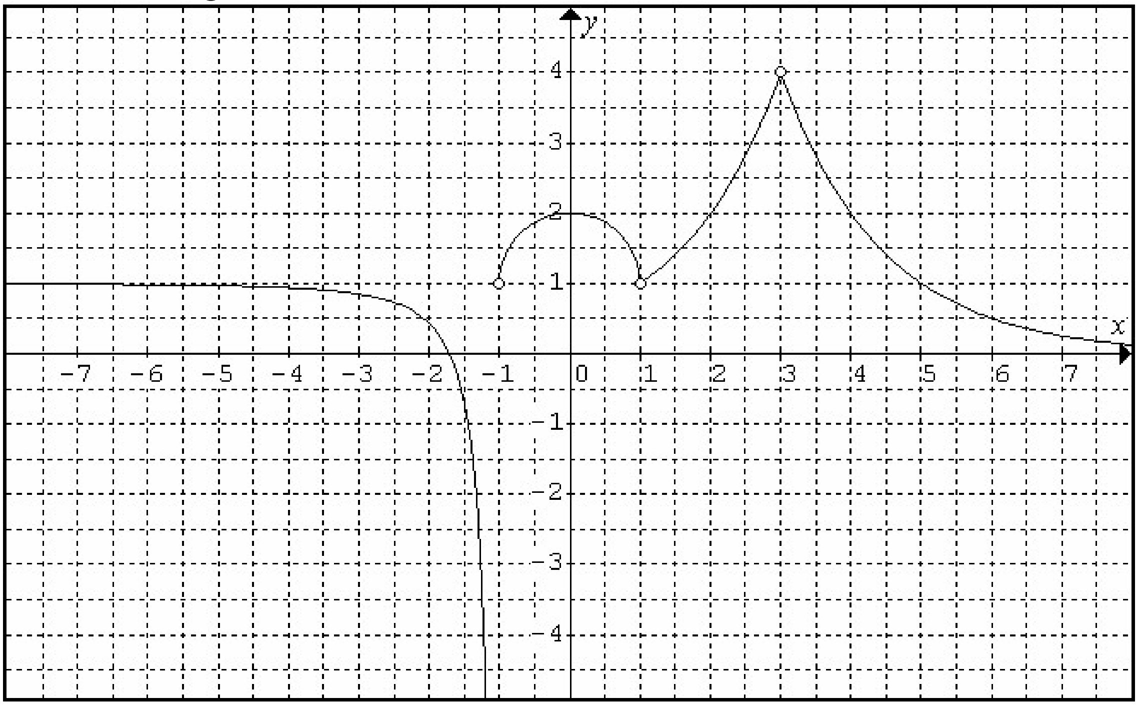
g) Máximo relativo en alrededor de (–0.6, 0.4). Mínimo relativo alrededor de (0.6, –0.4).

h) $\cap$ Cóncava en $(-\infty, 0) - \{-2\}$ y $\cup$ convexa en $(0,\ 2)$.

i) Hay punto de inflexión en x = 0.

j) $\text{TVM}[-1,\ 1] = \dfrac{f(1) - f(-1)}{1-(-1)} = \dfrac{0-0}{2} = 0$; $\text{TVM}[3,\ 4] = \dfrac{f(4) - f(3)}{4-3} = \dfrac{4-3}{1} = 1$

7º Partiendo de la gráfica de la función:



Calcule los siguientes límites:

$\lim_{x\to -1^+} f(x)$ $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ $\lim_{x\to -1} f(x)$ $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ $\lim_{x\to \infty} f(x)$

Determinar:

a) El dominio y continuidad de la función.
b) La derivabilidad de la función.
c) El recorrido.
d) Las asíntotas verticales y horizontales.
e) Los puntos de corte con los ejes.
f) El crecimiento y decrecimiento.
g) Los máximos y mínimos.
h) La concavidad y convexidad.
i) La tasa de variación media en el intervalo [4, 5].

Sol:

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to -1^-} f(x) = 1$ $\lim_{x\to -1} f(x) = \nexists$ $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1$ $\lim_{x\to \infty} f(x) = 0$

a) Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{-1, 1, 3\}$. Continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1, 3\}$.

b) Derivable en $\mathbb{R} - \{-1, 1, 3\}$.

c) Recorrido $(-\infty,\ 4)$.

d) Asíntota vertical en $x = -1$. Asíntota horizontal en $y = 1$ hacia $-\infty$.

e) Punto de corte con el eje x en (–1.75, 0) y con el eje y en (0, 2).

f) Decreciente en $(-\infty, -1) \cup (0,\ 1) \cup (3,\ \infty)$ y creciente $(-1, 0) \cup (1, 3)$.

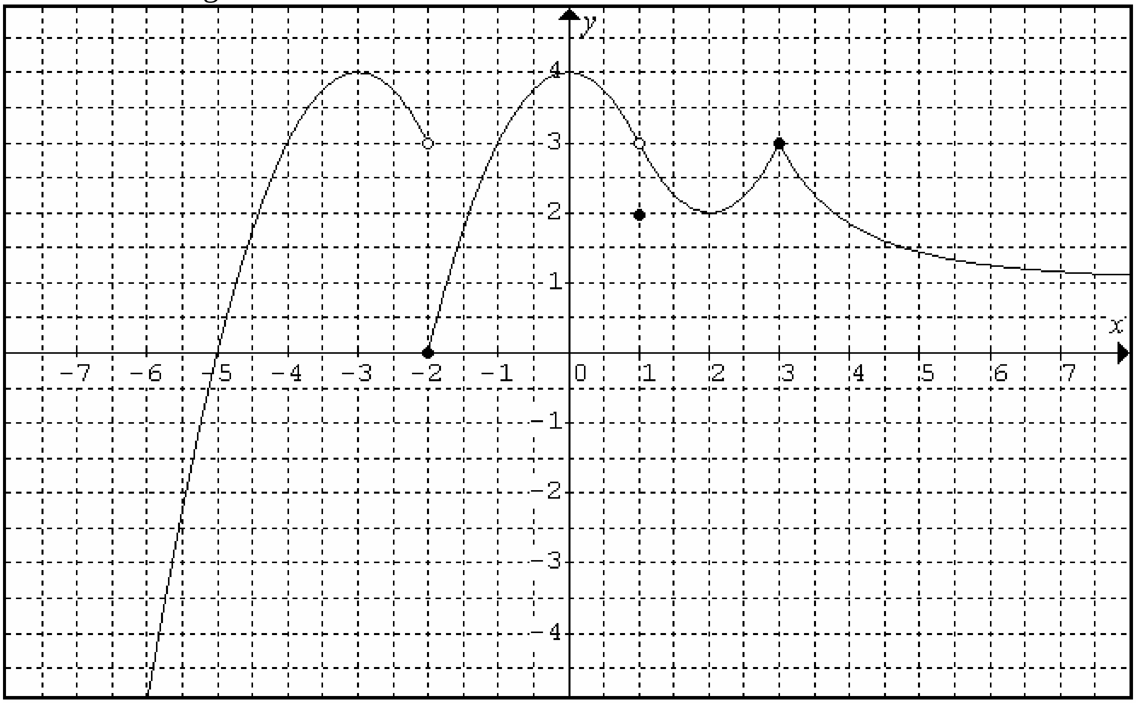
g) Máximo relativo en alrededor de (0, 2). Como la función no existe en $x = 1$ y en $x = 3$, no hay en ellos ningún extremo.

h) $\cap$ Cóncava en $(-\infty, 1) - \{-1\}$ y $\cup$ convexa en $(1,\ \infty) - \{3\}$.

i) No hay puntos de inflexión.

j) $\text{TVM}[4,\ 5] = \dfrac{f(5) - f(4)}{5-4} = \dfrac{1-2}{1} = -1.$

8º Partiendo de la gráfica de la función:



Calcule los siguientes límites:

$\lim_{x\to -2^+} f(x)$ $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ $\lim_{x\to -2} f(x)$ $\lim_{x\to 1} f(x)$ $\lim_{x\to \infty} f(x)$

Determinar:

a) El dominio y continuidad de la función.
b) La derivabilidad de la función.
c) El recorrido.
d) Las asíntotas verticales y horizontales.
e) Los puntos de corte con los ejes.
f) El crecimiento y decrecimiento.
g) Los máximos y mínimos.
h) La concavidad y convexidad.
i) La tasa de variación media en el intervalo [2, 3].

Sol:

$\lim_{x\to -2^+} f(x)=3$ $\lim_{x\to -2^-} f(x)=0$ $\lim_{x\to -2} f(x)=\nexists$ $\lim_{x\to 1} f(x)=3$ $\lim_{x\to \infty} f(x)=1$

a) Dom $f(x)=\mathbb{R}$. Continua en $\mathbb{R}-\{-2,1\}$.

b) Derivable en $\mathbb{R}-\{-2,1,3\}$.

c) Recorrido $(-\infty,\ 4]$.

d) No hay asíntotas verticales. Asíntota horizontal en y = 1 hacia ∞.

e) Punto de corte con el eje x en (–2, 0) y en (–5, 0) con el eje y en (0, 4).

f) Decreciente en $(-3,-2)\cup(0,2)\cup(3,\ \infty)$ y creciente $(-\infty,-3)\cup(-2,0)\cup(2,3)$.

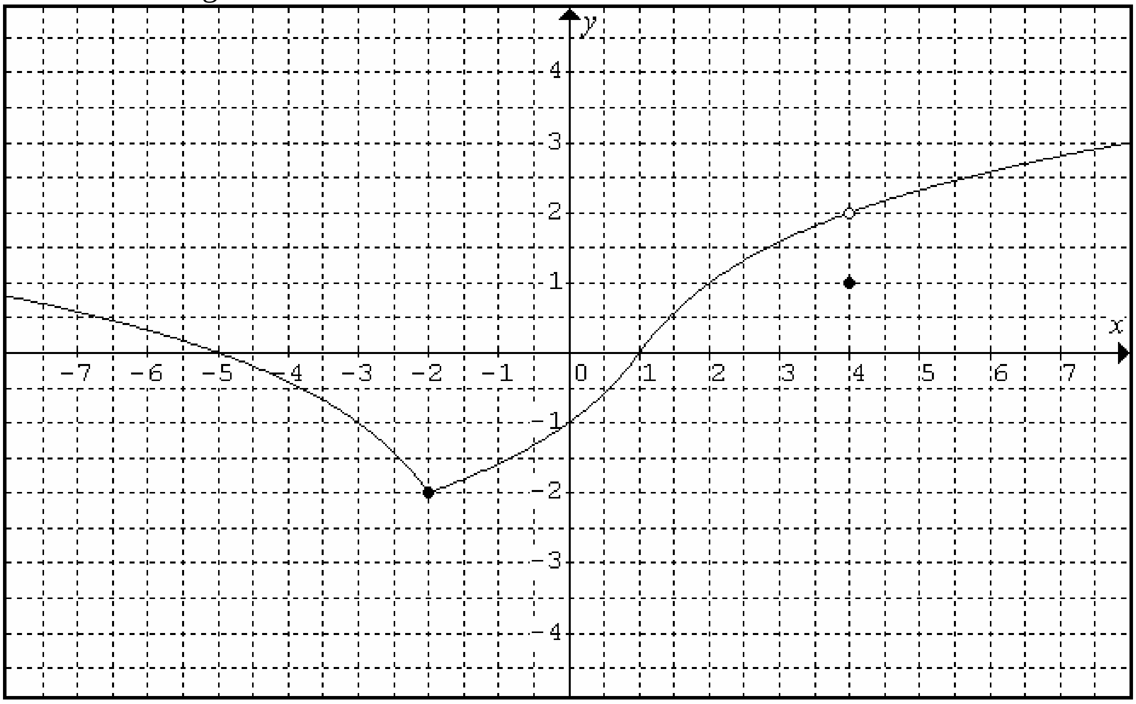
g) Máximo relativo en alrededor de (3, 3). Máximos absolutos en (0, 4) y (–3, 4). Mínimos relativos en (–2, 0), (1, 2) y en (2, 2).

h) $\cap$ Cóncava en $(-\infty,1)$ y $\cup$ convexa en $(1,\ \infty)-\{3\}$.

i) No hay puntos de inflexión.

j) $\text{TVM}[2,\ 3]=\dfrac{f(3)-f(2)}{3-2}=\dfrac{3-2}{1}=1.$

9º Partiendo de la gráfica de la función:



Calcule los siguientes límites:

$\lim_{x\to 4^+} f(x)$ $\quad \lim_{x\to 4^-} f(x)$ $\quad \lim_{x\to 4} f(x)$ $\quad \lim_{x\to -\infty} f(x)$ $\quad \lim_{x\to \infty} f(x)$

Determinar:

a) El dominio y continuidad de la función.
b) La derivabilidad de la función.
c) El recorrido.
d) Las asíntotas verticales y horizontales.
e) Los puntos de corte con los ejes.
f) El crecimiento y decrecimiento.
g) Los máximos y mínimos.
h) La concavidad y convexidad.
i) La tasa de variación media en el intervalo [0, 2].

Sol:

$\lim_{x\to -2^+} f(x) = 3$ $\quad \lim_{x\to -2^-} f(x) = 0$ $\quad \lim_{x\to -2} f(x) = \nexists$ $\quad \lim_{x\to 1} f(x) = 3$ $\quad \lim_{x\to \infty} f(x) = 1$

a) Dom $f(x) = \mathbb{R}$. Continua en $\mathbb{R} - \{4\}$.

b) Derivable en $\mathbb{R} - \{-2, 4\}$. En *x* = –2 hay un pico, y no hay derivabilidad en picos.

c) Recorrido $[-2,\ \infty)$.

d) No hay asíntotas.

e) Punto de corte con el eje *x* en (1, 0) y en (–5, 0) con el eje *y* en (0, –1).

f) Decreciente en $(-\infty, -2)$ y creciente $(-2, \infty)$.

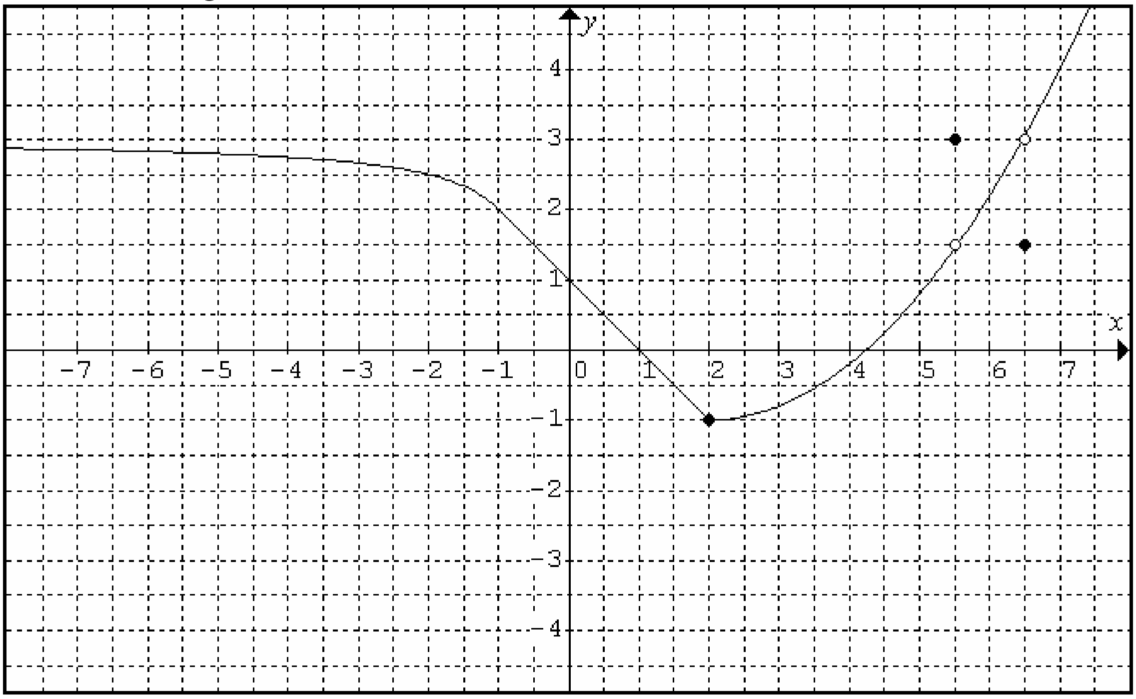
g) Mínimo absoluto en (–2, –2). Mínimo relativo en (4, 1).

h) $\cap$ Cóncava en $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$ y $\cup$ convexa en $(-2, 1)$.

i) No hay puntos de inflexión.

j) $\text{TVM}[0,\ 2] = \dfrac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \dfrac{1 - (-1)}{2} = 1$.

10º Partiendo de la gráfica de la función:



Calcule los siguientes límites:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{3} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1}{f(x)}=1 \qquad \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)}=0$$

Determinar:

a) El dominio y continuidad de la función.
b) La derivabilidad de la función.
c) El recorrido.
d) Las asíntotas verticales y horizontales.
e) Los puntos de corte con los ejes.
f) El crecimiento y decrecimiento.
g) Los máximos y mínimos.
h) La concavidad y convexidad.
i) La tasa de variación media en el intervalo [–1, 2].

Sol:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=3 \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1}{f(x)} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x)$$

a) Dom $f(x)=\mathbb{R}$. Continua en $\mathbb{R}-\{5.5, 6.5\}$.

b) Derivable en $\mathbb{R}-\{2,\ 5.5,\ 6.5\}$. En x = 2 hay un pico, y no hay derivabilidad en picos.

c) Recorrido $[2,\ \infty)$.

d) Asíntota horizontal en y = 3 hacia –∞.

e) Punto de corte con el eje x en (1, 0) y en (–5, 0) con el eje y en (0, –1).

f) Decreciente en $(-\infty, 2)$ y creciente $(2,\infty)-\{5.5,\ 6.5\}$.

g) Mínimo absoluto en (2, –1) y relativo en (6.5, 1.5). Máximo relativo en (5.5, 3).

h) $\cap$ Cóncava en $(-\infty,-1)$ y $\cup$ convexa en $(2,\infty)$.

i) No hay puntos de inflexión.

j) $\text{TVM}[-1,\ 2]=\dfrac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\dfrac{-1-2}{3}=-1$.

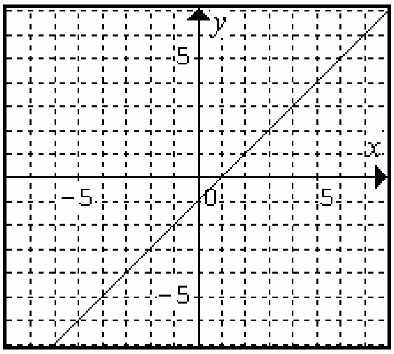
Ejercicios de representación de funciones sencillas:

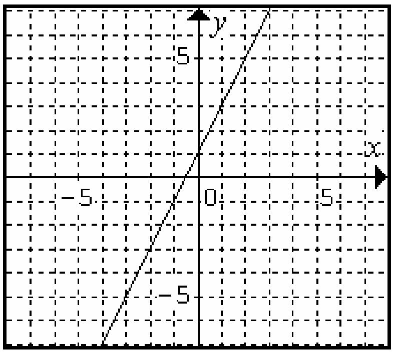
1º Represente las siguientes funciones:

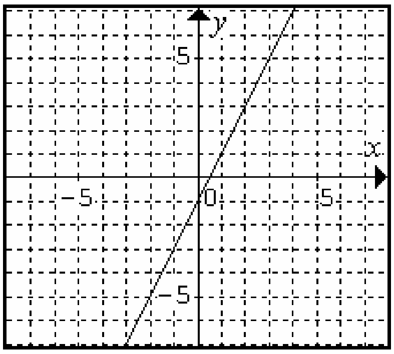
a) $f(x) = x - 1$	b) $f(x) = 2x + 1$	c) $f(x) = 2x - 1$	d) $f(x) = 1 - 2x$

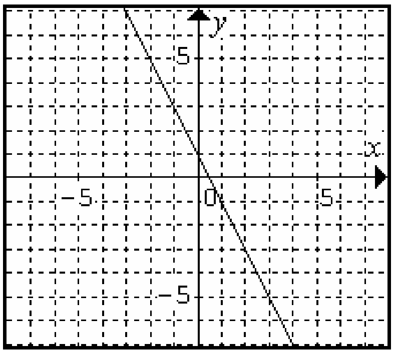
e) $f(x) = 5 + 2x$	f) $f(x) = 4 - 3x$	g) $f(x) = -1 - x$	h) $f(x) = 3x - 4$

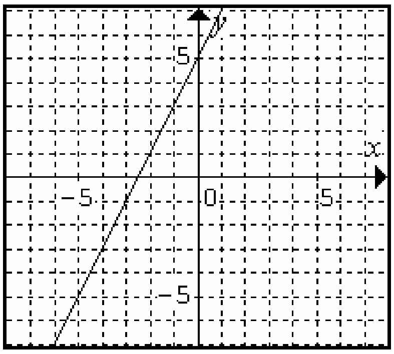
Sol:

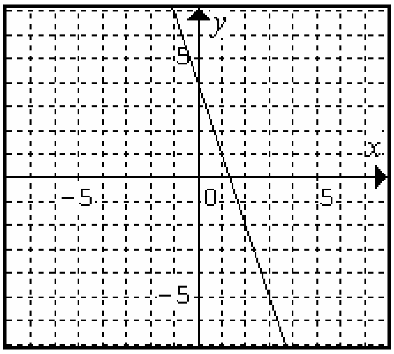
a)


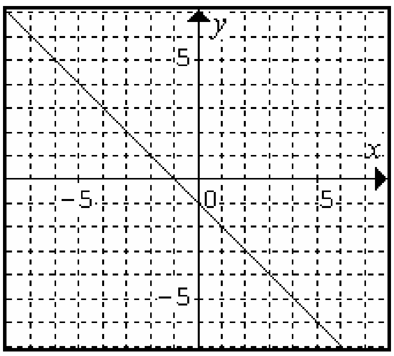
b)


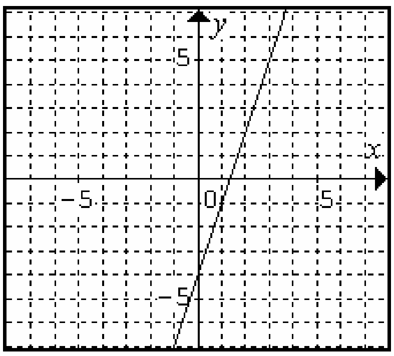
c)


d)


e)


f)


g)


h)


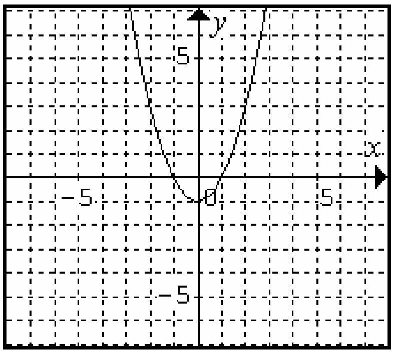
2º Represente las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 - 1$	b) $f(x) = x^2 - 4$	c) $f(x) = x^2 + 1$	d) $f(x) = 2x^2 - 2$

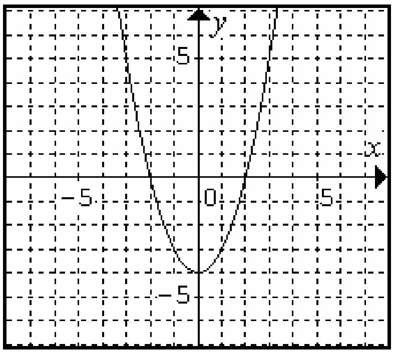
e) $f(x) = 1 - x^2$	f) $f(x) = x^2 - 3x + 2$	g) $f(x) = -x^2 - 2x$	h) $f(x) = 6x - 3x^2$

Sol:

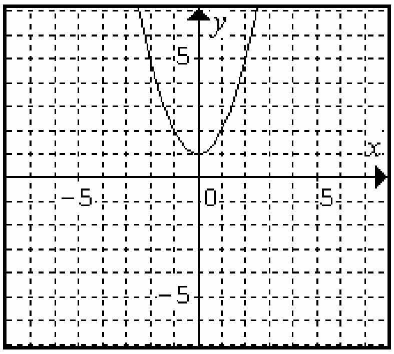
a)



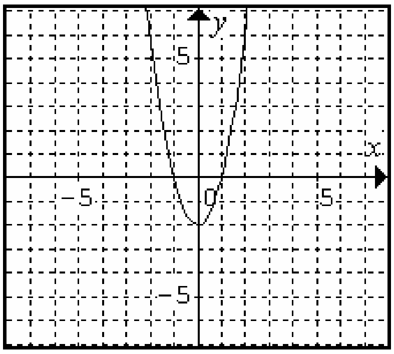
b)



