

素数不再孤单

——李生素数和一个执着的数学家张益唐的传奇¹⁾

季理真

译者：徐浩

季理真，1964 年 4 月生于温州。1984 年获杭州大学理学学士学位，1985 年赴美在丘成桐教授指导下研习数学。1987 年在加州大学圣迭哥分校获得理学硕士学位，1991 年在美国东北大学获得理学博士学位。先后在美国麻省理工学院、普林斯顿高等研究院从事研究工作，现任教于美国密歇根大学数学系。研究领域为几何、拓扑和数论的交叉学科，曾获得 Sloan 研究奖、美国自然科学基金会数学科学博士后奖和晨兴银质奖。撰写过多部学术专著，担任两套学术丛书和两套科普丛书的主编，是 *Pure and Applied Mathematics Quarterly* 国际期刊的主编之一。

数学是什么？克罗内克 (Kronecker) 曾说：“上帝创造了整数，其余一切都是人造的。”那什么构成了整数？答案是素数！事实上，每个整数都能唯一地写成若干个素数的乘积。自古埃及（约公元前 3000 年）起，人类就已经对素数着迷。如今，大素数在现代密码学中起着重要作用。

两千多年前，欧几里得证明存在无穷多的素数，但是人们观察到素数出现的频率越来越小。著名的李生素数猜想断言存在最极端的例外，也就是说，存在无穷多的间隔为 2 的素数对。在这个古老问题上首次取得突破性进展的是中国数学家张益唐，他证明了存在无穷多个间隔小于 7000 万的素数对。

¹⁾本文得益于许多人的帮助，在此一并表示感谢：丘成桐教授提议用以上的标题，William Dunham 教授提供了关于李生素数猜想历史的资料，葛力明教授提供了张益唐的简历，郑绍远教授指出 Soundararajan 的文章，杨乐教授提供了有关潘承彪教授的资料，王元教授提供了李生素数猜想有关成果的详细资料，John Coates 教授认真阅读本文，给出了重要的修改意见并提供高斯关于素数定理的信件。

素数

素数的探寻之路艰辛漫长却兴味盎然，张益唐的传奇故事感人至深又鼓舞人心。从某种意义上来说，素数的历史是数学史的精致缩影，很多重要的数学家都被其吸引。

在欧几里得证明素数有无穷多以后，关于素数的文字记载陷入停滞，直到 17 世纪，费马指出所有可以写成 $2^{2^n} + 1$ 形式的数（ n 为自然数）都是素数。费马并没有给出证明，但是他验证了 $n \leq 4$ 时的情形。费马的工作激发了欧拉和其他很多学者的兴趣。例如，欧拉发现，下一个费马数 $2^{2^5} + 1$ 不是素数。这表明只在少量实验之上断言一般情形的风险。欧拉研究了素数的很多不同方面，例如，他和哥德巴赫在 1742 年的通信促使哥德巴赫猜想成为数论领域的主要问题之一。在他的回复中，欧拉写道：“每个偶数都是两个素数之和。我认为这是一个完全正确的定理，虽然我还无法给出证明。”

关于素数的分布也是一个自然而且重要的问题，有很多学者研究过这个问题。18 世纪末，通过详细的计算，勒让德和高斯独立地猜测**素数定理**：当 x 趋于无穷大时， $\pi(x)$ 和 $x/\ln x$ 的比值趋向于 1。高斯从未发表过他的猜想（虽然在哥廷根图书馆中一封日期为 1849 年的高斯的长信明确记录了他的这一发现），而勒让德发表了他的研究成果。高斯的一位年轻同事，狄利克雷发现了素数定理的一个等价公式。1850 年，切比雪夫证明了素数定理的一个弱形式——计数函数 $\pi(x)$ 的增长阶满足素数定理的预测。作为推论，他证明对任意整数 $n \geq 2$ ， n 和 $2n$ 之间至少存在一个素数。

虽然之前 zeta 函数在欧拉和切比雪夫的论文中被应用于素数研究，黎曼是真正将 zeta 函数作为复函数引入并建立了素数分布和黎曼 zeta 函数零点位置的密切联系。数论和复分析的交融彻底改变了数论。而黎曼关于黎曼 zeta 函数零点的假设现在依然还是一个未解决问题，并且可能是数学上最著名的问题。

在 1859 年的一篇论文中，黎曼勾勒出一个通过黎曼 zeta 函数证明素数定理的纲领。受此启发，阿达马和普森 (de la Vallée Poussin) 在 1896 年分别独立完成素数定理的证明。

