关于闭黎曼流形高斯–博内公式的一个简单的内蕴证明 (节录)

陈省身

编者按: 1848年, 法国数学家博内 (Pierre Ossian Bonnet, 1819—1892) 把高斯关于曲面上测地三角形内角和与曲率的公式推广到曲面上任意曲线围成的单连通区域。1925年, 瑞士几何学家霍普夫 (Heinz Hopf) 又把它推广到欧氏空间中偶维超曲面上。但他随后说到, “推广高斯–博内公式到高维紧致黎曼流形上是微分几何学极其重要而困难的问题”[1)]。因为当时甚至连黎曼流形上的曲率应如何表示都不知道。1938 年, 美国统计学家霍特林 (Harold Hotelling, 1895—1973) 为解决统计问题而求出了 n 维欧氏空间中球面上的管体积, 德国数学家外尔 (H. Weyl) 随即把它推广到 n 维欧氏空间中的 v 维流形上。美国数学家艾伦多弗 (C. B. Allendoerfer) 则看出来, 外尔的公式里包含了流形曲率的表达, 他于是和韦伊 (A. Weil) 等人合作, 通过把黎曼流形嵌入欧氏空间的方法证明了推广的高斯–博内公式。但是, 这种证明有悖高斯和黎曼所坚持的内蕴几何的原则; 而且, 当时还不知道是否所有的黎曼流形都能嵌入欧氏空间。1944 年, 正在美国普林斯顿高等研究院访问的中国年轻数学家陈省身发表了这篇题名为 A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds 的论文。其中运用嘉当的外微分运算, 首次引入单位切向量丛的概念, 并证明了关于曲率 Ω 的“超渡” 引理, 最后给出了黎曼流形上高斯–博内公式一个简单而漂亮的内蕴证明。不仅一举解决了微分几何学的一大难题, 而且开创了崭新的局面。陈省身说, 这是他“一生最得意的工作”。

以下是该文的引言部分。其中引用的文献编号根据 49–52 页所列的参考文献索引做了调整。

[1)]据 R. S. 帕勒斯, 滕楚莲. 陈省身. 载于《世界著名数学家传记》, 北京: 科学出版社, 1995.

引言

C. B. 艾伦多弗[2] 与 W · 芬切尔 (Fenchel)[26] 独立地把经典的高斯–博内公式推广到可嵌入欧几里得空间的闭可定向黎曼流形。最近, 艾伦多弗与韦伊[3] 又把该公式推广到闭黎曼多面体, 并特别证明了它对于一般闭黎曼流形的有效性。在他们的证明中仍然使用了把黎曼胞腔嵌入欧几里得空间的方法。本文的目的是, 利用微分流形的向量场理论, 给出该公式的一个直接的内蕴的证明。

本证明的基本思想十分简单, 因此概要的说明会有帮助。令 $\mathbb{R}^n$ 是偶数 n 维的闭可定向黎曼流形。按照将详叙于后的方法, 我们在 $\mathbb{R}^n$ 中定义一个内蕴的 n 阶外微分形式 Ω, 它当然等于 $\mathbb{R}^n$ 的不变标量乘于体积元素。问题中的高斯–博内公式断言, 这一微分形式在 $\mathbb{R}^n$ 上的积分等于 $\mathbb{R}^n$ 的欧拉–庞加莱示性数 χ。为证明这一点, 我们从流形 $\mathbb{R}^n$ 转到由 $\mathbb{R}^n$ 的单位向量构成的 $2n-1$ 维流形 M^{2n-1}。在 M^{2n-1} 中我们证明 Ω 等于一个 $n-1$ 阶微分形式 Π 的外导数。通过定义 $\mathbb{R}^n$ 上一个带有孤立奇点的连续的单位向量场, 我们得到它在 M^{2n-1} 中的像: n 维子流形 V^n, 而 Ω 在 $\mathbb{R}^n$ 上的积分就等于 V^n 上同样的积分。利用斯托克斯定理证明, 后者等于 Π 在 V^n 的边界上的积分。现在, V^n 的边界正好对应于定义在 $\mathbb{R}^n$ 中的向量场的奇点, 一个著名的定理指出它们的指标和等于 χ。经过如此解释, 就可以计算 Π 在 V^n 的边界上的积分, 并很容易证明它等于 χ。

此方法当然可以用来导出同样类型的其他公式, 并可以经过适当修改, 推出黎曼多面体的高斯–博内公式。我们发表此证明, 是因为我们方法的主要思想在这里是最为清晰的。进一步的结果会在以后的论文中给出。

……