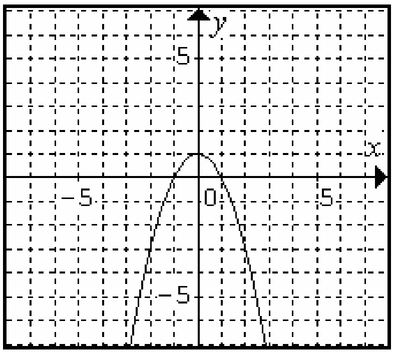
c)



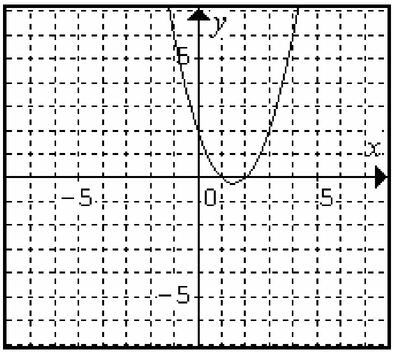
d)



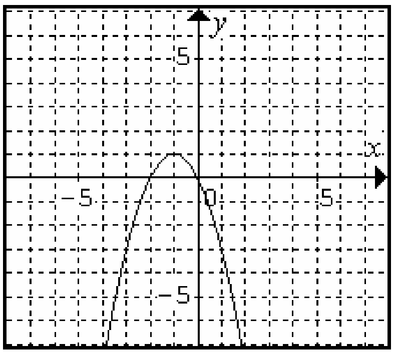
e)



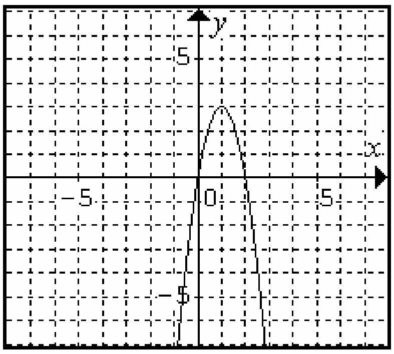
f)



g)



h)



3º Represente las siguientes funciones:

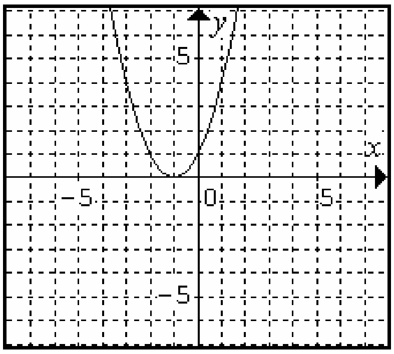
a) $f(x)=(x+1)^2$ b) $f(x)=4\cdot(x-2)^2$ c) $f(x)=(x-3)^2$

d) $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{2}$ e) $f(x)=(x-1)^2+1$ f) $f(x)=1-(x-2)^2$

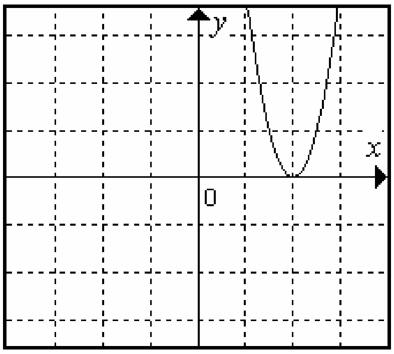
g) $f(x)=2-(x-1)^2$ g) $f(x)=1+(x+1)^2$

Sol:

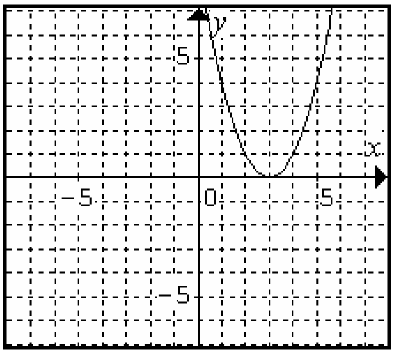
a)



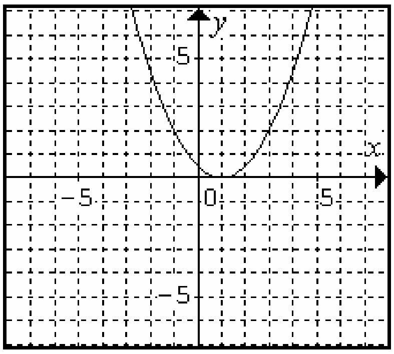
b)



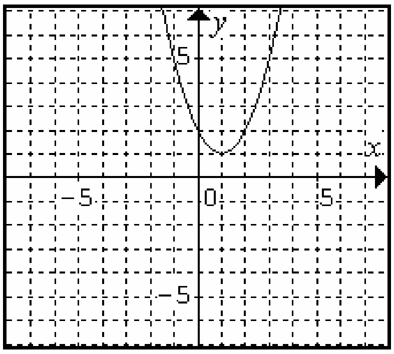
c)



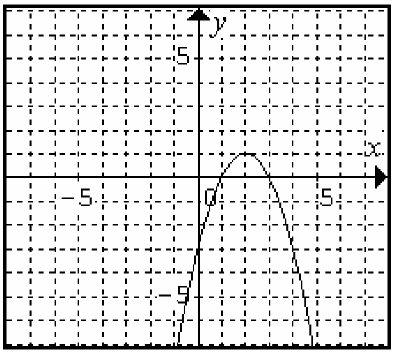
d)



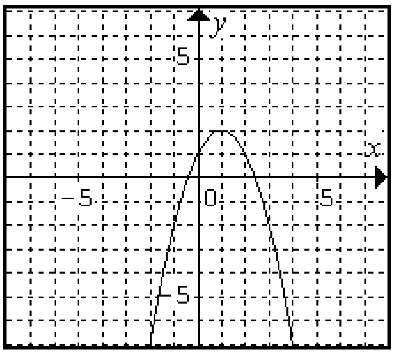
e)



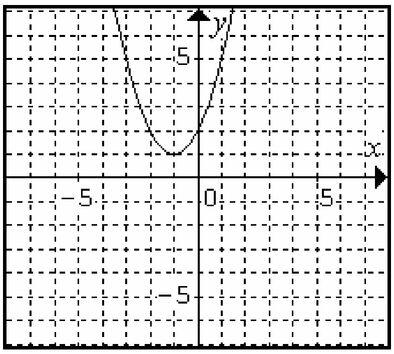
f)



g)



h)



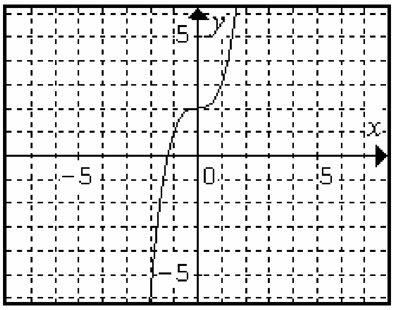
4º Represente las siguientes funciones:

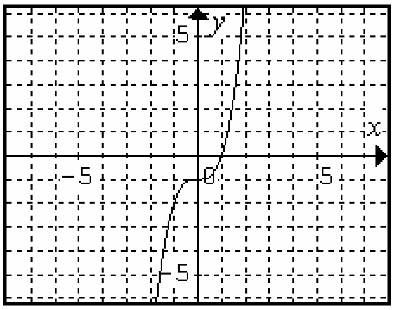
a) $f(x)=x^3+2$ b) $f(x)=x^3-1$ c) $f(x)=(x-2)^3$

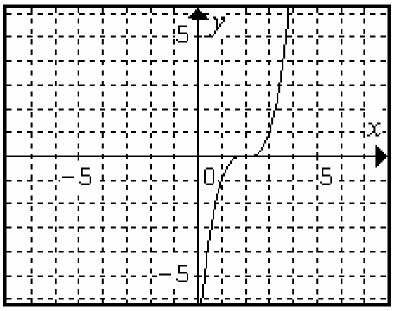
d) $f(x)=(x+2)^3-2$ e) $f(x)=x^3-4x$ f) $f(x)=x^3-3x^2$

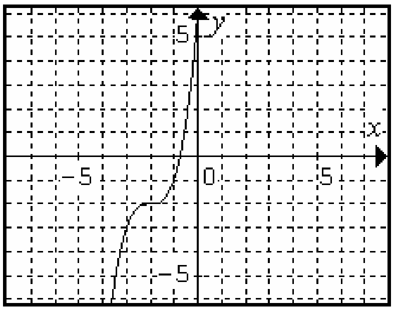
g) $f(x)=3x^2-x^3$ h) $f(x)=x^3-3x^2+3x$ i) $f(x)=(x-1)^3-3\cdot(x-1)^2$

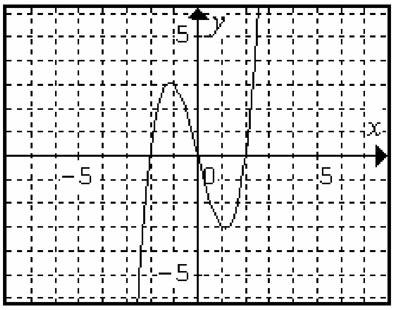
Sol:

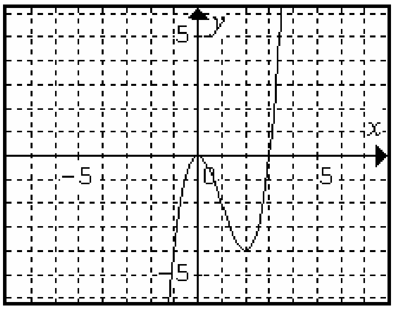
a)


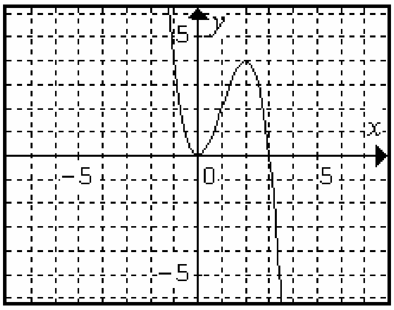
b)


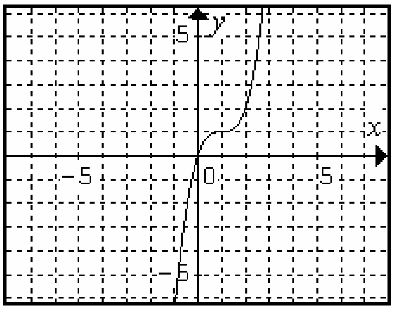
c)


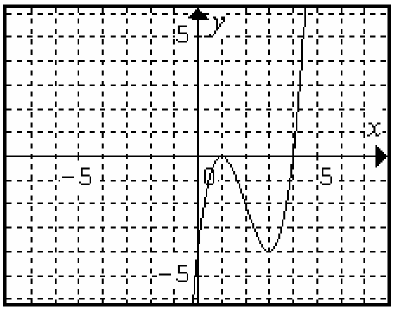
d)


e)


f)


g)


h)


i)


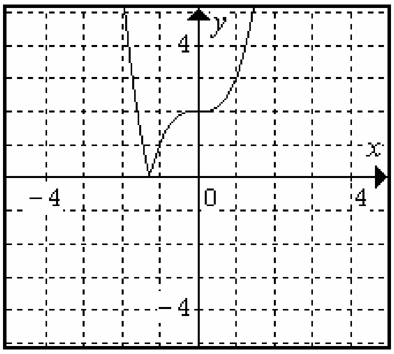
5º Fijándote en las gráficas que del ejercicio anterior, represente las siguientes funciones:

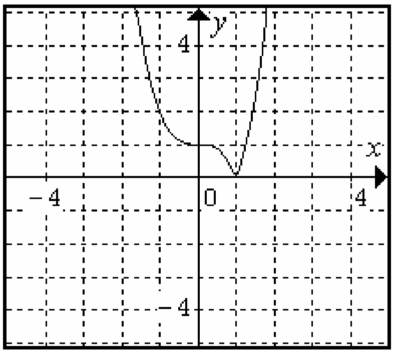
a) $f(x)=\left|x^3+2\right|$ b) $f(x)=\left|x^3-1\right|$ c) $f(x)=\left|(x-2)^3\right|$

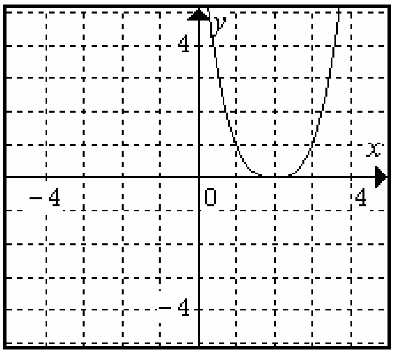
d) $f(x)=\left|(x+2)^3-2\right|$ e) $f(x)=\left|x^3-4x\right|$ f) $f(x)=\left|x^3-3x^2\right|$

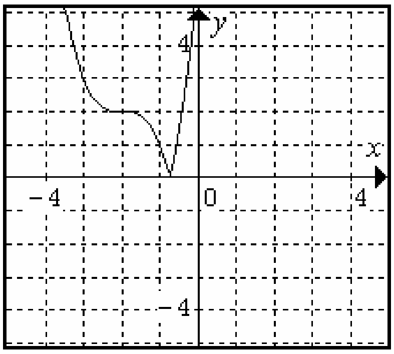
g) $f(x)=\left|3x^2-x^3\right|$ h) $f(x)=\left|x^3-3x^2+3x\right|$ i) $f(x)=\left|(x-1)^3-3\cdot(x-1)^2\right|$

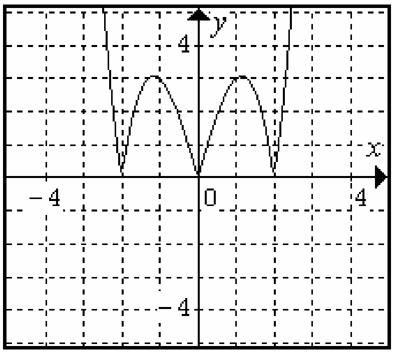
Sol:

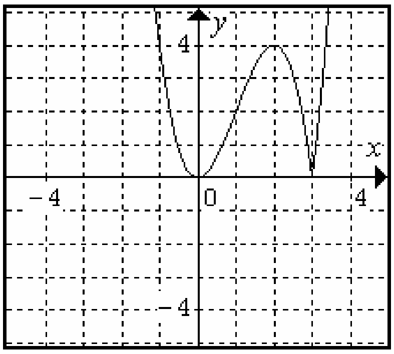
a)


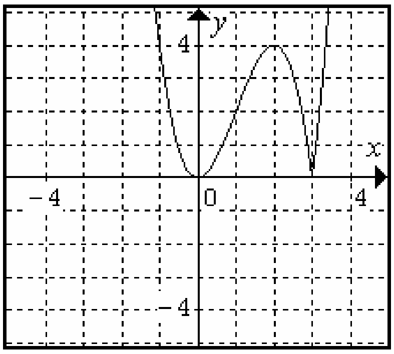
b)


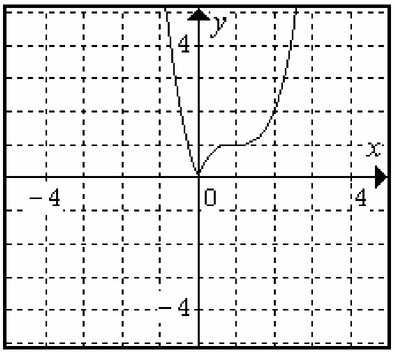
c)


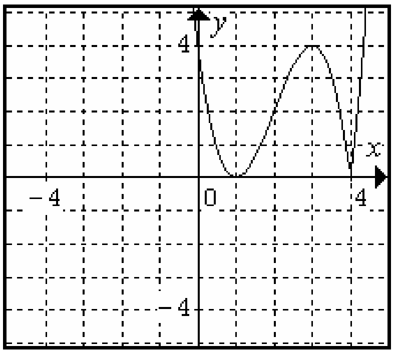
d)


e)


f)


g)


h)


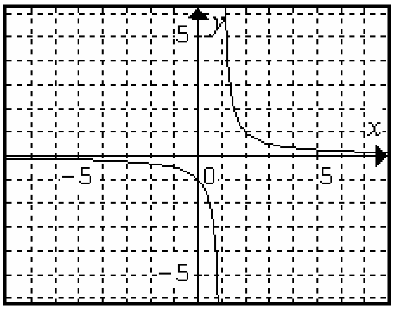
i)


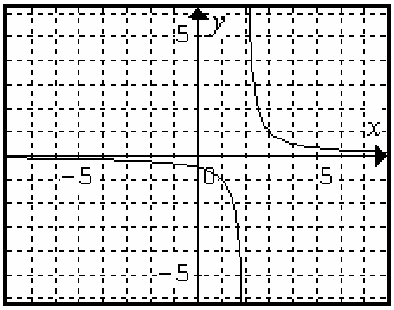
5º Represente las siguientes funciones:

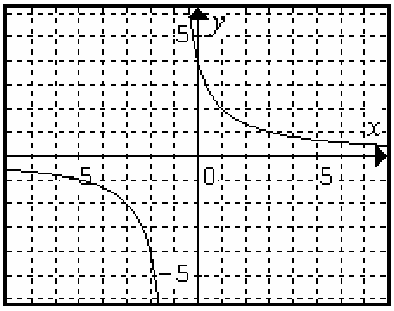
a) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ b) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ c) $f(x)=\dfrac{4}{x+1}$ d) $f(x)=\dfrac{-1}{x+2}$

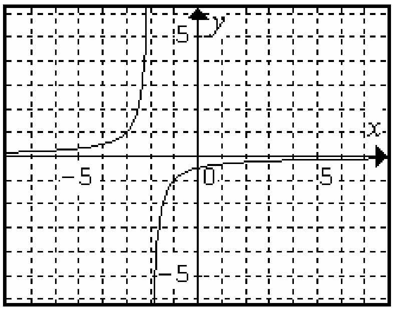
e) $f(x)=\dfrac{1}{2x-4}$ f) $f(x)=\dfrac{1}{3x-9}$ g) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}+1$ g) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}-1$

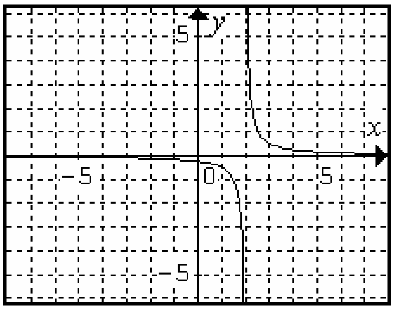
Sol:

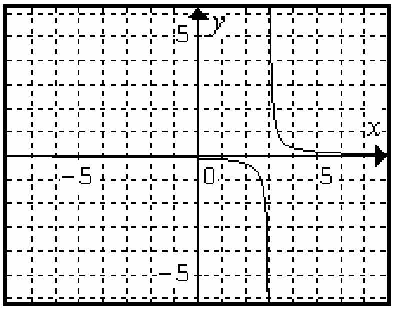
a)


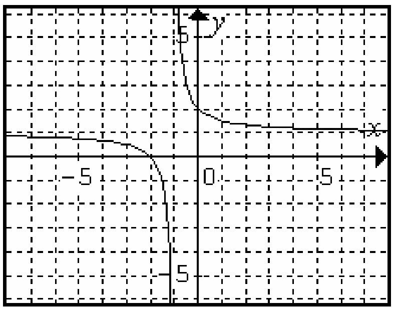
b)


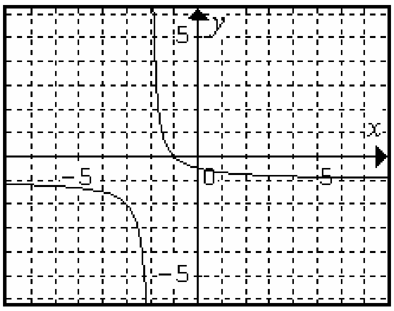
c)


d)


e)


f)


g)


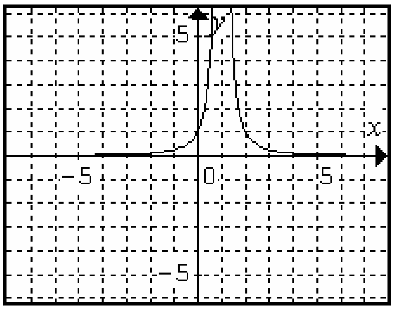
h)


6º Represente las siguientes funciones:

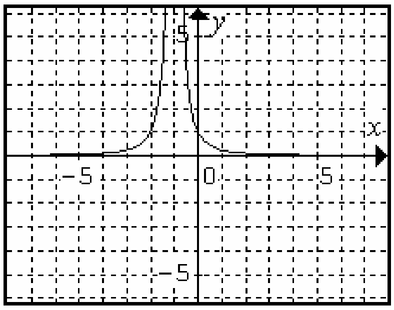
a) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ b) $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$ c) $f(x)=\dfrac{2}{(x-1)^2}$ d) $f(x)=\dfrac{-2}{(x+2)^2}$

Sol:

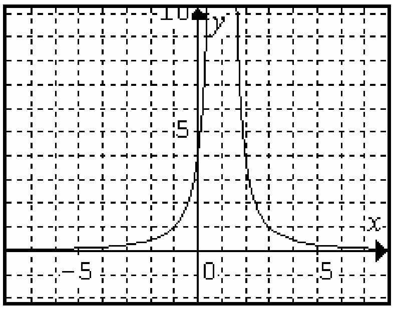
a)



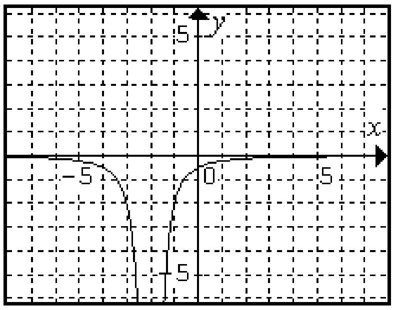
b)



c)



d)



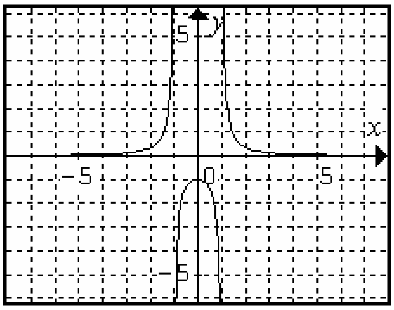
7º Represente las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ b) $f(x)=\dfrac{1}{(x+3)(x-2)}$ c) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$

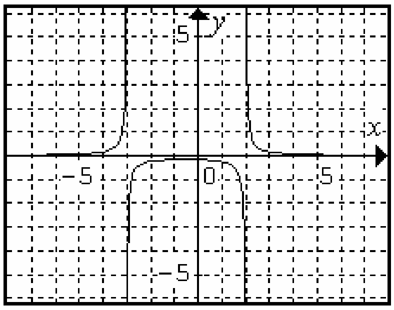
d) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ e) $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)(x^2-1)}$ f) $f(x)=\dfrac{1}{x^4-1}$

Sol:

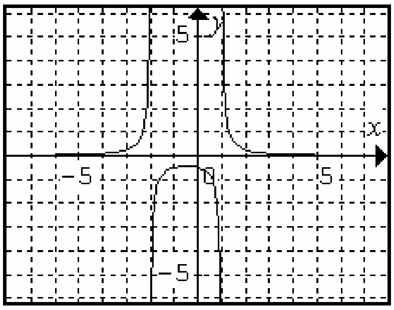
a)



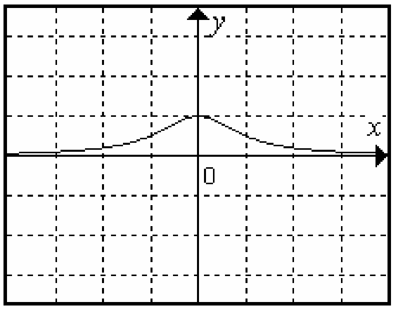
b)



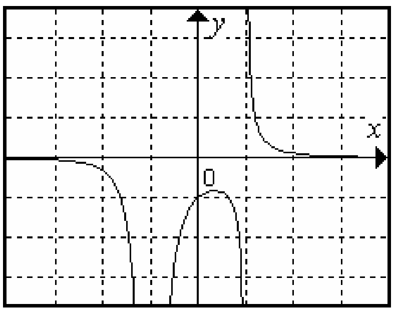
c)



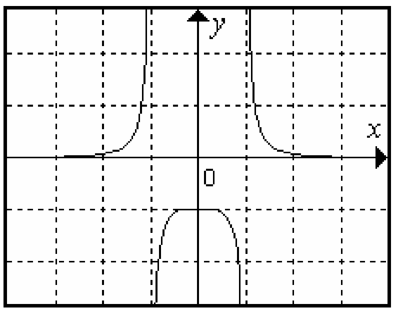
d)



e)



f)



8º Represente las siguientes funciones:

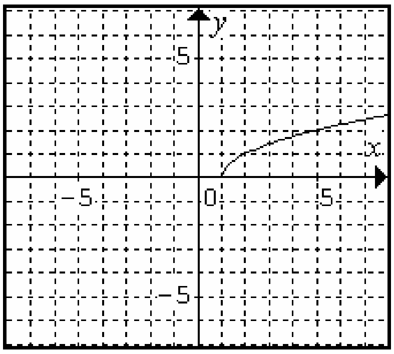
a) $f(x)=\sqrt{x-1}$ b) $f(x)=\sqrt{x+1}$ c) $f(x)=\sqrt{x+3}$ d) $f(x)=\sqrt{x+3}-1$

