# 双曲空间上关于极限圆的积分几何

## —— 纪念陈省身之作

S. 黑尔加松

S. 黑尔加松 (Sigurdur Helgason), 麻省理工学院数学教授。

本文为纪念陈省身先生而作, 以感谢他多年来的慷慨和关怀。1959 年, 我正在撰写那本后来于 1962 年出版的专著, 他给了我非常宝贵的鼓励和指导。他对于我发展齐性空间拉东变换理论的工作很感兴趣; 并告诉我, 他在 1942 年给出的关于一对齐性空间的 "关联定义" (incidence definition) 适合我的理论框架。事实上, 用他的观点可以得到对拉东 1917 年以来一些旧成果的最好理解。

空间 $X$ 上函数 $f$ 的拉东 (Radon) 变换是由一些子集 $\xi \subset X$ 构成的集族 $\Xi$ 上的函数 $\hat{f}$, 定义为

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\xi} f(x) dm(x), \quad \xi \in \Xi, \tag{1}$$

$dm$ 是每个 $\xi$ 上给定的测度。拉东原先的问题是: 映射 $f \to \hat{f}$ 是否为单射? 换句话说, $f$ 是否由 (1) 式确定? 除了单射问题外, 确定映射 $f \to \hat{f}$ 的值域也是一个有趣的问题。此问题的一部分就是所谓的 "支撑定理" (support theorem)。以下的蕴涵式 (supp 表示 support)

$$\operatorname{supp}(f) \text{ 紧 } \Rightarrow \operatorname{supp}\left(\widehat{f}\right) \text{ 紧} \tag{2}$$

因为一些简单的理由通常是成立的, 而反过来的蕴涵式

$$\operatorname{supp}\left(\widehat{f}\right) \text{ 紧 } \Rightarrow \operatorname{supp}(f) \text{ 紧} \tag{3}$$

则被称为 "支撑定理"。一些使本定理成立的例子导致各种应用:

(i) 给出值域 $D(X)$ 的明确描述, 这里 $X$ 是欧氏空间或非紧类的对称空间。在第一种情况下, (1) 式中的 $\hat{f}$ 是 $X = \mathbb{R}^n$ 中对超平面的积分; 在第二种情况下, (1) 式中的 $\hat{f}$ 是对称空间 $X$ 中对极限圆 $\xi$ 的积分。

(ii) 给出 X 射线重建 [人体] 图像的医学应用。

(iii) 得到对称空间 $X$ 上不变量微分方程的存在性定理。

以上这些结果的每一种情况都依赖于特别的方法。已经有人, 如奎因托 (Quinto), 运用微局部分析 (microlocal analysis) 方法以得到较一般的结果, 但需要对 $f$ 及其支撑集有较强的先验假设。

非紧类对称空间 $X$ 上有两种拉东变换: X 射线变换和极限圆变换, 它们对于 (3) 式都成立。具体地说, $X$ 上的函数 $f$ 被称为 "指数下降的", 如果对于每个 $m>0$, 有

$$\sup_x f(x)\, e^{md(0,x)} < \infty,$$

其中 $0 \in X$ 表示原点, $d$ 表示距离。

对于双曲空间 $X$ 和关于固定极限圆的极限圆变换 $f \to \hat{f}$, 有类似于 (3) 式的结论成立。(见文献 Support theorems for horocycles on hyperbolic spaces. *Pure and Appl. Math. Quarterly* (待发表)。)