

数学与音乐

陈秀惠

陈秀惠，美国密歇根音乐教师协会 (MMTA) 成员，美国国家钢琴教师协会 (NGPT) 会员。由于在钢琴教学方面的杰出成就，她在 2002 年入选 NGPT 名人堂。

著名数学家西尔维斯特 (Sylvester) 曾说过：“难道不可以把音乐描述为感觉的数学，把数学描述为理智的音乐吗？”19 世纪数学家傅里叶 (Fourier) 的工作对音乐的研究达到顶点。他证明所有的器乐和声乐都可用数学式来描述，这些数学式是简单的周期正弦函数的和。每一个声音有三个性质，即音高、音量和音质，将它与其他乐声区别开来。音高与曲线的频率有关，音量和音质分别与周期函数的振幅和形状有关。傅里叶的发现使声音的这三个性质可以在图形上清楚地表示出来。



西尔维斯特



傅里叶

对音乐的数学分析，使得电脑等高科技手段能大量应用于音乐创作和乐器设计。周期函数的性质在乐器的现代设计和声控计算机的设计方面是必不可少的。许多乐器制造者把他们的产品的周期声音曲线与这些乐器的理想曲线相比较，电子音乐录制的保真度也与周期曲线密切相关。音乐家和数学家的协作将继续在音乐的创作和录制方面发挥重要的作用。

诸如上述的关于数学与音乐的联系已经有了许多研究。这两个领域的交织是许多科技展览的热门话题。一种较为流行的说法是，指尖与琴键间不断地有节奏的接触生成了一系列温和、律动的刺激，通过神经系统的传达，可以起到增进智力、促进大脑发育的功效。作为一个钢琴教师，我总是被音乐与数学这两个非常不同的学科之间的关系所吸引。可惜我不是音乐或数学的专业研究人员，所以无法给出有力而系统的证据来支持我的论断。在这篇文章中，所给出的是在我 25 年的钢琴教学生涯中，对所接触到的学生的观察中得出的体会。

从我童年起，到大学，甚至一直到成为两个孩子的母亲以后，音乐与数学都是我日常生活的一部分。还在读大学的时候，我就开始做钢琴家教了。在教琴过程中，我也不断地从孩子们身上增长见识。这种经历使我有难得的机会来观察他们在音乐或者科学方面的发展。我的学生既有牙牙学语的 3 岁稚童，也有 50 多岁的成年人，但大多数还是小学生。他们中的许多人不仅要与童年荷尔蒙、多变的脾气做斗争，还要应付来自家长与同学间竞争的压力。掌握一段复杂的钢琴乐章可能是一段苦恼的经历，可是当亲手弹奏一首美妙的钢琴曲时，那悠扬的琴声足以抚平烦躁的情绪和保持宁静的思绪。我所感兴趣的是研究钢琴学习对于提升儿童（3 ~ 12 岁）数学修养的作用。我们的讨论将主要围绕以下三个方面。

1. 扎实的数学教育如何有助于学生音乐素养的发展？
2. 音乐在学生的生活中如何帮助他们学习数学？
3. 数学与音乐的联系究竟怎样？

扎实的数学教育如何有助于学生音乐素养的发展？

有许多学者做了大量工作，试图验证在孩童时期学习一种器乐可以促进智力发育。世界各地许多医生和护士开始向新生儿的家长们建议，在给婴儿喂食的时候，可以放一些古典音乐，他们相信这样可以促进大脑某些部位的发育。作为一名音乐教师，我特别关注的是，孩子什么时候可以从被动的聆听转为主动地演奏乐器。

