Πανεπιστημιο Πειραιως
Σχολη Τεχνολογιων Πληροφορικης και Επικοινωνιων
Τμημα Ψηφιακων Συστηματων
Διακριτά Μαθηματικά 2020 – 1η Σειρά Ασκήσεων Επανάληψης

Διδάσκων: Ορέστης Τελέλης
(telelis@unipi.gr)

Παράδοση: Δείτε οδηγίες στην επόμενη σελίδα.

1. Να δείξετε επαγωγικά ότι, για κάθε ακέραιο $n \geqslant 2$: $5^n + 9 < 6^n$.

2. Να δείξετε επαγωγικά ότι, για οσαδήποτε $n \geqslant 2$ σύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{A}_i$$

4. Να δείξετε επαγωγικά ότι, για κάθε ακέραιο $n \geqslant 1$: $\sum_{i=1}^{n}(i \cdot 2^i) = (n-1)2^{n+1} + 2$.

3. Να δείξετε επαγωγικά ότι, για κάθε ακέραιο $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$$

5. Να δείξετε επαγωγικά ότι ο 6 διαιρεί τον $n(n^2+5)$, για κάθε ακέραιο $n \geqslant 1$.

6. Να δείξετε με ισχυρή επαγωγή ότι, για κάθε ακέραιο $n \geqslant 12$, υπάρχουν φυσικοί αριθμοί ρ_n, λ_n τέτοιοι ώστε: $n = 4 \cdot \rho_n + 5 \cdot \lambda_n$

7. Να δείξετε επαγωγικά ότι, για κάθε ακέραιο $n \geqslant 1$: $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

8. Για οποιονδήποτε ακέραιο n, αν $n \bmod 5 = 3$, να δικαιολογήσετε ότι $n^2 \bmod 5 = 4$.

9. Για όλους τους ακεραίους a, b με $a \bmod 7 = 5$ και $b \bmod 7 = 6$ να δικαιολογήσετε ότι:

$$ab \bmod 7 = 2$$

10. Να επιλύσετε το παρακάτω σύστημα ισοτιμιών.

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 2 \\ x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 3 \pmod 5 \\ x \equiv 4 \pmod{11} \end{cases}$$

11. Να δείξετε επαγωγικά ότι, για κάθε ακέραιο $n \geqslant 1$: $\displaystyle\sum_{i=2}^{n+1} \binom{i}{2} = \binom{n+2}{3}$

12. Πρόκειται να αγοράσουμε 15 αναψυκτικά από ένα κατάστημα που πουλά 5 διαφορετικά είδη αναψυκτικών. Αν αγοράσουμε τουλάχιστον μία πορτοκαλάδα, πόσους διαφορετικούς συνδυασμούς αναψυκτικών μπορούμε να αγοράσουμε, οι οποίοι περιλαμβάνουν επιπλέον τουλάχιστον 6 λεμονάδες?

13.

(α) Πόσοι αριθμοί από το 1 έως το 100 πρέπει να επιλεγούν από μία κληρωτίδα, ώστε να επιλεγεί σίγουρα ένας που διαιρείται με το 5?

(β) Θεωρήστε μία ομάδα 40 προσώπων με ηλικίες από 17 έως 34. Στοιχηματίζουμε ότι τουλάχιστον x μέλη της ομάδας έχουν την ίδια ηλικία. Ποιά είναι η μέγιστη τιμή του x για την οποία κερδίζουμε?

14. Πόσες διαφορετικές συμβολοσειρές αποτελούμενες από 6 (πεζά μόνο) γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου περιέχουν:

1. το γράμμα «α»?
2. τα γράμματα «α» και «β»?
3. τα γράμματα «α» και «β» σε συνεχόμενες θέσεις (με το «α» να προηγείται του «β») και όλα τους τα σύμβολα είναι διαφορετικά?

15. Πόσες διαφορετικές λύσεις έχει η εξίσωση $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21$ για $x_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, 5$, στις οποίες:

(α) $x_1 \geqslant 1$?

(β) $x_i \geqslant 2$, για $i = 1, 2, 3, 4, 5$?

Οδηγίες Παράδοσης:

- Καλείστε να παραδώσετε τις λύσεις σας σε **επιμελημένο και ευανάγνωστο χειρόγραφο, το οποίο θα σαρώσετε σε μορφή PDF.**
- Θα ανεβάσετε το έγγραφο PDF στην *περιοχή **«Εργασίες»*** της σελίδας του μαθήματος στο σύστημα «Evdoxos», έως και την **Παρασκευή 15/05/2020, 23:59.**
- **Φροντίστε οι απαντήσεις σας να είναι τυπικά ορθές, ευανάγνωστες, και να αναδεικνύουν το σκεπτικό σας με πληρότητα.**
- *Για όσους παραδώσετε γραπτώς τις λύσεις σας, θα υπάρξει η δυνατότητα σχολιασμού τους.*
- Μία επιλογή ασκήσεων επανάληψης θα συζητηθεί στο μάθημα.
- **Η επίλυση των ασκήσεων δε συμμετέχει στον τελικό βαθμό του μαθήματος.**
- **Δε θα απαντηθούν emails σχετικά με τις ασκήσεις και τις λύσεις τους.**

Αναφορές

[1] K. H. Rosen. *Διακριτά Μαθηματικά και Εφαρμογές τους.* Εκδ. ΤΖΙΟΛΑ, 2018.

[2] S. Epp. *Διακριτά Μαθηματικά με Εφαρμογές.* Εκδ. ΚΛΕΙΔΑΡΙΘΜΟΣ, 2010.