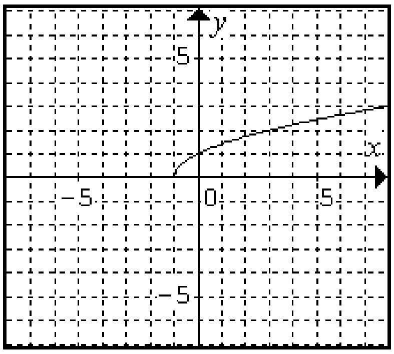
e) $f(x)=\sqrt{1-x}$ f) $f(x)=\sqrt{3-x}-2$ g) $f(x)=\sqrt{2-x}+1$ h) $f(x)=\sqrt{2-4x}$

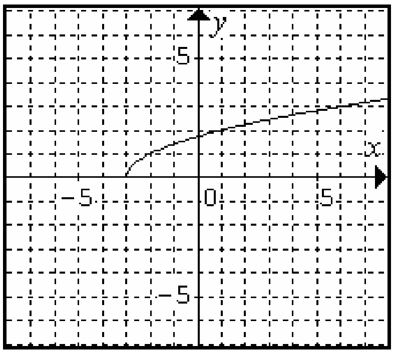
i) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ j) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ k) $f(x)=-\sqrt{4-x^2}$ l) $f(x)=\sqrt{1+x^2}$

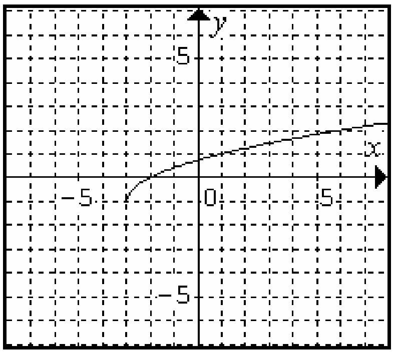
m) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x+1}}$ n) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x-1}}$ ñ) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{1-x}}$ o) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{2-x}}$

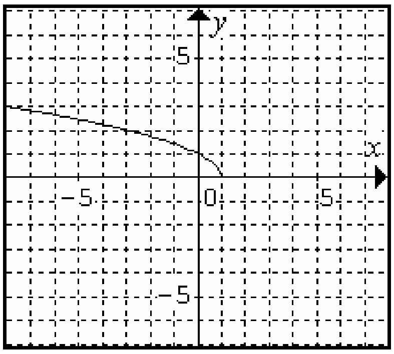
Sol:

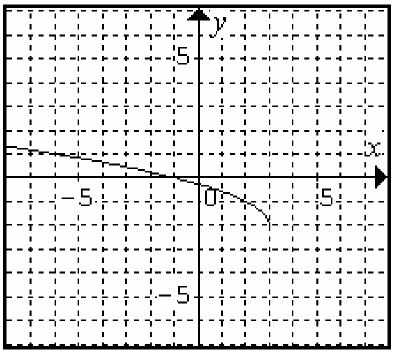
a)


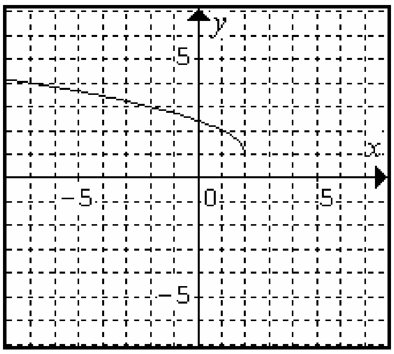
b)


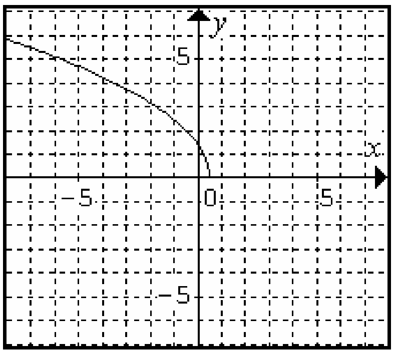
c)


d)


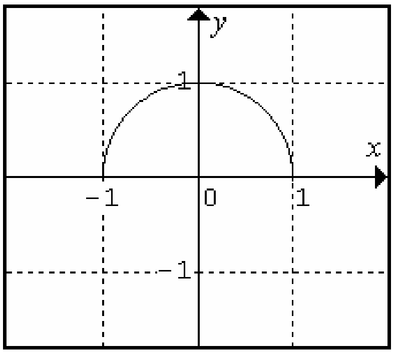
e)


f)


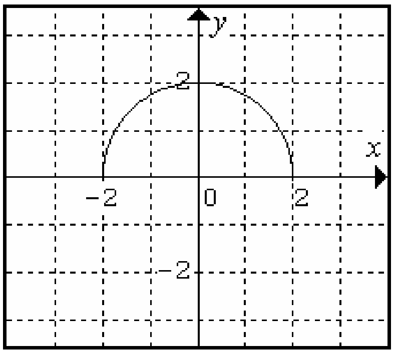
g)


h)


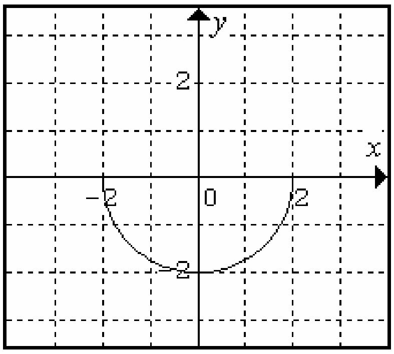
i)



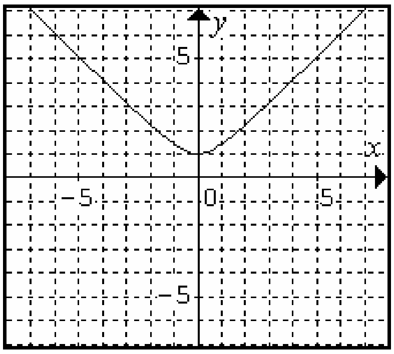
j)



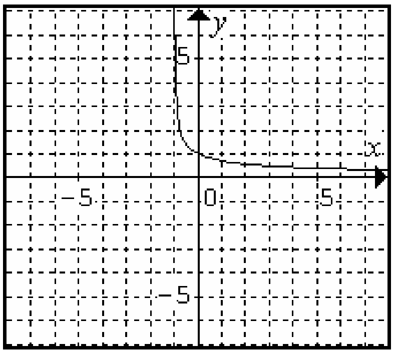
k)



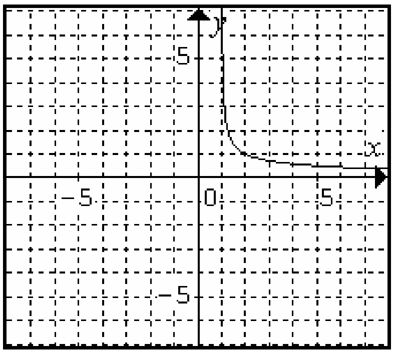
l)



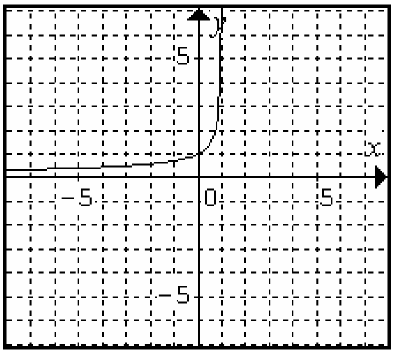
m)



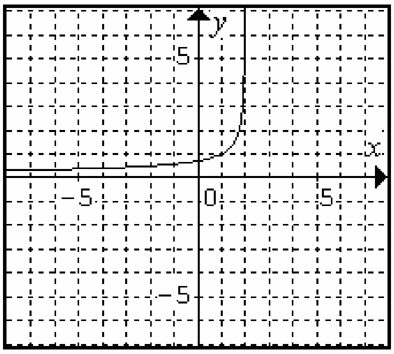
n)



ñ)



o)



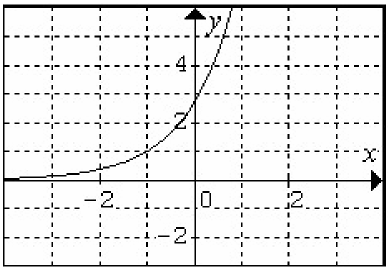
9º Represente las siguientes funciones:

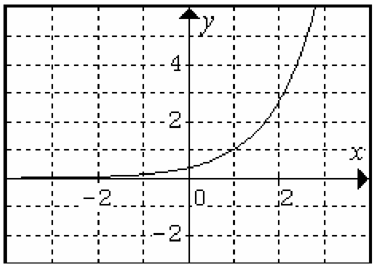
a) $f(x) = e^{x+1}$ b) $f(x) = e^{x-1}$ c) $f(x) = -e^{x}$

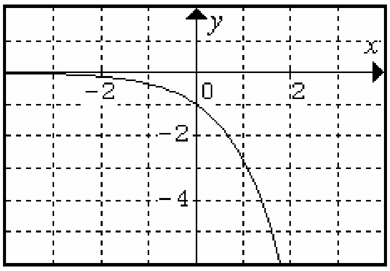
d) $f(x) = -e^{x-1}$ e) $f(x) = e^{-x}$ f) $f(x) = e^{-x+1}$

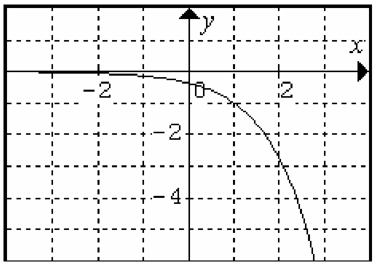
g) $f(x) = e^{x} + 1$ h) $f(x) = e^{x} - 1$ g) $f(x) = e^{x} - 2$

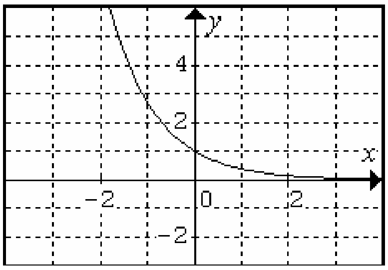
Sol:

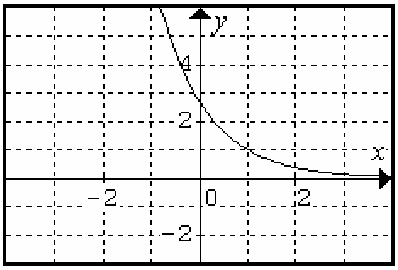
a)


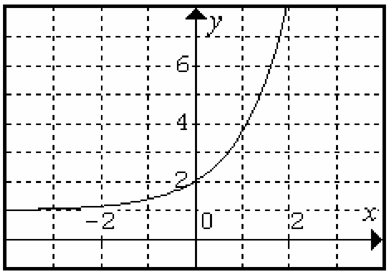
b)


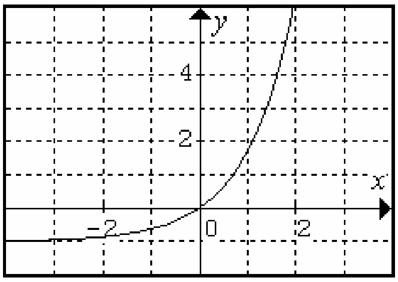
c)


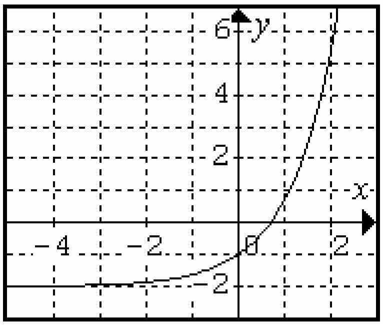
d)


e)


f)


g)


h)


i)


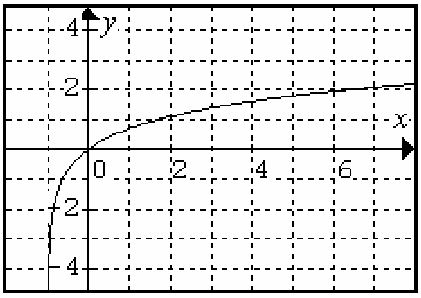
10º Represente las siguientes funciones:

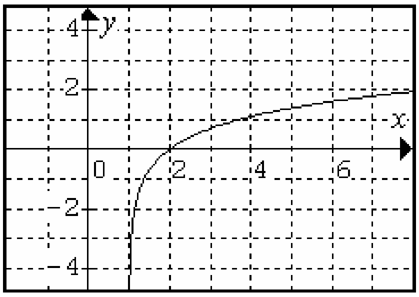
a) $f(x)=\ln(x+1)$ b) $f(x)=\ln(x-1)$ c) $f(x)=\ln(x+2)$

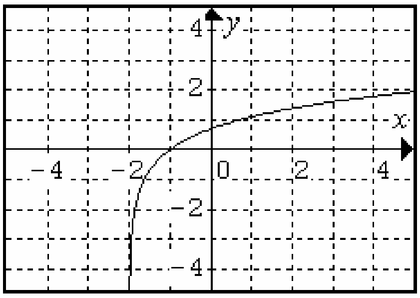
d) $f(x)=\ln(x-2)$ e) $f(x)=\ln(x)+1$ f) $f(x)=\ln(x)-1$

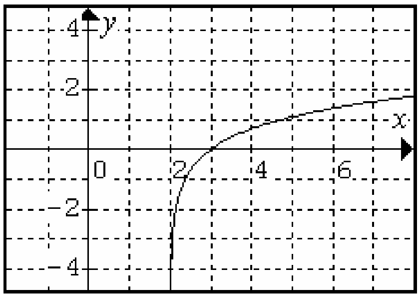
g) $f(x)=\ln(x-1)-1$ h) $f(x)=\ln(x+1)+1$

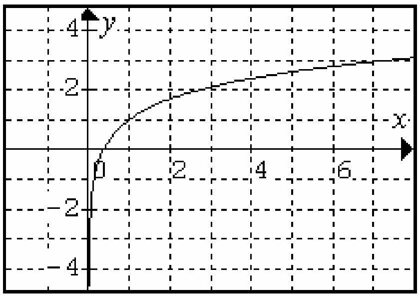
Sol:

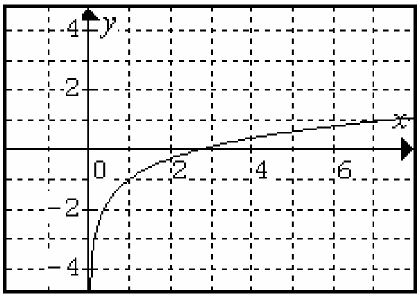
a)


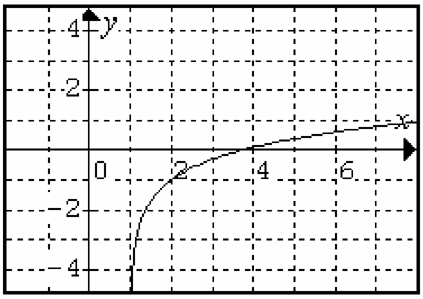
b)


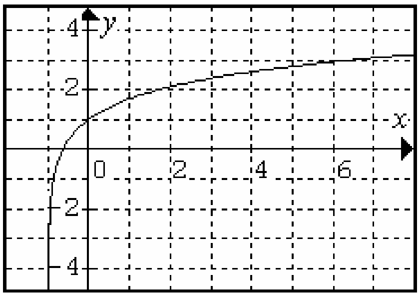
c)


d)


e)


f)


g)


h)


12º Represente las siguientes funciones definidas a trozos:

a) $f(x)=\begin{cases} x-1 & x\le 0 \\ x & x>0 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} 2x & x\le 1 \\ -x+3 & x>1 \end{cases}$ c) $f(x)=\begin{cases} x & x<-1 \\ x+3 & x\ge -1 \end{cases}$

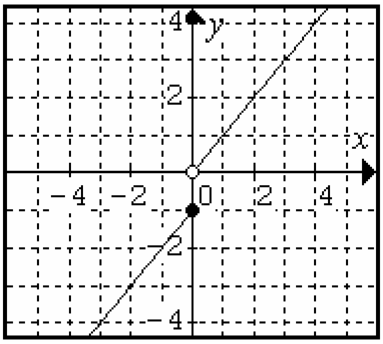
d) $f(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ x & x>0 \end{cases}$ e) $f(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ x & x\ge 0 \end{cases}$ f) $f(x)=\begin{cases} x+2 & x<0 \\ x^2-2 & x\ge 0 \end{cases}$

g) $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\le -2 \\ 3 & -2<x<0 \\ x^2-3x & 0\le x \end{cases}$ h) $f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & x\le -1 \\ 2 & -1<x<1 \\ x^2-1 & 1\le x \end{cases}$

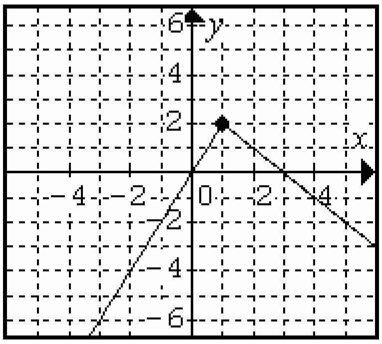
g) $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le -1 \\ 1-x & -1<x<2 \\ x^2 & 2\le x \end{cases}$ h) $f(x)=\begin{cases} 4-x^2 & x\le -1 \\ x^2-1 & -1<x\le 1 \\ x^2+1 & 1<x \end{cases}$

Sol:

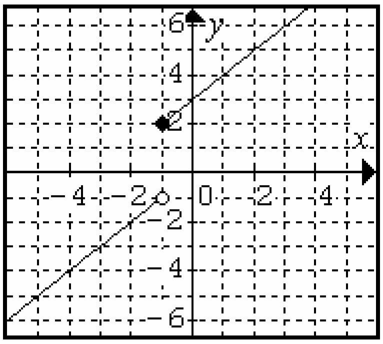
a)



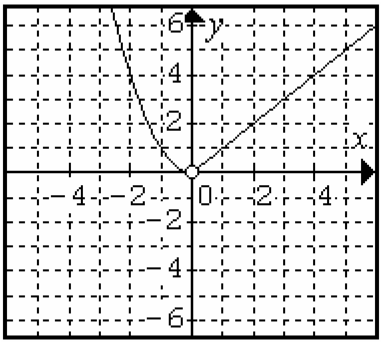
b)



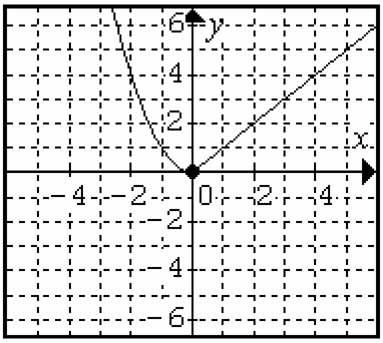
c)



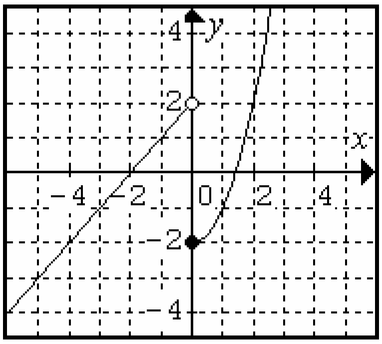
d)



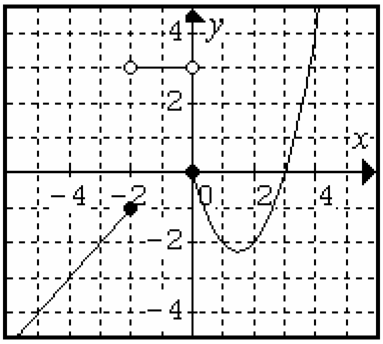
e)



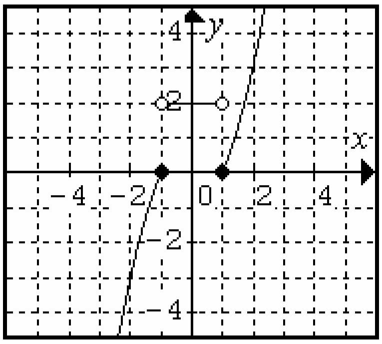
f)



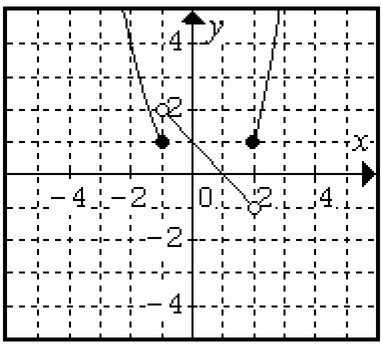
g)



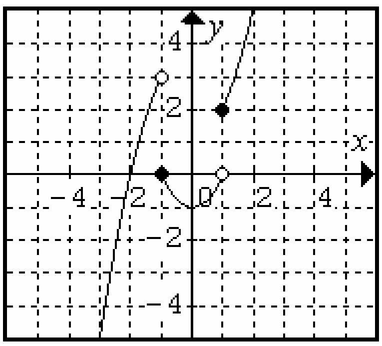
h)



i)



j)



Ejercicios de dominios:

1º Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ b) $f(x)=\dfrac{x-2}{x+3}$ c) $f(x)=\dfrac{x+1}{x+5}$

d) $f(x)=\dfrac{x+3}{x-4}$ e) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ f) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+2x+1}$

g) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-x}$ h) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$ i) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-1}$

j) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^4-2x^2+1}$ k) $f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x^3+3x^2+3x+1}$ l) $f(x)=\dfrac{1}{(x^2-1)\cdot(x^2-4)}$

Sol: a) $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{1\}$; b) $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{-3\}$; c) $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{-5\}$;
d) $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{4\}$; e) $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{\pm1\}$ f) $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{-1\}$;
g) $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{0,1\}$; h) $\text{Dom } f=\mathbb{R}$; i) $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{\pm1\}$;
j) $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{\pm1\}$; k) $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{-1\}$; l) $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{\pm1,\pm2\}$.

2º Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ b) $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x+3}$ c) $f(x)=\dfrac{x^2+5x}{(x+5)^2}$

d) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-4}$ e) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ f) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x+1}$

g) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x}$ h) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1}$ i) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-9}$

j) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^4-2x^2+1}$ k) $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2+2x+1}$ l) $f(x)=\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x^2-1)\cdot(x^2-4)}$

m) $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x^2+x-2}$ n) $f(x)=\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+2x}$ ñ) $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3+3x^2+2x}$

Sol: a) $\text{Dom } f=\mathbb{R}$; b) $\text{Dom } f=\mathbb{R}$; c) $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{-5\}$; d) $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{2\}$;
e) $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{-1\}$; f) $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{-1\}$; g) $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{0\}$; h) $\text{Dom } f=\mathbb{R}$;
i) $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{3\}$; j) $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{\pm1\}$; k) $\text{Dom } f=\mathbb{R}$; l) $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{1,2\}$;
m) $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{1\}$; n) $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{0\}$; ñ) $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{0,-2\}$.

3º Determina los valores de *a* y *b* para que el dominio de las siguientes funciones sea $\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\dfrac{x^3+ax+b}{x^2-4}$ b) $f(x)=\dfrac{x^3+ax^2+bx+6}{x^2+3x+2}$ c) $f(x)=\dfrac{ax^3+bx^2-x+2}{x^2-x-2}$

Sol: a) a = 4, b = 0; b) a = 6, b = 11; c) a = 1, b = –2.