素数拥有一种非凡的特质：它们同时具备规则和无序（或随机）的行为。比如，素数定理表明它的总体增长符合一个简单函数关系，但是它们之间的间隔却异常复杂和随机（或混乱）。素数定理的一个直接推论是素数之间的平均间隔趋于无穷大（或者说素数在整数中的密度趋向于零）。理解这些间隔的行为是一个自然而有趣的问题。（在某种意义上，这也反映出理解素数计数函数 $\pi(x)$ 渐近展开的剩余项是很困难的问题。如黎曼所指出的，这与黎曼 zeta 函数的零点有关。）

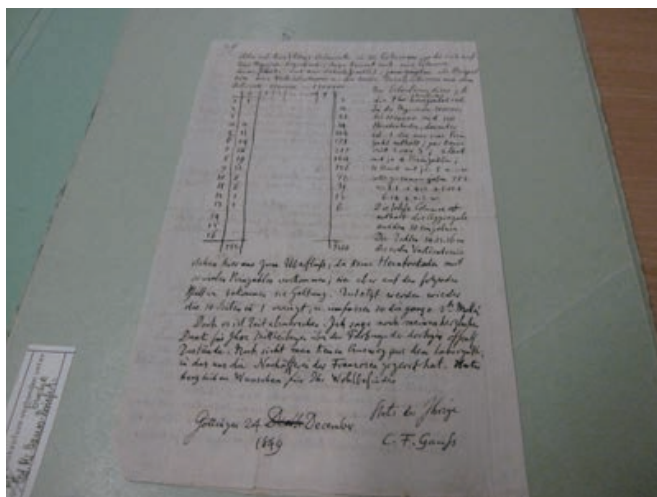


图 1 这些照片是高斯 1849 年写给一个以前的学生的关于素数定理的信件，现保存于哥廷根大学图书馆。(由 John Coates 教授提供)

素数的间隔

关于素数间隔研究书面记载的历史是什么？1849 年，波利尼亚克 (Alphonse de Polignac, 1817—1890) 猜测任意偶数都是无穷多个相邻素数对的间隔。这个猜想对应于 2 的特殊情形，就是存在无穷多孪生素数。格莱舍 (James W. L. Glaisher, 1848—1928) 列举了 10^5 以内的所有孪生素数，并得出结论：“毫无疑问孪生素数有无穷多，如何证明之是很有意思但却并不容易的问题。”格莱舍曾获得剑桥大学 1987 年数学学位考试第二名 (Second Wrangler)，曾担任皇家天文学会主席，还是著名哲学家维特根斯坦 (Ludwig Wittgenstein, 1889—1951) 的老师。

这是孪生素数猜想可查的最初起源。由于其表述简单自然，我们有理由怀疑这个问题可能被更早的学者，甚至是古希腊的数学家思考过。但是根据数学史学家，特别是研究欧拉工作的学者的观点，欧拉的工作中没有讨论过孪生素数。既然欧拉以博学高产闻名于世，我们几乎可以认定波利尼亚克是最早提出孪生素数问题的数学家。

许多数学家都研究过这个表述极为简洁的孪生素数猜想。虽然间隔 2 是数学家们所期望的，但是任何比来自素数定理所蕴含的间隔更小的估计都很有价值。任何关于这些间隔的描述或分布规律都是重要而有趣的。²⁾

关于素数的间隔，我们已经得到许多部分的和带额外条件限制的结果，以及许多列举孪生素数对的数值工作。其贡献者包括 Hardy, Littlewood, Siegel, Selberg, Rankin, Vinogradov, 华罗庚, Erdős, Bombieri, Brun, Davenport, Rademacher, Rényi, 王元, 陈景润, 潘承洞, Friedlander, Iwaniec, Heath-Brown, Huxley, Maier, Granville, Soundararajan 等著名数学家。事实上，我们很难说出过去 100 年中哪个解析数论学家没有直接或间接地研究过孪生素数猜想。当然还有许多业余数学家的不懈努力。

一个重要和鼓舞人心的结果在 2009 年被 Goldston, Pintz 和 Yildirim 证明。从某种意义上说，他们的结果是首破坚冰之作。他们证明虽然素数的间隔在平均意义上趋于无穷大，但实际却可以非常小。这被认为是这个问题 80 年来最杰出的工作 [2, p.1]。

假设关于算术级数素数分布的 Elliott-Halberstam 猜想成立，他们可以证明存在无穷多间隔小于 16 的素数对。

在 [1, p.822] 中，他们还提出如下问题：“是否能用我们的方法无条件地证明存在无穷多的间隔固定的素数对？”虽然已知的结果看似距离这个问题

²⁾素数间隔问题属于（自然产生的）序列分布研究问题之一，例如黎曼 zeta 函数的零点、大核能量阶、 \sqrt{n} ($n \in \mathbb{N}$) 的小数部分。一个自然的问题是这些分布能否用随机数（或者随机矩阵的特征值）的分布来刻画，抑或它们遵循更加深奥的规律。

