Движения плоскости

21 сентября • 8 класс

Правила. Пятёрки получат те, кто до 27 сентября включительно наберут 12 баллов. По умолчанию каждый пункт каждой задачи ст**о**ит 1 балл. Удачи!

Определение. *Движением называется любое преобразование плоскости, сохраняющее расстояния. Композицией движений называется последовательное их применение. Обозначение —* $F_1 \circ F_2$.

Игрушечный пример. Тождетвенное преобразование e (то есть оставляющее все точки плоскости на месте) является движением.

Пример. Все осевые симметрии, повороты и параллельные переносы являются движениями.

Задачи на разбор

Задача 1. Покажите, что композиция движений является движением.
Задача 2. Покажите, что композиция движений ассоциативна:

$$F_1 \circ (F_2 \circ F_3) = (F_1 \circ F_2) \circ F_3.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Верно ли, что композиция движений коммутативна (перестановочна):

$$F_1 \circ F_2 = F_2 \circ F_1?$$

Докажите или приведите контрпример.
Задача 2 (0.5 балла). Зафиксированы точки A и A'. Покажите, что существует осевая симметрия, переводящая A в A'.
Задача 3 (0.5 балла). Зафиксированы точки A, B и B', причём $AB = AB'$. Покажите, что существует осевая симметрия, оставляющая A на месте и переводящая B в B'.
Задача 4 (0.5 балла). Зафиксированы точки A, B, C и C', причём $AC = AC'$ и $BC = BC'$. Покажите, что существует осевая симметрия, оставляющая A и B на месте и переводящая C в C'.
Задача 5. Зафиксируем 3 точки плоскости A, B, C, не лежащие на одной прямой. Покажите, что единственное движение, оставляющее их все на месте — тождественное.
Задача 6. Зафиксируем 3 точки плоскости A, B, C, не лежащие на одной прямой. Зафиксируем ещё 3 точки плоскости A', B', C', также не лежащие на одной прямой. Пусть $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ и $CA = C'A'$. Покажите, что
(a) существует движение, переводящее A в A', B в B' и C в C';
(b, 2 балла) такое движение единственно.

Задача 7. Покажите, что любое движение является композицией осевых симметрий, причём достаточно использовать не более трёх штук.

Задача 8. Покажите, что любое движение

(a, 0.5 балла) переводит разные точки в разные;

(b) взаимно-однозначно (в каждую точку переходит ровно одна точка).

Задача 9. Покажите, что для любого движения F есть единственное **обратное** движение F^{-1}, то есть такое, что $F \circ F^{-1} = F^{-1} \circ F = e$.

Задача 10. Покажите, как представить

(a) параллельный перенос на любой вектор;

(b) поворот вокруг любой точки на любой угол

композицией двух осевых симметрий.

Задача 11 (2 балла). Приведите пример движения, не являющегося осевой симметрией, поворотом или параллельным переносом. Придумайте название для движений такого типа. *Формальная часть задачи — в первом предложении. Тем не менее попробуйте разобраться, как можно описать ваш пример более общо, выделить его в какую-то группу. Если не получается, я расскажу.*

Задача 12 (2 балла). Докажите **теорему Шаля**: любое движение является осевой симметрией, поворотом, параллельным переносом или движением типа найденного в задаче 11.

Задача 13 (4 балла). Составьте «таблицу умножения» для движений. В каждую клетку должны быть вписаны все типы движений, которые можно получить. Звёздочкой $*$ обозначено движение из задачи 11. Можно получить баллы за заполнение части таблицы.

	осевая симметрия	поворот	параллельный перенос	$*$
осевая симметрия				
поворот				
параллельный перенос				
$*$				