4º Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sqrt{x+1}$ b) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ c) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

d) $f(x)=\sqrt{-x^2+2x-1}$ e) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ f) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$

g) $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$ h) $f(x)=\sqrt{x^3+2x-3}$ i) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-1}$

j) $f(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$ k) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2+1}}$ l) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

m) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^2+2x+1}}$ n) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-1}$ ñ) $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x-1}}$

o) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{4-x^2}}$ p) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-4x-5}}$ q) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+x}}$

Sol: a) Dom $f=[-1,\infty)$; b) Dom $f=\mathbb{R}$; c) Dom $f=[-1,1]$; d) Dom $f=\{1\}$;
e) Dom $f=(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$; f) Dom $f=(-\infty,-3]\cup[3,\infty)$;
g) Dom $f=\mathbb{R}-(2,3)$; h) Dom $f=[1,\infty)$; i) Dom $f=\mathbb{R}$; j) Dom $f=\mathbb{R}$;
k) Dom $f=[2,\infty)$; l) Dom $f=\mathbb{R}-(-1,1]$; m) Dom $f=\mathbb{R}-[-2,2)$;
n) Dom $f=\mathbb{R}-\{0\}$; ñ) Dom $f=(1,\infty)$; o) Dom $f=(-2,1]\cup[1,2)$;
p) Dom $f=(-\infty,3]\cup(5,\infty)$; q) Dom $f=(-\infty,-3]\cup[-2,-1)\cup(0,\infty)$;

5º Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\log(x+1)$ b) $f(x)=\log\left(x^2+1\right)$ c) $f(x)=\ln\left(1-x^2\right)$

d) $f(x)=\ln\left(-x^2+2x-1\right)$ e) $f(x)=\log\left(x^2-4\right)$ f) $f(x)=\ln\left(x^2-9\right)$

g) $f(x)=\ln\left(x^2-5x+6\right)$ h) $f(x)=\log\left(x^3+2x-3\right)$ i) $f(x)=\log_2\left(x^3-1\right)$

j) $f(x)=\log\left(\dfrac{x-2}{x^2+1}\right)$ k) $f(x)=\dfrac{x-2}{\ln\left(x^2+1\right)}$ l) $f(x)=\log_5\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

m) $f(x)=\dfrac{\ln\left(4-x^2\right)}{x^2+2x+1}$ n) $f(x)=\dfrac{1}{\log(x^2+1)-1}$ ñ) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{1-x}\right)$

o) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^2-1}{4-x^2}\right)$ p) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-4x-5}\right)$ q) $f(x)=\log\left(\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+x}\right)$

Sol: a) Dom $f=(-1,\infty)$; b) Dom $f=\mathbb{R}$; c) Dom $f=(-1,1)$; d) Dom $f=\varnothing$;
e) Dom $f=(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$; f) Dom $f=(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$;
g) Dom $f=\mathbb{R}-[2,3]$; h) Dom $f=(1,\infty)$; i) Dom $f=(1,\infty)$; j) Dom $f=(2,\infty)$;
k) Dom $f=\mathbb{R}-\{0\}$; l) Dom $f=\mathbb{R}-[-1,1]$; m) Dom $f=(-2,2)-\{-1\}$;
n) Dom $f=\mathbb{R}-\{3\}$; ñ) Dom $f=(-2,1)$; o) Dom $f=(-2,1)\cup(1,2)$;
p) Dom $f=(-\infty,3)\cup(5,\infty)$; q) Dom $f=(-\infty,-3)\cup(-2,-1)\cup(0,\infty)$.

Ejercicios de composición e inversa de funciones.

1º Sean las siguientes funciones:

$$f(x)=\ln(x+1) \qquad g(x)=x^2+x \qquad h(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

Determinar las siguientes composiciones de funciones:

a) $f(g(x))$ b) $f(f(x))$ c) $f(h(x))$
d) $g(h(x))$ e) $h(f(x))$ f) $f(g(h(x)))$

Sol: a) $f(g(x))=\ln(x^2+x+1)$; b) $f(f(x))=\ln(\ln(x+1)+1)$;

c) $f(h(x))=\ln\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}+1\right)$; d) $g(h(x))=\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2+\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

e) $h(f(x))=\dfrac{1-\ln^2(x+1)}{1+\ln^2(x+1)}$; f) $f(g(h(x)))=\ln\left(\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2+\dfrac{1-x^2}{1+x^2}+1)\right)$

2º Calcule la inversa de las funciones:

a) $f(x)=\dfrac{3x+2}{1-x}$ b) $f(x)=\sqrt{2x+3}$ c) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+3}$

d) $f(x)=\dfrac{x+5}{2x-2}$ e) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$ f) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$

g) $f(x)=\dfrac{x-4}{3x-5}$ h) $f(x)=\dfrac{2x-1}{2x-3}$ i) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$

j) $f(x)=\log(x)$ k) $f(x)=(x-1)^3$ l) $f(x)=e^{x+1}$

m) $f(x)=e^{e^x}$ n) $f(x)=\sqrt{x^2+2x+1}$ ñ) $f(x)=\ln(5x+1)$

Sol: a) $f^{-1}(x)=\dfrac{2-x}{x+3}$; b) $f^{-1}(x)=\dfrac{x^2-3}{2}$; c) $f^{-1}(x)=\dfrac{1-3x}{x-2}$; d) $f^{-1}(x)=\dfrac{2x+5}{2x-1}$;

e) $f^{-1}(x)=\dfrac{1+2x}{1-x}$; f) $f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$; g) $f^{-1}(x)=\dfrac{5x-4}{3x-1}$; h) $f^{-1}(x)=\dfrac{3x-1}{2x-2}$;

i) $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{x}+1$; j) $f^{-1}(x)=10^x$; k) $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}+1$; l) $f^{-1}(x)=\ln x-1$;

m) $f^{-1}(x)=\ln(\ln x)$; n) $f^{-1}(x)=\ln x-1$; ñ) $f^{-1}(x)=\dfrac{e^x-1}{5}$.

Ejercicios de simetrías y tasa de variación media:

1º Determine la simetría (si la hubiese) de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\ln(x^2+1)$ b) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-7}$ c) $f(x)=x^5-x^3+x$

d) $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$ e) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ f) $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$

g) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ h) $f(x)=\cos x$ i) $f(x)=\sin x$

Sol: a) par; b) impar; c) impar; d) no tiene simetría par ni impar;
e) par; f) no tiene simetría par ni impar; g) par; h) par; i) impar.

2º Calcula la tasa de variación media en el intervalo [0,2] para las funciones:

a) $f(x)=x^3-x^2+3$ b) $f(x)=x^4+2x^2-x$ c) $f(x)=x^2+2$

Sol: a) 2; b) 11; c) 2.

Ejercicios de polinomios de interpolación y extrapolación:

1º Sea una función lineal que cumple $f(0)=1$ y $f(1)=2$, calcule dicha función y extrapole el valor de esta en x = 5. **Sol:** $f(x)=x+1$; $f(5)=6$.

2º Calcule una función cuadrática que pasa por los puntos $f(0)=f(2)=0$ y $f(1)=2$, y extrapole el valor de esta en x = –1. **Sol:** $f(x)=-2x^2+4x$; $f(-1)=-6$.

3º Calcule una función cúbica de la que se sabe que:

$f(0)=0$ $f(1)=-f(-1)=1$ $f(-3)=-f(3)=-27$

Extrapole el valor de esta en x = 5 e interpole en x = 2.

Sol: $f(x)=x^3$.

4º Obtener el polinomio de interpolación para cierta función $f(x)$ de la que conocemos que:

$f(-2)=0$ $f(0)=1$ $f(1)=-1$

Sol: $f(x)=-\dfrac{5}{6}x^2-\dfrac{7}{6}x+1$.

5º Obtener el polinomio de interpolación para cierta función $f(x)$ de la que conocemos que:

$f(-1)=1$ $f(0)=1$ $f(2)=2$ $f(3)=2$

Sol: $f(x)=-\dfrac{5}{12}x^3+\dfrac{19}{12}x^2-1$.

Ejercicios para aprender a derivar:

Derivación de polinomios y series de potencias

Reglas de derivación.

$\boxed{f(x)=k \to f'(x)=0}$ $\boxed{f(x)=ax \to f'(x)=a}$

$\boxed{f(x)=ax^n \to f'(x)=anx^{n-1}}$ $\boxed{f(x)=u(x)+v(x) \to f'(x)=u'+v'}$

Ejemplos:

$f(x)=4 \to f'(x)=0$

$f(x)=x \to f'(x)=1$

$f(x)=3x^2 \to f'(x)=6x$

$f(x)=x^4+4 \to f'(x)=4x^3$

$f(x)=3x^5-x^3 \to f'(x)=15x^4-3x^2$

$f(x)=\dfrac{x^9}{7}-\dfrac{x^7}{\sqrt{5}} \to f'(x)=\dfrac{9x^8}{7}-\dfrac{7x^6}{\sqrt{5}}$

Ejercicios:

1º Derive las siguientes funciones polinómicas:

a) $f(x)=x^3+5x^{20}+2x$ b) $f(x)=\dfrac{x}{5}+7x^4$ c) $f(x)=\dfrac{x^4-3x}{4}$

d) $f(x)=x^2+4$ e) $f(x)=6x^7+5x^2+5$ f) $f(x)=4x^5+x^3+4$

g) $f(x)=\dfrac{5x^6}{6}-3x^5-2$ h) $f(x)=\dfrac{x^4}{4}+x^5-2x^2$ i) $f(x)=\pi x^2+\sqrt{3}x^3$

j) $f(x)=x^{-2}+4x^{-5}$ k) $f(x)=x^{-1}-x^{-2}$ l) $f(x)=x^{-4}+2x^{-3}$

m) $f(x)=\dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{5}$ n) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{5}{x^2}$ ñ) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^{10}}$

Sol:

a) $f'(x)=3x^2+100x^{19}+2$ b) $f'(x)=\dfrac{1}{5}+28x^3$ c) $f'(x)=x^3-\dfrac{3}{4}$

d) $f'(x)=2x$ e) $f'(x)=42x^6+10x$ f) $f'(x)=20x^4+3x^2$

g) $f'(x)=5x^5-15x^4$ h) $f'(x)=x^3+5x^4-4x$ i) $f'(x)=2\pi x+3\sqrt{3}x^2$

j) $f'(x)=-2x^{-3}-20x^{-6}$ k) $f'(x)=-x^{-2}+2x^{-3}$ l) $f'(x)=-4x^{-5}-6x^{-4}$

m) $f'(x)=-5x^{-2}$ n) $f'(x)=-3x^{-4}-10x^{-3}$ ñ) $f'(x)=-2x^{-3}-10x^{-11}$

2º Derive, con un poco de ingenio, las siguientes funciones:

a) $f(x)=7x^{5/4}-8x^{1/2}$ b) $f(x)=x^{2/3}+4x^{5/4}$ c) $f(x)=3x^{1/3}+4x^{1/4}$

d) $f(x)=\sqrt{x^2}+\sqrt[5]{x}$ e) $f(x)=-2\sqrt[7]{x^2}+\sqrt[9]{x^2}$ f) $f(x)=\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{x}}}}$

Sol:

a) $f'(x)=\dfrac{35}{4}x^{1/4}+4x^{-1/2}$ b) $f'(x)=\dfrac{2}{3}x^{-1/3}+5x^{1/4}$

c) $f'(x)=-x^{-2/3}+x^{-3/4}$ d) $f'(x)=1+\dfrac{x^{-4/5}}{5}$

e) $f'(x)=-\dfrac{4x^{-5/7}}{7}+\dfrac{2x^{-7/9}}{9}$ f) $f'(x)=\dfrac{x^{-119/120}}{120}$

Derivación de potencias de funciones

Reglas de derivación:

$$\boxed{f(x) = au^n \rightarrow f(x) = anu'u^{n-1}}$$

Ejemplos:

$$f(x) = \left(x^2 + x\right)^3 \rightarrow f'(x) = (6x+3)\left(x^2+x\right)^2$$

$$f(x) = (3x + x^2)^{100} \rightarrow f'(x) = 100(3+2x)(3x+x^2)^{99}$$

$$f(x) = (x^3 + x^2 + 1)^6 \rightarrow f'(x) = 6\cdot(3x^2 + 2x)\cdot(x^3 + x^2 + 1)^5$$

$$f(x) = (4x^3 + 5x^2 + 7)^{15} \rightarrow f'(x) = 15\cdot(12x^2 + 10x)\cdot(4x^3 + 5x^2 + 7)^{15}$$

$$f(x) = \frac{\left(x^5 + 4x^3 + 6\right)^{15}}{8} \rightarrow f'(x) = \frac{15\left(5x^4 + 12x^2\right)\cdot\left(x^5 + 4x^3 + 6\right)^{14}}{8}$$

$$f(x) = \frac{\left(x^3 - 2x\right)^3}{4} + \frac{\left(2x^3 - 2\right)^6}{5} \rightarrow f'(x) = \frac{3\left(3x^2 - 2\right)\cdot\left(x^3 - 2x\right)^2}{4} + \frac{6\left(6x^2\right)\left(2x^3 - 2\right)^5}{5}$$

Ejercicios:

3º Derive las siguientes funciones con paréntesis:

a) $f(x) = (x+1)^7$

b) $f(x) = (x^2 + 3x + 5)^3$

c) $f(x) = \left(\frac{x^7}{7} + \sqrt{3}x^3\right)^4$

d) $f(x) = \frac{\left(x^4 - 3x^2\right)^2}{3}$

e) $f(x) = (4x^{7/2} + 3)^{\sqrt{5}}$

f) $f(x) = (x^2 - x^\pi)^e$

g) $f(x) = \left(2x^3 + 7x\right)^{-5}$

h) $f(x) = \left(2x^3 + 3x^{-4} + 2\right)^7$

i) $f(x) = \left(x^6 + 3x^4 - 5x\right)^8$

j) $f(x) = \frac{\left(x^3 + 7x^2 - 5\right)^6}{7}$

k) $f(x) = \frac{\left(5x^4 + 3x^{-2}\right)^5}{12}$

l) $f(x) = \frac{3}{5}\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right)^3$

m) $f(x) = \left(5x^2 - 3x\right)^{5/2}$

n) $f(x) = \left(4x^6 - x\right)^{7/3}$

Sol:

a) $f'(x) = 7(x+1)^6$

b) $f'(x) = 3(2x+3)(x^2 + 3x + 5)^2$

c) $f'(x) = 4\left(x^6 + 3\sqrt{3}x^2\right)\left(\frac{x^7}{7} + \sqrt{3}x^3\right)^3$

d) $f'(x) = \frac{2}{3}\left(4x^3 - 6x\right)\left(x^4 - 3x^2\right)$

e) $f'(x) = \sqrt{5}(14x^{5/2})(4x^{7/2} + 3)^{\sqrt{5}-1}$

f) $f'(x) = e(2x - \pi x^{\pi-1})(x^2 - x^\pi)^{e-1}$

g) $f'(x) = -5\cdot\left(6x^2 + 7\right)\left(2x^3 + 7x\right)^{-6}$

h) $f'(x) = 7\left(6x^2 - 12x^{-5}\right)\left(2x^3 + 3x^{-4} + 2\right)^6$

i) $f'(x) = 8\left(6x^5 + 12x^3 - 5\right)\left(x^6 + 3x^4 - 5x\right)^7$

j) $f'(x) = \frac{6\cdot\left(3x^2 + 14x\right)\cdot\left(x^3 + 7x^2 - 5\right)^5}{7}$

k) $f'(x) = \frac{5\left(20x^3 - 6x^{-3}\right)\cdot\left(5x^4 + 3x^{-2}\right)^4}{12}$

l) $f'(x) = \frac{9}{5}\cdot\left(\frac{1}{4} - x^{-2}\right)\cdot\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right)^2$

m) $f'(x) = \frac{5}{2}\cdot(10x - 3)\cdot\left(5x^2 - 3x\right)^{3/2}$

n) $f'(x) = \frac{7}{3}\cdot\left(24x^5 - 1\right)\cdot\left(4x^6 - x\right)^{4/3}$

Derivación de raíces cuadradas y raíces de orden superior

Reglas de derivación:

$$f(x)=\sqrt[n]{u} \rightarrow f'(x)=\frac{u'}{n\cdot\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

Ejemplos:

$$f(x)=\sqrt{x^2-3x} \rightarrow f'(x)=\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}} \qquad f(x)=\sqrt[3]{x^2+1} \rightarrow f'(x)=\frac{2x}{3\cdot\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}}$$

$$f(x)=\sqrt[3]{\left(x^2-3x\right)^2} \rightarrow f'(x)=\frac{2\cdot(2x-3)\cdot\left(x^2-3x\right)}{3\cdot\sqrt[3]{\left(x^2-3x\right)^4}}$$

Ejercicios:

4º Derive las siguientes funciones con paréntesis:

a) $f(x)=\sqrt[3]{2x+4}$ b) $f(x)=\sqrt[10]{x^3+10x}$ c) $f(x)=\sqrt{x^2+3}$

d) $f(x)=\sqrt{x+x^2+x^3}$ e) $f(x)=\sqrt[4]{\sqrt{x}+\sqrt[3]{10x}}$ f) $f(x)=\sqrt[3]{\sqrt{x}+3x}$

g) $f(x)=\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}$ h) $f(x)=\sqrt[6]{x^5+\sqrt{x}}$ i) $f(x)=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$

j) $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ k) $f(x)=\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^2+1}+7}$ l) $f(x)=\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^2+1}+7}$

Sol:

a) $f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+4)^2}}$ b) $f'(x)=\frac{3x^2+10}{10\cdot\sqrt[10]{(x^3+10x)^9}}$

c) $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$ d) $f'(x)=\frac{1+2x+3x^2}{2\sqrt{x+x^2+x^3}}$

e) $f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{10}{3\cdot\sqrt[3]{(10x)^2}}}{4\cdot\sqrt[4]{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{10x})^3}}$ f) $f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+3}{3\cdot\sqrt[3]{\left(\sqrt{x}+3x\right)^2}}$

g) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ h) $f'(x)=\frac{5x^4+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{6\cdot\sqrt[6]{(x^5+\sqrt{x})^5}}$

i) $f'(x)=\frac{7}{8\sqrt[8]{x}}$ j) $f'(x)=\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}}$

k) $f'(x)=\frac{\frac{2x}{3\cdot\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}}}{5\cdot\sqrt[5]{\left(\sqrt[3]{x^2+1}+7\right)^4}}$

Derivación de producto de funciones

Reglas de derivación.

$$\boxed{f(x)=uv \rightarrow f'(x)=u'v+v'u} \quad \boxed{f(x)=u(v(x)) \rightarrow f'(x)=u'(v(x))v'(x)}$$

Ejemplos:

$$f(x)=\left(x^2-1\right)\left(x+1\right)\rightarrow f'(x)=2x(x-1)+\left(x^2-1\right)$$

$$f(x)=\left(x+4x^2\right)\left(x+1\right)\rightarrow f'(x)=\left(1+8x\right)\left(x+1\right)+\left(x+4x^2\right)$$

$$f(x)=\left(x+x^7\right)^5\left(x^2-1\right)^7\rightarrow f'(x)=5\cdot\left(1+7x^6\right)\left(x+x^7\right)^4\left(x^2-1\right)^7+14x\left(x^2-1\right)^6\left(x+x^7\right)^5$$

Ejercicios:

5º Derive las siguientes funciones:

a) $f(x)=(x^2-1)(x-1)$

b) $f(x)=x^2(7x^7+8)$

c) $f(x)=(x^2)^3(x+1)$

d) $f(x)=(x-1)^{-1}(x+1)$

e) $f(x)=\left(\dfrac{x}{3}+1\right)^4\left(\dfrac{4x}{3}\right)^3$

f) $f(x)=(x^2-3)^{-5}(x-x^2)$

g) $f(x)=(x^{-1}-2)^{-2}(1+x^2)$

h) $f(x)=x(x-1)^2(x-2)^3$

i) $f(x)=(x^2+x)(x+2x^2)(x+1)$

j) $f(x)=\left(x^3+7x\right)\left(x^7+5x^2\right)$

k) $f(x)=\sqrt{x+1}\,\sqrt[3]{x-1}$

l) $f(x)=x\sqrt{x^2+1}\sqrt{(x+1)^4}$

Sol:

a) $f'(x)=2x(x-1)+(x^2-1)$

b) $f'(x)=2x(7x^7+8)+49x^8$

c) $f'(x)=6x^5(x+1)+x^6$

d) $f'(x)=-(x-1)^{-2}(x+1)+(x-1)^{-1}$

e) $f'(x)=\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{x}{3}+1\right)^3\left(\dfrac{4x}{3}\right)^3+4\left(\dfrac{x}{3}+1\right)^4\left(\dfrac{4x}{3}\right)^2$

f) $f'(x)=-10x(x^2-3)^{-6}(x-x^2)+(1-2x)(x^2-3)^{-5}$

g) $f'(x)=2x^{-2}(x^{-1}-2)^{-3}(1+x^2)+2x(x^{-1}-2)^{-2}$

h) $f'(x)=(x-1)^2(x-2)^3+2x(x-1)(x-2)^3+3x(x-1)^2(x-2)^2$

i) $f'(x)=(2x+1)(x+2x^2)(x+1)+(x^2+x)(1+4x)(x+1)+(x^2+x)(x+2x^2)$

j) $f'(x)=\left(3x^2+7\right)\left(x^7+5x^2\right)+\left(x^3+7x\right)\left(7x^6+10x\right)$

k) $f'(x)=\dfrac{(x+1)^{-1/2}}{2}\sqrt[3]{x-1}+\dfrac{(x-1)^{-2/3}}{3}\sqrt{x+1}$

l) $f'(x)=\sqrt{x^2+1}(x+1)^2+\dfrac{x^2}{2\sqrt{x^2+1}}(x+1)^2+2x\sqrt{x^2+1}(x+1)$

Funciones racionales

Reglas de derivación:

$$f(x)=\frac{1}{v}\rightarrow f'(x)=-\frac{v'}{v^2}$$

$$f(x)=\frac{u}{v}\rightarrow f'(x)=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

Ejemplos:

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}\rightarrow f'(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f(x)=\frac{x^2}{x^{100}+4x}\rightarrow f'(x)=\frac{2x(x^{100}+4x)-(100x^{99}+4)x^2}{(x^{100}+4x)^2}$$

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^3+1}\rightarrow f'(x)=\frac{2x(x^3+1)-3x^2(x^2+1)}{(x^3+1)^2}$$

Ejercicios:

6º Derive las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^3-2x}$ b) $f(x)=\dfrac{1}{x^5-6x^2}$ c) $f(x)=\dfrac{1}{\left(4x-x^2\right)^3}$

Sol:

a) $f(x)=-\dfrac{3x^2-2}{\left(x^3-2x\right)^2}$ b) $f'(x)=-\dfrac{5x^4-12x}{\left(x^5-6x^2\right)^2}$ c) $f(x)=-\dfrac{5\cdot(4-2x)}{\left(4x-x^2\right)^5}$

7º Usando las reglas de derivación anteriores derive las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^3-3}{x^2-1}$ b) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ c) $f(x)=\dfrac{(x+3)^2}{x-2}$ d) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$

e) $f(x)=\dfrac{(x-1)^3}{3x}$ f) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{3x}}$ g) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x}}{x}$ h) $f(x)=\dfrac{x^i+1}{x^e-2}$

Sol:

a) $f'(x)=\dfrac{3x^2\cdot\left(x^2-1\right)-2x\cdot\left(x^3-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$ b) $f'(x)=\dfrac{3x^2\left(x^2+1\right)-2x^4}{\left(x^2+1\right)^2}$

c) $f'(x)=\dfrac{2(x+3)(x-2)-(x+3)^2}{(x-2)^2}$ d) $f'(x)=\dfrac{2x\left(x^2-1\right)-2x^3}{\left(x^2-1\right)^2}$

e) $f'(x)=\dfrac{9x(x-1)^2-3(x-1)^3}{9x^2}$ f) $f'(x)=\dfrac{1}{3x}\left(\sqrt{3x}-x\dfrac{3}{2\sqrt{3x}}\right)$

g) $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}\left(x\dfrac{3}{2\sqrt{3x}}-\sqrt{3x}\right)$ h) $f'(x)=\dfrac{ix^i(x^e-2)-ex^e(x^i+1)}{(x^e-2)^2}$

8º Demostrar que las siguientes funciones tienen por derivada:

a) $f(x)=\dfrac{x^4-1}{x^2+1}\rightarrow f'(x)=2x$ b) $f(x)=\dfrac{x^4+3x^3+x^2}{x^2+3x+1}\rightarrow f'(x)=2x$

c) $f(x)=\dfrac{x^4+3x^3+3x^2+x}{x^3+2x^2+x}\rightarrow f'(x)=1$ h) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+2x+1}}\rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$

Funciones exponenciales

Reglas de derivación:

$$\boxed{f(x)=a^u \rightarrow f'(x)=u'a^u \ln a} \qquad \boxed{f(x)=e^u \rightarrow f'(x)=u'e^u}$$

Ejemplos:

$$f(x)=e^{4x+3} \rightarrow f'(x)=4e^{4x+3}$$

$$f(x)=e^{x^2+3x} \rightarrow f'(x)=\left(2x+3\right)e^{x^2+3x}$$

$$f(x)=2^{x^2} \rightarrow f'(x)=2x\cdot 2^{x^2}\ln 2$$

$$f(x)=2^{x^3+5x^2} \rightarrow f'(x)=\left(3x^2+10x\right)2^{x^3+5x^2}\ln 2$$

$$f(x)=\sqrt[x+2]{2^x}=2^{\frac{x}{x+2}} \rightarrow f'(x)=\left(\frac{2}{\left(x+2\right)^2}\right)2^{\frac{x}{x+2}}\ln 2$$

Ejercicios:

9º Usando las reglas de derivación anteriores derive las siguientes funciones:

a) $f(x)=e^{x^3+2x}$ b) $f(x)=e^{2x+1}$ c) $f(x)=e^{-x^2}$ d) $f(x)=e^{x^7+5x^6+3}$

e) $f(x)=2^{x^3+2x}$ f) $f(x)=3^{2x+1}$ g) $f(x)=4^{-x^2}$ h) $f(x)=\pi^{x^7+5x^6+3}$

