Площади на клетчатой бумаге

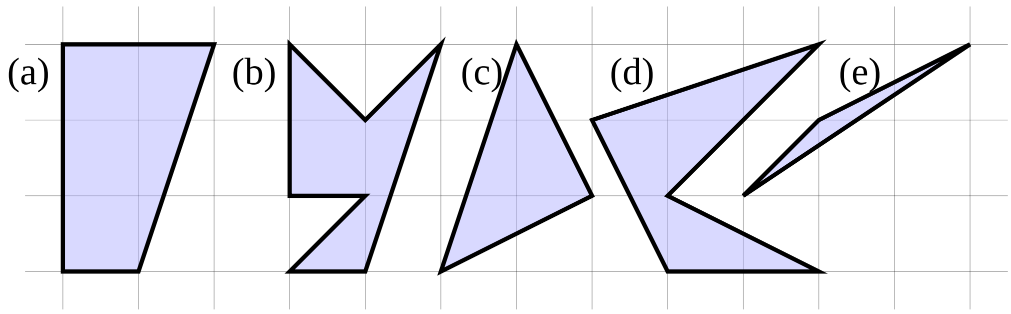
19 марта • 8 класс

Правила. Задачи, ***требующие*** записи, отмечены значком $(\equiv)$. Если задача с несколькими пунктами отмечена этим значком, то все пункты требуют записи. Остальные задачи тоже можно записывать. Записывать нужно самодостаточный текст, а не набросок или поток мыслей! Удачи!

Все площади в этом листке измеряются в клеточках. Вершины всех многоугольников, если не сказано обратного, находятся в узлах сетки.

Определение. Прямоугольник называется ***клетчатым***, если его стороны проходят по линиям сетки.

Задача 1. Найдите площади фигур на рисунке.

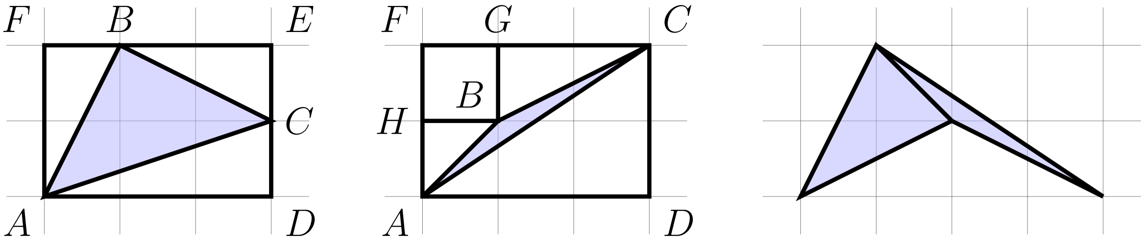


Задача 2. На клетчатой бумаге отмечены вершины квадрат 4×4. Отметьте еще два узла сетки и соедините их замкнутой ломаной так, чтобы получился шестиугольник площади 6 клеток.

Задача 3 $(\equiv)$**.** Докажите, что площадь (a) треугольника; (b) четырехугольника с вершинами в узлах сетки либо целая, либо полуцелая.

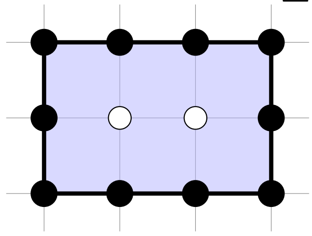
Решение: (a) Впишем данный треугольник (далее — T) в клетчатый прямоугольник. Для этого достаточно провести вертикальные прямые через самую правую и самую левую вершины треугольника и горизонтальные прямые через самую нижнюю и самую верхнюю вершины треугольника. Если все вершины T оказались на сторонах прямоугольника, то площадь прямоугольника равна сумме площадей T и трёх прямоугольных треугольников ADC, CEB и BFA. Если же какая-то вершина C треугольника T не лежит на стороне прямоугольника, проведём из неё вертикальный и горизонтальный отрезки до сторон прямоугольника, не пересекающие T. Тогда площадь прямоугольника равна сумме площадей T, клетчатого прямоугольника $BGFH$ и трёх прямоугольных треугольников ADC, CGB и BHA. Следовательно, площадь T полуцелая.

