Трёхмерные движения и симметрии

21 декабря • 8 класс

Разбор

Определение. ***Трёхмерным движением*** называется преобразование трёхмерного пространства $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, сохраняющее расстояния

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^3 \Big(\text{distance}(x, y) = \text{distance}(F(x), F(y)) \Big).$$

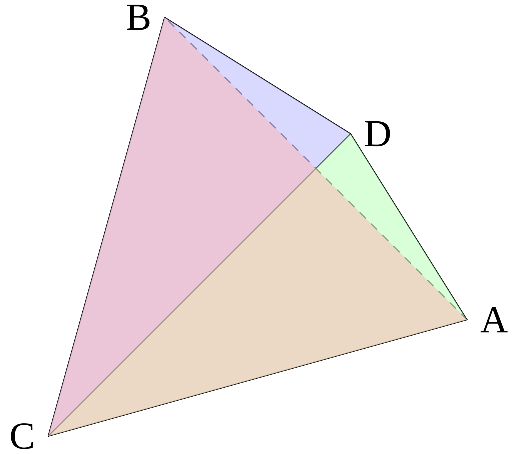
Для краткости, в этом листке мы будем называть их просто движениями.
Пример 1. Отражение относительно плоскости $H \subseteq \mathbb{R}^3$.
Пример 2. Параллельный перенос на вектор $\bar{v}$.
Пример 3. Поворот вокруг оси $l \subseteq \mathbb{R}^3$ на угол $\alpha \in [0°, 360°)$.

Определение. ***Симметрией*** трёхмерной фигуры $\Phi \subseteq \mathbb{R}^3$ называется движение $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, оставляющее фигуру на месте

$$\forall x \in \Phi \; (F(x) \in \Phi).$$

Задача 1. Множество всех симметрий фигуры является группой относительно операции композиции.

Определение. ***Флагом*** для многогранника Φ называется тройка (V, E, F), где V — вершина Φ, E — ребро Φ, смежное с V, а F — грань Φ, смежная с E.
Задача 2. Пусть Φ — любой многогранник, а (V, E, F) — любой флаг в нём. Покажите, что единственная симметрия Φ, оставляющая этот флаг на месте — тождественная.
Задача 3. Пусть G — группа симметрий тетраэдра.
(a) Сколько элементов в G?
(b) Найдите какое-нибудь множество образующих G.
(c) Какие перестановки вершин они реализуют?
(d) Сколько из них отражений, поворотов, переносов?
(e) Какие перестановки рёбер они реализуют?
(f) Какие перестановки граней они реализуют?