Sol:

a) $f'(x)=(3x^2+2)\cdot e^{x^3+2x}$ b) $f'(x)=2e^{2x+1}$ c) $f'(x)=-2xe^{-x^2}$

d) $f'(x)=(7x^6+30x^5)\cdot e^{x^7+5x^6+3}$ e) $f'(x)=(3x^2+2)\cdot 2^{x^3+2x}\cdot\ln 2$

f) $f'(x)=2\cdot 3^{2x+1}\ln 3$ g) $f'(x)=-2x\cdot 4^{-x^2}\cdot\ln 4$

h) $f'(x)=(7x^6+30x^5)\cdot\pi^{x^7+5x^6+3}\cdot\ln\pi$

10º Derive las siguientes funciones:

a) $f(x)=e^{x^2}+e^{x+1}+5$ b) $f(x)=e^{x^2-2x}+2^x$ c) $f(x)=xe^x+e^x+e$

d) $f(x)=x^4e^{3x}+xe^{x+1}$ e) $f(x)=\left(\left(\left(e^x\right)^x\right)^x\right)^x$ f) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\sqrt[x]{e^{6x+1}}}}$

g) $f(x)=4^x+7^{x^2+3x}$ h) $f(x)=\left(2^{x^2-3}\right)^x$ i) $f(x)=10^{e^x}$

j) $f(x)=4^{x^3}+e^{x^6}+1$ k) $f(x)=\sqrt[x]{e}+\sqrt[x-2]{2}$ l) $f(x)=\sqrt[e^x]{5}+x^e+e^{\sqrt{7}}$

Sol:

a) $f'(x)=2xe^{x^2}+e^{x+1}$ b) $f'(x)=(2x-2)e^{x^2-2x}+2^x\ln 2$

c) $f'(x)=2e^x+xe^x$ d) $f'(x)=4x^3e^{3x}+3e^{3x}x^4+e^{x+1}+xe^{x+1}$

e) $f'(x)=4x^3e^{x^4}$ f) $f'(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{x^2}e^{-\frac{6x+1}{x}}$

g) $f'(x)=4^x\cdot\ln 4+(2x+3)\cdot 7^{x^2+3x}\cdot\ln 7$ h) $f'(x)=(3x^2-3)2^{x^3-3x}$

i) $f'(x)=e^x 10^{e^x}\ln 10$ j) $f'(x)=3x^2 4^{x^3}\ln 4+6x^5e^{x^6}$

k) $f'(x)=-\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}-\dfrac{2^{\frac{1}{x-2}}}{(x-2)^2}\ln 2$ l) $f(x)=-\dfrac{5^{\frac{1}{e^x}}}{e^{2x}}\ln 5+e\cdot x^{e-1}$

Funciones logarítmicas

Reglas de derivación:

$$f(x)=\log_a u \rightarrow f'(x)=\frac{u'}{u}\log_a e \qquad f(x)=\ln u \rightarrow f'(x)=\frac{u'}{u}$$

Ejemplos:

$$f(x)=\log_4(8x+x^3) \rightarrow f'(x)=\frac{8+3x^2}{8x+x^3}\log_4 e$$

$$f(x)=\ln(3x^4+7) \rightarrow f'(x)=\frac{12x^3}{3x^4+7}$$

Ejercicios:

11º Usando las reglas de derivación anteriores derive las siguientes funciones:

a) $f(x)=\ln(3x-1)$ b) $f(x)=\ln(x^2-3x)$ c) $f(x)=\ln(x^3-2x^4)$

d) $f(x)=\log(6x-5)$ e) $f(x)=\log(2x^2-x)$ f) $f(x)=\log(2x^5-x^{-2})$

g) $f(x)=\log_2(6x-x^2)$ h) $f(x)=\log_3(3x^2-x^6)$ i) $f(x)=\log_5(x^2-8x)$

Sol:

a) $f'(x)=\dfrac{3}{3x-1}$ b) $f'(x)=\dfrac{2x-3}{x^2-3x}$ c) $f'(x)=\dfrac{3x^2-8x^3}{x^3-2x^4}$

d) $f'(x)=\dfrac{6}{6x-5}\log e$ e) $f'(x)=\dfrac{2x-1}{2x^2-x}\log e$ f) $f'(x)=\dfrac{10x^4+2x^{-3}}{2x^5-x^{-2}}\log e$

g) $f'(x)=\dfrac{6-2x}{6x-x^2}\log_2 e$ h) $f'(x)=\dfrac{6x-6x^5}{3x^2-x^6}\log_3 e$ i) $f'(x)=\dfrac{2x-8}{x^2-8x}\log_5 e$

12º Derive las siguientes funciones:

a) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^3}{5}\right)$ b) $f(x)=x\ln(x+1)$ c) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x^2}\right)^3$

d) $f(x)=\dfrac{1}{\ln\sqrt{x}}$ e) $f(x)=\ln\sqrt{x-2}$ f) $f(x)=\log_2\left(x^{\sqrt{7}}\right)$

g) $f(x)=\log_{50}\left(\sqrt{4x^3+5}\right)$ h) $f(x)=\dfrac{\ln x}{3^x}$ i) $f(x)=\ln\left(1+e^{x^4+1}\right)$

j) $f(x)=e^{1+\ln x}$ k) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^2-x}{x^2+4}\right)$ l) $f(x)=\ln\left(\ln\left(\ln x\right)\right)$

Sol:

a) $f'(x)=\dfrac{3}{x}$ b) $f'(x)=\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}$ c) $f'(x)=\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{6}{x}$

d) $f'(x)=\dfrac{-2}{x(\ln x)^2}$ e) $f'(x)=\dfrac{1}{2(x-2)}$ f) $f'(x)=\dfrac{\sqrt{7}}{x}\log_2 e$

g) $f'(x)=\dfrac{6x^2}{4x^3+5}\log_{50} e$ h) $f'(x)=\dfrac{3^{-x}}{x}-3^{-x}\ln 3\cdot\ln x$ i) $f'(x)=\dfrac{4x^3e^{x^4+1}}{1+e^{x^4+1}}$

j) $f'(x)=\dfrac{1}{x}e^{1+\ln x}=e$ k) $f'(x)=\dfrac{x^2+8x-4}{(x^2+4)\cdot(x^2-x)}$ l) $f'(x)=\dfrac{1}{x\cdot\ln(x)\cdot\ln\left(\ln x\right)}$

Funciones trigonométrica

Reglas de derivación:

$$\boxed{f(x)=\sin u \to f'(x)=u'\cdot\cos u} \qquad \boxed{f(x)=\cos u \to f'(x)=-u'\cdot\sin u}$$

$$\boxed{f(x)=\tan u \to f'(x)=\frac{u'}{\cos^2 u}}$$

Ejemplos:

$f(x)=\sin(4x^2)\to f'(x)=8x\cos(4x^2)$ $\qquad$ $f(x)=\cos(x^2)\to f'(x)=-2x\sin(x^2)$

$f(x)=\tan(x^3-x)\to f'(x)=\dfrac{3x^2-1}{\cos^2(x^3-x)}$ $\qquad$ $f(x)=\tan(\sin(x))\to f'(x)=\dfrac{-\cos x}{\cos^2(\sin(x))}$

Ejercicios:

13º Usando las reglas de derivación anteriores derive las siguientes funciones:

a) $f(x)=\cos(3x)$ b) $f(x)=\sin(3x^2-2)$ c) $f(x)=4\sin x-3\cos x$

d) $f(x)=\sin(3x+5)$ e) $f(x)=\cos(\sin x)$ f) $f(x)=\sin\left(2x^6+7\right)$

g) $f(x)=\tan\left(x^3+2\right)$ h) $f(x)=\tan\left(2x^7+2x\right)$ i) $f(x)=\tan\left(x-\cos x\right)$

Sol:

a) $f'(x)=-3\sin(3x)$ b) $f'(x)=6x\cdot\cos(3x^2-2)$ c) $f'(x)=4\cos x+3\sin x$

d) $f'(x)=3\cos(3x+5)$ e) $f'(x)=-\cos x\sin(\sin x)$ f) $f'(x)=12x^5\cdot\cos\left(2x^6+7\right)$

g) $f'(x)=\dfrac{3x^2}{\cos^2(x^3+2)}$ h) $f'(x)=\dfrac{14x^6+2}{\cos^2\left(2x^7+2x\right)}$ i) $f'(x)=\dfrac{1+\sin x}{\cos^2\left(x-\cos x\right)}$

14º Derive las siguientes funciones y simplifíquelas si fuese posible:

a) $f(x)=\sin\left(\sqrt{3x^2-5x}\right)$ b) $f(x)=\sin^2(x)$ c) $f(x)=3\sin^2(2x-3)$

d) $f(x)=\sqrt[5]{\sin(3x)}$ e) $f(x)=\cos^2(x^3)$ f) $f(x)=\cos^4(3x^4)$

g) $f(x)=\sin(x^2)\cos(x)$ h) $f(x)=\sqrt{\cos^2 x-\sin^2 x}$ i) $f(x)=\tan x\cos x$

j) $f(x)=\sqrt{2\tan x\sin(2x)}$ k) $f(x)=\sqrt[6]{\tan\sqrt{x}}$ l) $f(x)=\cot an(x)$

Sol:

a) $f'(x)=\dfrac{6x-5}{2\sqrt{3x^2-5x}}\cos\left(\sqrt{3x^2-5x}\right)$ b) $f'(x)=2\sin x\cos x$

c) $f'(x)=12\sin(2x-3)\cos(2x-3)$ d) $f'(x)=\dfrac{3\cos(3x)}{5\sqrt[5]{(\sin(3x))^4}}$

e) $f'(x)=-6x^2\sin x^3\cos x^3$ f) $f'(x)=-48x^3\sin(3x^4)\cos^3(3x^4)$

g) $f'(x)=2x\cos(x^2)\cos x-\sin(x^2)\sin x$ h) $f'(x)=\dfrac{-\sin(2x)}{\sqrt{\cos(2x)}}$

i) $f'(x)=\cos x$ j) $f'(x)=4\cos(2x)$

k) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}\dfrac{1}{6\sqrt[6]{\left(\tan\sqrt{x}\right)^5}}$ l) $f'(x)=\dfrac{-1}{\sin^2 x}$

Reglas de derivación:

$$f(x)=\arcsin u \rightarrow f'(x)=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \qquad f(x)=\arccos u \rightarrow f'(x)=\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$f(x)=\arctan u \rightarrow f'(x)=\frac{u'}{1+u^2}$$

Ejemplos:

$$f(x)=\arcsin(x^3) \rightarrow f'(x)=\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}} \qquad f(x)=\arctan(e^{3x}) \rightarrow f'(x)=\frac{3e^{3x}}{1+e^{6x}}$$

$$f(x)=\arccos\left(e^x+x\right) \rightarrow f'(x)=-\frac{e^x+1}{\sqrt{1-(e^x+x)^2}}$$

Ejercicios:

15º Usando las reglas de derivación anteriores derive las siguientes funciones:

a) $f(x)=\arcsin\left(x^3\right)$ b) $f(x)=\arcsin\left(x+1\right)$ c) $f(x)=\arcsin\left(e^{5x}\right)$

d) $f(x)=\arccos\left(2x^5+x\right)$ e) $f(x)=\arccos\left(e^{3x}+5x\right)$ f) $f(x)=\arccos\left(\ln x\right)$

g) $f(x)=\arctan\left(x^2\right)$ h) $f(x)=\arctan\left(x^4+3x\right)$ i) $f(x)=\arctan\left(\ln x\right)$

Sol:

a) $f'(x)=\dfrac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$ b) $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(x+1\right)^2}}$ c) $f'(x)=\dfrac{5e^{5x}}{\sqrt{1-e^{10x}}}$

d) $f'(x)=-\dfrac{10x^4+1}{\sqrt{1-\left(2x^5+x\right)^2}}$ e) $f(x)=-\dfrac{3e^{3x}+5}{\sqrt{1-\left(e^{3x}+5x\right)^2}}$ f) $f(x)=-\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\ln x\right)^2}}$

g) $f'(x)=\dfrac{2x}{1+x^4}$ h) $f'(x)=\dfrac{4x^3+3}{1+\left(x^4+3x\right)^2}$ i) $f'(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)\cdot\dfrac{1}{1+(\ln x)^2}$

16º Derive las siguientes funciones y simplifíquelas si fuese posible:

a) $f(x)=\arcsin\left(\dfrac{x+1}{e^x}\right)$ b) $f(x)=e^{\cos x}\arcsin x$ c) $f(x)=\dfrac{\arcsin(3x-2)}{x}$

d) $f(x)=\arcsin(\arccos x)$ e) $f(x)=\arccos\sqrt{1-\sin^2 x}$ f) $f(x)=\sin^2(\arccos x)$

Sol:

a) $f'(x)=\dfrac{-x}{e^x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x+1}{e^x}\right)^2}}$ b) $f'(x)=-\sin(x)\cdot e^{\cos x}\arcsin x+\dfrac{e^{\cos x}}{\sqrt{1-x^2}}$

c) $f'(x)=\dfrac{\dfrac{3}{\sqrt{1-(3x-2)^2}}-\arcsin(3x-2)}{x^2}$ d) $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-\arccos^2 x}}$

e) $f'(x)=1$ f) $f'(x)=-2x$

Introducción a la combinatoria.

1. Introducción.

La combinatoria es una rama de las matemáticas que estudia colecciones finitas de objetos que satisfacen unos criterios especificados, y se ocupa, en particular, del "recuento" de los objetos de dichas colecciones (combinatoria enumerativa) y del problema de determinar si cierto objeto "óptimo" existe (combinatoria extremal). Nosotros nos centraremos en el estudio de la combinatoria enumerativa.

Se puede considerar que en Occidente la combinatoria surge en el siglo XVII con los trabajos de Blaise Pascal y de Pierre Fermat sobre la teoría de juegos de azar. Estos trabajos, que formaron los fundamentos de la teoría de la probabilidad, contenían asimismo los principios para determinar el número de combinaciones de elementos de un conjunto finito, y así se estableció la tradicional conexión entre combinatoria y probabilidad.

Blaise Pascal
(1623-1662)

2. Principio o teorema del palomar o de Dirichlet.

"Si se reparten *n* objetos (palomas) en *k* cajas (nidos), y *n* es mayor que *k*, entonces necesariamente alguna de las cajas (nidos) recibe más de un objeto (palomas)." Es decir, imaginémonos que tenemos un palomar con 9 nidos, y que hay un total de 10 palomas que desean ocuparlos, si finalmente todas las palomas terminan metidas en los nidos, esto significa que existe al menos un nido en el que como mínimo hay dos palomas metidas.

A este principio, se le conoce como principio del palomar. No es un teorema que te permita calcular algo concreto, ni tampoco es un teorema que garantice la unicidad de la solución buscada, pues podría haber dos nidos con dos palomas y un nido quedar vacío. El principio del Palomar, a pesar de su simplicidad, usualmente es utilizado para probar la existencia de un número determinado de configuraciones sobre conjuntos finitos. Veamos otros ejemplos:

Ejemplos:

E1 En una fiesta a la que asisten 400 personas, ¿cuántos de los asistentes, como mínimo, podrían encontrar otra persona en la fiesta que tuviese su mismo día de aniversario?

Solución: Como el número de días que tiene un año es de 365 días y hay un total de cuatrocientas personas, esto significa por el principio del palomar, que al menos existe un día en el que como mínimo dos personas cumplen años.

E2 Si las personas tenemos un máximo de 100000 pelos en la cabeza y Madrid tiene un millón de habitantes ¿existen dos personas con idéntica cantidad de pelos en sus respectivas cabezas?

Solución: Nuevamente, y según el principio del palomar, el número de Madrileños es mayor que el número de pelos que una persona tiene en la cabeza, luego existen dos personas con idéntica cantidad de pelos en sus cabezas en Madrid.

3. Principios básicos en combinatoria.

El análisis combinatorio, que incluye el estudio de las permutaciones, variaciones y combinaciones, está relacionado con la determinación del número de posibilidades lógicas de que un suceso ocurra. Existen dos principios fundamentales para el cálculo.

Principio de la suma:

Supongamos que un suceso *E* puede ocurrir de *m* maneras y un segundo suceso *F* puede ocurrir de *n* maneras, y supongamos que ambos sucesos no pueden ocurrir al mismo tiempo. Entonces, los sucesos *E* o *F* pueden ocurrir de $m + n$ maneras.

Principio del producto:

Supongamos que un suceso *E* puede ocurrir de *m* maneras y, que, independientemente de este suceso, existe otro *F* que puede ocurrir de *n* maneras. Entonces las combinaciones de *E* y *F* pueden ocurrir de $m\cdot n$ maneras.

Ejemplos:

E3 Un restaurante tiene en su menú del día cuatro primeros, tres segundos y cinco postres. El restaurante oferta en total: 4 + 3 + 5 = 9 platos distintos a sus clientes, aquí usamos el principio de la suma. Un cliente que acuda al restaurante y consuma íntegramente la oferta del menú, puede comer de 4·3·5 = 60 formas diferentes, estamos usando el principio del producto.

E4 Una carrera cuenta con 4 grupos de matemáticas, 2 de química y 3 de física en un curso de primero y a horarios distintos. La universidad en total oferta en primero 4 + 2 + 3 = 9 posibilidades si escogemos un curso de cada, estamos aplicando ahora el principio de la suma. Pero si un alumno debe matricularse en las tres materias, esto significa que puede escoger un total 4·2·3 = 24 horarios diferentes, estamos aplicando ahora el principio de la multiplicación.

4. El factorial de un número entero.

Para todo número natural *n*, se llama factorial de *n* al producto de todos los naturales desde 1 hasta *n*. Es representado como un número al que se le ha colocado al lado un signo de exclamación, es decir:

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1 \qquad (1)$$

Veamos unos ejemplos.

Ejemplos:

E5 Calcule el factorial de todos los números del 1 al 9.

Solución: Utilizando la expresión (1):

$1! = 1$

$2! = 2\cdot1 = 2$

$3! = 3\cdot2\cdot1 = 6$

$4! = 4\cdot3\cdot2\cdot1 = 24$

$5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120$

$6! = 6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 720$

$7! = 7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 5040$

$8! = 8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 40320$

$9! = 9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 362880$

$10! = 10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 3628800$

Matemáticamente, se define que el factorial del cero es uno ($0! = 1$).

5. Combinaciones sin repetición.

Una combinación de m objetos tomados de n en n es cualquier selección n de los objetos, sin importarnos el orden. El número de combinaciones sin repetición viene dado por la expresión:

$$C_{m,n} = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} \qquad (2)$$

Ejemplo:

E6 ¿De cuantas formas es posible combinar de tres en tres las letras a, b, c y d?

Solución: Las combinaciones posibles son cuatro:

$$(a,b,c) \qquad (a,b,d) \qquad (a,d,c) \qquad (d,b,c)$$

El orden de las letras da igual, solo hay cuatro formas de combinar las letras. Utilizando la expresión (2):

$$C_{4,3} = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$$

E7 Siete amigos hacen cola para el cine. Al llegar sólo quedan 4 entradas. ¿De cuántas formas podrían repartirse estas entradas para ver la película?

Solución: Se trata de siete elementos tomados de 4 en 4 sin importarnos el orden. Podemos aplicar la expresión (2) para combinaciones:

$$C_{7,4} = \binom{7}{4} = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4!}{4!\cdot3!} = \frac{7\cdot6\cdot5}{3!} = 7\cdot5 = 35$$

E8 ¿De cuantas formas es posible extraer tres cartas de un conjunto de cuarenta?

Solución: No importa el orden de la extracción de las cartas, luego son combinaciones de cuarenta cartas tomadas de tres en tres. Usando la expresión (2):

$$C_{40,3} = \binom{40}{3} = \frac{40!}{3!(40-3)!} = \frac{40!}{3!\cdot37!} = \frac{40\cdot39\cdot38\cdot37!}{3!\cdot37!} = \frac{40\cdot39\cdot38}{3\cdot2} = 9880$$

E9 De un grupo de 12 alumnos deben formarse dos equipos de cuatro participantes para que asistan a tres pruebas diferentes. ¿Cuántas clasificaciones distintas pueden realizarse?

Solución: Como no importa el orden, se trata de combinaciones. Hay que formar dos equipos de cuatro personas, para el primero equipo consideraremos combinaciones de 12 personas tomadas de 4 en 4:

$$C_{12,4} = \binom{12}{4} = \frac{12!}{4!(12-4)!} = \frac{12!}{4!\cdot8!} = \frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8!}{4!\cdot8!} = \frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{4\cdot3\cdot2} = 495$$

El segundo equipo como combinaciones de 8 personas tomadas de 4 en 4:

$$C_{8,4} = \binom{8}{4} = \frac{8!}{4!(8-4)!} = \frac{8!}{4!\cdot4!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4!}{4!\cdot4!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2} = 70$$

Calculamos ahora todas las combinaciones posibles usando el principio del producto:

$$N = C_{12,4}\cdot C_{8,4} = 495\cdot70\cdot1 = 34650$$

Ejercicios:

1º ¿Cuántas comisiones de tres alumnos pueden formarse con los 35 alumnos de una clase? **Sol:** 6545.

2º Con una baraja de 52 cartas, ¿cuántos grupos diferentes de cinco cartas se pueden hacer? Sol: 2598960.

3º Cuantos equipos de 5 atletas se podrían formar para participar en una competición con los doce atletas mejor preparados? **Sol:** 792.

4º En una carrera en la que toman parte 8 caballos se juega una apuesta que consiste en acertar los dos primeros sin tener en cuenta el orden. ¿Cuántas apuestas diferentes pueden jugarse en esa carrera? **Sol:** 28.

5º En una liga de baloncesto juegan 20 equipos, todos contra todos dos veces, ida y vuelta. ¿Cuántos partidos se habrán jugado al final de la misma? **Sol:** 380.

6º En una empresa de 48 trabajadores, hay que despedir a 6. ¿Cuántas combinaciones de trabajadores se pueden despedir? **Sol:** 12271512.

7º Un club de baloncesto dispone de 10 jugadores de los cuales juegan 5 a la vez. ¿Cuántos equipos distintos de 5 jugadores pueden sacar el entrenador para cada partido? **Sol:** 252.

8º Suponiendo que existieran 100 elementos distintos en la naturaleza y que cada sustancia estuviese formada por tres exclusivamente, y todos diferentes. ¿Cuántas sustancias distintas tendríamos? **Sol:** 161700.

9º En una reunión hay diez personas. ¿Cuántos grupos de tres personas se pueden formar? **Sol:** 120.

10º Para jugar al dominó, siete fichas hacen un juego. Si el dominó tiene 28 fichas, ¿cuántos juegos diferentes se pueden hacer? **Sol:** 1184040.

11º En una línea férrea hay 18 estaciones. Si el tren para en todas las estaciones, ¿cuántos tipos de billetes de viajes distintos de ida y vuelta pueden realizarse entre ellas? **Sol:** 153.

12º Con solo seis pesas de 1, 2, 5, 10, 20 y 50 g, ¿Cuántas pesadas posibles pueden hacerse? **Sol:** 63.

13º Un estudiante tiene que contestar 8 de las 10 preguntas de un examen. ¿De cuántas formas diferentes puede contestar? ¿Y si las tres primeras son obligatorias? ¿Y si de las cinco primeras ha de contestar a cuatro? **Sol:** 45, 21, 25.

14º Una persona está interesada en contar todos los posibles resultados en el juego de la Lotería Primitiva (49 números del 1 al 49 y debemos elegir 6). ¿Cuantos boletos diferentes debe hacer para tener garantizado que le toque la lotería? **Sol:** 13983816.

15º Existen 10 tipos de antiretrovirales contra el VIH. Para evitar resistencias del virus a un tratamiento con solo antiretroviral, se suelen administrar tres al mismo tiempo. ¿Cuántas terapias diferentes de tres antiretrovirales nos es posible diseñar? **Sol:** 120.

6. Combinaciones con repetición.

Es el conjunto de todas las disposiciones distintas que se pueden formar tomando *n* elementos entre los *m*, en los que eventualmente pueden aparecer elementos repetidos y con la condición de que dos disposiciones serán distintas si tienen distintos elementos, es decir, no se tiene en cuenta el orden en la disposición. El número de disposiciones se calcula mediante la expresión:

$$CR_{m,n} = \binom{m+n-1}{n} = \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!} \qquad (3)$$

Ejemplos:

E10 Se reparten 3 becas iguales en una clase de 10 alumnos. Los alumnos, pueden optar a más de una beca. ¿De cuantos modos posibles pueden repartirse estas becas entre los diez alumnos?

Solución: Al ser iguales las becas, no es posible darles un orden de importancia, y como un alumno puede optar a más de una beca, estamos ante combinaciones con repetición:

$$CR_{10,3} = \binom{10+3-1}{3} = \frac{(10+3-1)!}{3!(10-1)!} = \frac{12!}{3!\cdot 9!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1} = 220$$

E11 ¿Cuántas fichas tiene el juego del dominó?