什么时候可以说一个孩子已经有能力接受音乐课程了呢？比如，在我的经验中，一个 3 岁的孩子总是比一个 10 岁左右的孩子缺少耐心。幼童大约

只能集中注意力听老师讲半个小时，然后就会心烦意乱。对这些孩子，我一开始总是教他们五个手指的概念：也就是 1 ~ 5 这五个数。每只手有五个手指，我们每天都会用它们来抓食物、捏拳头、开门等等。我们用双手做许多事情。音乐要求五个手指注意力高度集中，特别是钢琴。钢琴演奏者需要两手并用，紧跟乐谱上的指法。钢琴家需要对手指有精确的控制力，因为钢琴要求同时协调地使用两手十指。一旦学生开始用双手演奏音乐，很重要的一点就是，不论孩子有多小，我都要求他们把 1, 2, 3, 4, 5 对应到拇指、示指、中指、无名指和小指，如图 A 所示。我要求他们牢记手指和数字的对应关系，直到烂熟为止。只有当他们已经熟练地掌握了这一基本概念以后，才会开始教他们读乐谱。

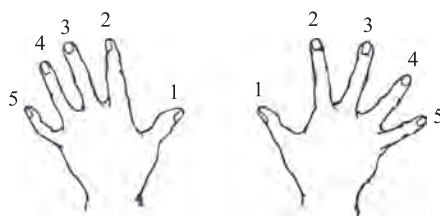


图 A

无论怎么强调五指模式的重要性，都是不过分的，特别是对那些年轻的初学者而言。图 B 描述了怎样用简单的手指规则来演奏图 C 中的五线谱。我经常用这种图例来帮助孩子理解与强化手指与数字的对应关系。

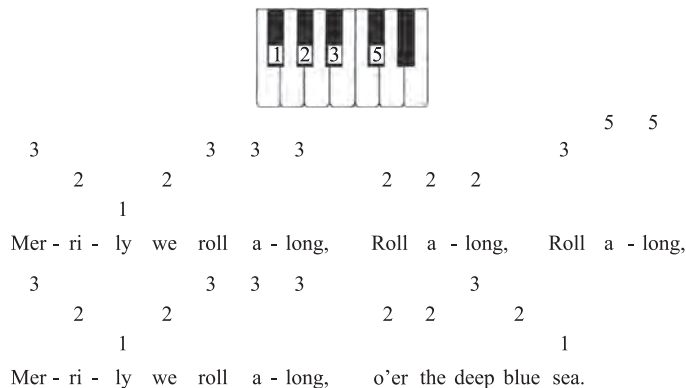


图 B

除了强调手指的序数外，我也向各个年龄的学生们解释相关的数学概念。为了使他们更好地适应今后在音乐上将会遇到的挑战，我必须让他们拥有良好的数学基础，虽然有时候他们因为太年幼而对数学无甚感觉。音乐的拍子记号总是出现在五线谱的最左端。

关于儿童学习行为的许多研究都表明，如果孩子经常接触实际的例子，就



图 C

会更适应数学概念。实例教学是一种值得推广的教学方法。五指模式与不同的节拍计数方法是钢琴教学中的两个例子。在小学的一年级，我们常常可以看到，接受过钢琴训练的孩子与那些未接触过这些数学概念的孩子相比，明显拥有更多优势。一旦他们进入一二年级，他们能够更快地掌握初等的算术技巧。

比如加减之类的基本数学概念，对于音乐学习是非常有效的。这不仅对年幼的初学者有效，对中级和高级的钢琴家也有帮助。事实上，对于想在钢琴演奏上更上一层楼的人来说，拥有坚实的数学基础是很重要的，这可以帮助他们演绎出完美无瑕的乐章来。大多数学生演奏平均节拍的音乐没有什么困难，例如，在我所称的“二配一”（一只手是 $1/4$ 拍，另一只手是 $1/8$ 拍），或者“四配一”（一只手是 $1/16$ 拍，另一只手是 $1/8$ 拍）。可是，有些乐章要求一只手是三连音，而另一只手是 $1/8$ 拍。我称之为“三对二”。这种音乐要求高度集中注意力才能准确地演奏出来。在演奏水平不断提高的同时，学生们会不可避免地遇到更加复杂的乐章，需要两只手有更高程度的协调性，比如“五对三”等等。简化音调符号是一种非常有用的方法，可以帮助学生掌握具有复杂拍号的乐章的技巧与结构。学生们应该用他们建立在实践基础上的数学观念，来完善他们所需要的记忆力。这也同时训练他们发展两手的高度平衡来迎接所要面对的挑战。

