Группы перестановок

9 ноября • 8 класс

Разбор

Определение. Пусть n — натуральное число. За X обозначим множество $\{1, 2, \ldots, n\}$. ***Группа перестановок*** или ***симметрическая группа*** S_n — множество всех биекций $\sigma\colon X \to X$, с операцией композиции.

Задача 1. Сколько элементов в S_n?

Решение: $n!$, смотри листок 04. □

Перестановку $\sigma \in S_n$ можно записывать следующим образом.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n-1) & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Задача 2. Постройте таблицы умножения для S_1 и S_2.

$\circ$	$\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$
$\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$

$\circ$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2\\1&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2\\2&1\end{smallmatrix}\right)$
$\left(\begin{smallmatrix}1&2\\1&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2\\1&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2\\2&1\end{smallmatrix}\right)$
$\left(\begin{smallmatrix}1&2\\2&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2\\2&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2\\1&2\end{smallmatrix}\right)$

Задача 3. Вычислите:

(a) $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)$

(b) $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{smallmatrix}\right)^2 = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{smallmatrix}\right)$

(c) $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)^2 = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right)$

(d) $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)^3 = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{smallmatrix}\right)$

(e) $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{smallmatrix}\right)^2 = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{smallmatrix}\right)$

(f) $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{smallmatrix}\right)^4 = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{smallmatrix}\right)$

(g) $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&4&1&2\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&3&1&2\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&4&3&5\end{smallmatrix}\right)$.

Задача 4. (a) Какие числа можно получить, применяя к числу $x = 3$ несколько раз перестановку $\sigma = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&4&1&2\end{smallmatrix}\right)$?

(b) Тот же вопрос для $x = 2$.

(c) Тот же вопрос для $x = 1$.

Решение: (a) 1, 3, 4; (b) 5, 2; (c) 1, 3, 4. □

Определение. Множество чисел, которые можно получить, применяя несколько раз σ к x будем называть ***орбитой*** x ***под действием*** σ и обозначать $\langle\sigma\rangle x$.

Определение. Перестановка σ называется циклической, если она переставляет по циклу часть элементов и оставляет на месте все остальные.

Задача 5. Какие из следующих перестановок циклические?

(a) $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{smallmatrix}\right)$; (b) $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{smallmatrix}\right)$; (c) $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{smallmatrix}\right)$; (d) $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&4&1&5\end{smallmatrix}\right)$.

Решение: (a) да; (b) да; (c) нет; (d) да. □

Задача 6. Как охарактеризовать циклические перестановки в терминах орбит?

Решение: Перестановка является циклической, если и только если у неё не более одной нетривиальной (то есть из более, чем одного элемента) орбиты. □

Вы можете заметить, что способ записи как выше — довольно неэкономный, особенно для больших n. Поэтому для циклических перестановок есть и другое общепринятое обозначение: $(x_1 \ \dots \ x_k)$. Например, перестановка из задачи 5(d) может быть обозначена $(1\ 3\ 4)$. Как обычно, тождественную перестановку $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{smallmatrix}\right) \in S_n$ принято обозначать e_{S_n} (S_n здесь — нижний индекс) или просто e, если понятно, о какой именно группе речь.

Задача 7. Выпишите все элементы S_3 в циклической записи.

Решение: e, $(1\ 2)$, $(2\ 3)$, $(1\ 3)$, $(1\ 2\ 3)$, $(1\ 3\ 2)$. □

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Запишите все элементы S_4, как произведения циклических.

Задача 2. Выпишите все элементы S_5, не являющиеся циклическими.

Задача 3. Вычислите:

(a) $(1\ 2\ 3\ 4)(4\ 3\ 2\ 1)$

(b) $(1\ 2\ 3)(3\ 4)$

(c) $(1\ 2)(2\ 3)$

(d) $(2\ 3)(1\ 2)$

(e) $(1\ 2\ 3\ 4)(3\ 2)$

(f) $(1\ 2\ 3\ 4)(2\ 5\ 4\ 6)$.

Задача 4 (за каждый пункт 0.5 балла). Опишите орбиты для результатов вычисления из предыдущей задачи.

Задача 5 (2 балла). Составьте таблицу умножения для S_3. Знакома ли вам эта таблица?

Определение. ***Порядком*** элемента группы $g \in G$ называется наименьшее натуральное число $d \in \mathbb{N}$, такое что $g^d = e$.

Задача 6. Найдите порядки всех элементов (a) S_3; (b, 2 балла) S_4; (c) $Sym(P_4)$ (группа симметрий квадрата, смотри предыдущий листок); (d, 3 балла) $Sym(P_{2n})$.