Solución: Una ficha de dominó es un rectángulo en el que hay dos partes, en cada una de ellas hay una serie de puntos (de 0 a 6) que indican la puntuación de esa parte.

$$CR_{7,2} = \binom{7+2-1}{2} = \frac{(7+2-1)!}{2!(7-1)!} = \frac{8!}{2!\cdot 6!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6!}{2\cdot 6!} = \frac{8\cdot 7}{2} = 28$$

E12 Una urna contiene 7 bolas de colores, dos rojas, dos blancas y tres negras. Calcular todas las combinaciones posibles de tres en tres.

Solución: Desarrollaremos el problema como combinaciones con repetición de tres elementos tomados de tres en tres.

$$CR_{3,3} = \binom{3+3-1}{3} = \frac{(3+3-1)!}{3!(3-1)!} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$$

Pero ahora, hay que descontar dos casos, el caso de las tres bolas rojas y el de las tres blancas, pues no podemos sacar de la urna más que dos bolas rojas o dos blancas. Por tanto el número total de casos es de:

$$N = 10 - 2 = 8$$

E13 Las notas de una clase de 10 alumnos pueden ser, suspenso, aprobado, notable, sobresaliente y matricula de honor. Cuantas combinaciones de notas con los 10 alumnos es posible obtener en esa clase.

Solución: Se trata de combinaciones con repetición de cinco elementos tomados de diez en diez.

$$CR_{5,10} = \binom{5+10-1}{10} = \frac{(5+10-1)!}{10!(5-1)!} = \frac{14!}{10!\cdot 4!} = \frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10!}{10!\cdot 4!} = \frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 1001$$

Ejercicios:

16º En una pastelería hay 6 tipos distintos de pasteles. ¿De cuántas formas se pueden elegir 4 pasteles? **Sol:** 126.

17º Calcula cuantos productos de dos factores se pueden formar con los dígitos 2, 3 y 5 si se pudiese repetir factores. **Sol:** 6.

18º En una bodega hay en un cinco tipos diferentes de botellas. ¿De cuántas formas se pueden elegir cuatro botellas? **Sol:** 70.

19º Suponiendo que existieran 100 elementos distintos en la naturaleza y que cada sustancia estuviese formada por tres exclusivamente, pudiendo en una misma sustancia haber elementos repetidos. ¿Cuántas sustancias distintas tendríamos? **Sol:** 171700.

20º Una determinada especie animal se compone de tres razas puras: rojos, blancos y amarillos. Cinco son los genes que determina la tonalidad de su piel, si son AAAAA es raza amarilla pura y si es BBBBB es blanco puro. Si la mezcla fuese AABBB es un amarillo bastante claro. ¿Cuántas mezclas genéticas podemos hacer? **Sol:** 21.

21º En un acuario queremos meter 20 peces. Tras visitar una tienda de acuarios, nos han gustado mucho los neones, las cebras y los guppis. ¿Cuantas combinaciones de peces para nuestro acuario podemos hacer? **Sol:** 1540.

22º Una máquina recreativa de un bar tiene tres ruletas en las cuales hay dibujadas seis frutas diferentes (cerezas, naranjas, kivis, limones, fresas y melones) y dos dibujos más (diamantes y monedas). Se hacen girar las ruletas, hasta que las tres quedan paradas. Calcular cuantos resultados posibles puede darnos la máquina sin importarnos el orden de los mismos. **Sol:** 120.

23º Las notas de una clase de 10 alumnos pueden ser, suspenso, aprobado, notable, sobresaliente y matricula de honor. Cuantas combinaciones de notas con los 10 alumnos es posible obtener en esa clase si tenemos en cuenta que está prohibido otorgar más de tres matrículas de honor. **Sol:** 671.

24º Una urna contiene 10 bolas de colores: 6 rojas y 4 verdes. Si extraemos 6 bolas de la urna al mismo tiempo, ¿cuántas combinaciones son posibles? **Sol:** 5.

25º Una urna contiene 10 bolas de colores: 4 rojas, 3 verdes y 3 azules. Si extraemos 6 bolas de la urna al mismo tiempo, ¿cuántas combinaciones son posibles? **Sol:** 13.

26º Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $CR_{x,3} = 2 \cdot CR_{x,2}$ b) $CR_{x,4} = 6 \cdot CR_{x,2}$ c) $CR_{x,4} = CR_{x,3} + \frac{7 \cdot CR_{x,2}}{3}$

Sol: a) 4; b) 6; c) 5.

7. Variaciones sin repetición.

Las variaciones sin repetición de *m* elementos tomados de *n* en *n* se definen como las distintas agrupaciones formadas con *n* elementos distintos, eligiéndolos de entre los *m* elementos de que disponemos, considerando una variación distinta a otra tanto si difieren en algún elemento como si están situados en distinto orden.

$$V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!} \tag{4}$$

Ejemplo:

E14 Una urna tiene 8 bolas diferentes. Si vamos sacando bolas de una en una y colocándolas por orden de extracción, calcule el número de posibles extracciones ordenadas si sacásemos 3 bolas mediante este procedimiento.

Solución: No hay repeticiones ya que no se devuelven las bolas a la urna y todas las bolas son diferentes. Como las extracciones son ordenadas (primera, segunda y tercera), tendremos un orden. Esto significa, que estamos ante un problema de variaciones con repetición, por tanto podemos calcular el número posible de extracciones mediante la expresión (4):

$$V_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 336$$

E15 ¿Cuántos números de tres cifras distintas podemos formar con los números 1, 2, 3, 4 y 5?

Solución: El orden importa porque hablamos de formar números de tres cifras. Se trata pues de variaciones de 5 elementos tomados de 3 en 3. Resolvemos por tanto mediante la expresión (4):

$$V_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$$

E16 ¿De cuantas formas pueden sentarse 10 personas en un banco si hay 4 sitios disponibles?

Solución: El orden de cómo se sienten las personas nos importa, ya que consideraremos que todos los sitios son diferentes y que es imposible que una persona esté en dos sitios al mismo tiempo. Por tanto, variaciones sin repetición:

$$V_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 5040$$

E17 Una organización estudiantil tiene que elegir un delegado y un subdelegado. Hay 7 candidatos. ¿Cuántas posibilidades existen para realizar la selección?

Solución: El orden de cómo se elijan los candidatos tomados de dos en dos importa, y no se puede ser delegado y subdelegado al mismo tiempo, es un caso de variaciones sin repetición:

$$V_{7,2} = \frac{7!}{(7-2)!} = \frac{7!}{2!} = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 2520$$

Ejercicios:

27º Con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ¿cuántos números de tres cifras distintas se pueden hacer? **Sol:** 210.

28º ¿De cuántas formas se pueden sentar tres personas en seis sillas? Sol: 120.

29º ¿De cuántas maneras diferentes se pueden repartir tres premios distintos entre Juan, Pedro, María, Alicia y Pilar? **Sol:** 60.

30º Se tienen 7 libros y solo 3 espacios en una biblioteca, y se quiere calcular de cuántas maneras se pueden colocar 3 libros elegidos; entre los siete dados, suponiendo que no existan razones para preferir alguno. **Sol:** 210.

31º Un entrenador de fútbol dispone en la plantilla de su equipo de 7 delanteros de la misma calidad y que pueden actuar indistintamente en los tres puestos de ataque del equipo (izquierda, centro y derecha). ¿Cuántas delanteras distintas podría confeccionar? **Sol:** 210.

32º Se reparten 3 premios distintos en una clase de 10 alumnos. ¿De cuantos modos posibles pueden repartirse estos premios entre los diez alumnos? **Sol:** 720.

33º Una línea de ferrocarril tiene 25 estaciones. ¿Cuántos tipos de billetes diferentes habrá que imprimir si cada billete lleva impresas las estaciones de origen y destino? **Sol:** 600.

34º Un barco tiene diez banderas diferentes para hacer señales y cada señal se forma colocando 4 banderas en un mástil, en orden vertical. ¿Cuántas señales distintas pueden hacer desde el barco? **Sol:** 5040.

35º ¿Cuántos números naturales existen que sean mayores que 5000 y menores que 8000 con todas las cifras diferentes? **Sol:** 1512.

36º El séxtuplo del número de combinaciones que se puede formar con *m* objetos tomados de 3 en 3 es igual al número de variaciones que se pueden formar con $m – 1$ objetos tomados de cuatro en cuatro. Halla el valor de *m*, suponiendo que es mayor que cuatro. **Sol:** $m = 6$.

37º La diferencia entre el número de variaciones binarias de *m* objetos y el de combinaciones binarias de los mismos *m* objetos es 136. Halla el número de objetos. **Sol:** $m = 17$.

38º En las variaciones sin repetición que podemos formar con las nueve cifras significativas tomadas de tres en tres, ¿cuántas veces está la cifra 7? **Sol:** 168.

39º Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $V_{x,2} = 20$ b) $V_{x,4} = 20 \cdot V_{x,2}$ c) $V_{x,2} + V_{x-2,2} + V_{x-4,2} = 98$

d) $V_{x,4} = 20 \cdot V_{x,2}$ e) $2 \cdot V_{x-1,2} - 4 = V_{x+1,2}$

Sol: a) 5; b) 7; c) 8; d) 7; e) 7.

8. Variaciones con repetición.

Las variaciones con repetición de *m* elementos tomados de *n* en *n* se definen como las distintas agrupaciones formadas con *n* elementos que pueden repetirse, eligiéndolos de entre los *m* elementos de que disponemos, considerando una variación distinta a otra tanto si difieren en algún elemento como si están situados en distinto orden.

$$VR_{m,n} = m^n \qquad (4)$$

Ejemplos:

E18 Una urna tiene 8 bolas numeradas del 1 al 8. Si vamos sacando bolas de una en una, anotando su cantidad y devolviéndolas a la urna antes de la siguiente extracción, calcule el número de posibles combinaciones, ordenadas por extracción, de números que podemos llegar a tener si sacásemos 3 bolas mediante este procedimiento.

Solución: Como las bolas son devueltas a la urna, habrá repeticiones. Como las extracciones son ordenadas (primera, segunda y tercera), tendremos un orden. Esto significa, que estamos ante un problema de variaciones con repetición, por tanto podemos calcular el número posible de extracciones mediante la expresión ():

$$VR_{8;3} = 8^3 = 512$$

E19 Se reparten 3 premios distintos en una clase de 10 alumnos. Pudiendo un alumno optar a más de un premio. ¿De cuantos modos posibles pueden repartirse estos premios entre los diez alumnos?

Solución: Nos importa el orden de los premios, ya que son distingibles. Un alumno puede repetir premio, luego se trata de variaciones con repetición:

$$VR_{10;3} = 10^3 = 1000$$

E20 Una matrícula de coche de un país europeo está formado por 3 letras elegidas entre 27 y 4 números escogidos entre los números comprendidos entre 0 y 9. ¿Cuántos coches se pueden matricular en cada país con este sistema?

Solución: Como el orden de colocación de las letras y los números importa, y como la cantidad de letras y números cogidos es inferior a los totales, hay que hacer por tanto dos problemas de variaciones con repetición, uno para las letras y otro para los números:

Para las letras: $VR_{27,3} = 27^3 = 19683$

Para los números: $VR_{10,4n} = 10^4 = 10000$

Multiplicando entre si ahora estas variaciones, obtendremos el número de coches que pueden matricularse en un país con este sistema:

$$VR_{27,3} \cdot VR_{10,4} = 196830000$$

E21 Resuelve: $VR_{x,2} - V_{x,2} = 17$

Solución: Usando las expresiones (3) y (4) con la ecuación:

$$VR_{x,2} - V_{x,2} = 17 \to x^2 - \frac{x!}{(x-2)!} = 17 \to x^2 - \frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)!}{(x-2)!} = 17 \to x^2 - x(x-1) = 17$$

$$x = 17$$

Ejercicios:

40º Cinco jueces de un deporte determinado disponen de una cartulina en la que por un lado hay un 1 y por el otro un 0. ¿Cuántas combinaciones pueden darse? **Sol:** 32.

41º ¿Cuántos resultados diferentes se producen al lanzar 5 dados de distinto color y anotar los resultados de la cara superior? **Sol:** 7776.

42º ¿Cuántas resultados distintos de partidos de fútbol hay que rellenar en las quinielas de fútbol para tener la seguridad de acertar cinco resultados? **Sol:** 243.

43º Si las matrículas de vehículos estuviesen formadas por un número de cuatro dígitos y de dos letras, sin repetirse ninguna (abecedario de 28). ¿Cuántas matrículas distintas se pueden formar? **Sol:** 7560000.

44º Con un punto y una raya (símbolos clásicos del alfabeto Morse) ¿Cuántas señales distintas de 5 dígitos pueden hacerse? **Sol:** 32.

45º Se dispone de siete colores para diseñar una bandera que tiene tres franjas horizontales de igual ancho pero de distinto color.

a) ¿Cuántas banderas se pueden diseñar que no tenga ningún color repetido?
b) ¿Y si se puede repetir los colores?

Sol: a) 210; b) 343.

46º Halla el número mínimo de habitantes que debe tener una ciudad para que sea inevitable que al menos dos habitantes tengan las mismas iniciales de su nombre y dos apellidos. Supón un alfabeto de 28 letras. **Sol:** 21953.

47º En las variaciones con repetición que podemos formar con las nueve cifras significativas tomadas de tres en tres, ¿cuántas veces está la cifra 7? **Sol:** 192.

48º ¿Cuántas quinielas de fútbol (con 15 partidos) hay que rellenar para asegurar un pleno? **Sol:** 14348907.

49º ¿Cuántos resultados diferentes se producen al lanzar 5 dados de distinto color y anotar los resultados de la cara superior? **Sol:** 7776.

50º Las cuatro bases nitrogenadas del ADN son guanina, adenina, citosina y timina. ¿Cuántos genes de 10 bases nitrogenadas podemos formar? **Sol:** 1048576.

51º ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9? Las cifras se pueden repetir. **Sol:** 900.

52º Cuantas palabras de 5 letras podemos formar con 28 letras de un alfabeto. **Sol:** 17210368.

53º El sistema numérico hexadecimal se construye con 16 números {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F}. Cuantos números de tres cifras podemos representar. **Sol:** 4096.

9. Permutaciones sin repetición.

Las permutaciones sin repetición de m elementos se definen como las distintas formas de ordenar todos esos elementos distintos, por lo que la única diferencia entre ellas es el orden de colocación de sus elementos. Básicamente son variaciones de m elementos tomados de m en m.

$$P_m = V_{m,m} = m! \tag{6}$$

Ejemplo:

E22 ¿De cuantas formas pueden colocarse en una fila cinco personas?

Solución: En este ejemplo apreciamos que importa el orden. Se trata de permutar cinco elementos de cinco en cinco, aplicando la expresión (5):

$$P_5 = 5! = 120$$

E23 De cuantas formas pueden ordenarse siete personas, entre las que figuran Juan y Maria, de manera que tanto Juan como María estén colocados uno al lado del otro.

Solución: Este es un problema de permutaciones sin repetición porque el orden importa y porque cogemos m elementos diferentes de m en m. Para resolver este problema, consideraremos que tanto Juan como María forman una sola persona, ya que son inseparables. De esta forma consideraremos que hay solo seis elementos permutando.

$$P_6 = 6! = 720$$

Juan y Maria también pueden permutar entre si, por tanto:

$$P_2 = 2! = 2$$

El número total de permutaciones posibles bajo las condiciones del problema será de:

$$N = P_2 \cdot P_6 = 2 \cdot 720 = 1440$$

E24 ¿Cuál es el número de colocaciones diferentes de 7 libros diferentes en una estantería de modo que tres libros determinados estén siempre separados entre sí?

Solución: Describamos mediante una tabla, el número de separaciones posibles de tres libros:

1º	X	X	X	X	X	X			
2º							X	X	
3º	X	X	X						X
4º				X	X		X	X	
5º	X					X			X
6º		X		X			X		
7º			X		X	X		X	X

En total, diez colocaciones. En cada una de esas colocaciones, podemos permutar de posición tres libros, y en las 4 restantes permutar los cuatro libros restantes.

$$P_3 = 3! = 6 \qquad\qquad P_4 = 4! = 24$$

Por el principio del producto, el número de casos totales será:

$$N = 10 \cdot 6 \cdot 24 = 1440$$

Ejercicios:

54º De cuantas formas distintas pueden sentarse cuatro personas alrededor de una mesa.
Sol: 6.

55º En una carrera participan cinco coches. ¿Cuántas clasificaciones se pueden producir al final, si cada uno de los coches emplean distintos tiempos? **Sol:** 120.

56º Un técnico de sonido tiene que unir 6 terminales en 6 conexiones. Si lo hiciera al azar, ¿de cuántas formas diferentes podría completar las conexiones? **Sol:** 720.

57º ¿De cuántas formas pueden sentarse 8 amigos en una fila de 8 butacas numeradas de un cine? **Sol:** 40320.

58º Con las letras de la palabra CINEMA:

a) ¿Cuántas palabras distintas, tengan sentido o no, se pueden formar?
b) ¿Cuántas terminan en A?
c) ¿Cuántas empiezan con N?
d) ¿Cuántas empiezan con C y terminan en I?
e) ¿Cuántas empiezan con vocal?
f) ¿Cuántas tienen vocal y consonante alternadas?

Sol: a) 720; b) 120; c) 120; d) 24; e) 360; f) 72.

59º Demostrar que:

$$C_{m,n} = \binom{m}{n} = \frac{V_{m,n}}{P_n}$$

60º Hay que colocar a 5 hombres y 4 mujeres en una fila de modo que las mujeres ocupen los lugares pares. ¿De cuantas maneras puede hacerse? **Sol:** 2880 maneras.

61º ¿Cuántos números distintos de seis cifras se pueden formar con cuatro "2" y cuatro "3"?
Sol: 50.

62º ¿De cuántas maneras pueden alinearse 10 personas, si 3 de ellas deben estar juntas?
Sol: 241920.

63º ¿Cuál es el número de colocaciones diferentes de 8 libros en una estantería de modo que cuatro libros determinados estén siempre separados entre sí? **Sol:** 2880.

64º Cuatro libros distintos de matemáticas, seis distintos física y dos distintos de química han de colocarse en una estantería. ¿Cuántas colocaciones distintas se admiten si los libros de cada materia han de estar juntos? **Sol:** 207360 colocaciones.

65º ¿Cuales de las siguientes expresiones tiene mayor valor: $C_{26,3}, P_6, V_{9,4}, VR_{6,4}$? **Sol:** $V_{9,4}$.

66º Resuelve las ecuaciones:

a) $P_{x+2} = P_3 \cdot P_x$ b) $P_x = P_4 - 3P_x$ c) $12 \cdot P_x + 5 \cdot P_{x+1} = P_{x+2}$

Sol: a) 1; b) 3; c) 5.

10. Permutaciones con repetición.

Es el conjunto de todas las disposiciones distintas que se pueden formar con los m elementos, en los que en cada disposición cada elemento puede aparecer, n_1, n_2, …, n_m veces repetido y esto en un orden determinado, con:

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n \qquad\qquad n_1, n_2, \ldots, n_m \geq 0$$

El número de disposiciones posibles se calcula mediante la expresión:

$$PR_{n;n_1,n_2,\ldots,n_m} = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_m!} \qquad (6)$$

Ejemplos:

E25 Calcular el número de permutaciones posibles que se pueden formar con las letras de las palabras:

a) UNUSUAL.
b) SOCIOLOGICAL.
c) GANAR

Solución: En este ejemplo apreciamos que importa el orden, y además de eso hay repetición de palabras. Se trata de permutaciones con repetición, por tanto, y por cada caso, emplearemos la expresión () para contar el numero total de permutaciones:

a) En la palabra UNUSUAL, la cantidad de veces repetida cada letra es:

$$n_{\mathrm{U}} = 3 \qquad n_{\mathrm{A}} = 1 \qquad n_{\mathrm{N}} = 1 \qquad n_{\mathrm{S}} = 1 \qquad n_{\mathrm{L}} = 1$$

Un total de letras de n = 7. El número de permutaciones será por tanto:

$$RP_{7;3,1,1,1,1} = \frac{7!}{3!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!} = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 840$$

b) En la palabra SOCIOLOGICAL, la cantidad de cada letra es:

$$n_{\mathrm{O}} = 3 \qquad n_{\mathrm{A}} = 1 \qquad n_{\mathrm{I}} = 2 \qquad n_{\mathrm{S}} = 1 \qquad n_{\mathrm{L}} = 2 \qquad n_{\mathrm{G}} = 1 \qquad n_{\mathrm{C}} = 2$$

Un total de letras de n = 12. El número de permutaciones será por tanto:

$$PR_{12;3,1,2,1,2,1,2} = \frac{12!}{3!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 2!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{8} = 9979200$$

b) En la palabra GANAR, la cantidad de cada letra es:

$$n_{\mathrm{G}} = 1 \qquad n_{\mathrm{A}} = 2 \qquad n_{\mathrm{N}} = 1 \qquad n_{\mathrm{R}} = 1$$

Un total de letras de n = 5. El número de permutaciones será:

$$PR_{5;1,2,1} = \frac{5!}{1!\cdot 2!\cdot 1!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2!}{2!} = 5\cdot 4\cdot 3 = 60$$

E26 De cuantas formas ordenadas en la parrilla de un programa pueden distribuirse cuatro actuaciones de canto y tres de humor.

Solución: Siete elementos que pueden distribuirse en siete posiciones y de forma ordenada, cuatro de canto y tres de humor, son permutaciones con repetición.

$$n_{\text{canto}} = 4 \qquad\qquad n_{\text{humor}} = 3$$

$$PR_{7;4,3} = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{6} = 35$$

Ejercicios:

67º ¿Cuántas quinielas hay que hacer que tengan cinco 1, cinco 2 y cuatro X? **Sol:** 252252.

68º ¿Cuántas quinielas hay que hacer que tengan trece 1 y una X? **Sol:** 14.

69º ¿De cuántas maneras se pueden ordenar las letras de la palabra AMASAS? **Sol:** 60.

70º ¿De cuántas formas podemos ordenar las letras de la palabra CALABAZA? **Sol:** 1680.

71º ¿Cuál es el número total de permutaciones que pueden formarse con las letras de la palabra MATEMATICA? **Sol:** 151200.

72º ¿Cuántas quinielas diferentes se pueden formar que tengan 8 unos, 3 equis y 4 doses? **Sol:** 225225.

73º Cuatro libros iguales de matemáticas, seis iguales de física y dos iguales de química han de colocarse en una estantería. ¿Cuántas colocaciones distintas se admiten de los libros? **Sol:** 13860 colocaciones.

74º De cuantas maneras se pueden colocarlas figuras blancas (un rey, una dama, dos alfiles, dos torres y dos caballos) en la primera fila del tablero de ajedrez. **Sol:** 5040.

75º ¿Cuántas palabras de 12 letras se pueden formar con la palabra AYUNTAMIENTO, de tal manera que siempre comiencen y terminen por vocal? **Sol:** 13608000.

76º Disponemos en un pequeño frigorífico de una huevera en la que pueden meterse ordenadamente diez huevos. ¿De cuántas formas ordenadas pueden colocarse 7 huevos indistinguibles? **Sol:** 120.

77º Si en un aula hay 10 asientos vacíos y numerados. ¿De cuántas formas ordenadas pueden sentarse 7 alumnos? **Sol:** 60480.

Ejercicios de probabilidad simple y compuesta.

1º Hay 87 canicas en una bolsa y 68 son verdes. Si se escoge una, ¿cuál es la probabilidad de que esta sea verde? **Sol:** 0.78.

2º ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar al aire dos dados, salgan dos números iguales? **Sol:** 1/6.

3º Tenemos una bolsa con nueve bolas numeradas del 1 al 9. Realizamos el experimento que consiste en sacar una bola y anotar el número. Calcula la probabilidad:

a) De sacar un número primo.
b) De sacar un número mayor que 8.

Sol: a) 5/9; b) 1/9.

4º Lanzamos al aire un dado dodecaédrico, es decir un poliedro regular con 12 caras, numeradas del 1 al 12. Calcular la probabilidad de:

a) Obtener un 8.
b) Obtener múltiplo de 3.
c) Obtener número primo.

Sol: a) 1/12; b) 1/3; c) 1/2.

5º De una urna que contiene 8 bolas rojas, 5 amarillas y 7 verdes se extrae una al azar. Calcula:

a) Probabilidad de sacar una bola roja.
b) Probabilidad de sacar una bola verde.
c) Probabilidad de sacar una bola roja o amarilla.
d) Probabilidad de sacar una bola amarilla o verde.

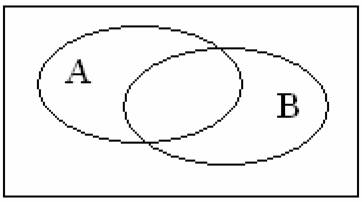
Sol: a) 2/5; b) 7/20; c) 13/20; d) 3/5.