从技术层面来看，可以解释为何数学能够帮助学生更好地消化、理解和解释复杂的音乐章节。这对于完全依靠计算节拍来达到两手完美协调的钢琴师来说，尤为重要。通过对大量学生所做的观察，我还注意到一个有趣的现象，不妨与感兴趣的读者分享。

在 Ann Arbor 地区学校的初中和高中生每年都要参加“独奏与合唱”音乐会，其中管弦乐队与学生们可以在专业的音乐家面前表演他们的拿手绝技，音乐家会对他们的表现给出一个 1~5 之间的分数（1 表示最好）。获得 1 分的学生将能够继续参加密歇根州的半决赛。这是一项极为难得的荣誉，吸引了整个州的狂热学生前来参加。我注意到，大多数获得认可能够进入州一级比赛的学生的数学成绩都是相当不错的。

音乐在学生的生活中如何帮助他们学习数学？

在学习和演奏音乐的过程中，可以增长数学的技能。有研究表明，欣赏音乐可以放松和舒缓来自于学习工作和人际关系等日常生活中的精神压力。听音乐是放松，而研习音乐则需要积极的投入。比如阅读钢琴曲，我们要按照音符，随着五线谱上的和音，谨记指法，这些都是同时进行的。所有这些功能都要求有很强的记忆力，精细的手眼协同能力，以及一种难以定义的素质，姑且称之为“触觉”。练习钢琴要求学生把肌肉与脑力都发挥到极致。

掌握数学需要逻辑、理解与材料的组织，也需要拥有把新学到的概念与已有知识结合加以理解的能力。音乐把对这种能力的要求推向极致，特别是当一个学生在公众或评委面前忘我演奏的时候。如果一个学生在一次独奏会上因为某种不可预料的原因忘记了乐谱，如果他有充分的日常训练，那么他的潜在记忆就会自动使他保持演奏而不走调。一旦学生发展了音符与乐谱的能力与思维，以及简单的算术运算能力与眼脑协调，那么掌握更加高深的数学概念就会变得非常自然。以下是我在教学过程中接触到的三个实例。

实例一：Lucy Huang 是一个 10 岁的女孩子。她 9 岁时就来我的音乐工作室学习。与其他学生相比，她学习钢琴课程的起步已经有些晚了。当她开始听课以后，我发现她非常拼命，可以说是挣扎着阅读乐谱。她的前进轨迹与我的其他学生相比，并不那么令人满意。可是，在 6 个月的课程中，她坚持不懈地完成我布置的练习（每天一小时），包括了不同难度的指法练习。我注意到，她听课更专心了，全心投入的时间也更长了。随着时间的推移，学习新的乐谱对她来说变得越发容易。后来我把自己的观察告诉 Lucy，她很开心地说，她不再对数学课感到无所适从了。现在她可以很轻松地理解计算方法，掌握新的概念。

实例二：我在过去 25 年中教过许多学生，有一位学生让我印象最为深刻。Michelle Mei，今年 15 岁，她在 8 岁时跟我学琴。有时我和她的父母在电话里谈论 Michelle 在学琴方面的进展，她的父亲会提到她的数学不是很好，特别是对于新概念和新老知识的衔接学习上有些困难。Michelle 一向喜欢音乐，所以她的父亲希望也许学习音乐可以促进她的智力发育，从而对她的学

业有所帮助。在 7 年中, Michelle 每周都来上课, 也认真完成练习。她的进步轨迹在第一年的时候很一般。可是当她开始变得主动性更强时, 她花在练琴上的时间也逐步增加到每天 2 ~ 3 个小时。她的父母和我都明显地注意到她的演奏技巧也发生了突飞猛进的变化。不久, 她的父母告诉我, Michelle 的数学成绩也有了长足进步, 甚至连西班牙语和英语成绩也提高了。Michelle 在过去三年中研读和背诵了大量的乐谱。我相信, 她在音乐上坚持不懈的努力使她的逻辑思维和信息组织能力都得到了提高, 她的数学成绩就是明证。现在, 她是中学二年级学生, 也是学校里的音乐和学习明星。

