

Бинарные отношения

12 апреля • 8 класс

Правила. Задачи, *требующие* записи, отмечены значком (\equiv). Если задача с несколькими пунктами отмечена этим значком, то все пункты требуют записи. Остальные задачи тоже можно записывать. Записывать нужно самодостаточный текст, а не набросок или поток мыслей! Удачи!

Разбор

Определение. *Бинарным отношением* на множестве X называется отношение, определённое на парах элементов из X . Более формально, бинарным отношением называется любое подмножество $R \subseteq X \times X$ множества пар элементов из X . Утверждение « x и y состоят в отношении R » (формально: $(x, y) \in R$) записывают как xRy . Для конечного множества, отношение можно записать в виде ориентированного графа, вершины которого — элементы множества.

Пример 1. (а) Отношение $>$ на множестве $\{1, 2, 3\}$.

(b) Отношение «быть тёзкой» на множестве учеников 8-4.

(c) Отношение $=$ на множестве $\{1, 2, 3\}$.

(d) Отношение подобия на множестве треугольников на плоскости.

(e) Отношение соседства на множестве граней куба.

(f) Отношение делимости на множестве \mathbb{Z} .

Задача 1. Сколько всего есть бинарных отношений на множестве (а) из двух; (b) из трёх элементов?

Определение. Бинарное отношение R на множестве X называется

- **рефлексивным**, если для любого $x \in X$ выполнено xRx ;
- **антирефлексивным**, если для любого $x \in X$ не выполнено xRx ;
- **симметричным**, если для любых $x, y \in X$ из xRy следует yRx ;
- **антисимметричным**, если для любых $x, y \in X$ из xRy и yRx следует $x = y$;
- **транзитивным**, если для любых $x, y, z \in X$ из xRy и yRz следует xRz .

Задача 2. Какие из отношений из примера 1 являются (а) рефлексивными; (b) антирефлексивными; (c) симметричными; (d) антисимметричными; (e) транзитивными?

Задача 3. Приведите пример отношения на множестве $\{1, 2, 3, 4\}$, которое является только рефлексивным (не антирефлексивным, не симметричным, не антисимметричным, не транзитивным).

Определение. *Отношением эквивалентности* называется рефлексивное, симметричное и транзитивное бинарное отношение.

Определение. *Отношением нестрогого частичного порядка* называется рефлексивное, антисимметричное и транзитивное бинарное отношение. *Отношением строгого частичного порядка* называется антирефлексивное, антисимметричное и транзитивное бинарное отношение.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1 (\equiv). Выпишите все пары, входящие

(a) в отношение $=$ на множестве $\{1, 2, 3, 4\}$;

(b) в отношение \leq на множестве $\{1, 2, 3, 4\}$;

(c) в отношение делимости на множестве $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

(d) в отношение соседства на множестве граней куба (обозначьте их удобным вам способом).

Задача 2 (\equiv). Сколько всего есть бинарных отношений на множестве (a) из четырёх; (b, 2 балла) из n элементов?

Задача 3. Приведите пример отношения на множестве $\{1, 2, 3, 4\}$, которое является (a) только антирефлексивным; (b) только симметричным; (c) только антисимметричным; (d) только транзитивным.

Задача 4. Какие из отношений из примера 1 являются (a) отношениями эквивалентности; (b) нестрогими порядками; (c) строгими порядками?

Задача 5 (\equiv). Сколько всего есть отношений эквивалентности на множестве (a) из двух; (b) из трёх; (c, 2 балла) из четырёх элементов?

Задача 6. Пусть множество X разбито на несколько подмножеств $X_i \subseteq X$, то есть X_i не пересекаются, но в объединении дают весь X . Определим бинарное отношение \sim на множестве X следующим образом: $x \sim y$ если и только если x и y лежат в одном куске, то есть $\exists i$, такое что $x, y \in X_i$. Покажите, что \sim является отношением эквивалентности.