6º En una clase hay 10 alumnas rubias, 20 morenas, 5 alumnos rubios y 10 morenos. Un día sólo asisten 44. Calcúlese la probabilidad de que la persona que falte sea:

a) Hombre.
b) Mujer.
c) Hombre rubio.
d) Mujer morena.
e) Hombre moreno o mujer rubia.
f) Hombre rubio o mujer morena.
g) Hombre o mujer.
h) Persona pelirroja.

Sol: a) 1/3; b) 2/3; c) 1/9; d) 4/9; e) 4/9; f) 5/9; g) 1; h) 0.

7º Dibuja en diagramas de Venn las siguientes probabilidades:



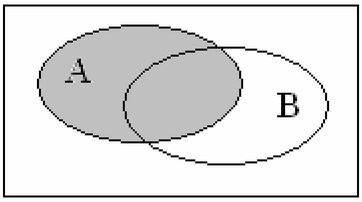
a) $P(\mathrm{A})$ b) $P(\mathrm{B})$ c) $P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$ d) $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$

e) $P(\overline{\mathrm{A}})$ f) $P(\overline{\mathrm{B}})$ g) $P(\overline{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}})$ h) $P(\overline{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}})$

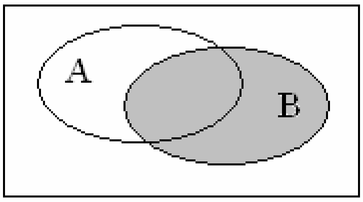
i) $P(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})$ j) $P(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}})$ k) $P(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}})$ l) $P(\overline{\mathrm{A}}\cup\overline{\mathrm{B}})$

Sol:

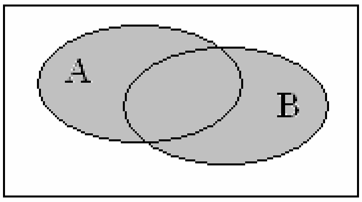
a)



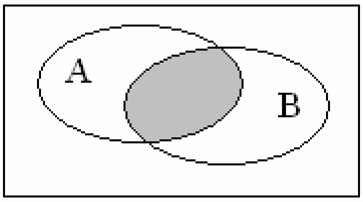
b)



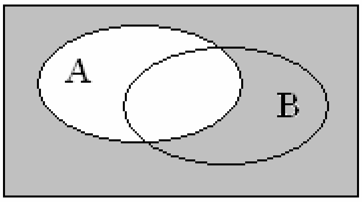
c)



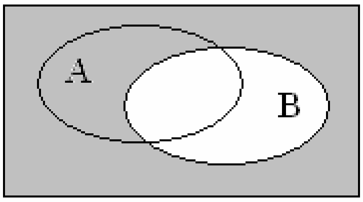
d)



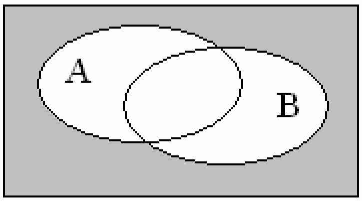
e)



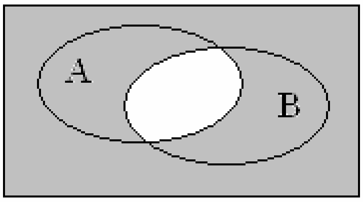
f)



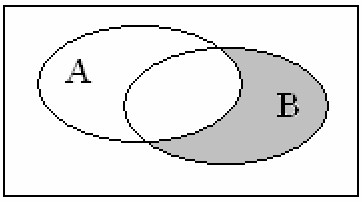
g)



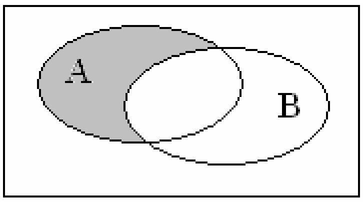
h)



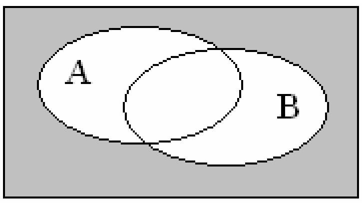
i)



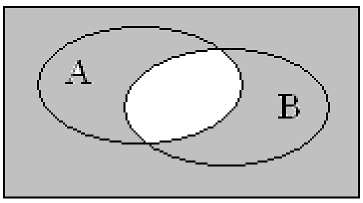
j)



k)



l)



8º Se consideran los siguientes sucesos:

$P(\mathrm{A}) = 0.6$ $\qquad$ $P(\mathrm{B}) = 0.8$ $\qquad$ $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0.5$

Calcula:

a) $P(\overline{\mathrm{A}})$ $\qquad$ b) $P(\overline{\mathrm{B}})$ $\qquad$ c) $P(\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}})$

d) $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$ $\qquad$ e) $P(\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}})$ $\qquad$ f) $P(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B})$

g) $P(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}})$ $\qquad$ h) $P(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}})$ $\qquad$ i) $P(\overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}})$

Sol: a) 0.4; b) 0.2; c) 0.5; d) 0.9; e) 0.1; f) 0.3; g) 0.1; h) 0.1; i) 0.5.

9º Sean A y B dos sucesos cualesquiera del mismo espacio de sucesos, tales que:

$$P(\mathrm{A})=\frac{3}{8} \qquad P(\mathrm{B})=\frac{1}{2} \qquad P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{1}{4}$$

Calcula:

a) $P(\overline{\mathrm{A}})$ b) $P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$ c) $P(\overline{\mathrm{A}}\cup\overline{\mathrm{B}})$

d) $P(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}})$ e) $P(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}})$ f) $P(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})$

Sol: a) 5/8; b) 5/8; c) 3/4; d) 3/8; e) 1/8; f) 1/4.

10º Sean A y B dos sucesos tales que:

$$P(\mathrm{A})=\frac{3}{8} \qquad P(\mathrm{B})=\frac{1}{2}$$

Calcula para qué valor de $P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$ los sucesos A y B son independientes. **Sol:** 11/16.

11º Sean A y B dos sucesos tales que:

$$P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\frac{4}{5} \qquad P(\overline{\mathrm{A}})=\frac{2}{5} \qquad P(\overline{\mathrm{B}})=\frac{1}{2}$$

a) ¿Son A y B incompatibles?
b) ¿Son A y B independientes?

Sol: a) No son incompatibles; b) Si lo son.

12º Sean A y B dos sucesos con probabilidades:

$$P(\mathrm{A}) = 0.4 \qquad P(\mathrm{B}) = 0.7$$

Determina los posibles valores del máximo y del mínimo de $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$ y las condiciones en que se consigue cada uno de estos valores. **Sol:** El mínimo es 0 y 0.4 el máximo.

13º Sean A, B y C tres sucesos independientes tales que:

$$P(\mathrm{A})=0.2 \qquad P(\mathrm{B})=0.8 \qquad P(\mathrm{C})=0.7$$

Halla las probabilidades de los sucesos siguientes:

a) $P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$ b) $P(\mathrm{A}\cup\mathrm{C})$ c) $P(\mathrm{B}\cup\mathrm{C})$

Sol: a) 0.84; b) 0.76; c) 0.94.

14º Siendo A y B sucesos incompatibles de un cierto espacio tales que:

$$P(\mathrm{A}) = 0.2 \qquad P(\mathrm{B}) = 0.4$$

Calcular $P(\overline{A}\cap\overline{B})$. **Sol:** 0.4.

15º Sean A y B dos sucesos con:

$$\mathrm{P(A)} = 0.5 \qquad \mathrm{P(B)} = 0.3 \qquad \mathrm{P(A\cap B)} = 0.1$$

Calcular:

a) $P(\mathrm{A/B})$ b) $P(\mathrm{A/A\cap B})$
c) $P(\mathrm{A\cap B/A\cup B})$ d) $P(\mathrm{A/A\cup B})$

Sol: a) 0.33; b) 1; c) 0.14; d) 0.71.

16º Sean A y B dos sucesos tales que:

$$P(\mathrm{A})=0.5 \qquad P(\overline{\mathrm{B}})=0.4 \qquad P(\overline{\mathrm{A}}\cup\overline{\mathrm{B}})=0.75$$

Calcular:

a) $P(\mathrm{B}/\mathrm{A})$ b) $P(\overline{\mathrm{A}}/\mathrm{B})$

Sol: a) 0.5; b) 0.58.

17º Se sabe que A y B son dos sucesos cuyas probabilidades son:

$P(\text{A}) = 0.7$ $P(\text{B}) = 0.5$ $P(\text{A}\cup\text{B}) = 0.75$

Calcular $P(\text{B}/\text{A})$ y $P(\overline{A}\cap\overline{B})$. **Sol:** a) 0.64, b) 0.25.

18º Un sistema está formado por dos componentes A y B. El sistema funciona si lo hace alguna de las componentes. Si:

$P(\text{A}) = 0.8$ $P(\text{B}) = 0.7$ $P(\text{A}\cap\text{B}) = 0.6$

¿Cuál es la probabilidad de que el sistema no funcione? **Sol:** 0.9.

19º Se dispone de la siguiente información relativa a los sucesos A y B:

$P(\text{A}) = 0.6$ $P(\text{B}) = 0.2$ $P(\text{A}\cap\text{B}) = 0.12$

a) Calcular las probabilidades $\text{P}(\text{A}\cup\text{B})$ y $\text{P}(\text{A}/(\text{A}\cup\text{B}))$.
b) ¿Son incompatibles? ¿Son independientes?

Sol: a) $\text{P}(\text{A}\cup\text{B}) = 0.68$, $\text{P}(\text{A}/(\text{A}\cup\text{B})) = 0.88$; b) Son compatibles e independientes.

20º Sean A y B dos sucesos tales que:

$\text{P}(\text{A}) = 0.6$ $\text{P}(\text{B}) = 0.2$ $\text{P}(\text{A}\cup\text{B}) = 0.7$

a) Calcúlese $\text{P}(\text{A}\cap\text{B})$ y razónese si los sucesos A y B son independientes.
b) Calcúlese $\text{P}(\overline{\text{A}\cup\text{B}})$.

Sol: a) $\text{P}(\text{A}\cap\text{B}) = 0.1$, los sucesos no son independientes; b) 0.3.

21º Se lanzan dos dados. Calcúlese la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

a) $\text{A} \equiv \{$se obtiene 5 en alguno de los dados$\}$.
b) $\text{B} \equiv \{$se obtiene un doble$\}$.
c) $\text{A}\cup\text{B}$.
d) $\text{A}\cap\text{B}$.

Sol: a) 11/36; b) 1/6; c) 4/9; d) 1/36.

22º En un curso, el porcentaje de aprobados en historia (A) es del 60 % y de matemáticas (B) es del 55 %. Sabiendo que P(B/A) = 0.7. Hallar P(A/B). ¿Cuál es la probabilidad de que escogido al azar un alumno resulte no haber aprobado ninguna de las dos asignaturas? **Sol:** 0.27.

23º Calcular la probabilidad de sacar exactamente dos cruces al tirar una moneda cuatro veces. **Sol:** 6/16.

24º Con las cifras 1, 2, 3, 4, 5 formamos los números posibles de tres cifras distintas. Si formamos un número al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea par? Sol:

25º Un grupo de 10 personas se sienta en un banco. ¿Cuál es la probabilidad de que dos personas fijadas de antemano se sienten juntas? **Sol:** $4.96\cdot10^{-6}$.

26º Lanzamos dos monedas al aire (primero una y luego la otra). Calcular la probabilidad de obtener:

a) Una sola cara.
b) Al menos una cara.
c) Dos caras.

Sol: a) 1/2; b) 3/4; c) 1/4.

27º ¿Cuál es la probabilidad de que arrojando un dado tres veces, salga, al menos una vez el seis? **Sol:** 91/216.

28º Calcula la probabilidad de que al tirar dos dados al aire, salga:

a) Una suma par.
b) Una suma mayor que diez.
c) Una suma que sea múltiplo de 3.
d) Una suma mayor que 6.
e) Una suma menor que 10.
f) Una suma menor o igual que 10.
g) Una suma comprendida entre 6 y 10.
h) Dos números impares.
i) Al menos un número impar.

Sol: a) 1/2; b) 1/12; c) 1/3; d) 7/12; e) 8/9; f) 11/12; g) 5/12; h) 1/4; i) 3/4.

29º Seis personas están sentadas en un banco, calcula la probabilidad de que dos concretas estén juntas. **Sol:** 1/3.

30º En una bolsa hay 7 bolas blancas y 3 negras. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer cuatro bolas a la vez sean las cuatro blancas? **Sol:** 1/6.

31º Tenemos tres dados: uno blanco, otro negro y el tercero rojo. ¿Cuál es la probabilidad de que salga par en el blanco, múltiplo de 3 en el negro y mayor que 3 en el rojo? **Sol:** 1/12.

32º Cuál es la probabilidad de que al extraer simultáneamente tres cartas de una baraja de 40 cartas, salgan un as y dos cartas iguales entre si. **Sol:** 1/247.

33º ¿Cuál es la probabilidad de que al hacer cuatro extracciones sucesivas en una baraja española, con reemplazamiento, salgan un as, un tres, un tres, y un caballo? **Sol:** $(1/10)^4$.

34º En una baraja española se extraen, simultáneamente, tres cartas. ¿Que probabilidad hay de que salgan dos reyes? **Sol:** 27/1235.

35º En una baraja española:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en una extracción simultánea de tres cartas salgan tres oros?
b) ¿Y de que salgan la primera copas, la segunda espadas y la tercera oros en tres extracciones sucesivas sin devolución de la carta extraída?
c) ¿Y la probabilidad de que salgan las tres de distinto palo extraídas sucesivamente sin devolución?

Sol: a) 3/247; b) 25/1482; c) 100/247

36º De una baraja española se extraen dos naipes sucesivamente y sin devolver al mazo. Hallar la probabilidad de extraer:

a) Dos ases.
b) En la primera as y la segunda tres.
c) Un as y un tres.
d) Dos oros.
e) Del mismo palo.

Sol: a) 1/130; b) 2/195; c) 4/195; d) 3/52; e) 3/13.

37º Si se tienen dos barajas de 40 cartas cada una, ¿cuál es la probabilidad de que al sacar una de cada baraja salgan dos ases? Y si se mezclan las dos barajas y se sacan de una vez dos cartas, ¿cuál es la probabilidad de que sean dos ases? **Sol:** 1/100; 7/790.

38º De una baraja de 40 cartas se extraen 3 cartas sucesivamente: con reemplazamiento y sin reemplazamiento. Hallar en los tres casos las siguientes probabilidades:

a) Por lo menos una de las cartas es un as.
b) las tres son de oros.
c) Una sólo sea un oro.
d) Ninguna es un as.
e) Sean del mismo palo.

Sol: a) 271/1000; 137/494; b) 1/64; 3/247; c) 261/640; 435/988; d) 729/1000; 357/494; e) 1/16; 12/247; 12/247.

39º De una baraja española se extraen dos naipes sucesivamente y sin devolver al mazo. Hallar la probabilidad de extraer:

a) Dos ases.
b) Un as y un tres.
c) La primera un as y la segunda un tres.
d) Dos espadas.
e) Dos cartas de igual palo.

Sol: a) 1/130; b) 4/195; c) 2/195; d) 3/52; e) 3/13.

40º En una bolsa hay 10 bolas blancas y 15 negras. Si se hacen tres extracciones seguidas, ¿qué probabilidad habrá de que las 3 bolas sean blancas?

a) Devolviendo cada vez la bola extraída.
b) No devolviéndola.

Sol: a) 8/125; b) 6/115.

41º Una urna contiene 10 bolas blancas y 5 negras. Se extraen dos bolas al azar sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color? **Sol:** 0.489.

42º Una urna contiene 3 bolas blancas y 5 bolas negras. Otra contiene 1 blanca y 3 negras. Hallar la probabilidad de que, al extraer una bola de cada urna, ambas sean negras. **Sol:** 15/32.

43º Una urna contiene 10 bolas blancas, 5 amarillas y 5 negras. Se extrae una bola al azar y se sabe que no es blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que sea negra? **Sol:** 0.5.

44º En una urna hay 5 bolas rojas, 5 amarillas y 5 negras. Se sacan, sucesivamente 4 bolas, devolviéndolas cada vez. ¿Qué probabilidad existe de que se extraiga igual número de bolas rojas que amarillas? **Sol:** 19/81.

45º En una bolsa hay 6 bolas blancas y 5 negras. Calcular la probabilidad de extraer:

a) cuatro bolas a la vez que no sean blancas.
b) cuatro bolas blancas.
c) cuatro bolas negras.

Sol: a) 21/22; b) 1/22; c) 1/66.

46º En una bolsa hay 6 bolas blancas, 3 negras y 9 rojas. Al sacar tres a la vez, determinar la probabilidad de:

a) Que dos sean blancas.
b) Que ninguna sea blanca.
c) Que sean de distinto color.

Sol: a) 0.22; b) 0.27; c) 0.199.

47º En una urna hay tres bolas blancas y dos negras. Se extrae una bola al azar, se observa su color y se devuelve a la urna. Calcular la probabilidad de que en dos extracciones se obtengan:

a) Dos bolas negras.
b) Una bola de cada color.
c) Dos bolas blancas.

Sol: a) 4/25; b) 12/25; c) 9/25.

48º Dos urnas tienen las siguientes bolas: la primera, 5 bolas blancas, 5 negras y 5 rojas y la segunda, 3 blancas, 3 negras y 5 rojas. Se traspasa una bola, escogida al azar, de la primera urna a la otra y, a continuación, se extrae una bola de esta urna, que resulta ser roja. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola traspasada fuese blanca? **Sol:** 5/16

49º Se dispone de tres tipos de urnas, A, B y C. La urna tipo A contienen 5 bolas blancas y 5 negras, la urna tipo B contienen 8 bolas blancas y 2 negras, la urna tipo C contiene 1 bola blanca y 4 negras. Se dispone de 5 urnas del tipo A, 3 del tipo B y 2 del tipo C. Se saca una bola de una urna elegida al azar y resultó ser blanca. Calcular la probabilidad de que la urna elegida sea del tipo B. **Sol:** 0.4528.

50º Tenemos tres urnas: La urna A contiene 2 bolas rojas y 3 amarillas; la urna B contiene 3 bolas rojas y 1 amarilla y la urna C contiene 2 bolas rojas y 4 amarillas. Se escoge una urna al azar y se saca una bola de esa urna. Si la bola es roja. ¿Cuál es la probabilidad de que sea de la urna A? **Sol:** 24/89.

51º En una caja A, hay 10 bombillas, de las que 3 no funcionan; en otra caja B, hay 8 con 2 fundidas; y en una última caja C hay 12 bombillas de las que 3 con defectuosas. Escogida una caja al azar, de la que se extrae, sin mirar, una bombilla:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no funcione?
b) Si salió una bombilla fundida, ¿cuál es la probabilidad de que fuese de la caja A?

Sol: a) 4/15; b) 3/8.

52º Un lote de diez artículos tiene tres defectuosos. Se extraen tres artículos del lote al azar, uno tras otro y sin devolverlos. Calcular la probabilidad de que todos estén bien. **Sol:** 7/24.

53º De las piezas producidas en una fábrica, el 80% son producidas por una máquina A y el resto por una máquina B. El 10% de las piezas producidas por A son defectuosas, y el 6% de las producidas por B son defectuosas.

a) Elegida una pieza producida en esa fábrica al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa?
b) Se elige al azar una pieza y resulta ser defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producida por la máquina A?

Sol: a) 0.092; b) 0.87.

54º El 3% y el 5%, respectivamente, de las piezas producidas por dos máquinas X e Y son defectuosas. Se elige al azar una pieza de las producidas por X y otra de las producidas por Y.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean defectuosas?
b) ¿Y de que al menos una lo sea?

Sol: 0.0015; 0.0785.

55º El 60% de los habitantes de una ciudad lee el periódico A, el 35% el B y un 15% ambos. Elegido un ciudadano al azar, calcular las probabilidades de:

a) Sea lector de algún periódico.
b) No lea la prensa.
c) Lea sólo el periódico A.
d) Lea sólo uno de los dos periódicos.

Sol: a) 0.8; b) 0.2; c) 0.45; d) 0.65.

56º Un producto está formado por tres piezas: A, B y C. El proceso de fabricación es tal que la probabilidad de que la pieza A sea defectuosa es 0.03; de que la pieza B sea defectuosa es 0.02; y de que la pieza C sea defectuosa es de 0.01. El producto no funciona si alguna de las piezas es defectuosa.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el producto no funcione?
b) Otro producto consta de dos piezas de A y una de B, ¿cuál es la probabilidad de que no funcione?

Sol: a) 0.059; b) 0.078.

57º En una provincia, el 48% de sus habitantes son lectores del diario A, el 55% del B y el 22% de ambos. Si se escoge un ciudadano al azar cuál es la probabilidad de que:

a) No lea prensa.
b) Lea sólo el diario A.
c) Lea sólo uno de los dos diarios.

Sol: a) 0.19; b) 0.26, c) 0.59.

58º La probabilidad de que un estudiante apruebe todas las asignaturas en Junio es 0.4. Halla la probabilidad de que entre 4 estudiantes escogidos al azar:

a) Ninguno apruebe.
b) No apruebe más de uno.
c) Al menos uno apruebe.
d) Todos aprueben.

Sol: a) 0.1296; b) 0.4752; c) 0.8704; d) 0.0256.

59º El 55% de los alumnos de una clase estudia francés, el 50% inglés y el 15% estudia los dos idiomas. Se elige al azar un estudiante. Calcular la probabilidad de que:

a) No estudie francés ni inglés.
b) Estudie francés y no inglés.
c) Estudie francés si se sabe que estudia inglés.
d) Estudie inglés si se sabe que estudia francés.
e) No estudie francés si se sabe que no estudia inglés.

Sol: a) 0.1; b) 0.4; c) 0.3; d) 0.273; e) 0.2.

60º En unos almacenes hay una oferta: al comprar un producto se puede elegir un regalo entre dos (A y B). El 35% de los clientes elige el regalo A, el 25% elige el B y el 40% no compra ese producto. Se sabe, además, que el 80% de los que eligen A, el 40% de los de B y el 20% de los que no compran, son mujeres. Elegido al azar un cliente, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? **Sol:** 0.46.

61º La probabilidad de que un proyectil, lanzado por un cañón, haga blanco en el objetivo es 1/2. Calcula la probabilidad de que alcance el objetivo si se tiran 4 proyectiles seguidos. **Sol:** 15/16.

62º En un grupo de 1000 personas hay 400 que saben inglés, 100 que saben alemán y 30 ambos idiomas. Con estos datos, averigua si son independientes o no los sucesos "saber inglés" y "saber alemán". **Sol:** No.

63º En un examen teórico para obtener el carné de conducir se puede hacer el ejercicio correspondiente a cada uno de los tipos de carné A, B y C. Aprueban el examen el 65% de A, el 40% de B y el 25% de C. Se sabe que el 20% se presentan al ejercicio A, el 50% al B y el 30% al C. Elegido un alumno al azar, determina:

a) La probabilidad de que se presente al A haya aprobado.
b) Se sabe que ha aprobado. Probabilidad de que se presentase al ejercicio A.

Sol: a) 0.13; b) 0.32.

64º Un examen consta de cuatro partes: álgebra, análisis, geometría y probabilidad. La preparación de un alumno es tal que, tiene una probabilidad de 0,6 de aprobar cada parte. Qué probabilidad tiene de suspender si:

a) Las partes son eliminatorias;
b) Si llegan dos partes para aprobar;
c) Llega con aprobar una parte.

Sol: a) 0.8704; b) 0.1792; c) 0.0256.

65º El 60% de la población de una determinada ciudad lee el periódico A, el 35% el B y un 15% ambos. Elegido un ciudadano al azar, calcular la probabilidad de:

a) Ser lector de algún periódico.
b) No leer ninguno.
c) Leer sólo el periódico A.
d) Leer sólo uno de los dos periódicos.

Sol: a) 0.8; b) 0.2; c) 0.45; d) 0.65.

66º De un grupo de 100 estudiantes de 2º bachillerato de los que 55 son chicos y 45 chicas, se obtienen las siguientes opiniones respecto de los exámenes de selectividad:

	Alumnos	Alumnas
A favor	11	9
En contra	44	36

Considerando que A es ser varón y B es estar a favor de la selectividad, averiguar:

a) Si A y B son independientes.
b) Si se selecciona al azar un alumno varón, ¿qué probabilidad hay de que esté a favor de la selectividad?

Sol: a) Si son independientes; b) 0.2.

67º Una empresa posee dos factorías, A y B. En A se produce el 65 % de los productos de la empresa y el resto en B. En A la probabilidad de encontrar artículos defectuosos es del 0.5 % y en B del 1.5 %. Si se elige un artículo y resulta defectuoso, calcula la probabilidad de que proceda de la factoría A. **Sol:** 0.382.

68º Para elegir un jurado se dispone de 5 mujeres y 10 hombres. Se selecciona al azar 6 personas. Se pide:

a) Probabilidad de que haya 5 mujeres.
b) Probabilidad de que haya al menos una mujer.

Sol: a) $3.33\cdot10^{-4}$; b) $4.66\cdot10^{-3}$.