(b) Разделим четырёхугольник диагональю на два треугольника. Так как площадь каждого из треугольников полуцелая, площадь четырёхугольника также полуцелая.



□

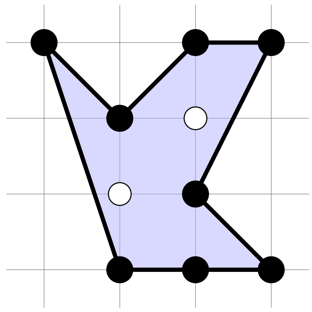
Задача 4 (≡)**.** (a) Выразите площадь клетчатого прямоугольника со стороной 1 через количество узлов сетки на его границе.
(b) Выразите площадь клетчатого прямоугольника через количество i узлов сетки внутри него и количество b узлов сетки на его границе.



$i = 2, b = 10$

Решение: (a) Пусть стороны клетчатого прямоугольника равны 1 и y. Тогда количество узлов сетки b на его границе равно $2 \cdot (y+1)$. Следовательно, площадь прямоугольника равна $1 \cdot y = \dfrac{b}{2} - 1$.
(b) Пусть стороны клетчатого прямоугольника равны x и y. Тогда количество узлов сетки b на его границе равно $2 \cdot (x+1) + 2 \cdot (y+1) - 4 = 2x + 2y$, а количество узлов сетки i внутри него равно $(x+1) \cdot (y+1) - b = xy - x - y + 1$. Следовательно, площадь прямоугольника равна $x \cdot y = i + \dfrac{b}{2} - 1$. □

Теорема 1 (Формула Пика)**.** *Площадь многоугольника с вершинами в узлах сетки равна* $i + \dfrac{b}{2} - 1$*, где* i *— количество узлов сетки внутри него и* b *— количество узлов сетки на его границе.*



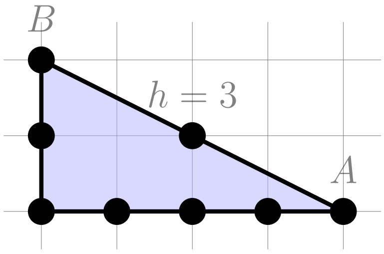
$i = 2, b = 8$

Задача 5 (≡)**.** Докажите формулу Пика (a) для прямоугольного треугольника с катетами, идущими по линиям сетки; (b) для любого треугольника, одна из сторон которого идет по линиям сетки.

Задача 6. (a) Если многоугольник с вершинами в узлах сетки разрезан на две части, для каждой из которых верна формула Пика, то формула Пика верна и для всего многоугольника.
(b) Формула Пика верна для любого треугольника.
(c) Формула Пика верна для любого многоугольника.

Решение:

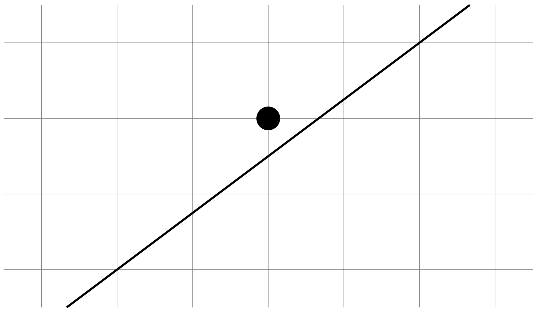
(a) Пусть h — число узлов сетки на гипотенузе, s — площадь треугольника. Достроим треугольник до прямоугольника R площади $2s$. Тогда число узлов сетки i_R внутри R равно $2i + h - 2$ (2 ”лишних— A и B), а число узлов сетки b_R на границе R равно $2(b - h) + 2$ (2 ”дополнительных— опять же A и B). Следовательно, по доказанной формуле Пика для прямоугольника имеем



$$2s = i_R + \frac{b_R}{2} - 1 = 2i + h - 2 + \frac{2(b-h)+2}{2} - 1 = 2i + b - 2.$$

Отсюда $s = \dfrac{2i + b - 2}{2} = i + \dfrac{b}{2} - 1$, что и требовалось.

(b) TODO $\square$



Задача 7 $(\equiv)$**.** Найдите расстояние от точки до прямой.