

早期研究生涯的一点体会

杨乐

杨乐，著名数学家。1939 年 11 月出生于江苏省南通市，1956 年考入北京大学数学力学系学习（六年制），1962 年毕业后至 1966 年为中国科学院数学研究所研究生，1980 年当选为中国科学院学部委员（院士），1987 年至 1994 年任中国科学院数学研究所所长，1992 年至 1995 年任中国数学会理事长，1998 年至 2002 年任中科院数学与系统科学研究院院长，现为中国科学院数学研究所研究员、博士生导师、研究院学术委员会主任。主要从事复分析研究，由于在函数值分布论等方面的研究成果获得全国科学大会奖、国家自然科学基金、国家科技进步奖、华罗庚数学奖、陈嘉庚数理科学奖、何梁何利奖与国家图书奖等奖项。

在这篇短文里，我简要地谈谈早期从事研究工作的一点体会。

少年时代对数学产生兴趣并立志献身数学

我的童年与少年时代是在家乡江苏南通度过的。

1950 年，当我从通师一附小学毕业时，还是一个稚气十足的孩子，未满 11 周岁。虽然在小学里成绩尚可，然而在面临报考当地最好的中学——江苏省南通中学时，却无把握，因为它的录取率常常只在十分之一左右。

我有幸考上了该校，在那里完成了中学六年的学业。从初二开始，有



了代数课，一些英文字母构成了代数式，还可以进行运算；算术中一些复杂的四则应用题，可以设未知数，列出方程，求出解答，整个过程变得简单而规范。这引起了我的浓厚兴趣。类似的情况也出现在平面几何课上，几何图形的出现、逻辑严谨的推理和论证，使我感到非常新鲜。我上课十分专心，当堂便能很好地掌握所学内容，课后就有许多时间阅读参考书，做较多的习题，提高了水平，增加了兴趣。在初三时，我作为一个 13 岁的少年，便立志要终生从事数学研究。

1956 年，我开始在北京大学数学专业学习。在 6 年的学习阶段，常有造诣很深的教授和我们一起讨论所遇到的数学概念和定理；同学们争先恐后地到环境良好、学习气氛浓郁的阅览室自习。但是，当时政治运动频繁，“运动”一来，读书似乎变成非法的了。我常常将笔记本夹在衣服内，悄悄地找一间无人的小教室去用功。1960 年下半年，我们到湖北蒲圻的陆水工地，边劳动边联系实际做研究。当时国家已明显进入“困难时期”，基层工地条件更为艰苦，同学们分别挤住在当地工人极其简陋的工棚里。劳动十分繁重，物质条件极其恶劣，但我仍坚持每天劳动之余在寒冷工棚昏暗的灯光下认真地研读数学经典著作。



熊庆来

1962 年，我由北京大学毕业后，进入中科院数学所，成为熊庆来先生的研究生。熊庆来先生是我国近代数学研究与高等数学教育的开拓者与先驱者之一。他曾三次赴法国学习与从事研究工作，共计达 16 年，在函数值分布论方面研究成果卓著。从 1926—1937 年，他担任清华大学数学系主任，与杨武之、孙光远等教授一起工作，使该系青年人才辈出，学术研究蔚然成风。如华罗庚、陈省身、许宝騄、林家翘、徐贤修、庄圻泰等均出自该系那一时期，他们都受到熊先生等的教诲与影响。

熊先生担任我的导师时已年逾古稀，半身不遂，然而他仍经常与我谈话。虽然许多谈话内容只是一些闲聊、典故，却使我从学术思想上受到熏陶，并从中探索合适的研究方向。正如熊先生自己所说：“我年事已高，虽不能给你们具体帮助，但老马识途。”

从经典论著中汲取营养

熊先生当时让我们在讨论班里报告 R. Nevanlinna 的著作《皮卡-博雷尔定理与亚纯函数论》(*Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes*) 以及 G. Valiron 的著作《亚纯函数的博雷尔方向》(*Directions de Borel des fonctions méromorphes*)。对这两本书的深入研读以及对值分布领域一批最杰出的学者, 如 L. Ahlfors, E. Borel, H. Cartan, G. Julia, H. Milloux, P. Montel, R. Nevanlinna, G. Valiron 的重要论文的钻研, 为以后自己的研究工作打下了良好的基础。这方面有一个突出的例子: 辐角分布论是一个非常深奥且困难的领域, 我们当时为了弄懂它并领会其实质, 曾下了一番苦功。改革开放后, 我与北美、西欧许多国家好几十位著名函数论专家不断交往, 发现除 D. Drasin 与 A. Weitsman 两人, 其他专家对辐角分布论并没有多少了解。即使是 Drasin 与 Weitsman 也没有能像我们那样在这方面下一番苦功。后来, 听到陈省身与丘成桐教授常常说起要从一些经典著作与文献中汲取思想和营养, 我感到很有道理。