69º Se tienen 2 cajas. Una contiene 4 bolas blancas y 3 negras, la otra tiene 3 blancas y 4 negras. Se elige una caja al azar y se saca una bola. Se pide:

a) Probabilidad de que la bola sea blanca.
b) Probabilidad de que sea negra.

Sol: a) 0.5; b) b) 0.5.

70º Un rosal no está en buen estado y, por tanto, si se riega tiene la misma probabilidad de salvarse que de no salvarse. La probabilidad de que sobreviva si no se riega es 0.25. La probabilidad de no regar el rosal es 2/3. Si el rosal no se ha salvado, ¿Cuál es la probabilidad de no haberlo regado? **Sol:** 0.75.

71º En una caja de golosinas hay 6 caramelos y 4 chocolatinas. Un niño elige al azar 4 golosinas. Determinar:

a) Probabilidad de que solo coja chocolatinas.
b) Probabilidad de que coja 2 caramelos y 2 chocolatinas.

Sol: a) 1/210; b) 3/7.

72º Una persona pasa cada mañana por tres semáforos que operan independientemente. La probabilidad de luz roja es 0.4, 0.8 y 0.5 respectivamente para semáforo. Se pide:

a) Probabilidad de que se encuentren los tres semáforos en rojo.
b) Probabilidad de que se encuentre uno en rojo y los otros dos en verde.

Sol: a) 0.16; b) 0.34.

73º Una persona cuida de su jardín, pero es bastante distraída y se olvida de regarlo a veces. La probabilidad de que se olvide de regar el jardín es 2/3. El jardín no está en muy buenas condiciones, así que si se le riega tiene la misma probabilidad de progresar que de estropearse, pero la probabilidad de que progrese si no se le riega es de 0.26. Si el jardín se ha estropeado, ¿cuál es la probabilidad de que la persona olvidara hacerlo? **Sol:** 0.747.

74º En un colectivo de inversores bursátiles, el 20% realiza operaciones vía Internet. De los inversores que realizan operaciones vía Internet, un 80 % consulta InfoBolsaWeb. De los inversores bursátiles que no realizan operaciones vía Internet sólo un 20 % consulta InfoBolsaWeb. Se pide:

a) Obtener la probabilidad de que un inversor bursátil elegido al azar en este colectivo consulte InfoBolsaWeb.
b) Si se elige al azar un inversor bursátil de este colectivo y resulta que consulta InfoBolsaWeb, ¿cuál es la probabilidad de que realice operaciones por Internet?

Sol: a) 0.32; b) 0.5.

Ejercicios de estadística descriptiva:

1º En una clase de diez alumnos, las notas del examen de matemáticas fueron:

7 4 4 2 4 5 2 8 5 6

Determine la media aritmética, la moda, el primer cuartil, el segundo cuartil o mediana, el tercer cuartil, la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación.
Sol: $\overline{x} = 4.7$; $M_o = 4$; 1ºC = 3; $M_e = 4.5$; 3ºC = 5.5; $\sigma^2 = 3.41$; $\sigma = 1.85$. $CV = 0.393$

2º En una clase de diez alumnos, se mide y se anota la altura de estos en cm:

168 175 173 167 166 179 180 176 172 170

Determine la media aritmética, el primer cuartil, el segundo cuartil o mediana, el tercer cuartil, la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación.
Sol: $\overline{x} = 172.6$; 1ºC = 167.5; $M_e = 172.5$; 3ºC = 175.5; $\sigma^2 = 21.64$; $\sigma = 4.65$; $CV = 0.027$.

3º Mediante un péndulo simple, se han realizado diez medidas del valor de la gravedad en la superficie de la tierra, dando los siguientes valores expresados en m/s^2:

9.82 9.79 9.83 9.78 9.78 9.82 9.81 9.83 9.79 9.85

Determine la media aritmética, el primer cuartil, el segundo cuartil o mediana, el tercer cuartil, la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación.
Sol: $\overline{x} = 9.81$; 1ºC = 9.785; $M_e = 9.815$; 3ºC = 9.825; $\sigma^2 = 0.00052$; $\sigma = 0.023$; $CV = 0.0023$.

4º En una inspección de consumo, se mide la cantidad de litros de Coca Cola que contiene una botella de 2 L, obteniéndose como resultado lo siguiente:

2.01 2.02 2.01 1.99 2.01 2.02 1.99 1.98 2.00 1.98

Determine la media aritmética, la moda, el primer cuartil, el segundo cuartil o mediana, el tercer cuartil, la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación.
Sol: $\overline{x} = 2.001$; $M_o = 2.01$; 1ºC = 1.985; $M_e = 2.005$; 3ºC = 2.010; $\sigma^2 = 2.09\cdot10^{-4}$; $\sigma = 0.0145$; $CV = 0.0072$.

5º La siguiente tabla nos muestra las notas medias que sacaron los alumnos que hicieron el examen de Matemáticas Aplicadas a Ciencias Sociales en el instituto I de Las Rozas:

2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
5.69	5.67	4.22	4.58	4.91	4.73	7.45	5.83	5.35

Calcula la media de los datos, la varianza, la desviación típica, la mediana y el coeficiente de variación. **Sol:** $\overline{x} = 5.38$; $M_e = 5.35$; $\sigma^2 = 0.811$; $\sigma = 0.901$; $CV = 0.167$.

6º La siguiente tabla nos muestra las notas medias que sacaron los alumnos que hicieron el examen de Matemáticas Aplicadas a Ciencias Sociales en el instituto II de Las Rozas:

2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
3.70	4.78	5.37	3.59	6.03	6.13	5.80	5.72	4.90

Calcula la media de los datos, la varianza, la desviación típica, la mediana y el coeficiente de variación. **Sol:** $\overline{x} = 5.11$; $M_e = 5.37$; $\sigma^2 = 0.806$; $\sigma = 0.898$; $CV = 0.176$.

7º La siguiente tabla nos muestra las notas medias que sacaron los alumnos que hicieron el examen de Matemáticas Aplicadas a Ciencias Sociales en el instituto III de Las Rozas:

1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
3.49	3.60	4.93	6.02	5.68	6.96	5.18	6.41	5.80	5.99	5.94	6.35	6.15

Calcula la media de los datos, la varianza, la desviación típica, la mediana y el coeficiente de variación. **Sol:** $\overline{x} = 5.58$; $M_e = 5.94$; $\sigma^2 = 0.995$; $\sigma = 0.997$; $CV = 0.179$.

8º La siguiente tabla nos muestra las notas medias que sacaron los alumnos que hicieron el examen de Matemáticas Aplicadas a Ciencias Sociales en el instituto IV de Las rozas:

2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
3.53	3.47	1.32	5.36	6.48	5.84	5.20	5.21

Calcula la media de los datos, la varianza, la desviación típica, la mediana y el coeficiente de variación. **Sol:** $\overline{x} = 4.55$; $M_e = 5.21$; $\sigma^2 = 2.44$; $\sigma = 1.56$; $CV = 0.343$.

9º La siguiente tabla nos muestra las notas medias que sacaron los alumnos que hicieron el examen de Matemáticas Aplicadas a Ciencias Sociales entre todos los colegios e institutos de la UCM.

1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
1.28	2.41	2.26	2.58	3.83	3.98	4.34	4.40

2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
4.75	4.36	5.08	5.19	5.15	4.07	4.13

Calcula la media de los datos, la varianza, la desviación típica, la mediana y el coeficiente de variación. **Sol:** $\overline{x} = 3.85$; $M_e = 4.13$; $\sigma^2 = 1.31$; $\sigma = 1.14$; $CV = 0.296$.

10º En una ciudad se registraron las temperaturas máximas durante el mes de julio:

32	31	28	29	33	32	31	30	31	31	27
30	32	31	31	30	30	29	29	30	30	31
34	33	33	29	29	31	29	28	30	32	31

Se pide:

a) Elabora una tabla de frecuencias en las que se incluyan: frecuencia absoluta, absoluta acumulada, relativa y relativa acumulada. Agregar a la tabla dos columna más, una del producto $n_i \cdot x_i$ y otra del producto $n_i \cdot x_i^2$.

b) Representa en forma de diagrama de barras la frecuencia absoluta de cada temperatura.

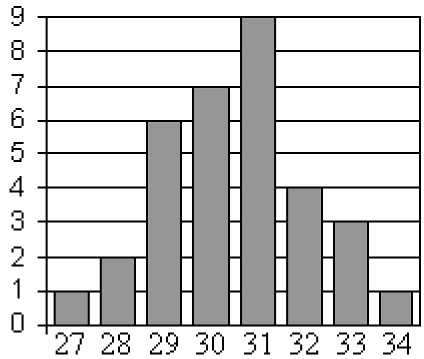
c) Calcular la media aritmética, los cuarteles, la mediana, la moda, la desviación típica, la varianza y el coeficiente de variación de Pearson.

Sol:

a)

x_i	n_i	N_i	f_i	F_i	$n_i \cdot x_i$	$n_i \cdot x_i^2$
27	1	1	1/33	1/33	27	729
28	2	3	3/33	3/33	56	1568
29	6	9	6/33	9/33	174	5046
30	7	16	7/33	16/33	210	6300
31	9	25	9/33	25/33	279	8649
32	4	29	4/33	29/33	128	4096
33	3	32	3/33	32/33	99	3267
34	1	33	1/33	33/33	34	1156

b)



c) $\overline{x} = 30.52$, 1ºC = 29, Me = 31, 3ºC = 31, Mo = 31, $\sigma = 1.58$, $\sigma^2 = 2.49$,CV = 0.052.

11º El número de hermanos de los alumnos de una clase es el siguiente:

0	1	0	0	3	2	1	4	5	1	0
0	0	1	1	2	0	1	1	1	2	3
2	0	1	1	2	1	3	0	0	2	

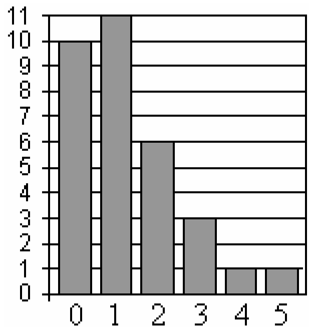
a) Elabora una tabla de frecuencias en las que se incluyan: frecuencia absoluta, absoluta acumulada, relativa y relativa acumulada. También el producto $n_i{\cdot}x_i$ y el producto $n_i{\cdot}x_i^2$.
b) Representa los datos en un diagrama de barras de frecuencias absolutas.
c) Calcular la media, la moda, la mediana, la desviación típica, la varianza y el coeficiente de variación de Pearson.
d) ¿Qué porcentaje de alumnos son hijos únicos? ¿Cuántos alumnos tienen más de un hermano?

Sol:

a)

x_i	n_i	N_i	f_i	F_i	$n_i{\cdot}x_i$	$n_i{\cdot}x_i^2$
0	10	10	10/32	10/32	0	0
1	11	21	11/32	21/32	11	11
2	6	27	6/32	27/32	12	24
3	3	30	3/32	30/32	9	27
4	1	31	1/32	31/32	4	16
5	1	32	1/32	32/32	5	25

b)



c) $\overline{x} = 1.28$, Me = 1, Mo = 1; σ= 1.26, $\sigma^2 = 1.58$,CV = 0.98.
d) El 31.25 % son hijos únicos y 11 alumnos tienen más de un hermano

12º El número de goles metidos por partido por un cierto equipo es el siguiente:

0	1	0	2	3	2	1	3	0	0	1	0	1	3	0
1	0	0	1	1	2	1	2	0	1	2	1	5	3	5

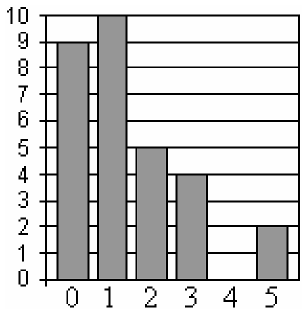
a) Elabora una tabla de frecuencias en las que se incluyan: frecuencia absoluta, absoluta acumulada, relativa y relativa acumulada. Incorporar también dos columnas una para el producto $n_i{\cdot}x_i$ y otra para $n_i{\cdot}x_i^2$.
e) Representa los datos en un diagrama de barras de frecuencias absolutas.
b) Calcula la moda, la media de goles por partido. La desviación típica, la varianza y el coeficiente de variación de Pearson.
c) ¿Qué porcentaje de partidos han metido al menos un gol?

Sol:

a)

x_i	n_i	N_i	f_i	F_i	$n_i{\cdot}x_i$	$n_i{\cdot}x_i^2$
0	9	9	9/30	9/30	0	0
1	10	19	10/30	19/30	10	10
2	5	24	5/30	24/30	10	20
3	4	28	4/30	28/30	12	36
4	0	28	0/30	28/30	0	0
5	2	30	2/30	30/30	10	50

b)



c) $\overline{x} = 1.4$, Me = 1, Mo = 1; σ= 1.38, $\sigma^2 = 1.9$,CV = 0.99.
d) En el 63.3 % han metido por lo menos un gol.

13º En una encuesta sobre vivienda se pregunta, entre otras cosas, cuántas personas viven en la casa, obteniéndose las siguientes respuestas:

4	4	8	1	3	2	1	3	4	2	2	7	0	3	8
0	1	5	6	4	3	3	4	5	6	8	6	2	5	3
3	5	4	6	2	0	4	3	6	1	2	1	0	4	4

a) Elabora una tabla en la que se recojan las cuatro frecuencias. Incorporar también dos columnas una para el producto $n_i \cdot x_i$ y otra para $n_i \cdot x_i^2$.

b) Dibuja con los datos un polígono de frecuencias absolutas acumuladas.

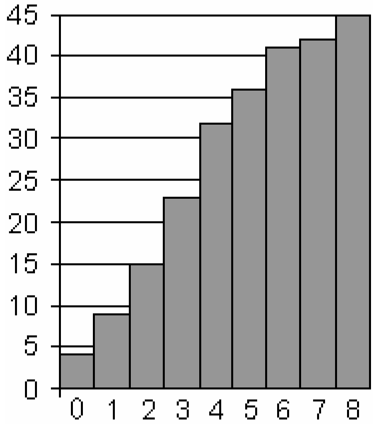
c) Calcula la moda, la media de goles por partido. La desviación típica, la varianza y el coeficiente de variación de Pearson.

d) ¿Qué porcentaje de viviendas está ocupado por más de cinco personas? ¿En cuántas de ellas no vive nadie?

a)

x_i	n_i	N_i	f_i	F_i	$n_i \cdot x_i$	$n_i \cdot x_i^2$
0	4	4	4/45	4/45	0	0
1	5	9	5/45	9/45	5	5
2	6	15	6/45	15/45	12	24
3	8	23	8/45	23/45	24	72
4	9	32	9/45	32/45	36	144
5	4	36	4/45	36/45	20	100
6	5	41	5/45	41/45	30	180
7	1	42	1/45	42/45	7	49
8	3	45	3/45	45/45	24	192

b)



c) $\overline{x} = 3.51$, 1ºC = 2, Me = 3, 3ºC = 5; Mo = 4; $\sigma = 2.17$, $\sigma^2 = 4.69$, CV = 0.62.

d) Un 20% de las viviendas están ocupadas por mas de 5 personas.

14º En un colegio, se hace un examen de matemáticas a una clase. La distribución de notas es la siguiente:

Grupo A	Nota	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	f_i	0	1	2	6	7	6	4	3	2	1	1

Grupo B	Nota	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	f_i	0	1	3	6	10	8	3	2	1	0	0

Halla la media, primer cuartil, segundo cuartil o mediana, tercer cuartil, moda, desviación típica y coeficiente de variación para las notas de ambas clases.

Sol: GA: $\overline{x} = 4.88$; 1ºC = 3; $M_e = 5$; 3ºC = 6; $M_o = 4$; $\sigma^2 = 4.23$; $\sigma = 2.06$; $CV = 0.421$.
GB: $\overline{x} = 4.26$; 1ºC = 3; $M_e = 4$; 3ºC = 5; $M_o = 4$; $\sigma^2 = 2.31$; $\sigma = 1.52$; $CV = 0.357$.

Regresión lineal:

1º Esta es la distribución bidimensional de una nube de puntos:

x	0	1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	10
y	0	2	2	4	3	6	4	5	7	7	9	10

Calcula:

a) Las medias, desviaciones típicas marginales y covarianza de esta distribución.
b) Determina el coeficiente de correlación lineal.
c) Determina la recta de regresión lineal.

Sol: a) $\overline{x} = 4.92$, $\overline{y} = 4.92$, $\sigma_x = 3.04$, $\sigma_y = 2.87$, $\sigma_{xy} = 8.33$; b) $r = 0.95$;
c) $y = 0.90 \cdot x + 0.49$.

2º Las notas obtenidas por cinco alumnos en Matemáticas y Economía son:

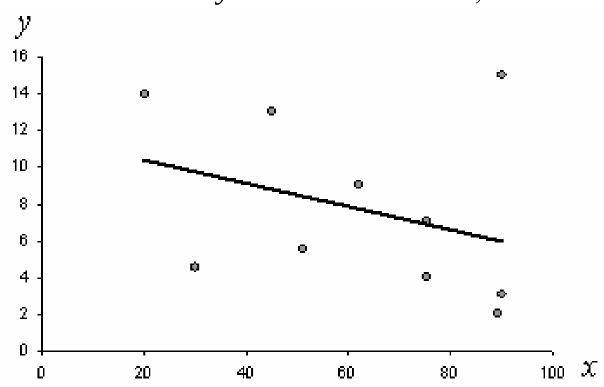
Matemáticas	6	4	8	5	3. 5
Economía	6. 5	4. 5	7	5	4

Determina si existe una buena correlación lineal entre las notas en matemáticas y en economía. En caso afirmativo, calcule una recta de regresión lineal y estime cual sería la nota obtenida en economía por un alumno que saque un 7 en matemáticas. **Sol:** Hay buena correlación (r = 0.961); $E = 0.695 \cdot M + 1.715$; $E(7) = 6.58$.

3º Unos investigadores han estudiando la correlación entre *obesidad* y la *respuesta individual al dolor*. La obesidad se mide como porcentaje sobre el peso ideal (x). La respuesta al dolor se mide utilizando el umbral de reflejo de flexión nociceptiva (y), que es una medida de sensación de punzada. Se obtienen los siguientes datos:

x	89	90	75	30	51	75	62	45	90	20
y	2	3	4	4.5	5.5	7	9	13	15	14

Represente los datos, determine su recta de regresión lineal y represéntela. Determine además el coeficiente de correlación lineal. ¿Guarda relación por tanto la obesidad con la respuesta individual al dolor? **Sol:** $y = -0.063x + 11.64$; $r = -0.334$. No hay relación.



4º Mantener el vacío es difícil en la Tierra debido a la presión atmosférica. Tenemos un recipiente cerrado, pero los cierres no son perfectos se observa en seguida un aumento de la presión, lo cual sugiere una entrada de aire. La siguiente tabla nos muestra el aumento de la presión con respecto al tiempo:

p(mbar)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
t(s)	0	6	37	68	104	140	172	206	242	280

Determinar la recta regresión lineal de la presión frente al tiempo. Calcule también el coeficiente de correlación, el cual es clave para poder afirmar si ciertamente existe una correlación lineal entre el ascenso y el tiempo. **Sol:** $p = 0.0305 \cdot t + 0.6712$, $r = 0.996$.

5º La policía tiene situada en una carretera rectilínea de veinte kilómetros unos seis radares de velocidad, cada uno situado a 4 km de distancia. El problema para medir la velocidad, reside en que los coches son alertados por un GPS de la localización de los radares, con lo cual frenan en las proximidades del radar y no son multados. No obstante, la colocación de los radares permite estimar mediante regresión lineal la velocidad promedio de un conductor en dicho trayecto. Un coche multado, pasó por los radares de la siguiente forma:

	1º radar	2º radar	3º radar	4º radar	5º radar	6º radar
Recorrido (m):	0	4000	8000	12000	16000	20000
Tiempo (s):	0	95	205	315	420	560

Por cinemática sabemos que:

$$r(t) = r_0 + v \cdot t$$

De esta forma, podemos relacionar la pendiente de la recta de regresión con la velocidad media del vehículo. Calcule por tanto su velocidad en km/h, y estime el coeficiente de correlación lineal. Dato: 3.6 km/h = 1 m/s. **Sol:** 129.3 km/h, 0.9985.

6º Un conjunto de datos bidimensionales (x, y) tiene coeficiente de correlación $r = -0.9$, siendo las medias de las medias marginales $\overline{x} = 1$, $\overline{y} = 2$. Se sabe que una de las cuatro ecuaciones siguientes corresponde a la recta de regresión de y frente a x:

1ª) $y = -x + 2$ 2ª) $3x - y = 1$ 3ª) $2x + y = 4$ 4ª) $y = x + 1$

Seleccionar razonadamente esta recta. **Sol:** Como el coeficiente es negativo no es posible que sean ni la segunda recta ni la cuarta. Por otra parte, como la primera no admite como solución las medias marginales y la tercera si, entonces la solución es la tercera.

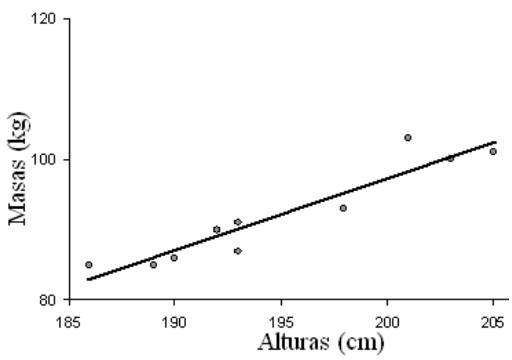
7º Las estaturas y masas de diez jugadores del Real Madrid de baloncesto son:

Alturas (cm)	X	186	189	190	192	193	193	198	201	203	205
Masas (kg)	y	85	85	86	90	87	91	93	103	100	101

Calcula:

a) Las medias y desviaciones típicas marginales.
b) La covarianza.
c) El coeficiente de correlación lineal. ¿Es buena correlación?
d) En caso de ser buena correlación, determine la recta de regresión lineal y dibújela junto con los puntos.

Sol: a) $\overline{x} = 195$, $\overline{y} = 92.1$, $\sigma_x = 6.07$, $\sigma_y = 6.56$; b) $\sigma_{xy} = 37.6$; c) $r = 0.944$, es buena correlación; d) $y = 1.02 \cdot x - 107.14$.



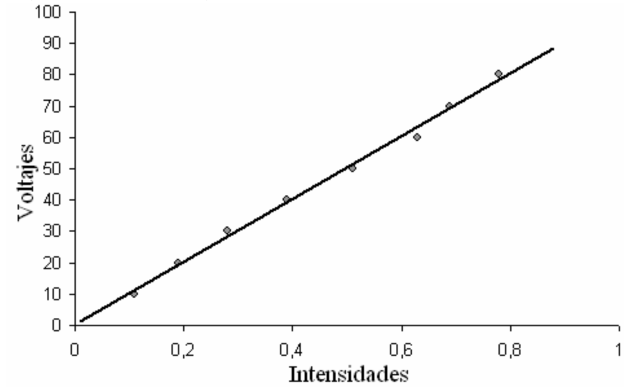
8º La ley de Ohm es una ley física que relaciona la intensidad que circula por un circuito, con la diferencia de potencial al que está sometido. De dicha ley, surge el concepto de resistencia eléctrica, y guarda una relación lineal de tipo:

$$V = RI$$

Se hace un experimento consistente en medir el valor de R pero variando voltaje e intensidad, el resultado es la siguiente tabla de valores:

I (Amperios)	0.11	0.19	0.28	0.39	0.51	0.63	0.69	0.78
V (Voltios)	10	20	30	40	50	60	70	80

Mediante el coeficiente de correlación lineal, verifique si el experimento que hemos realizado satisface la ley de Ohm o no. En caso afirmativo, determine el valor de la resistencia del circuito (que le vendrá dado en Ohmios Ω) mediante un ajuste por mínimos cuadrados. Realice un gráfico representando los puntos y la recta de regresión lineal. **Sol:** $r = 0.9974$; $R = 99.96\ \Omega$; $V = 99.96 \cdot I + 0.27$.



9º Se ha diseñado un experimento físico con el que se pretende la medida del calor específico del agua. Para ello se le suministra a un kilogramo de agua cantidades conocidas de calor Q y se observa el incremento de su temperatura ΔT, obteniéndose la siguiente tabla:

Q (Kilojulios)	4.2	8.4	12.5	16.9	20.4	25.1	29.3	33.6
ΔT (Celsius)	1	2	3	4	5	6	7	8

Mediante el coeficiente de correlación lineal, verifique si el agua cumple una ley de calentamiento lineal como esta:

$$Q = M \cdot c_e \cdot \Delta T$$

Donde M es la masa de agua, 1 kg, y c_e es el calor específico del agua. Calcule el calor específico del agua calculando la pendiente de la recta de regresión lineal. Represente los puntos y recta de regresión. **Sol:** $r = 0.9998$; $c_e = 4.186$.