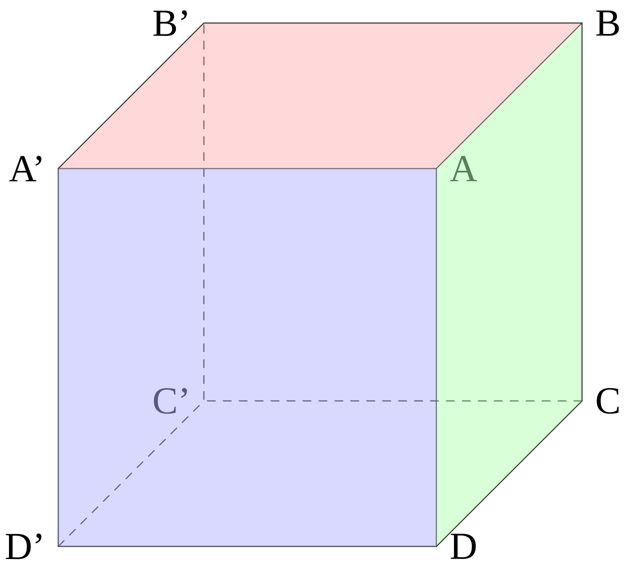


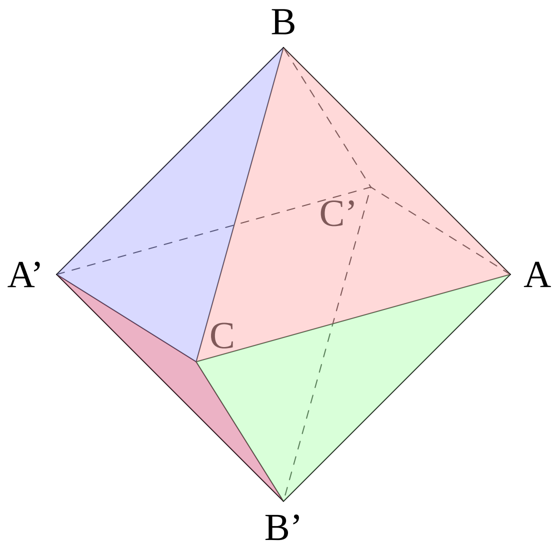
Решение: (a) Заметим, что отражение относительно серединно-перпендикулярной плоскости к ребру тетраэдра (например, AB) является симметрией. Будем обозначать такую симметрию s_{**} (например, s_{AB}). Ясно, что s_{AB} оставляет на месте ребро CD, а вершины A и B меняет местами. Пользуясь такими симметриями можно перевести любой флаг в тетраэдре в любой

другой. Следовательно, элементов в G столько же, сколько и флагов, то есть $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.
(b) Из предыдущего пункта ясно, что $\{s_{AB}, s_{AC}, s_{AD}, s_{BC}, s_{BD}, s_{CD}\}$ — множество образующих.
(c) Образующие из предыдущего пункта реализуют все транспозиции вершин. Так как любая перестановка может быть записана произведением транспозиций, любая перестановка реализуется какой-нибудь симметрией.
(d) Транспозиции (6 штук) реализуются отражениями. Перестановки типа $(A\ B\ C)$ (8 штук) реализуются поворотами на $\pm 120^\circ$ относительно высоты, проведённой из точки D к плоскости ABC. Перестановки типа $(A\ B)(C\ D)$ (3 штуки) реализуются поворотами на 180° относительно прямой, проходящей через середины AB и CD. Остались перестановки типа $(A\ B\ C\ D)$ (6 штук). Покажем, что они не являются ни отражениями, ни поворотами, ни переносами. Перенос вообще не может быть симметрией, так как не оставляет на месте центр тетраэдра. Отражение всегда имеет порядок 2, так что не может реализовывать перестановку порядка 4. Поворот не перемешивает точки из разных плоскостей, перпендикулярных своей оси. Следовательно, если бы эта перестановка реализовывалась поворотом, то все 4 вершины тетраэдра должны были бы лежать в одной плоскости, что неверно. Итого: 6 отражений, 11 нетривиальных поворотов, 0 нетривиальных переносов.
(e) Рёбра тетраэдра можно разбить на три пары противоположных: AB и CD, AC и BD, AD и BC. Ясно, что противоположные рёбра останутся таковыми. Заметим, что симметрия s_{AB} реализует перестановку рёбер $(AD\ BD)(AC\ BC)$. Так как такие симметрии порождают нашу группу, любая перестановка рёбер, реализуемая симметрией, является чётной. Вместе с предыдущим условием это выделяет как раз 24 различных перестановки.
(f) Симметрия s_{AB} реализует транспозицию граней. Следовательно, аналогично вершинам, можно получить любую перестановку граней. □

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Пусть G — группа симметрий куба.
(a) Сколько элементов в G?
(b) Найдите какое-нибудь множество образующих G.
(c) Какие перестановки вершин они реализуют?
(d) Сколько из них отражений, поворотов, переносов?
(e) Какие перестановки рёбер они реализуют?
(f) Какие перестановки граней они реализуют?





Задача 2. Пусть G — группа симметрий октаэдра.

(a) Сколько элементов в G?

(b) Найдите какое-нибудь множество образующих G.

(c) Какие перестановки вершин они реализуют?

(d) Сколько из них отражений, поворотов, переносов?

(e) Какие перестановки рёбер они реализуют?

(f) Какие перестановки граней они реализуют?

Задача 3. Пусть G — группа симметрий додекаэдра.

(a) Сколько элементов в G?

(b) Найдите какое-нибудь множество образующих G.

(c) Какие перестановки вершин они реализуют?

(d) Сколько из них отражений, поворотов, переносов?

(e) Какие перестановки рёбер они реализуют?

(f) Какие перестановки граней они реализуют?

Задача 4. Пусть G — группа симметрий икосаэдра.

(a) Сколько элементов в G?