实例三: Robin He 是另一个可以表明音乐在儿童智力发展中具有渗透作用的、与众不同的例子。Robin 在 6 岁时开始学琴。他的父母注意到随着音乐技能的提高, 他的数学能力也有了很大的进步。三年后, 他在北美 Kumon 数学竞赛中获得了 4 年级组第一名。后来他又获得 6 年级组的第二名以及 7 年级组的第一名。所有这些荣誉都伴随着丰厚的奖学金。他的父母深信, 练琴在 Robin 数学能力的发展中起了重要的作用。Ann Arbor 地区的学校有一项非常受欢迎的活动, 就是“趣味数学竞赛”。通过校际的比赛来推动学习数学的热情。学生们通过多轮的比赛, 最后进入半决赛和决赛一争高下。令人兴奋的是, 代表我家附近的学校 Clague 中学进军地区决赛的学生中的大多数, 都是我钢琴课上的学生。这个现象也许意味着在某种程度上, 音乐确实有助于学生们发挥出更强的数学潜能。

数学与音乐的联系究竟怎样?

许多历久不衰的名篇, 如贝多芬的第一交响曲、肖邦的夜曲、莫扎特的钢琴奏鸣曲, 其中都精心融入了许多数学的对称与和谐。我让学生详细研究乐曲的结构, 每一个乐章都有不同的频率, 每一小节的拍数也不尽相同, 哪个音符对上节拍, 何时提起或放下脚踏板, 何时打断圆滑线, 以及一组颤音中应该包含多少个音符等等。只是简单地对着乐谱依样弹奏不会让学生得到太多好处。只有从数学的角度细致研究了音符的结构以后, 学生们才能够真正理解复杂的旋律背后, 作曲家那极具匠心的功力所在。

最后, 我想借这个机会把自己在音乐与数学上的经历与大家共享。1957 年我出生于一个典型的中产阶级家庭, 是 6 个兄弟姐妹中最小的一个。我的父亲是化肥厂的电子工程师。虽然他微薄的工资刚好凑合养活一个 8 口之家, 可是他坚定地相信良好的教育是孩子们未来发展的重要条件。于是父亲还兼做零工补贴家用, 以支付孩子们的教育费用。虽然当时我还小, 但也能够理解父母的不易。从小学到高中, 我都很用功地学习。我的数理成绩也总是很出色。那些非常晦涩的概念与逻辑对我来说都非常自然, 我甚至想过做一个

科学家或工程师。可是我从小就有做一个钢琴家的梦想，对于我这样一个出生卑微的孩子，能够让这个难以企及的梦想得以实现是多么的令人振奋啊。靠着我优异的成绩和对钢琴不懈的热爱，终于说服了我的父母。从我的小学到高中，我都坚持了自己的理想和我对父母的承诺。当我从台北第一女子高中毕业时，我得到了所能给予优秀学生的最高荣誉。在完成学业的同时，我一直都没有放弃钢琴训练，甚至是在我面临着大学入学考试的沉重压力的关头。很长时间以来，我都觉得我之所以能够在学业上一直保持优秀的原因是，为了让父母支持我学钢琴，我总是非常努力地在学习上证明给他们看。可是，我也很清楚地记得，在我学琴以后，我的成绩突然有了很大提高。在我自己开始教琴以后，我才意识到，我在数学推理和逻辑上的能力在潜移默化中提高了我的音乐素养。回想我的音乐与求学生涯，我深深地相信我在数学上的良好训练帮助我更好地分析和理解音乐的结构，使我在提高钢琴演奏水平的道路上，克服了许多技术上的障碍。同样数学也给予我许多教学上的灵感，让孩子们在学琴道路上少走了许多弯路。我很欣慰地看到，我的学生中有许多人已经在琴艺上超过了当年的我。

总之，我个人的经历告诉我，音乐帮助孩子发展理解数学概念的能力，反过来，拥有良好的数学基础，是学习音乐的巨大优势。