

# 前言

王善平

对称性是追踪从古到今数学发展的一条重要线索，也是解开浩渺幽远宇宙之谜的一把关键钥匙。

古希腊哲学家柏拉图（Plato，公元前 427—前 347）在《蒂迈欧篇》（*Timaeus*）中提出，宇宙是完美的，它由火、土、气、水这四种元素整合而成；而这些元素又分别由四种完美的立体结构——正四面体、正六面体、正八面体和正二十面体——产生；另一个完美立体结构——正十二面体——则被用作整体（动物体）的模型。这五种正多面体后来被称为“柏拉图多面体”，它们是三维空间中唯一存在的正多面体结构。

大约两千年以后，德国数学家、天文学家开普勒（J. Kepler，1571—1630）为了证实其“上帝用几何学设计宇宙”的信念，花了半生的精力和时间，试图用柏拉图多面体建立起行星环绕太阳运行的圆形轨道模型。后来通过整理丹麦天文学家第谷（Tycho Brahe，1546—1601）留下的大量天文观测资料，开普勒才认识到，行星的运行轨道是椭圆而非正圆，并总结了著名的“行星运动三定律”。在此基础上，英国数学家、物理学家牛顿（I. Newton，1643—1727）终于发现了万有引力和物体运动的三定律。

从表面上看，由开普勒发现并且能从牛顿运动定律推出的行星椭圆运行轨道似乎破坏了柏拉图所信奉的宇宙完美对称性。但借助于“群论”这一强有力的数学工具，我们终究知道：柏拉图多面体是在若干空间旋转群作用下保持不变的对称物体结构；而表示牛顿定律的微分方程在空间匀速平移群作用下保持不变。因此，牛顿定律反映了宇宙的物理性质在更深层次上的完美对称性。从这一点上讲，开普勒和牛顿依然继承了柏拉图的理念。

群论是 19 世纪年轻的法国天才数学家伽罗瓦（É. Galois，1811—1832）为解决代数方程的根式可解性问题而创立的。也许当时已经有人预见，伽罗瓦的工作将开启数学发展的新时代；但是肯定没人料到，群论作为刻画事物对称性质最理想的工具，将帮助人类揭示从晶体形状到时—空结构多少宇宙奥秘！

1872 年，年仅 23 岁的德国数学家克莱因（C. F. Klein，1849—1925）发

表了著名的“埃尔兰根纲领”（Erlangen Program）就职演说，首次提出根据不同的对称变换群来区分不同的几何空间。大约在同时，挪威数学家李（M. S. Lie, 1842—1899）创立了连续对称变换群理论，后被称作“李群”。从此，对“群变换下保持对称（不变）性”的关注，逐渐成为现代几何和理论物理研究的主旋律。

英国数学物理学家麦克斯韦（J. C. Maxwell, 1831—1879）在 1865 年发表的《电磁场的动力学理论》论文中，首次写出了电磁场方程，其重要意义堪比牛顿力学方程。但是，麦克斯韦方程并不具有牛顿方程所具有的空间匀速平移变换下的对称性。这反映了这样一个物理现象：静止的电荷只产生电场，匀速运动的电荷只产生磁场；而电荷究竟是静止还是在匀速运动，实际上仅取决于观察者相对于它的运动状态。针对这种现象，年轻的爱因斯坦（A. Einstein, 1879—1955）在 1905 年发表的《论动体的电动力学》论文中提出，电磁场方程应该与力学方程具有相同的坐标变换不变性；进而假设：所有相对匀速运动的物理坐标系都是等效的。他因此创立了狭义相对论，从中得出“物体质量随运动速度增加而增大”、“质量和能量可相互转换”以及“光速是极限速度”等看似完全违背人们的经验和直觉的结论。令人惊讶的是，这些结论后来竟都得到了实验的证实。1915 年，爱因斯坦又根据“所有相对加速运动的物理坐标系也都是等效的”假设，创立了广义相对论；其中关于“引力使空间弯曲”的不可思议结论，同样得到了实际验证。相对论的成功表明，宇宙所具有的完美对称性，甚至超出了人们传统的经验和想象力！

精彩的故事，还只是刚刚开始。

相对论的建立借助于黎曼几何和李群等数学工具，同时反过来刺激了这些数学理论的迅速发展。不仅如此，许多优秀数学家也被吸引到理论物理领域。德国著名女数学家诺特（A. E. Noether, 1882—1935）在 1915 年证明的定理（后被称为诺特定理），把物理系统的李群变换不变性（对称性）与物理守恒定律联系在一起。德国大数学家外尔（C. H. H. Weyl, 1885—1955）经过十年探索，终于成功地利用薛定谔方程在  $U(1)$  李群相位变换下的规范不变性，重建了电磁场理论；而根据诺特定理，这种规范不变性对应于电荷守恒性。

1954 年，年轻的华裔物理学家杨振宁（1922—）与美国人米尔斯（R. Mills, 1927—1999）合作，创立了  $SU(2)$  规范场理论，试图解释质子—中子的同位旋守恒性。杨振宁—米尔斯规范场论在开始时，曾陷于无法说明粒子质量来源的困境。直到 1964 年，英国物理学家希格斯（P. Higgs, 1929—）引入巧妙的机制，成功地使粒子获得质量。从此，各种规范场论迅速发展，成为解释宇宙作用力的标准模型，其中： $SU(2) \times U(1)$  规范场成功统一了弱力和电磁力作用； $SU(3)$  规范场描述了强力作用。有十多位物理学家因此荣获

诺贝尔物理学奖。特别地，因为在 2012 年发现了“希格斯粒子”（又称“上帝粒子”），完成了规范场标准模型中最后一块拼图，希格斯荣获 2013 年的诺贝尔物理学奖。

目前，物理学家正在研究一个能够包含引力的宇宙大统一理论——弦论，这其实是一个十维空间的规范场理论。我们正期待他们以及未来的数学家和物理学家，续写关于宇宙对称性的更精彩的故事！