

Лабораторная работа 1.4.1

Изучение экспериментальных погрешностей на примере физического маятника.

И. М. Артёмов

7 октября 2022 г.

Цель работы: 1) на примере измерения периода свободных колебаний физического маятника познакомиться с систематическими и случайными погрешностями, прямыми и косвенными измерениями; 2) проверить справедливость формулы для периода колебаний физического маятника и определить значение ускорения свободного падения; 3) убедиться в справедливости теоремы Гюйгенса об обратимости точек опоры и центра качания маятника; 4) оценить погрешность прямых и косвенных измерений и конечного результата.

Оборудование: металлический стержень с опорной призмой; закреплённая на стене консоль; подставка с острой гранью для определения центра масс маятника; секундомер; счётчик колебаний (механический или электронный); линейки металлические различной длины; штангенциркуль; электронные весы; математический маятник (небольшой груз, подвешенный на нитях).

1. Теоретическое введение.

Пусть однородный стержень длины l подвешен на оси O на расстоянии a от центра масс C . При отклонении стержня от вертикали на угол $\varphi \ll 1$, начинаются колебания стержня, которые можно описать уравнением моментов относительно оси O :

$$I\ddot{\varphi} \approx -mga\varphi, \quad (1)$$

где φ - угол отклонения маятника от вертикали, m - его масса, I - момент инерции относительно оси подвеса.

Имеем дело с уравнением гармонических колебаний с периодом:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}} \quad (2)$$

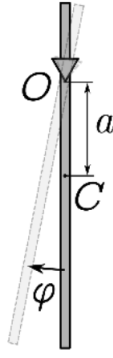


Рис. 1. Стержень как физический маятник

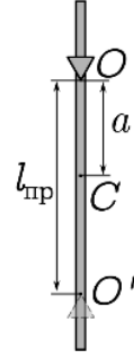


Рис. 2. К теореме Гюйгенса

С учётом теоремы Гюйгенса-Штейнера: $I = \frac{ml^2}{12} + ma^2$, получим:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{l^2}{12} + a^2}{ga}} \quad (3)$$

Заметим, что если положить:

$$l_{\text{пр}} = \frac{l^2}{12a} + a, \quad (4)$$

получим, что период равен периоду колебаний математического маятника с длиной $l_{\text{пр}}$.

Заметим, что $\frac{dl_{\text{пр}}}{da} = 1 - \frac{l^2}{12a^2}$, отсюда $a_m = \frac{l}{2\sqrt{3}}$ — значение a , при котором период

T минимален.

Докажем также *теорему Гюйгенса*. Пусть период одинаков при $a = a_1$ и $a = a_2$. Тогда:

$$\begin{aligned} \forall a \in \{a_1, a_2\} \hookrightarrow a + \frac{l^2}{12a} = l_{\text{пр}}(a_1) &\Rightarrow a^2 - l_{\text{пр}}(a_1)a + \frac{l^2}{12} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a_1 + a_2 = l_{\text{пр}}(a_1), \end{aligned}$$

то есть если сместить точку подвеса на расстояние $l_{\text{пр}}$ вниз, то период колебаний не изменится.

В работе также будет изучаться затухание колебаний. Предполагая, что диссипация обусловлена вязким трением, пропорциональным угловой скорости маятника, получим для мощности потерь:

$$P = -\alpha \dot{\varphi}^2 \quad (\alpha > 0), \quad (5)$$

Усредним P по периоду, считая затухание малым:

$$\langle P \rangle_T = \langle -\xi E_k(t) \rangle_T \approx -\xi \frac{E}{2} \quad (\xi > 0),$$

где E - энергия системы в данном периоде. То есть:

$$\frac{dE}{dt} = -\xi \frac{E}{2}, \text{ откуда: } E = E_0 \exp(-2\gamma t) \quad (\gamma = \xi/4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(t) = A_0 \exp(-\gamma t) \quad (6)$$

За время $\tau = 1/\gamma$ амплитуда A колебаний падает в e раз. Отношение времени жизни колебаний к периоду определяет добротность системы:

$$Q = \pi \frac{\tau}{T} \quad (7)$$

Параметр τ легко определить, зная время τ_2 , за которое амплитуда падает в 2 раза:

$$\tau = \frac{\tau_2}{\ln 2} \quad (8)$$

Наконец, добавим поправки к формуле (3), учитывающие, конечные массу и размер призмы. Точная формула имеет вид:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\text{ст}} + I_{\text{пр}}}{m_{\text{ст}}ga - m_{\text{пр}}ga_{\text{пр}}}} \quad (9)$$

Здесь $I_{\text{пр}}, m_{\text{пр}}, a_{\text{пр}}$ - соответственно момент инерции призмы относительно оси подвеса, её масса и расстояние от оси подвеса до центра масс призмы (знак "минус" в знаменателе означает, что призма находится над осью).

