Отображения

19 октября • 8 класс

Правила. Пятёрки получат те, кто до 25 октября включительно наберут 15 баллов. По умолчанию каждый пункт каждой задачи ст**о**ит 1 балл. Удачи!

Задачи на разбор

Определение. ***Отображение*** f множества X в множество Y — правило, сопоставляющее *каждому* элементу $x \in X$ *ровно один* элемент $f(y) \in Y$. Синоним: функция f из X в Y. Обозначение: $f\colon X \to Y$.

Пример 1. $X = Y$ — любое множество, $f(x) = x$. Такое отображение называется ***тождественным*** и обозначается $\mathbb{1}_X$.

Пример 2. $X = \{$московские школьники$\}$, $Y = \{$школы в Москве$\}$,
$f(x) =$ школа, в которой учится x.

Пример 3. $X = \{$точки плоскости$\}$, $Y = \{$точки плоскости$\}$,
$f =$ поворот относительно начала координат на угол 37°.

Пример 4. $X = \{$вещественные числа$\}$, $Y = \{$вещественные числа$\}$, $f(x) = x^2$.

Пример 5. $X = \{$натуральные числа$\}$, $Y = \{$вещественные числа$\}$, $f(x) = x$.

Пример 6. $X = \{$слушатели нашего кружка$\}$, $Y = \{$вещественные числа$\}$,
$f(x) =$ рейтинг x.

Определение. Отображение $f\colon X \to Y$ называется:
сюръективным, если в каждый элемент кто-то переходит —

$$\forall y \in Y (\exists x \in X (f(x) = y));$$

инъективным, если разные элементы переходят в разные —

$$\forall x_1, x_2 \in X (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2));$$

биективным или ***взаимно-однозначным***, если выполнено и то, и другое.

Задача 1. Какие из отображений в примерах (a) сюръективны; (b) инъективны; (c) биективны?

Решение:

Пример 1. f биективно.

Пример 2. f сюръективно, но не инъективно. В самом деле, в каждой московской школе есть хотя бы один ученик, причём в некоторых из них (скорее всего, во всех) учится больше одного ученика.

Пример 3. f биективно. Это частный случай задачки из позапрошлого листка по движениям плоскости.

Пример 4. f не сюръективно и не инъективно. В самом деле, в отрицательные числа никто не переходит (так как квадрат числа всегда положительный) и квадраты разных чисел могут быть одинаковыми ($2^2 = (-2)^2$).

Пример 5. f инъективно, но не сюръективно. В самом деле, разные натуральные числа тавтологически являются разными действительными числами. Однако, не всякое действительное число является натуральным.

Пример 6. f не инъективно и не сюръективно. В самом деле, на момент написания этого текста, у Семёна и Ивана одинаковый рейтинг (28%), значит f не инъективно. Рейтинга 100500% ни у кого нет, значит f не сюръективно. $\square$

Определение. Композиция отображений $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ — отображение (обратите внимание на поядок!) $g \circ f\colon X \to Z$, определённое следующей формулой

$$\forall x \in X \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Задача 2. Докажите, что композиция отображений ассоциативна.

Решение: Напомним, что ассоциативность означает $f_1 \circ (f_2 \circ f_3) = (f_1 \circ f_2) \circ f_3$. Чтобы показать равенство отображений, нужно показать что они действуют одинаково на каждый элемент. Для произвольного x имеем

$$(f_1 \circ (f_2 \circ f_3))(x) = f_1((f_2 \circ f_3)(x)) = f_1(f_2(f_3(x))) = ((f_1 \circ f_2)(f_3(x)) = ((f_1 \circ f_2) \circ f_3)(x),$$

что и требовалось. $\square$

Задача 3. Правда ли, что композиция двух биекций — биекция?

Решение: Пока без комментариев :) $\square$

Определение. Отображение $g\colon Y \to X$ называется ***правым обратным*** к $f\colon X \to Y$, если $f \circ g = \mathbb{1}_Y$. Отображение $g\colon Y \to X$ называется ***левым обратным*** к $f\colon X \to Y$, если $g \circ f = \mathbb{1}_X$.

Задача 4. Предъявите пример (a) правого обратного к отображению из примера 2; (b) левого обратного к отображению из примера 5.

Решение: (a) Достаточно взять любое отображение из Y в X, переводящее каждую школу в какого-нибудь ученика этой школы. Например, первого по алфавиту в журнале или седьмого по росту. (b) Достаточно взять любое отображение из вещественных чисел в натуральные, не меняющее натуральные числа. Например:

$$g(y) = \begin{cases} y, & \text{если } y \text{ — натуральное} \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

$\square$

Задача 5. Покажите, что всякое сюръективное отображение имеет правое обратное.

Решение: Хотим построить правое обратное к отображению $f\colon X \to Y$. Для любого $y \in Y$ обозначим через $f^{-1}(y)$ ***слой отображения*** f над y, то есть множество всех таких $x \in X$, что $f(x) = y$. Например, слои отображения из примера 2 — множества школьников, обучающихся в одной конкретной школе. Сюръективность отображения f обозначает, что все наши слои непусты. Теперь выберем любым образом по элементу $x \in f^{-1}(y)$ в каждом таком слое и положим $g(y) = x$. Это задаст нам некоторое отображение $g\colon Y \to X$. Легко видеть, что оно правое обратное, как и требовалось.

Для любознательных: для бесконечных множеств этот выбор по элементу в каждом слое не так безобиден, как может показаться. Возможность этого выбора постулируется в математике отдельной аксиомой — аксиомой выбора. $\square$

Задача 6. Покажите, что всякое не инъективное отображение не имеет левого обратного. (Другими словами: если у отображения f есть левое обратное, то f инъективно).

Решение: От противного: пусть у $f\colon X \to Y$ есть левое обратное $g\colon Y \to X$, но f не инъективно. Тогда есть два разных элемента $x_1, x_2 \in X$, такие что $f(x_1) = f(x_2)$. Тогда имеем

$$x_1 = \mathbb{1}_X(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = \mathbb{1}_X(x_2) = x_2,$$

что противоречит предположению. $\square$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Пусть $|X| = n$. Сколько существует биекций $f\colon X \to X$?
Задача 2. Пусть $|X| = n, |Y| = k$.
(a) Сколько различных отображений $f\colon X \to Y$ существует?
(b) Сколько из них инъективных?
(c, 3 балла) Сколько из них сюръективных?
Задача 3. Правда ли, что композиция отображений коммутативна?
Задача 4. Правда ли, что:
(a) композиция двух сюръекций — сюръекция?
(b) композиция двух инъекций — инъекция?
(c) композиция двух биекций — биекция?
Задача 5. Покажите, что отображение:
(a, 2 балла) сюръективно тогда и только тогда, когда имеет правое обратное;
(b, 2 балла) инъективно тогда и только тогда, когда имеет левое обратное.
Задача 6. Пусть отображение f имеет правое обратное g и левое обратное h. Докажите, что (a) $g = h$ и (b) f биективно.
Задача 7. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4\}$ в $Y = \{a, b\}$.
(a) Опишите все отображения из X в Y и посчитайте, сколько правых обратных у каждого из них.
(b) Опишите все отображения из Y в X и посчитайте, сколько левых обратных у каждого из них.
Задача 8. Пусть $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел. Какие из следующих отображений $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ инъективны? Сюръективны?
(a) $f(x) = x + 7$;
(b) $f(x) = 3x - 5$;
(c) $f(x) = |x|$;
(d) $f(x) = x^3$;
(e, 2 балла) $f(x) = x^3 - x$;
(f, 2 балла) $f(x) = 2^x$.