大范围微分几何若干新观点 (节录)

陈省身

编者按: 本文系陈省身在美国数学会 1945 年夏季大会上的演讲, 题目叫 Some new viewpoints in differential geometry in the large, 后刊登于 *Bull. Amer. Math. Soc.* 52, 1-30 (1946), 作者在文章的首页上注明, 此文 "献给埃利 · 嘉当教授"。

"大范围微分几何" 就是 "整体微分几何"。作者在此系统阐述了研究整体微分几何的新思想和新方法, 从而开创了微分几何学的一个新时代。霍普夫评论道 (见 *Mathematical Reviews*, 1948, Vol. 9, p.101): "此篇演讲表明, 大范围微分几何的新时代开始了。这个新时代以纤维丛的拓扑理论与嘉当微分方法的综合为特征。"

以下登载的是该文的引言部分。

引言

大范围微分几何研究流形上几何实在[1] (geometric being) 的局部性质与该流形的整体性质之间的关系。该流形在如此意义下是可微的: 它被一组坐标邻域所覆盖, 这些坐标邻域都有同样个数的坐标, 并且每两个这样的不同的坐标系在它们的公共区域中由一个至少一阶可微的变换联系。这后一假定使我们可以在局部几何的研究中使用微分, 从而获得欧拉 (Euler)、高斯 (Gauss) 和蒙日 (Monge) 曾经研究过的一系列几何性质。

作为这类问题的一个例子, 我们考虑一个闭曲面 S, 它 (至少二阶) 可微嵌入三维欧氏空间。令 K 为 S 的高斯曲率, dA 为 S 的面积元素。则经典的高斯–博内公式断言:

$$\frac{1}{2\pi}\iint_S K dA = 2\,(1-p)\,, \tag{1}$$

其中 p 是 S 的亏格。这个公式用微分不变量来表示 S 的亏格 p 这一拓扑不变量。换句话说, p 完全由 S 的局部性质所决定。

---

[1] 奥斯瓦尔德 · 维布伦教授首先建议使用术语 "几何对象" (geometric object), 但他现在选择用 geometric being, 这一词译自嘉当所创的法语词 "ĕtre géométrique"。

另一个例子考虑嵌于欧氏平面的一条闭曲线 C。如果 C 可求长并有长度 l, 以及 C 所围区域的面积为 A, 那么

$$l^2 - 4\pi A \geqslant 0, \tag{2}$$

其中等号仅当 C 为圆周时成立。这就是所谓的等周不等式, 它最近意外地被人从积分几何导出, 后者是研究微分不变量的积分的学科。

此类问题有两个方面: 局部方面和整体方面。经过几十年的大量工作, 局部方面的问题已得到了广泛研究和发展, 这些成果集中体现在张量分析理论中。虽然张量分析为处理大多数局部问题提供了很好的工具, 但是对整体问题的研究自然需要引入新的概念和改变人们迄今所遵循的经典处理方法。本文的主要目的是要强调, 在对赋有几何实在的流形的整体研究中, 引入与该流形有关的新拓扑空间的重要性。事实上这个想法对于微分几何的局部方面和整体方面的研究都很重要。关于局部问题, E. 嘉当对此当然是很熟悉的, 他为他的几何实在 (仿射联络、射影联络、正则联络, 等等) 的一般理论引进了切空间 (espace tangent) 的概念。嘉当意义下的切空间并不总是切向量空间, 这构成了难以理解其工作的原因之一。另一方面, 近来关于拓扑学中纤维丛的工作 (E. L. Stiefel, H. Whitney, J. Feldbau, C. Ehresmann, L. S. Pontryagin, N. E. Steenrod等等) 看来为建立嘉当思想的整体理论奠定了基础。作者认为, 把这两部分工作结合起来会为大范围微分几何的研究提供比迄今为止所得到的更好的概念和工具。本文主要讨论由这一观点而引起的问题的不同方面。

在具体展开以前, 我先简短总结一下讨论的要点。我们的问题是研究微分流形上以局部坐标系形式给出的几何实在, 这些局部坐标系的分量在坐标变化时服从确定的变换规则。我们强调, 这样的问题一般总有可能在某种意义下定义在与该流形关联的一个自然的纤维丛上。于是这个几何实在以唯一的方式在纤维丛中定义了一组线性微分形式, 它给出了该几何实在的所有局部性质。对于黎曼几何来说, 这个自然的纤维丛就是流形上全部标架所形成的空间, 而相应的微分形式给出的实际上是列维–齐维塔平行。关联的纤维丛的性质由解决所谓等价问题而得到最佳的确定, 这个等价问题对于黎曼几何来说就是形式问题。给定了纤维丛中的线性微分形式集合, 就可以通过格拉斯曼分析运算得到更高阶的微分形式。这些微分形式定义了上链, 并且当它们是恰当的时候定义了闭上链。研究由关联的纤维丛向给定流形的投射而产生的两者的上链和闭上链之间的相互关系, 将会导致对几何实在整体理论的更深刻的理解。下文试图表明, 在最简单的情况下这样的想法会导致怎样的结果。虽然这将是本文的主要内容, 但这并不意味着纤维丛理论在微分几何只有这样的应用。事实上, 有迹象表明它可能还有其他富有成果的应用。因此, 看来值得对这一领域做更彻底的研究。

……