Заметим, что $m_{\text{пр}} \sim 10^{-1}$ кг, $a_{\text{пр}} \sim 1$ см, $m_{\text{ст}} \sim 1$ кг, $a \geq 10$ см, поэтому $I_{\text{пр}}/I_{\text{ст}} \sim 10^{-3}$. Это означает, что можно не учитывать $I_{\text{пр}}$. Однако для моментов, создаваемых силами тяжести призмы и стержня, имеем:

$$\frac{M_{\text{пр}}}{M_{\text{ст}}} = \frac{m_{\text{пр}}ga_{\text{пр}}}{m_{\text{ст}}ga} \sim 10^{-2},$$

то есть имеем ошибку до 1%. Будем учитывать эту поправку.

Чтобы измерить $a_{\text{пр}}$, будем находить расстояние $x_{\text{ц}}$ от центра масс стержня с призмой до точки подвеса и вычислять $a_{\text{пр}}$ по очевидной формуле:

$$a_{\text{пр}} = \frac{m_{\text{ст}}a - (m_{\text{ст}} + m_{\text{пр}})x_{\text{ц}}}{m_{\text{пр}}} \quad (10)$$

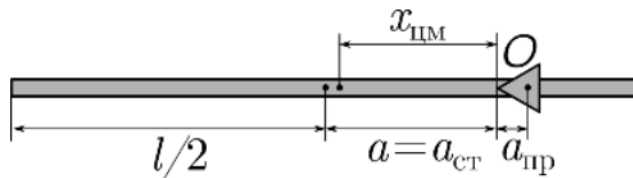


Рис. 3. Смещение центра масс из-за подвесной призмы

В итоге формула для периода примет вид:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{l^2}{12} + a^2}{g(1 + \frac{m_{\text{пр}}}{m_{\text{ст}}})x_{\text{ц}}}} \quad (11)$$

2. Ход работы.

1. Заметим, что погрешности измерения l и a равны цене деления линейки, то есть $\sigma_l = \sigma_a = 0.1$ см. Ускорение свободного падения можно найти, зная период, из формулы (3):

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} l_{\text{пр}} \quad (12)$$

Тогда $\varepsilon_g = \sqrt{(2\varepsilon_T)^2 + (\varepsilon_{l_{\text{пр}}})^2}$. Обозначим $f(l, a) \equiv l_{\text{пр}} \equiv \frac{l^2}{12a} + a$. Тогда:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{l}{6a} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 1 - \frac{l^2}{12a^2}$$

$$\varepsilon_f = \frac{1}{f} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial l} \sigma_l\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial a} \sigma_a\right)^2} = \frac{\sigma_a}{\frac{l^2}{12} + a^2} \sqrt{\frac{l^2}{36a^2} + \left(1 - \frac{l^2}{12a^2}\right)^2}$$

Пусть $\mu = l/a$. Тогда получим: $\varepsilon_f = \frac{12}{13\mu} \sqrt{\frac{\mu^2}{36} + \left(1 - \frac{\mu^2}{12}\right)^2} \frac{\sigma_a}{l}$. (13)

Построим график функции $\varepsilon_f(\mu)$ для $\mu \in [2; 10]$ и $l = 1$ м (примерно в таком диапазоне мы будем производить измерения). График показан на Рис. 4. Нетрудно видеть, что ошибка измерения $l_{\text{пр}}$ на всём диапазоне не превосходит 0.1%. Примерно с такой точностью есть смысл измерять период T .

