# 《华罗庚文集》序

P. T. Bateman

贝特曼 (P. T. Bateman) 美国数论学家。1946 年获美国宾夕法尼亚大学数学博士学位, 1950 年开始在伊利诺伊大学任职, 担任系主任达 15 年之久。研究涉及数论的多个领域, 包括素数分布、模形式和算术函数等。

华罗庚的经历是近代数学史中最令人感兴趣的事情之一。他出身贫寒, 只受过九年正规教育, 但他成功地从自学数学的天才青年成长为造诣高深、有多方面创造的数学大师。此外, 他又是推动将数学工具最大限度地用于实际、强调好的数学教学法的重要性的带头人。以他自己的研究方向在美国与中国产生了巨大的影响, 他一直是中华人民共和国第一流的科学巨人之一。

华罗庚生于 1910 年, 除 1936 年至 1938 年生活在英国及 1946 年至 1950 年生活在美国外, 他的一生都在中国度过。在与西方数学家隔离四分之一个世纪后, 他于 1978 年又重新出现在国际数学舞台上。这是一件非常令人愉快的事情。

若选一个为全世界最多数人所知道的数学家, 华罗庚显然会取胜。在中国, 他受到这样大的崇敬, 以致以他的少年时代为题材拍摄了一部电视连续剧, 当今还没有一个西方数学家像他这样为大众所了解。

将华罗庚与老一代著名的印度数学家史罗尼瓦沙 · 拉马努金 (S. A. Ramanujan) 相比较是很自然的, 他们既有惊人的类似之处, 同时又有明显的差异。两人都是自学成才, 都得益于在哈代领导之下, 在英国从事过一段时间的研究工作。对于沟通东方与西方的差异, 并使其祖国步人数学研究的天地, 各自都起了相当大的作用。他们像爱因斯坦在美国一样, 最后成为本国传奇式的科学家。另一方面, 他们两人之间又有截然不同之处。首先, 拉马努金并没有全部完成由一个自学天才到一个成熟与训练有素的数学家的转变, 他在某种程度上保留了数学的原始性, 甚至保留了一定程度的猜谜性质。然而华罗庚在其数学生涯的早期就已是居主流地位的数学家了。其次, 拉马努金与哈代的接触更直接, 更有决定性意义。例如, 拉马努金 1914 年到达英国以后, 他送到印刷厂的许多论文都是哈代的手迹。虽然华罗庚在英国工作时得益甚大, 但他与哈代在数学方面的接触显然不是这样特别集中的。最后, 拉马努金的生存能力以及适应各种不同的生活条件的能力显然不足。华

罗庚在某种意义下是一个生活的强者, 他明显地能够适应各种不同的学术、政治与饮食条件。

判断一个数学家应该看他的研究成就, 而不是看他得到的大学学位的数目。对于华罗庚来说, 他有很多成就, 却没有一个学位, 华罗庚的研究领域遍及数论、代数、矩阵几何学、典型群、多复变数函数论、调和分析与应用数学。

华罗庚最出名的工作可能是他的数论工作, 特别是关于华林问题的工作。华林问题本身是关于将正整数表示为有限多个特定整数的 $k$ 次幂之和的问题。在整数与 $k$ 次幂上面均可以加以限制条件, 并可以将 $k$ 次幂推广为其他的整值多项式。华罗庚取得的结果之一是他证明了定理: 每个充分大的奇数都是 9 个素数的立方之和。对于解析数论专家来说, 他最重要的结果是他的定理: 若, $q, a_1, \cdots, a_k$ 为没有公因子的正整数, 及 $\varepsilon$ 为一个正数, 则

$$\left|\sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i(a_1x+a_2x^2+\cdots+a_kx^k)/q}\right| \leqslant cq^{1-\frac{1}{k}+\varepsilon},$$

此处 $c$ 是一个仅依赖于 $k$ 与 $\varepsilon$ 的常数。另一个重要结果是通常所称的华氏引理或华氏不等式

$$\int_0^1 \left|\sum_{m=1}^{N} e^{2\pi i\alpha m^k}\right|^{2^k} d\alpha \leqslant cN^{2^k-k+\varepsilon}, \tag{$*$}$$

此处 $c$ 为一个依赖于正整数 $k$ 及正数 $\varepsilon$ 的常数, 由不等式 $(*)$ 可以相当简洁地证明: 每个充分大的正整数可表为不超过 $2^k+1$ 个正整数的 $k$ 次幂之和 (这个简短证明可见沃恩 (R. C. Vaughan) 的书 *The Hardy-Littlewood Method*, Camb. Univ. Press, 1981 的第二章)。

关于华罗庚在数论以外的工作, 我们列举两个在体 (skew-field) 或可除环 $F$ 的基本性质方面的简单结果。

(1) 若 $\sigma$ 是 $F$ 至其自身 (onto) 的一个一一映射, 且对于所有 $F$ 中的元素 $a, b$ 均有

$$(a+b)^\sigma = a^\sigma + b^\sigma, \quad (aba)^\sigma = a^\sigma b^\sigma a^\sigma,$$

则对于所有 $F$ 中的元素 $a, b$, 或者 $(ab)^\sigma = a^\sigma b^\sigma$, 或者 $(ab)^\sigma = b^\sigma a^\sigma$。

(2) 若 $ab \neq ba$, 则

$$a = \left\{b^{-1} - (a-1)^{-1}b^{-1}(a-1)\right\}\left\{a^{-1}b^{-1}a - (a-1)^{-1}b^{-1}(a-1)\right\}^{-1}。$$

由这个恒等式立刻可以推算出所谓布饶尔–嘉当–华氏 (Brauer-Catran-Hua) 定理; 体的每个真的正规 (normal) 子体一定含于它的中心 (center) 之中。

这两个结果 “既没有一口井那么深, 也没有一扇门那么宽 (not so deep as a well, nor so wide as a church-door), 像茂丘西奥 (Mercutio) 的伤口一样”, 这两个结果是致命的 (注: 见莎士比亚的《罗密欧与朱丽叶》)。

华罗庚在美国借以成名的绝大多数研究是他在 1950 年回中国之前做的。人们可能会设想, 如果他留在西方, 他将可能完成更多的个人研究计划。然而, 如果这样做, 他就不可能如他最后 30 年所做的, 在中国发展数学及其应用中起到中心作用。总之, 华罗庚的学术总成就达到很高的水平, 他可以被选为任何学术社团的成员或任何科学院的院士。

本书约含华罗庚论文的三分之一, 按目前的惯例, 本书是按原始杂志通过照相制版编排的, 从而存在相当多的印刷质量问题。本书论文的选取是适当的, 但由于华罗庚的许多论文是发表在印刷质量低劣的杂志上而不得不放弃了, 因而本书论文的选取无疑受到了影响。

这本文集是 20 世纪数学中的一个伟大人物的丰碑。

编者按:

本文是作者为哈贝斯坦编的《华罗庚文集》(*Loo-Keng Hua: Selected Papers*, Edited by H. Halberstam, Springer-Verlag, 1982) 所撰写的序言。原载 *Math. Monthly*, Jan. 1986, 67–69。王元译, 刘峰校。中文原载《华罗庚的数学生涯》, 王元, 杨德庄, 北京: 科学出版社, 2005。