

掷骰子的数学

—— 随机游戏从古到今的获胜秘诀

William Benter

译者：徐浩

威廉·本特 (William Benter)，现任美国 Acusis LLC 公司主席和国际总裁。他是一位著名慈善家。本特先生出生和成长在宾夕法尼亚的匹兹堡，曾在英国布里斯托大学和匹兹堡大学学习。



本文中我将介绍以下三个方面的内容：

- (1) 赌博如何推动了概率论的研究？
- (2) 可以用来描述大多数与赌博有关现象的三个关键的数学概念；
- (3) 现代数学家对于赌博问题的贡献。

1654 年，一位著名的赌徒梅雷 (Chevalier de Mere) 被一个简单的掷骰子问题难住了：掷一枚骰子 4 次至少出现一次 6 点是有利的，而掷一对骰子 24 次至少出现一次双 6 是有利的。他于是向他的朋友、法国数学家帕斯卡请教。帕斯卡受到梅雷提出的问题的启发，开始与另一位数学家费马通信讨论这个问题。当时显然还没有哪种数学理论可以解释这些现象。帕斯卡与费马的工作最终导致了概率论的诞生。

与随机现象密切相关的三个重要数学概念是：概率、数学期望和大数定律。

先介绍概率的定义，假设一次游戏有 n 种可能性相同的结局，其中 m 种结局代表获胜，那么获胜的概率就是 $P = \frac{m}{n}$ 。当我们做 n 次实验（其中 n 足够大），出现某个特定事件的次数是 m ，那么比例 $\frac{m}{n}$ 就称为事件的相对频率，记为 $P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}$ 。



惠更斯



伯努利

再来看一下数学期望，这个概念最早是由荷兰数学家惠更斯提出的，定义如下

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n = \sum_{i=1}^n p_ix_i.$$

一次投注的数学期望可以按如下公式计算

$$E = p(\text{获利}) + (1 - p)(\text{亏本}).$$

比如，轮盘赌共有 38 格，每次投入 1 元，只有转中一格可以获利，每次获利是 35 元，那么从每次游戏中获利的数学期望就是

$$(1/38)(35) + (37/38)(-1) = -0.0526 \text{ 元}.$$

数学期望是可以相加的

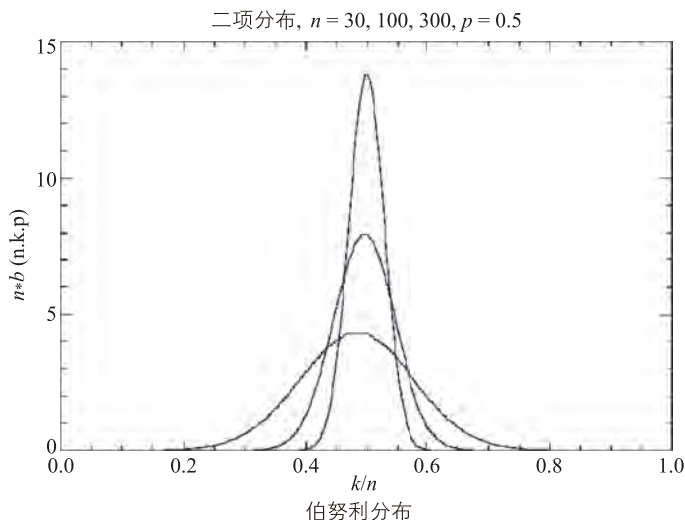
$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n).$$

定律：要想在赌博中长期获利的唯一办法，就是要保证净期望值是正的。

下面我们谈一下大数定律，赌博通常就是一个特定游戏的系列重复。只有两个结果（“成功”和“失败”）的独立重复实验被称为伯努利实验。这是为了纪念 17 世纪著名数学家雅克布·伯努利。它的分布函数是

$$b(n, k, p) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

当实验的次数不断增加，实验成功的比例就会确定地趋向于一个给定值。我们总结上述三个概念如下：



(1) 把事件的发生机会表述成概率，这就使得我们可以对任意的投注进行数学上的分析；

(2) 数学期望的可加性使得我们可以计算一系列投注的总期望值；

(3) 大数定律保证了最后的结果总是趋向于一个可以预先计算的结果。

我们再来谈一下现代的概率论研究。虽然基本的问题在 17 世纪就已经得到了解决，但是概率论还是不断地得到充实和发展。基于计算机的数学技巧被用来寻找游戏获胜的秘诀，这在以前是不可想象的。

虽然上个世纪的概率论在纯解析方法上鲜有突破，可是凯利 (Kelly) 公式是个例外。20 世纪 50 年代就职于贝尔实验室的凯利是信息传输理论方面的专家，他注意到他的发现可以应用于研究赌博。他给出了投注问题的一种解法。他的结果被事实证明具有很广的适用性，被现代的许多职业赌徒所采用。下注者赌本的增长率 G 由如下公式给出：

$$G = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{x_n}{x_0},$$

其中 x_0 是初始赌本， x_n 是 n 次下注后的赌本。

大家应该都听说过“21 点”的扑克游戏吧。游戏的目标是使得牌面的数值总和尽可能接近 21，但是决不能超过 21。这对技巧和运气都有很高的要求，这个游戏已经风靡 70 多年了。

我们可以用计算机对这个游戏进行辅助分析，由于“21 点”游戏可能出现的情形多得难以用手工计数，所以只能用计算机模拟来推导最优策略和计算数学期望。

1962 年加州大学的索普 (Edward Thorp) 教授出版了著作《击败庄家》。其中用严格的数学论证给出了“21 点”游戏的获胜策略，这也是将计算机辅

助分析引入到随机游戏研究的开端。

赛马是一项深受大众喜爱的运动，许多人花费了大量的精力来详细探究其中的获胜策略，说穿了就是要准确估计每一匹赛马的获胜概率。与掷骰子和纸牌游戏不同的是，赛马需要对现实中的现象进行建模。

把赛马中的各种不同的因素量化以后输入到预测模型中，输出值就是每匹赛马获胜的概率。当然，每次赛马中所有马匹的获胜概率之和应该等于 1。

赌徒们可以自豪地宣称自己是概率论的教父，因为正是他们激发了赌博与数学的相互影响，并为概率论研究的发展提供了强大的动力。

——爱泼斯坦 (Richard Epstein)

编者按：本文整理自作者在 2004 年第三届国际华人数学家大会期间的公众演讲。