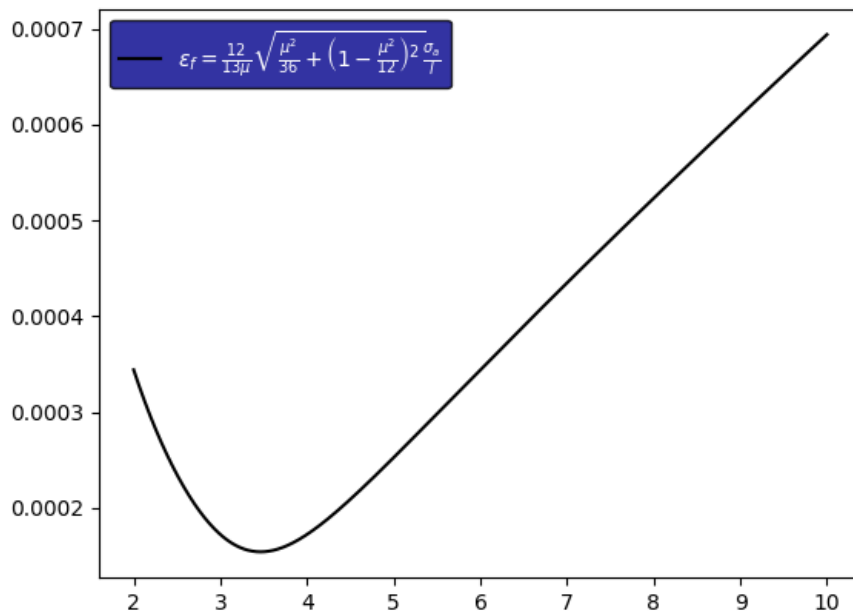


Рис. 4. График зависимости $\varepsilon_f(\mu)$ для $\mu \in [2; 10]$

2. Измерим длину l стержня линейкой, взвесим стержень и призму на электронных весах, определим расстояние от края пустого стержня до его центра масс. Получим (погрешность измерения массы на весах оценили как единицу последнего разряда, т. е. $\sigma_m = 0.1$ г):

$$l = (100 \pm 0.1) \text{ см} ; m_{\text{пр}} = (74.9 \pm 0.1) \text{ г} ; m_{\text{ст}} = (1022.4 \pm 0.1) \text{ г}$$

$$X_{\text{ц}} = (50.0 \pm 0.1) \text{ см}$$

Нетрудно видеть, что расстояние от края стержня до его центра масс $X_{\text{ц}} = l/2$, поэтому будем измерять a от оси до середины стержня. Расстояние $x_{\text{ц}}$ от центра масс стержня с призмой до оси будем вычислять по формуле:

$$x_{\text{ц}} = a - (X_{\text{ц}} - x'_{\text{ц}}), \quad (14)$$

где $x'_{\text{ц}}$ - расстояние от края стержня до центра масс.

3. Установим призму на некотором расстоянии от середины стержня, и измерим a и $x'_{\text{ц}}$. Получим:

$$a = (45.0 \pm 0.1) \text{ см} ; x'_{\text{ц}} = (46.8 \pm 0.1) \text{ см} ; x_{\text{ц}} = (41.8 \pm 0.2) \text{ см}$$

Погрешность измерения $x_{\text{ц}}$ считалась, как:

$$\sigma_{x_{\text{ц}}} = \sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_{X_{\text{ц}}}^2 + \sigma_{x'_{\text{ц}}}^2} = \sigma_a \sqrt{3} \approx 0.2 \text{ см} \quad (15)$$

4. Проведём предварительный опыт. Устанавливаем маятник на консоли, отклоняем на малый угол (не более 5°), убеждаемся, что он качается без помех, призма не проскальзывает, колебания затухают слабо. Измеряем время $n = 20$ полных колебаний маятника и вычисляем период T

$$t_{20} = (31.91 \pm 0.01) \text{ с} ; T = \frac{t_{20}}{n} \approx (1.5955 \pm 0.0005) \text{ с}$$

Здесь за систематическую погрешность измерения времени секундомером была принята единица последнего разряда $\sigma_t = 0.1$ с, а $\sigma_T = \sigma_{t_{20}}/n = 0.0005$ с

Вычислим предварительное значение g по формуле (3):

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} \left(\frac{l^2}{12a} + a \right) \approx (9.850 \pm 0.007) \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \quad (16)$$

Здесь погрешность g считалась по формулам, приведённым в пункте 1, в частности ε_f считалось по формуле (13) для $\mu = l/a = 20/9$, а $\varepsilon_T = \varepsilon_{t_{20}}$. Получили отклонение от теоретического значения g не более 10%.

5. Проведём серию из $N = 10$ измерений времени t_{20} полных $n = 20$ колебаний стержня. Результаты - в табл. 1.

N опыта	$t_{20}, \text{ с}$
1	31.91
2	31.90
3	32.07
4	31.87
5	31.84
6	31.94
7	31.82
8	31.90
9	32.00
10	31.98

Таблица 1

Вычислим среднее значение и ошибки измерения времени t_{20} :

$$t_{20} = \overline{t_{20}} = \frac{\sum_{i=1}^N t_{20,i}}{N} = (31.92 \pm 0.07) \text{ с} ; \sigma_{t_{20}}^{\text{случ}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (t_{20,i} - t_{20})^2}{N(N-1)}} \approx 0.07 \text{ с} \quad (17)$$

$$\sigma_{t_{20}}^{\text{сист}} = 0.01 \text{ с} ; \sigma_{t_{20}}^{\text{полн}} = \sqrt{\sigma_{t_{20}}^{\text{случ}^2} + \sigma_{t_{20}}^{\text{сист}^2}} \approx 0.07 \text{ с} ; \varepsilon_{t_{20}} \approx 2 \cdot 10^{-3} \quad (18)$$