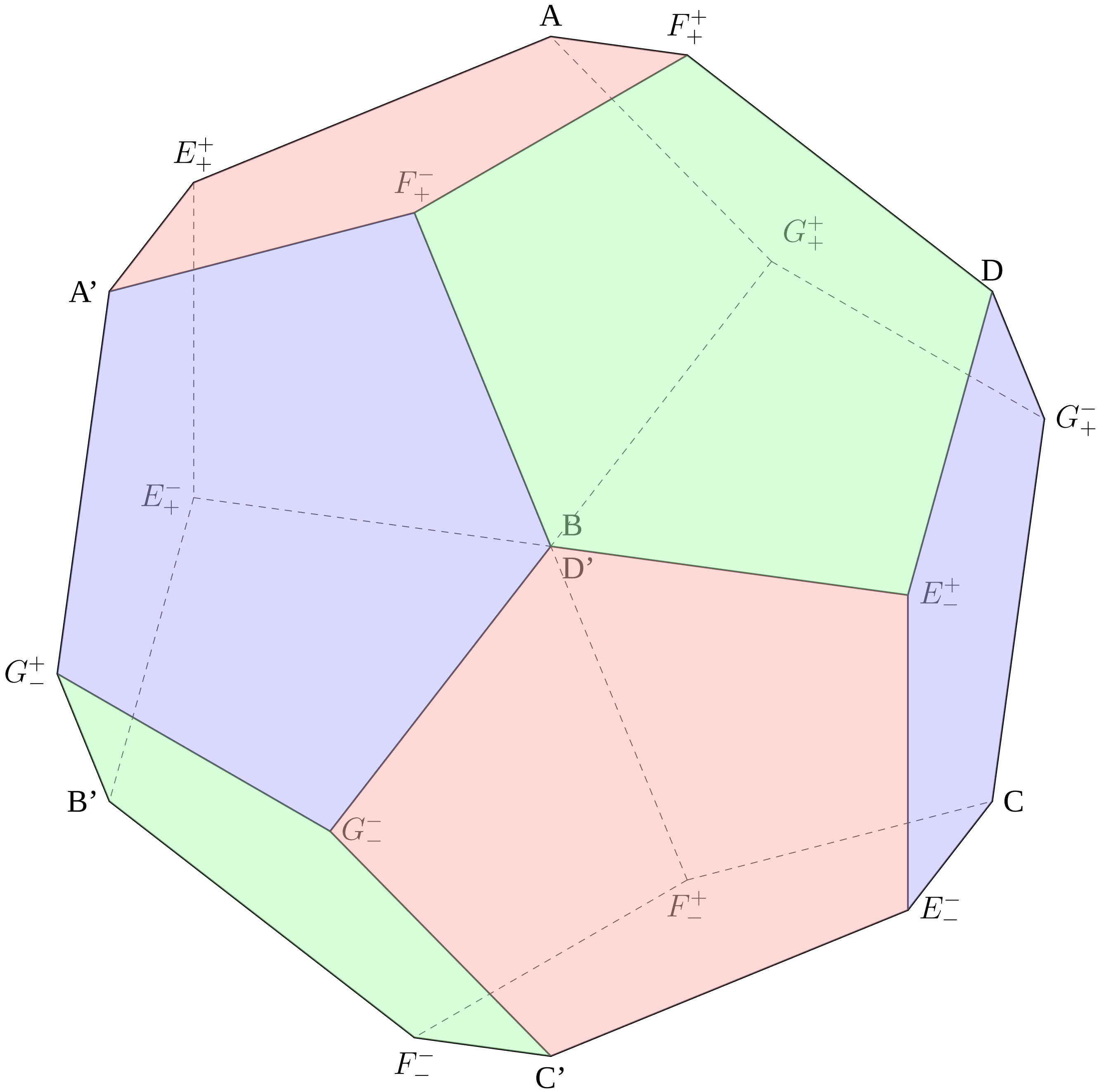
(b) Найдите какое-нибудь множество образующих G.

(c) Какие перестановки вершин они реализуют?

(d) Сколько из них отражений, поворотов, переносов?

(e) Какие перестановки рёбер они реализуют?

(f) Какие перестановки граней они реализуют?



A
F_+^+
E_+^+
F_+^-
G_+^+
D
A'
G_+^-
E_+^-
B
D'
E_-^+
G_-^+
B'
G_-^-
C
F_-^+
E_-^-
F_-^-
C'