Перестановки-2

16 ноября • 8 класс

Разбор

Определение. Пусть $\sigma \in S_n$ — перестановка. ***Подгруппой, порождённой*** σ называется множество всех степеней σ, обозначение — $\langle\sigma\rangle$. Количество элементов в этой группе $|\langle\sigma\rangle|$, равняется порядку σ (почему?).

Пример 1. $\langle(1\ 2)\rangle = \{e, (1\ 2)\}$.

Задача 1. Положим $n = 4$. Опишите $\langle\sigma\rangle$ для
(a) $\sigma = (1\ 2\ 3)$; (b) $\sigma = (3\ 2\ 4\ 1)$; (c) $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)$.

Решение: (a) $\langle\sigma\rangle = \{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$;
(b) $\langle\sigma\rangle = \{e, (3\ 2\ 4\ 1), (3\ 4)(2\ 1), (3\ 1\ 4\ 2)\}$;
(c) $\langle\sigma\rangle = \{e, (1\ 2)(3\ 4)\}$. □

Определение. ***Транспозициями*** называются циклические перестановки порядка 2, то есть перестановки вида $(a\ b)$.

Задача 2. Запишите все элементы $\sigma \in S_3$ в виде произведения транспозиций.

Решение: $e, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2)(2\ 3), (2\ 3)(1\ 2)$. □

Доказательство следующей теоремы может вам напомнить решение задачки про последовательности нулей и единиц из листка 01 (Индукция).

Теорема 1. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ любая перестановка $\sigma \in S_n$ может быть записана в виде произведения транспозиций.*

Доказательство. Докажем по индукции. Предположим, что для $n-1$ это утверждение уже доказано. Обозначим за x число, в которое σ переводит n; формулой — $x = \sigma n$. Рассмотрим перестановку $\tau = (x\ \ n) \circ \sigma$. Заметим, что τ оставляет число n на месте, то есть мы можем считать, что $\tau \in S_{n-1}$. По предположению индукции, τ может быть записана в виде произведения транспозиций из S_{n-1}. Следовательно, σ тоже может быть записана в виде произведения транспозиций (только уже из S_n). Если τ записывалась как $\tau = t_1 \circ t_2 \circ \cdots \circ t_k$, где все t_i — транспозиции, то σ можно записать как $\sigma = (x\ n) \circ t_1 \circ t_2 \circ \cdots \circ t_k$. □

Определение. Зафиксируем перестановку $\sigma \in S_n$. Пара чисел $1 \le a < b \le n$ называется ***беспорядком*** или ***инверсией*** для σ, если $\sigma a > \sigma b$.

Пример 2. Пусть $\sigma = (1\ 3)$. Тогда бепорядками будут пары $(1, 2)$, $(1, 3)$ и $(2, 3)$.

Задача 3. Найдите беспорядки для всех перестановок $\sigma \in S_3$.

Решение: Беспорядки e — $\{\}$ (пустое множество); беспорядки $(1\ \ 2)$ — $\{(1, 2)\}$; беспорядки $(2\ 3)$ — $\{(2, 3)\}$; беспорядки $(1\ 3)$ — $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$; беспорядки $(1\ 2\ 3)$ — $\{(1, 3), (2, 3)\}$; беспорядки $(1\ 3\ 2)$ — $\{(1, 2), (1, 3)\}$. □

Определение. Перестановка называется ***чётной***, если у неё чётное число беспорядков, и ***нечётной*** иначе.

Пример 3. e, $(1\ 2\ 3)$ и $(1\ 3\ 2)$ — чётные перестановки, $(1\ 2)$, $(2\ 3)$ и $(1\ 3)$ — нечётные.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Опишите $\langle\sigma\rangle$ для
(a) $\sigma = (1\ 2\ 3)(4\ 5)$; (b) $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)(7\ 8\ 9)$.
Задача 2. Запишите в виде произведения транспозиций следующие перестановки:
(a) $(1\ 2\ 3\ 4)$;
(b) $(1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7)$;
(c) $(a\ b\ c\ d\ e)$;
(d) $(1\ 2\ \ldots\ k-1\ k)$.

Определение. Назовём ***элементарной транспозицией*** транспозицию соседних чисел $(k\ k+1)$.
Задача 3. Запишите в виде произведения элементарных транспозиций следующие перестановки:
(a) $(1\ 3)$;
(b) $(1\ 2\ 3)$;
(c) $(1\ 3\ 2)$;
(d) $(1\ 3\ 5)$;
(e) $(1\ 3\ 5)(2\ 4)$;
(f) $(1\ k)$;
(g) $(1\ 2\ \ldots\ k-1\ k)$.
Задача 4 (3 балла). Докажите усиленную версию теоремы 1: любая перестановка может быть записана в виде произведения элементарных транспозиций.
Задача 5. Найдите беспорядки для следующих перестановок:
(a) $(1\ 4)$; (b) $(1\ 2\ 4)$; (c) $(1\ 3\ 4)$; (d) $(1\ 5)$; (e) $(1\ k)$.
Задача 6. Докажите, что все транспозиции — нечётные перестановки.
Задача 7 (4 балла). Докажите, что при умножении перестановок их чётности «складываются».
Произведение двух чётных перестановок — чётная перестановка.
Произведение двух нечётных перестановок — чётная перестановка.
Произведение чётной и нечётной перестановок — нечётная перестановка.
Задача 8. Докажите, что все циклы чётной длины — нечётные перестановки, а все циклы нечётной длины — чётные перестановки.