Для периода имеем: $T = (1.596 \pm 0.004) \text{ с}$. Заметим, что точность измерения T порядка 0.1%, поэтому изменять n не будем. Значение g определим по более точной формуле (11):

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{\frac{l^2}{12} + a^2}{\left(1 + \frac{m_{\text{пр}}}{m_{\text{ст}}}\right) x_{\text{ц}}} \quad (19)$$

Заметим, что знаменатель второй дроби близок к a , $\sigma_{x_{\text{ц}}} = \sigma_a \sqrt{3}$, а относительная погрешность определения $\psi = (1 + m_{\text{пр}}/m_{\text{ст}})$:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_{\frac{m_{\text{пр}}}{m_{\text{ст}}}}}{\psi} \approx \frac{\frac{\sigma_{m_{\text{пр}}}}{m_{\text{ст}}}}{\psi} \approx 10^{-4}$$

Поэтому будем считать σ_g по формулам из п.1 аналогично тому, как делали при предварительном расчёте. Получим:

$$g = (9.87 \pm 0.04) \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

6. Проведём аналогичные измерения ещё для 9 значений a . При этом вблизи минимума периода $a_m = \frac{l}{2\sqrt{3}}$ стоит провести больше измерений. Результаты - в табл. 2-11.
7. Для $a = 40 \text{ см}$ $l_{\text{пр}} \approx 60.8 \text{ см}$. Установим эту длину у математического маятника и проведём опыт из $K = 7$ измерений времени t_{20} полных $n = 20$ колебаний маятника. Результат - в таблице 12.

$a = 400$ мм	
N опыта	t_{20}, c
1	31.20
2	31.24
3	31.17
4	31.38
5	31.18
6	31.09
7	31.25
8	31.25
9	31.47
10	31.12

Таблица 2

$a = 350$ мм	
N опыта	t_{20}, c
1	30.78
2	30.80
3	30.71
4	30.60
5	30.72
6	30.79
7	30.75
8	30.78
9	30.72
10	30.70

Таблица 3

$a = 300$ мм	
N опыта	t_{20}, c
1	30.50
2	30.53
3	30.53
4	30.47
5	30.44
6	30.44
7	30.53
8	30.53
9	30.44
10	30.66

Таблица 4

$a = 290$ мм	
N опыта	t_{20}, c
1	30.44
2	30.28
3	30.32
4	30.44
5	30.50
6	30.38
7	30.41
8	30.43
9	30.41
10	30.37

Таблица 5

$a = 280$ мм	
N опыта	t_{20}, c
1	30.37
2	30.59
3	30.25
4	30.47
5	30.50
6	30.47
7	30.41
8	30.47
9	30.62
10	30.40

Таблица 6

$a = 270$ мм	
N опыта	t_{20}, c
1	30.65
2	30.40
3	30.53
4	30.72
5	30.87
6	30.50
7	30.70
8	30.84
9	30.40
10	30.44

Таблица 7

$a = 250$ мм	
N опыта	t_{20}, c
1	30.72
2	30.62
3	30.60
4	30.72
5	30.78
6	30.69
7	30.81
8	30.41
9	30.59
10	30.56

Таблица 8

$a = 208$ мм	
N опыта	t_{20}, c
1	31.25
2	31.31
3	31.25
4	31.34
5	31.32
6	31.28
7	31.35
8	31.31
9	31.26
10	31.28

Таблица 9

$a = 150$ мм	
N опыта	t_{20}, c
1	33.66
2	33.79
3	33.69
4	33.60
5	33.75
6	33.72
7	33.65
8	33.75
9	33.66
10	33.70

Таблица 10

№ серии	a , мм	$x'_{ц}$, мм	$x_{ц}$, мм	n	t_{20} , с	T , с	g , м/с ²
1	450 ± 1	468 ± 1	418 ± 2	20	31.92 ± 0.07	1.596 ± 0.004	9.87 ± 0.04
2	400 ± 1	475 ± 1	375 ± 2	20	31.24 ± 0.11	1.562 ± 0.006	9.78 ± 0.07
3	350 ± 1	476 ± 1	326 ± 2	20	30.74 ± 0.06	1.537 ± 0.003	9.83 ± 0.04
4	300 ± 1	478 ± 1	278 ± 2	20	30.51 ± 0.06	1.526 ± 0.003	9.85 ± 0.04
5	290 ± 1	479 ± 1	269 ± 2	20	30.40 ± 0.06	1.520 ± 0.003	9.91 ± 0.04
6	280 ± 1	480 ± 1	260 ± 2	20	30.44 ± 0.10	1.522 ± 0.005	9.87 ± 0.07
7	270 ± 1	481 ± 1	251 ± 2	20	30.61 ± 0.17	1.531 ± 0.009	9.77 ± 0.11
8	250 ± 1	482 ± 1	232 ± 2	20	30.65 ± 0.11	1.533 ± 0.006	9.84 ± 0.07
9	208 ± 1	485 ± 1	193 ± 2	20	31.30 ± 0.03	1.565 ± 0.002	9.85 ± 0.02
10	150 ± 1	489 ± 1	139 ± 2	20	33.70 ± 0.05	1.685 ± 0.003	9.86 ± 0.03

