Образующие и соотношения

12 декабря • 8 класс

Разбор

Определение. Набор элементов $g_1, \ldots, g_k \in G$ называют набором ***образующих*** группы G, если любой элемент группы может быть записан в виде произведения нескольких g_i и обратных к ним (то есть разрешены выражения вроде $g_1g_2g_2g_1^{-1}g_3g_4^{-1}$).

Пример 1. Группу диэдра D_3 (то есть группу симметрий правильного треугольника) можно породить любой осевой симметрией s и любым поворотом r. В этих обозначениях $D_3 = \{e, r, r^2, s, rs, r^2s\}$.

Задача 1. Есть ли другие двухэлементные наборы образующих D_3?

Решение: Да, любая пара осевых симметрий тоже порождает D_3. Например, через rs и r^2s можно выразить r и s следующим образом:

$$(r^2s)(rs)^{-1} = r^2ss^{-1}r^{-1} = r^2r^{-1} = r$$
$$((r^2s)(rs)^{-1})(r^2s) = rr^2s = s.$$

□

Пример 2. Группу целых чисел по сложению $\mathbb{Z}$ можно породить всего одним элементом — единицей. -1 тоже подойдёт.

Задача 2. (a) Найдите трёхэлементный набор образующих для S_3.
(b) Найдите двухэлементный набор образующих для S_3.
(c) Можно ли обойтись одной образующей?

Решение: (a) Согласно теореме из листка 07, любая перестановка может быть записана, как произведение транспозиций, так что в качестве образующих можно взять $(1\ 2)$, $(2\ 3)$ и $(1\ 3)$.
(b) Согласно задачке из того же листка, можно обойтись только элементарными транспозициями, так что в качестве образующих можно взять $(1\ 2)$ и $(2\ 3)$.
(c) Если бы можно было обойтись одной образующей x, то все элементы группы были бы степенями x, а значит порядок x был бы равен 6. Но в D_3 все элементы имеют порядок 1, 2 или 3, так что это невозможно. □

Задача 3. (a) Найдите трёхэлементный набор образующих для S_4.
(b) Найдите двухэлементный набор образующих для S_4.

Решение: (a) Аналогично предыдущей задаче, можно взять элементарные транспозиции $(1\ 2)$, $(2\ 3)$ и $(3\ 4)$.
(b) Возьмём элементы $x = (1\ 2\ 3\ 4)$ и $(1\ 2)$. Несложно посчитать, что $x(1\ 2)x^{-1} = (2\ 3)$ и $x(2\ 3)x^{-1} = (3\ 4)$. □

Определение. ***Группой остатков по модулю*** n или ***группой вычетов по модулю*** n называется множество $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ остатков по модулю n с операцией «сложение по модулю n». Элемент этой группы, соответствующий остатку от числа $k \in \mathbb{Z}$ записывают как $[k]_n$.

Пример 3. Следующая таблица описывает операцию в $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

$+$	$[0]_6$	$[1]_6$	$[2]_6$	$[3]_6$	$[4]_6$	$[5]_6$
$[0]_6$	$[0]_6$	$[1]_6$	$[2]_6$	$[3]_6$	$[4]_6$	$[5]_6$
$[1]_6$	$[1]_6$	$[2]_6$	$[3]_6$	$[4]_6$	$[5]_6$	$[0]_6$
$[2]_6$	$[2]_6$	$[3]_6$	$[4]_6$	$[5]_6$	$[0]_6$	$[1]_6$
$[3]_6$	$[3]_6$	$[4]_6$	$[5]_6$	$[0]_6$	$[1]_6$	$[2]_6$
$[4]_6$	$[4]_6$	$[5]_6$	$[0]_6$	$[1]_6$	$[2]_6$	$[3]_6$
$[5]_6$	$[5]_6$	$[0]_6$	$[1]_6$	$[2]_6$	$[3]_6$	$[4]_6$

Задача 4. (a) Каков минимальный набор образующих для $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$? (b) А для $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

Решение: Минимальный набор содержит всего одну образующую — $[1]_n$. □

Определение. Группа называется ***циклической***, если у неё существует набор из одной образующей.

Пример 4. Группа $\mathbb{Z}$ и все группы вычетов — циклические. На самом деле это полный список циклических групп, но чтобы это доказать, сперва нужно определить, какие группы мы считаем одинаковыми. Мы сделаем это через несколько недель.

Определение. ***Соотношениями*** называются равенства разных выражений от образующих группы. Пример: $g_1 g_2 = g_2 g_1$. Так как в группе у любого элемента есть обратный, всякое соотношение можно записать в виде $(\ldots) = e$. Соотношение из примера выше запишется как $g_1^{-1} g_2^{-1} g_1 g_2 = e$.

Пример 5. (a) Группа $\mathbb{Z}$ не имеет соотношений.

(b) В группе $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ с образующей $[1]_n$ выполнено соотношение $\underbrace{[1]_n + \ldots + [1]_n}_{n} = e$.

Все остальные соотношения в $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ следуют из этого, например $\underbrace{[1]_n + \ldots + [1]_n}_{3n} = e$.

(c) В группе D_3 выполнены соотношения $srsr = e$, $s^2 = e$ и $r^3 = e$.

Определение. Говорят, что группа G ***задана образующими*** $g_1, \ldots, g_k \in G$ ***и соотношениями*** $r_1, \ldots, r_l$, если $g_1, \ldots, g_k$ порождают G, а все соотношения между ними «следуют» из $r_1, \ldots, r_l$.

Задача 5. Докажите, что

(a) Группа $\mathbb{Z}$ порождена одной образующей 1 без соотношений.

(b) Группа $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ порождена одной образующей $[1]_n$ с одним соотношением.

(c) Группа D_3 порождена двумя образующими r, s с тремя соотношениями.

Решение: (a)–(b) Очевидно.

(c) Из соотношения $srsr = e$ можно получить $sr = r^{-1}s^{-1}$. С учётом остальных двух соотношений, получаем $sr = r^2 s$. Используя это соотношение, любое слово из букв r и s можно «причесать», то есть привести к виду $r^\alpha s^\beta$. А с учётом того, что $r^3 = s^2 = e$, можно считать $0 \le \alpha \le 2$ и $0 \le \beta \le 1$. Таких слов уже всего 6, как и элементов в нашей группе, так что дополнительных соотношений не требуется. □

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. (a) Найдите двухэлементный набор образующих для D_4; (b, 0 балла) для D_5; (c) для D_n.

(d) Найдите $n-1$-элементный набор образующих для S_n.
(e, 2 балла) Найдите 2-элементный набор образующих для S_n.

Задача 2. Рассмотрим множество пар целых чисел $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ с покомпонентным сложением $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ в качестве операции.
(a) Покажите, что G является группой.
(b) Найдите образующие для G.
(c) Найдите соотношения для G.

Задача 3. (a) Группа S_3 порождена образующими $x = (1\ 2)$ и $y = (2\ 3)$. Найдите три независимых соотношения на эти образующие.
(b, 2 балла) Задайте группу S_3 образующими и соотношениями.
(c, 4 балла) Задайте группу S_4 образующими и соотношениями.