掌握当前国际上的进展与动态

研究生期间, 我在《中国科学》上发表了 4 篇论文。当时, 国内学术界与国际上几乎没有任何交流。例如 1964 年下半年英国皇家学会会员 W. K. Hayman 在伦敦举行的一次国际会议上提出函数论的一些值得研究和未解决的问题时, 我和张广厚已在从事这方面的研究并解决了一个问题。但我们并不知道 Hayman 提出了这个研究问题, Hayman 也是在我们的论文发表后才得知我们的结果的。又如, D. Drasin 说他 1969 年发表在国际顶尖数学期刊 *Acta Mathematica* 上的长篇论文, 其思想与内容基本上没有超出我和张广厚 1965 年在《中国科学》上的论文。

1966 年, 正当我们将进行毕业论文答辩时, “文革”开始了, 进一步从事研究工作的计划推迟了五六年。1971 年底以后, 即使恢复了研究室的建制, 然而“四人帮”的疯狂破坏与干扰, “极左思潮”的泛滥, 政治运动的频繁, 使得研究人员几乎无法开展工作。当时, 我们对此情况有所认识, 仍全力以赴地投身于研究工作。然而在与研究完全隔绝了 6 年以后, 困难确实极大。从 20 世纪 60 年代以来, 函数值分布论又有了很大发展。要想做出优秀成果, 首先必须掌握当前的进展与动态。为此, 我们钻研了 20 世纪 60 年代至 70 年代初国际上杰出学者在这方面的论文。如 I. N. Baker, J. Clunie, D. Drasin, A. Edrei, W. H. J. Fuchs, A. Goldberg, W. K. Hayman, A. Weitsman 等的研究工作。



张广厚与杨乐

当时，张广厚视网膜有严重问题，不宜多看书，因此就由我报告论文，听众仅张广厚一人。我们偶尔与北大的函数论同行进行交流，有一次我做报告时，听众也只有庄圻泰与陈怀惠两人。后来，在所谓“反击右倾翻案风”时，这些学术讨论与活动被认为是走资本主义道路，我们承受了很大的压力。

当时国际上专家们在值分布论方面的研究成果与以往的经典论著有了很大的不同。他们围绕着亏值与亏量关系做了十分深入的探讨，获得了许多新颖和有趣的结果。方法与技巧也更加高超了，引进了拟共形映射、逼近论、调和测度的估计等新内容。为了熟悉与掌握这些成果和方法，我们也下了一番功夫。

刻苦攻关，不断进取

在值分布论方面，我们熟悉了经典的论著，又掌握了当前的进展与动态，这就为从事研究工作做好了准备。我们认为函数辐角分布论刻画了函数更为深入的性质，且难度很大，国际上新成果很少，是十分值得研究的课题。开始时，我们看到整函数的 Borel 方向的分布必须遵循一定的规律，那么亚纯函数的情形如何呢？经过一番细致的研究，凭借我们对 Borel 方向的深入理解，克服了一些困难，发现了不仅仅是整函数，而且范围大得多的函数类——者具有一个亏值的亚纯函数，其 Borel 方向的分布也符合这个规律。

我们的这项研究工作是辐角分布论的一个优秀成果，似乎在这个课题上难以再继续前进，工作可以告一段落了。在那一段时期里，我和张广厚又反复钻研、揣摩，终于发现了在亚纯函数的亏值与 Borel 方向之间存在的深刻关联。亏值是模分布论的基本概念，围绕着亏值与亏量关系，有着大量研究

工作。Borel 方向是辐角分布论的主要概念。过去这两个概念是各自研究领域的中心，它们之间看似没有任何联系。因为一个是刻画函数在大范围的性质，另一个则是描述函数在局部的动态，两者存在着根本的差异。我们的工作指出有限正级亚纯函数，其亏值总数不超过其 Borel 方向总数。于是，在这两个中心概念间建立起一个紧密的联系。这项研究工作体现了我们研究的特色，也获得了国际上同行专家的高度评价。

在这项颇具特色的研究工作完成后，我们又进一步考虑如果亚纯函数没有亏值，它们的 Borel 方向的分布又会是如何？经过反复研究，我们证明：在复平面上任意给定一些从原点出发的射线，只要它是非空和“闭”的，则一定可构造出一个亚纯函数，它的 Borel 方向恰好就是这些射线。这就是说如果将函数类扩大到全体亚纯函数，则其 Borel 方向的分布便完全是任意的。

我们的研究在取得上述第一项成果后似乎已告一段落。如果没有继续钻研、深入研究，则后两项更具特色的成果就不能获得。长期以来这些成果与我们其他的研究工作获得了国际同行的高度评价，从 20 世纪 70 年代中期美国纯粹与应用数学家访华团以书籍与论文公开发表的报告中提出的“第一流的”、“杰出的”、“重要的贡献”、“新颖而深刻”等 (first-rate, outstanding, important contributions, both new and deep)，到二十多年后在百科全书、专著、论文中的评价与引用，如“重要的现代贡献”，“中国学派”，“深刻研究”，“发现有趣的联系”等 (important modern contribution, Chinese school, thorough study, discovered an interesting relation)。1979—1980 年，我与张广厚应邀赴美访问，Drasin 与 Weitsman 特地为我们的访问举办了一个大型国际函数论会议，百余位来自北美、西欧等国的学者到会。这些都是对我们当时刻苦攻关、不断进取的一种肯定与鼓励。