Таблица 11

N опыта	t_{20} , с
1	33.66
2	33.79
3	33.69
4	33.60
5	33.75
6	33.72
7	33.65

Таблица 12

Отсюда получим: $t_{20} = (31.32 \pm 0.12)$ с ; $T_{math} = (1.566 \pm 0.006)$ с

Так как при этом $T_{phys} = (1.562 \pm 0.006)$ с (табл. 11), то $\Delta T = T_{math} - T_{phys} = (0.004 \pm 0.008)$ с, то есть в пределах погрешности значения T_{math} и T_{phys} совпадают.

Заметим, что для $a_1 = 40$ см, $a_2 = l_{пр}(a_1) - a_1 \approx 20.8$ см. Из таблицы 11:

$$T(a_1) = (1.562 \pm 0.006) \text{ с} ; T(a_2) = (1.565 \pm 0.002) \text{ с}$$

$$\Delta T = T(a_2) - T(a_1) = (0.003 \pm 0.006) \text{ с}$$

В пределах погрешности $T(a_1)$ и $T(a_2)$ совпадают, что подтверждает *теорему Гюйгенса*.

8. По данным табл. 11 усредним g :

$$g = \frac{\sum_{i=1}^{10} g_i}{10} = (9.843 \pm 0.019) \frac{\text{м}}{\text{с}^2} ; \varepsilon_g = 2 \cdot 10^{-3}$$

Погрешность g считалась, как:

$$\sigma_g = \frac{1}{10} \sqrt{\sum_{i=1}^{10} \sigma_{g_i}^2}$$

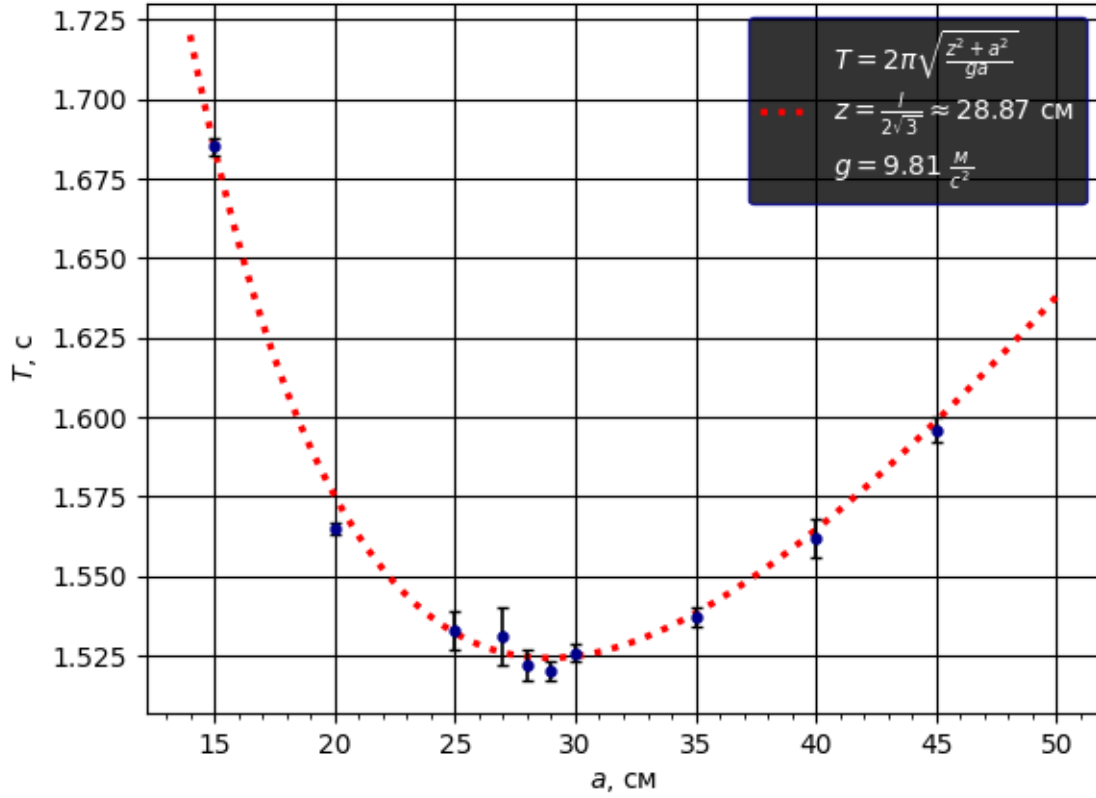


Рис. 5. Экспериментальная и теоретическая зависимость $T(a)$

9. Построим экспериментальную зависимость $T(a)$ по данным табл. 11. Зависимость имеет минимум между $a = 28$ см и $a = 29$ см, что согласуется с теорией: $a_m = \frac{l}{2\sqrt{3}} \approx 28.87$ см. Построим также теоретическую кривую $T(a)$ при $a \in [14; 50]$ см. Она задаётся формулой:

