Группы симметрий геометрических фигур

26 октября • 8 класс

Разбор

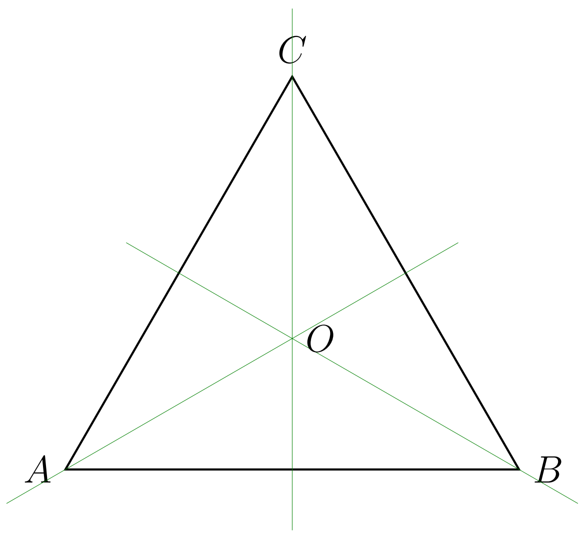
Обозначения. Множество целых чисел обозначается символом $\mathbb{Z}$, натуральных — $\mathbb{N}$, рациональных — $\mathbb{Q}$, вещественных — $\mathbb{R}$. Как учил нас Декарт, точки плоскости можно отождествить с их координатами, поэтому множество точек плоскости будем обозначать $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ или просто $\mathbb{R}^2$.
Значок $\subseteq$ обозначает «является подмножеством». Например: $\{1,2\} \subseteq \{1,2,3\}$, $\quad \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, $\quad \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, $\quad \{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3\}$.

Определение. ***Симметриями*** фигуры $\Phi \subseteq \mathbb{R}^2$ называются такие движения плоскости $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, которые оставляют эту фигуру на месте, то есть

$$\forall x (x \in \Phi \Rightarrow A(x) \in \Phi).$$

Множество всех симметрий фигуры Φ будем обозначать $\mathrm{Sym}(\Phi)$.

Пример 1. Пусть P_3 — правильный треугольник, смотри рисунок. Тогда множество $\mathrm{Sym}(P_3)$ состоит из:



e — тождественного движения;
r_{120} — поворота относительно O на 120° (против часовой стрелки);
r_{240} — поворота относительно O на 240° (против часовой стрелки);
s_C — симметрии относительно серединного перпендикуляра к AB;
s_A — симметрии относительно серединного перпендикуляра к BC;
s_B — симметрии относительно серединного перпендикуляра к CA.

Очевидно, что композиция двух симметрий какой-либо фигуры также является симметрией той же фигуры. Например, $s_C \circ s_B = r_{240}$.

Задача 1. Заполните «таблицу умножения» для множества $\mathrm{Sym}(P_3)$ с операцией $\circ$.

$\circ$	e	r_{120}	r_{240}	s_C	s_A	s_B
e	e	r_{120}	r_{240}	s_C	s_A	s_B
r_{120}	r_{120}	r_{240}	e	s_B	s_C	s_A
r_{240}	r_{240}	e	r_{120}	s_A	s_B	s_C
s_C	s_C	s_A	s_B	e	r_{120}	r_{240}
s_A	s_A	s_B	s_C	r_{240}	e	r_{120}
s_B	s_B	s_C	s_A	r_{120}	r_{240}	e

Множество с бинарной (то есть принимающей два аргумента) операцией называется ***группой***, если эта операция удовлетворяет некоторым требованиям. Мы не будем сейчас перечислять эти требования, но постулируем, что для любой фигуры Φ, множество симметрий $\mathrm{Sym}(\Phi)$ с операцией композиции $\circ$ является группой.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Пусть X — множество параллелограммов, Y — множество ромбов, Z — множество прямоугольников, W — множество четырёхугольников с перпендикулярными диагоналями.
(a) Верны ли следующие утверждения? $Y \subseteq X$; $Z \subseteq W$; $Y = X \cap W$; $Z \subseteq X$.
(b) Выразите множество квадратов Q через эти множества, используя операции объединения и/или пересечения.
Задача 2. Опишите множества симметрий следующих фигур:
(a) $\Phi_1 \in (X - Z) - W$ — параллелограмм общего вида;
(b) $\Phi_2 \in Z - W$ — прямоугольник общего вида;
(c) $\Phi_3 \in Y - Z$ — ромб общего вида;
(d) P_4 — квадрат (он же правильный четырёхугольник);
(e) P_5 — правильный пятиугольник;
(f, 2 балла) P_{2n} — правильный $2n$-угольник;
(g, 2 балла) P_{2n+1} — правильный $2n+1$-угольник;
(h, 2 балла) D — круг.
Задача 3. Постройте таблицы умножения для:
(a) $(\mathrm{Sym}(\Phi_1), \circ)$;
(b) $(\mathrm{Sym}(\Phi_2, \circ)$;
(c) $(\mathrm{Sym}(\Phi_3, \circ)$;
(d) $(\mathrm{Sym}(P_4), \circ)$;
(e, 2 балла) $(\mathrm{Sym}(P_5), \circ)$;
(f, 3 балла) $(\mathrm{Sym}(P_{2n}), \circ)$;
(g, 3 балла) $(\mathrm{Sym}(P_{2n+1}), \circ)$;
(h, 3 балла) $(\mathrm{Sym}(D), \circ)$.