关于几何基础中的假设 (节录)

黎 曼

编者按: 黎曼 (Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826—1866), 出生于德国汉诺威的布列斯伦茨 (Breselenz) 村, 父亲是一位贫穷的牧师。他于 1846 年进格丁根大学, 一开始学哲学和神学, 后来转学数学。1851 年获博士学位, 其关于复变函数研究的博士论文受到高斯的赞赏。1854 年任格丁根大学讲师, 1859年成为教授。黎曼堪称是 19 世纪最富有创造性的数学家。现代数学这座大厦中, 到处打有黎曼的印记: 黎曼积分、黎曼面、黎曼流形等等; 关于黎曼 zeta 函数零点分布的黎曼猜想则是迄今为止尚未解决的最重要的数学猜想。

本文是黎曼在就任格丁根大学讲师职位时发表的就职演讲, 该演讲题目是高斯指定的。原文为德文, 题名为 Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen。这是继高斯的关于曲面研究的论文之后, 现代微分几何学的又一篇奠基性文献。

由于非欧几何的发现, 人们开始考虑,《几何原本》中以公设和公理的形式给出的那些关于空间的基本假设究竟是先验的还是经验的? 以及它们在多大程度上是可靠的? 黎曼在此文中, 试图通过对一般度量概念进行无穷小分析来澄清这些问题。于是, 他把通常的二、三维欧氏空间一下子推广到一般的 n 维流形。在另一方面, 他继承了高斯的思想, 坚持认为流形上一条线的长度是与位置无关的“内蕴”性质, 从而推广了高斯关于曲面研究的工作。特别地, 他假设在无穷小的范围内, 流形中的线段长度依然可以表示成在欧氏空间中的那种形式。后人就称具有这种性质的流形为“黎曼流形”。

自从爱因斯坦利用黎曼流形建立了广义相对论, 黎曼流形受到越来越多的关注。如何把高斯在曲面研究中得到的那些漂亮定理推广到黎曼流形上, 成为几何学家们的重要任务。陈省身先生在这方面做出了重要贡献。

众所周知, 几何学根据现实的情况设定了空间的概念以及关于空间中各种建构的基本原则。它只是给出这些概念和原则的名称定义, 而它们的真正定义则以公理的形式给出。结果是, 我们至今仍然对这些设定之间的关系一无所知: 既不知道它们之间的联系是否以及在多大程度上是必要的, 也无法先验地知道这种联系是否可能。

从欧几里得到勒让德 (Legendre), 这种一无所知的状况既没有被数学家们也没有被那些关注此事的哲学家们所改变。其原因无疑是由于完全缺乏对于 “多重广延量” (multiply extended quantities) (包括空间量) 一般概念的研究。因此, 我给自己的首个任务是, 从 “量” (quantity) 的一般概念导出 “多重广延量” 的概念。然后第二个任务是要表明, 多重广延量可以容纳各种不同的度量关系, 而空间不过是三重广延量的一个特例。但由此必然会得出: 几何学命题并不能从量的一般概念中推出。因此, 把空间从其他可以想象的三重广延量区分开来的那些性质只能来自经验。于是产生了这样一个问题: 如何找出一组最简单的事实来决定空间的度量关系? 这个问题就所涉事情的性质来说并不完全确定, 因为可能有几套事实均符合要求。就我们当前目的来说, 最重要的一套是欧几里得作为基础的那些公设公理。这些事实一如所有的事实, 它们并不具有必然性, 只具有经验的确定性; 它们是假设。因此, 我们可以研究这些事实的可靠性 (在我们的观察范围内当然相当可靠); 并从无穷大和无穷小方面探究, 把它们推广到观察范围以外是否正当。

I. n 重广延量的概念 (略)

II. n 维流形上可容许的度量关系 (假定线具有与位置无关的长度, 因而每条线都能被其他各条线度量)

我们建立了 n 维流形的概念, 并且知道其本质特点在于确定其中的位置可以归结为确定 n 个量。接着要完成上面所提到的第二个任务, 即研究流形所允许的度量关系以及确定度量关系的充分条件。这些度量关系只能在量的抽象概念中研究, 而它们之间的依赖关系只能用公式来表达。然而, 在某些假定下, 它们可以被分解成为一些具有各自几何意义的关系, 从而有可能用几何形式来表达计算结果。这样, 为了得到一个牢固的基础, 我们确实无法避免对我们的公式作抽象的讨论; 但至少, 我们因此可以用几何形式来表达计算结果。关于此问题两方面的表述已由枢密顾问官高斯在其关于曲面研究的著名论文中建立。

……