$$T(a) = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{l^2}{12} + a^2}{ga}} = 2\pi\sqrt{\frac{z^2 + a^2}{ga}} = 2\pi\sqrt{\frac{z}{a}}\sqrt{\frac{z}{a} + \frac{a}{z}} \quad \left(z^2 = \frac{l^2}{12}\right) \quad (20)$$

Отсюда видно, что $T = T_m$ при $a = z$, при этом зависимость $T(a)$ можно переписать в виде:

$$T(a) = \frac{T_m}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{z}{a} + \frac{a}{z}} \quad (21)$$

Поэтому для проверки соответствия эксперимента теоретическим расчётам построим также график $T(a)$ по формуле (21) для экспериментального значения $T_m \approx 1.520$ с. Соответствующие графики приведены на рис. 5, 6, 7. Нетрудно видеть, что точки в пределах погрешности ложатся на теоретические кривые, а кривая, построенная с использованием экспериментального T_m , близка к теоретической кривой.

10. Построим график зависимости $u(v)$, где $u = T^2 x_{\text{ц}}$, $v = a^2$. При этом ошибки величин u и v будем считать по формулам:

$$\sigma_u = \sqrt{(T^2 \sigma_{x_{\text{ц}}})^2 + (2T \sigma_T x_{\text{ц}})^2} = T \sqrt{(T \sigma_{x_{\text{ц}}})^2 + (2x_{\text{ц}} \sigma_T)^2} \quad (22)$$