“只有头发丝那么细” [1, p.822]，但是困难依然巨大。

该如何应用或改进 [1, p.822] 的结论？也许这正是张益唐工作的起点。这个问题的困难在 [1, p.819] 中有精辟的描述：“这个问题不仅困难，而且它在大多数这个领域的数学家中背负着‘毫无解决希望’的名声，我们不知道任何不借助额外条件的方法可以对付这个问题。”

事实上，在张益唐的工作出来之前，这个领域的几乎所有专家都认为这个问题有着不可逾越的困难。在 Soundararajan [3, p.17] 看来：“首先，也是最重要的，是考虑能否无条件地证明有界素数间隔的存在性。在目前看来，回答是否定的，但是也许这个方法的某些变例会行得通。”

研究素数最基本或者说仅有的方法就是筛法。但是要从目前已知的众多有着微妙差别的筛法中找出能够有效应用于某个具体问题的筛法，是一门艺术。我们需要实实在在的创新思想来打破表面上的僵局。在这个问题上钻研了 3 年之后，2012 年 7 月，张益唐在访问科罗拉多州的朋友期间，终于捕获了关键的灵感。他解决了 [1, Question 1] 中的问题。在某种意义上，正是一贯的坚持和信念，使他在世界顶尖专家都无能为力的难题上取得了成功。他不惧驾驭极端困难，透着从容和稳健。国际解析数论权威学者 Henryk Iwaniec 评价道：

“张益唐的文章三周前被《数学年刊》(*Annals of Mathematics*) 接收，而在此之前，他在解析数论学界并不为人所熟知。但是他掌握解析数论最复杂课题的知识，并得以运用自如。他能够突破令许多专家都止步不前的屏障，并非因为人们忽视了微小之处，而是由于他引入了全新而巧妙的布局并漂亮地加以执行。仅从论证的清晰的逻辑架构，你可以立即感受到这项工作几乎无可置疑的优秀。这并不意味着这篇文章简单或者初等。恰恰相反，张的工作是解析数论的顶峰之作。他也优雅地借用其他领域的工具，比如间接用到有限域上代数簇的黎曼猜想。张的工作将引发持久雪崩式的优化和改进，以及随之而来的理论创新。一夜之间，张重新定位了解析数论的焦点。随后的进展需要等待多久，令人期待。”

2013 年 5 月 13 日，张益唐受丘成桐教授邀请，在哈佛大学做了一个报告。在报告中，他首次向学术界公开宣布了他在文章 [5] 中证明的里程碑式的定理：“存在无穷多间隔小于 7 千万的素数对。”

这标志着解析数论这个古老的学科又翻开了一个绚烂的华章，并预示着下一个新纪元的到来。

张益唐的学术生涯

张益唐的学术生涯是典型和非典型的结合，或许就像他所热爱的素数。1978 年张益唐考入北京大学，1982 年毕业时他被认为是当时最优秀的学生。³⁾ 随后的 1982 年至 1985 年，他在潘承彪指导下继续在北京大学攻读硕士学位，因此他也成为了华罗庚 (1910—1985) 的门生之一。⁴⁾

1991 年张益唐在普渡大学获得博士学位之后，⁵⁾ 他没能找到大学的正式教职。之后他从事过各种各样的工作，当过会计，也在快餐店打过工。但是数学始终是他的挚爱。1999 年到 2005 年，他作为代课老师在新罕布什尔大学教授课程。2005 年至今，张益唐在新罕布什尔大学担任讲师。张益唐是一个非常优秀的授课教师，受到学生的高度评价。从某种意义上说，目前为止，张益唐从来没有获得过正式的数学研究职位。正因为如此，他能在这样一段艰苦而漫长的岁月里坚持不懈地执着钻研数学界最具挑战性难题的举动才更令人感动和印象深刻（例如黎曼 zeta 函数零点分布和孪生素数猜想）。他的坚持印证了一句中国俗语：“皇天不负有心人！”

张益唐的博士论文研究著名的关于多项式映照的雅可比猜想，这个猜想至今依然未被证明，它也因为众多错误的证明而愈加著名。在获得博士学位之后到取得孪生素数研究的重大突破之前的这段时间里，张益唐只在著名的《杜克数学期刊》上发表了一篇论文《关于 $\zeta'(s)$ 在临界线附近的零点》（“On the zeros of $\zeta'(s)$ near the critical line”）。这篇论文的研究内容是黎曼 zeta 函数及其导数的零点以及零点之间的距离。1985 年，张益唐在中国顶尖数学杂志之一《数学学报》上发表了另一篇关于黎曼 zeta 函数零点的论文。

也许有必要指出这些零点的间距和孪生素数密切相关 [3, p.2]: “关于素数对 p 和 $p + 2k$ ($2k$ 为偶数) 出现频率的精确认识对黎曼 zeta 函数零点坐标的空间分布有着微妙的蕴意…… 反之，特异（罕见）零点模式于

