Множества: Введение

12 октября • 8 класс

Правила. Пятёрки получат те, кто до 18 октября включительно наберут 10 баллов. По умолчанию каждый пункт каждой задачи ст**о**ит 1 балл. Удачи!

Задачи на разбор

Определение. Множеством называется набор из любого числа объектов, отобранных по какому-нибудь принципу, но без повторений. Принцип может быть сколь угодно хитрым, как вы увидите в примерах. Множества обозначают фигурными скобками, внутрь которых включают либо полный список элементов, либо правило, которое их выделяет.

Примеры.

$$\begin{aligned}
A &= \{\text{ученики класса 8–4}\}\\
B &= \{\text{люди в этом дискорд-канале}\}\\
C &= \{\text{стулья в аудитории 404}\}\\
D &= \{\text{натуральные числа}\}\\
E &= \{\text{точки плоскости}\}\\
F &= \{0,\ 7,\ \text{Илон Маск},\ \text{левый стул первой парты среднего ряда},\ (\sqrt{2}, \sqrt{3})\}
\end{aligned}$$

Обратите внимание, что определение не требует, чтобы объекты из одного множества были в каком-нибудь смысле «одной природы», последний пример это иллюстрирует. Однако, на практике чаще всего полезны именно однородные множества.

Задача 1. Сколько элементов в каждом из множеств $A, \ldots, F$?

Решение: $|A| = 25$, $|B| = 11$, $|C| \approx 30$, $|D| = \infty$ (точнее — $\aleph_0$, но это пока не нужно понимать), $|E| = \infty$ (точнее — $2^{\aleph_0}$, но это пока не нужно понимать), $|F| = 5$. $\square$

Определение. Здесь и далее незанятыми заглавными латинскими буквами обозначаются произвольные множества. Объединением множеств X и Y называется множество $X \cup Y$, содержащее в себе в точности те элементы, которые есть в X **или** в Y (обратите внимание, что «или» не исключающее). Пересечением множеств X и Y называется множество $X \cap Y$, содержащее в себе в точности те элементы, которые есть **и** в X, **и** в Y.

Задача 2. Сколько элементов в множествах: (a) $A \cup B$; (b) $A \cap B$; (c) $((C \cup D) \cup E) \cap F$?

Решение: (a) $|A \cup B| = |\{\text{ученики 8-4 и Илья Левин}\}| = 26$;
(b) $|A \cap B| = |\{\text{ученики 8-4 в этом дискорд-канале}\}| = 10$;
(c) $|((C \cup D) \cup E) \cap F| = |\{7,\ \text{левый стул первой парты среднего ряда},\ (\sqrt{2}, \sqrt{3})\}| = 3$.
$\square$

Обозначения. $\forall$ обозначает «для любого»; $\exists$ обозначает «существует»;
$x \in S$ обозначает «элемент x лежит в множестве S»;
$x \notin S$ обозначает «элемент x **не** лежит в множестве S»;
$P \Rightarrow Q$ обозначает «если P, то Q» (или, другими словами, «из P следует Q»).

Задача 3. Верны ли следующие утверждения?
(a) Михаил Лесс $\in A$;
(b) Диана Варзина $\notin B$;
(c) $\forall x(x \in B \Rightarrow x \in A)$;
(d) $\exists x(x \in C$ и $x \in F)$.

Решение: (a) Верно. (b) Неверно.
(c) Словами: любой человек в этом дискорд-канале является учеником 8-4; неверно.
(d) Словами: существует стул из 404 аудитории, лежащий в множестве F; верно. □

Задача 4. Пусть X и Y — какие-то множества. Всегда ли верны следующие утверждения?
(a) $\forall x(x \in X \Rightarrow x \in X \cup Y)$;
(b) $\forall x(x \in X \Rightarrow x \in X \cap Y)$;
(c) $\forall x(x \in X$ и $x \in Y \Rightarrow x \in X \cap Y)$.

Решение: (a) Словами: всякий элемент множества X лежит в объединении X и Y. Верно, смотри определение.
(b) Словами: всякий элемент множества X лежит в пересечении X и Y. Неверно, контрпример: $X = \{1, 2\}, \quad Y = \{3\}, \quad x = 1$. Тогда x лежит в X, но не лежит в $X \cap Y = \emptyset$.
(c) Словами: всякий элемент, лежащий и в X, и в Y, лежит в их пересечении. Верно, смотри определение. □

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Придумайте множество из (a) 6; (b) 100; (c) 0 элементов.
Задача 2. Придумайте такие множества G и H, что в них по 5 элементов, а в их пересечении 2 элемента. Сколько элементов в их объединении? Всегда ли так будет?
Задача 3 (2 балла). Придумайте множество I, удовлетворяющее условию

$$\forall x(x \in D \Rightarrow \exists y(y \in I \text{ и } y > x)).$$

Задача 4. Пусть X и Y — какие-то множества. Всегда ли верны следующие утверждения?
(a) $\forall x(x \in X \cup Y \Rightarrow x \in X)$;
(b) $\forall x(x \in X \cap Y \Rightarrow x \in X)$;
(c) $\forall x(x \in X \cup Y \Rightarrow x \in X$ или $x \in Y)$.
Задача 5. Зависит ли ответ на задачу 2(c) из разбора от расстановки скобок?
Задача 6. Сформулируйте и докажите.
(a) ассоциативность объединения;
(b) ассоциативность пересечения;
(c) коммутативность объединения;
(d) коммутативность пересечения;
(e, по 2 балла) дистрибутивность (да-да, их и вправду две разных!)
Подсказка: все эти утверждения очевидны из определения, надо только записать их значками.