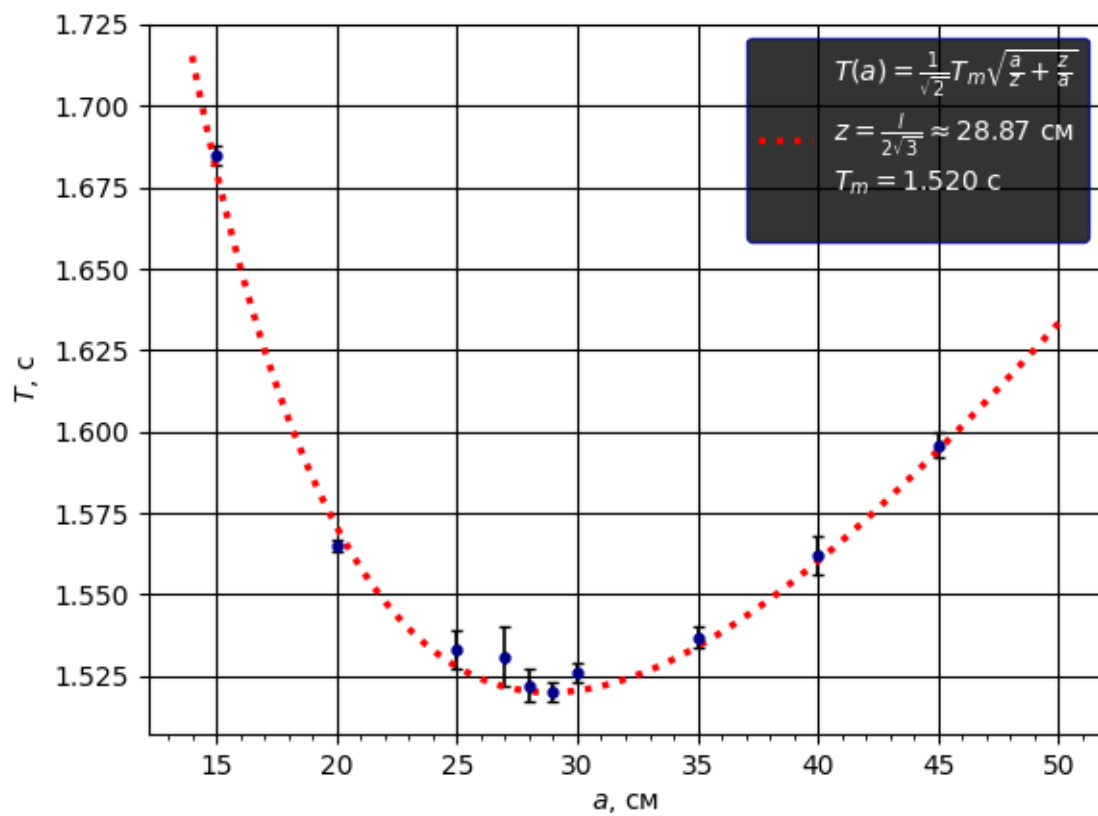


Рис. 6. Экспериментальная и теоретическая зависимость $T(a)$

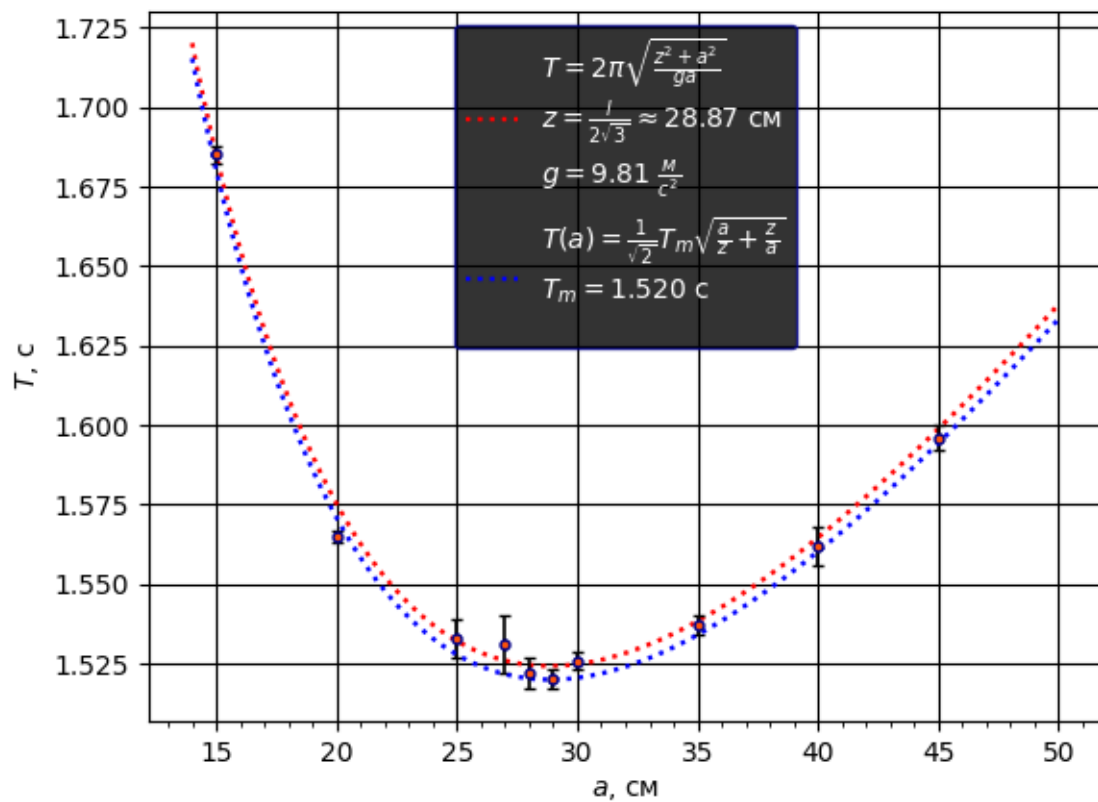


Рис. 7. Экспериментальная и теоретические зависимости $T(a)$

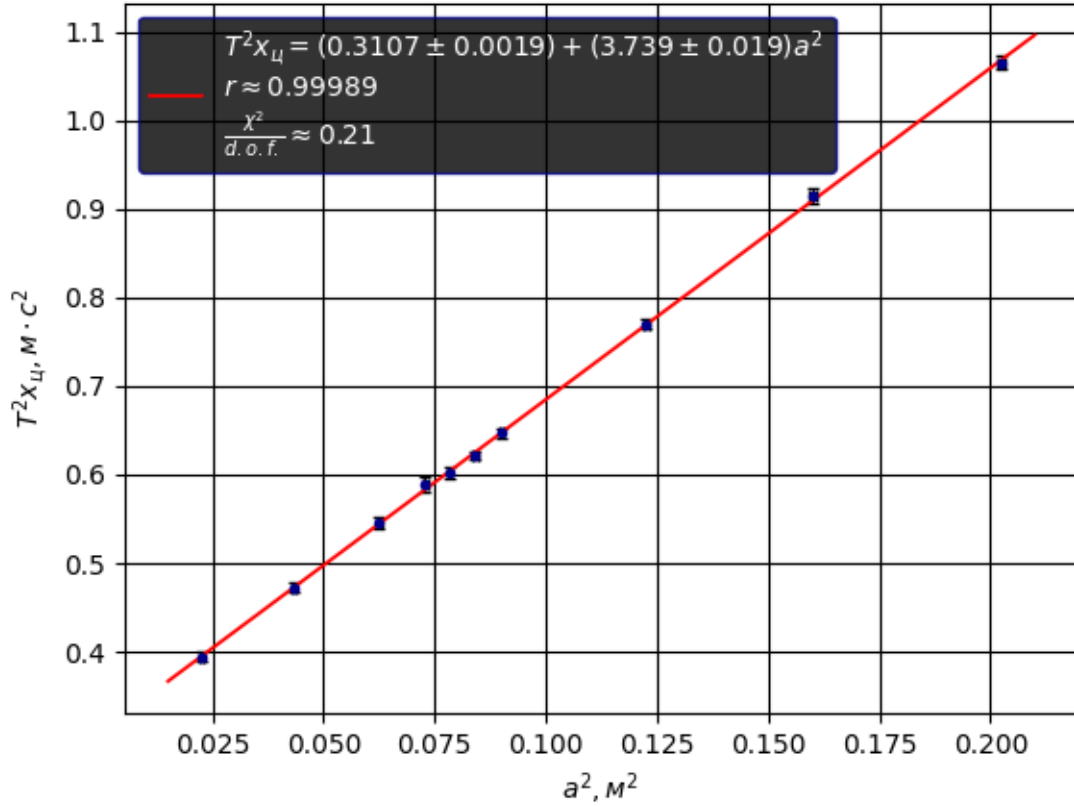


Рис. 8. График зависимости $u(v)$ и его аппроксимация линейной функцией

$$\sigma_v = 2a\sigma_a \quad (23)$$

График зависимости и его аппроксимация линейной функцией по хи-квадрат показаны на рис. 8. Выразим коэффициенты зависимости $u(v)$ теоретически. Из формулы (11) получим:

$$T^2 x_{\text{ц}} = \frac{4\pi^2}{g\psi} a^2 + \frac{\pi^2 l^2}{3\psi g} \Rightarrow u = \frac{4\pi^2}{g\psi} v + \frac{\pi^2 l^2}{3\psi g} = \beta v + \alpha, \quad \psi = \left(1 + \frac{m_{\text{пр}}}{m_{\text{ст}}}\right)$$

Обработка методом хи-квадрат даёт:

$$\beta = (3.739 \pm 0.019) \frac{\text{с}^2}{\text{м}^2}; \quad \alpha = (0.3107 \pm 0.0019) \text{м} \cdot \text{с}^2; \quad r \approx 0.99989 \text{ (коэф. корреляции)}$$

$$\frac{\chi^2}{d.o.f.} \approx 0.21$$

В итоге получим:

$$g = \frac{4\pi^2}{\psi\beta} = (9.84 \pm 0.05) \frac{\text{м}}{\text{с}^2}; \quad \varepsilon_g = 5 \cdot 10^{-3}$$

Погрешность g , с учётом того, что $\varepsilon_\psi \ll \varepsilon_\beta$, считалась, как:

$$\sigma_g = g\varepsilon_\beta = g \frac{\sigma_\beta}{\beta}$$