³⁾这似乎是之前认识张益唐的北大学生的一致看法。

⁴⁾虽然潘承彪并不是华罗庚的正式学生，但是华罗庚对他的影响显然是巨大的。据杨乐教授说，潘承彪于 1955 年至 1960 年在北京大学攻读本科学位。1960 年后，潘承彪任职于北京农业机械化学院（后并入北京农业大学）。20 世纪 80 年代时，潘承彪在北京农业大学获得教授职称。虽然潘承彪任职于北京农业大学，但他的大部分时间是在北京大学度过的。潘承彪是闵嗣鹤 (1913—1973) 的学生，但他当时的研究方向并不是数论。1958 年时，由于闵嗣鹤教授被迫将研究方向从数论转到广义解析函数，所以潘承彪当时研究的是广义解析函数（由 L. Bers 与俄罗斯数学家 Vekya 引入）。我相信潘承彪在数论方面的知识和能力主要来自于他的哥哥潘承洞。潘承洞在 1956 年至 1959 年期间是闵嗣鹤的研究生。但他也被认为是华罗庚的学生，尤其是他在哥德巴赫猜想方面的研究。事实上，闵教授同样也受到华教授的巨大影响。

⁵⁾大约在 1984 年左右，丘成桐教授曾尝试安排张益唐到加州大学圣迭哥分校师从著名解析数论学家 Harold Stark 学习。由于一些未知的原因，这个安排未能实现。如果当初张益唐去了加州大学圣地亚哥分校学习，或许他能够在学术道路上少走一些弯路。

zeta 类函数意味着存在无穷多的孪生素数。”

在当今这个一切都是批量生产的文化环境下，一个人究竟应该或者能够创造出多少成果，这个问题或许值得我们深思。这让人联想到托尔斯泰的著名短篇小说《一个人需要多少土地》。这篇小说里的土地可以替换成其他任何东西。

文章的数量和篇幅是否是有效的衡量标准呢？或许我们应该始终牢记，时间是检验一切的最佳标准！

也许不是每个人都熟悉黎曼猜想，但是每个学过微积分的学生一定都听说过黎曼和以他的名字命名的积分。绝大多数数学家都会同意黎曼是历史上最伟大的数学家之一。但是可能很少有人知道，黎曼一生只发表了 5 篇数学文章和 4 篇物理文章。（伽罗瓦一生中发表的文章更少，但他并不是一个全职数学家，而且在很年轻的学生时期就去世了。）

素数并不孤独

素数的概念也是感性化的。素数是整数里的一些单独的数，但对于某些素数（或许对某些人也一样）来说，有一个如同孪生素数那样的紧密伙伴就足够了。这种特殊的感情在保罗·乔尔达诺的小说《素数的孤独》里有着很好的描述。我们来引用这本书里的一段话：

素数“是多疑而孤独的数，这是马蒂亚（小说中的主人公）认为素数奇妙的原因。有时他觉得素数是在不经意间形成数列，它们是被束缚了，就像一串项链上的珍珠。有时他又觉得素数原本更希望能和其他普通的数一样，但是因为某些原因，它们不再普通……有些素数甚至更加独特。数学家们称之为孪生素数：成对的素数彼此相近，几乎相邻，但是它们之间始终为一偶数所隔，无法触及。”

张益唐使人们回想起几代中国学生心目中的英雄人物之一陈景润，以及他在著名的哥德巴赫猜想上所取得的成果。陈景润和张益唐都是孤独而坚持不懈地钻研着数论方面的艰深难题，他们都为祖国，尤其是中国数学界赢得了巨大的荣誉。

当然，陈景润的故事对于每个中国学生来说都耳熟能详。趣味数学书《遇见哥德巴赫猜想》的作者多夏狄斯 (Apostolos Doxiadis) 用带有浪漫主义的细腻笔触描写了一个数学家钻研哥德巴赫猜想的故事。（顺便说一句，小说中的主人公比德罗斯叔叔从获得博士学位以后到开始转向哥德巴赫猜想研究的这段时间内只发表了一篇论文。）

参考文献

- [1] D. Goldston, J. Pintz, C. Yildirim. Primes in tuples. I. *Ann. of Math.* (2) 170 (2009), no.2, 819-862.
- [2] D. Goldston, J. Pintz, C. Yildirim. Primes in tuples. II. *Acta Math.* 204 (2010), no.1, 1-47.
- [3] K. Soundararajan. Small gaps between prime numbers: the work of Goldston-Pintz-Yildirim. *Bull. Amer. Math. Soc.* (N. S.) 44 (2007), no.1, 1-18.
- [4] Y. Zhang. On the zeros of $\zeta'(s)$ near the critical line. *Duke Math. J.* 110 (2001), no.3, 555-572.
- [5] Y. Zhang. Bounded gaps between primes, preprint, 2013, 56 pages.