11. Для $a = 40$ см измерим время τ_2 , за которое амплитуда колебаний маятника уменьшается в 2 раза (с 10° до 5°). Получим:

$$\tau_2 = (290.28 \pm 0.01) \text{ с}$$

Тогда время жизни: $\tau = \frac{\tau_2}{\ln 2} \approx (418.78 \pm 0.01) \text{ с} \quad (\sigma_\tau = \tau \varepsilon_{\tau_2})$

Добротность: $Q = \pi \frac{\tau}{T(a)} \approx 842 \pm 8 \quad (\sigma_Q = Q \varepsilon_T)$. Система высокодобротна.

3. Вывод

В ходе работы были проверены формулы для периода физического маятника и теорема Гюйгенса об обратимости точек опоры. Полученные экспериментальные данные хорошо согласуются с теоретическим описанием рассматриваемых явлений. Было исследовано затухание колебаний, найдено время жизни и добротность системы. Также было определено ускорение свободного падения g двумя способами: путём усреднения значений, полученных в каждой серии измерений периода полных n колебаний маятника и путём анализа экспериментальной зависимости периода колебаний от параметров установки. Точность измерений в обоих случаях примерно одинакова ($\sim 0.1\%$), однако только второй способ дал значение, в пределах погрешности совпадающее с теоретическим $g = 9.81 \text{ м/с}^2$. Из этого можно сделать вывод, что анализ зависимостей, параметром которых является искомая величина, даёт более точные результаты, чем усреднение значений величины в каждой точке измерения.