

丘成桐与几何分析

郑绍远

欣闻丘成桐获得 2010 年沃尔夫数学奖，兴奋莫名，因为这是第二位华裔数学家获此殊荣，我的老师陈省身先生在 1983 年以他在整体微分几何的巨大贡献而获沃尔夫奖。丘成桐则以他在几何分析领域的巨大贡献而获奖。几何分析是丘成桐创建的数学领域，丘成桐成功地把偏微分方程的方法，尤其是非线性分析的方法，引进几何问题中，丰富了偏微分方程的课题，而又有效地破解了大量的几何和理论物理的难题。20 世纪 70 年代是几何分析的奠基和茁壮期，一些重要的方法和观点都在这个时期发展出来，我十分幸运能亲历这个时期的重要活动，现在回想起来仍能感受到当时学术的激情和创意的澎湃。

丘成桐在 1969 年秋获奖学金到加州大学伯克利分校攻读数学博士课程，他在一个学期后便解决了沃尔夫猜想（Wolf Conjecture，与沃尔夫奖无关），基本上完成了博士课程的主要部分，沃尔夫猜想是关于曲率和基本群的一个猜想，主要技巧是群论。因为丘成桐卓越的成就，伯克利就一口气给奖学金录取了我和中文大学的一位同学。到伯克利后，我和丘成桐合租一间在欧几里得街（很巧合！）上的单身公寓，丘成桐很喜欢谈数学和与朋友分享他的观点和想法，每日浸淫其中，我自然获益匪浅。事实上在这时期丘成桐已开始钻研偏微分方程，当时伯克利在这方面的大师是摩理教授（Charles Morrey）。他的巨著《变分法中的多重积分》刚出版，但这本书较艰深难读，丘成桐在 1970 年春季修读了摩理教授的讨论班学习这本巨著。但 1970 年春季是一个动荡的时期，五月在肯特州立大学（Kent State University）反战活动中，四名学生中枪死亡，因此全美发生大规模的反战活动，伯克利校园成为学生和警察的战场，多次实施宵禁和戒严，摩理教授的讨论班上只剩丘成桐一人，在硝烟弥漫和直升机盘旋声音充耳的环境中，丘成桐独得摩理教授的心传。在这段时期，丘成桐仍在钻研非线性偏微分方程的理论，但他已提出一个重要问题，就是把经典的刘维尔定理（Liouville Theorem）推广到完备非紧致里奇曲率（Ricci curvature）非负的黎曼流形上。这是一个很好的问题，因为问题漂亮而又不能用既有方法解答，1972 年丘成桐发展了在黎曼流

形上做梯度估计 (gradient estimate) 的方法解决了他自己提出的问题。在黎曼流形上的梯度估计是几何分析发展的重要里程碑,可以说丘成桐这个工作宣告了几何分析的诞生。

1973 年暑假丘成桐自美国东部到加州斯坦福大学任助理教授,往后在加州的数年是几何分析的重要发展时期,丘成桐和几何分析的几个重要人物开始了长期的合作关系,共同把几何分析研究推到高峰。在斯坦福大学,丘成桐认识了年轻的澳大利亚籍数学家李安·西蒙 (Leon Simon)。西蒙教授是一位谦谦君子,他并非名校毕业,但他出色的博士论文令斯坦福大学的吉尔拔 (David Gilbarg) 教授大为赏识,把他聘到斯坦福大学数学系任助理教授。另一位关键人物是孙理察教授 (Richard Schoen, 孙理察是丘成桐给他取的中文名字)。孙理察当时仍是研究生,他来自中西部农庄,有着中西部人沉实苦干的精神,他身高六英尺,身手灵活,各种球类都精通。他是少数可以灌篮的数学家。他的垒球亦十分出色,1979 年丘成桐、孙理察、李伟光和我四人到夏威夷旅行,看见挂在椰子树上的椰子艳羡不已,孙理察拿起石头向着四十英尺高的椰子树一掷,就把树顶的椰子打下来,可惜后来椰子不能带进美国大陆而被海关充公了。丘成桐、西蒙和孙理察当时都是二十多岁左右,风华正茂,所谓初生之犊,不畏猛虎,半年后他们三人就在极小子流形方面有所突破,做出了出色的工作。孙理察告诉我,丘成桐这时去旁听很多研究生的课程,斯坦福大学有很优秀的分析传统,丘成桐兼容并包,无所不学,功力大为增长,很快便到了融会贯通,自成一派的境界。

丘成桐自 1971 年起便知道卡拉比猜想 (Calabi Conjecture) 的重要性,立定决心要破解这个问题。要解决卡拉比猜想就要解决在黎曼流形上一个二阶全非线性椭圆型方程,这个问题就算在欧氏空间已经是一个十分困难的问题。在 1975 年丘成桐和我在这方面有一些很好的进展,但距离解决卡拉比猜想仍远,因为我们欠缺一个关键性的零阶先验估计 (0-order a priori estimate)。丘成桐在 1976 年夏天结婚,小登科后数月便解决了卡拉比猜想而名震天下,1977 年陈省身先生立刻邀丘成桐到伯克利访问一年。这时伯克利人才济济,孙理察在 1975 年自斯坦福毕业后便于伯克利任助理教授,伯克利亦向麻省理工学院挖墙脚,把几何及拓扑学大师辛格 (I. M. Singer) 聘到伯克利,他的办公室就在丘的旁边。十分幸运我刚巧得到史隆基金会 (Alfred P. Sloan Foundation) 的史隆研究奖,可以专心做研究一年,不用教学。知道丘成桐会到伯克利之后,我亦携一家老少回到母校伯克利一年,继续做几何分析的研究工作。这时李伟光 (Peter Li) 是陈省身教授门下的研究生,李伟光来自香港,很讲究生活品味,他每天开着名贵 Alfa Romeo 跑车上学,在伯克利数学系中传为佳话。李伟光在这时开始与丘成桐在几何分析方面做研究,他和丘成桐在 20 世纪 80 年代初做了大量出色的工作,其中关于黎曼流

形上的热核估计更在 2003 年佩雷尔曼（Perelman）的庞加莱猜想工作中起关键的作用。

在伯克利期间，辛格教授对理论物理，尤其是规范场论感兴趣，很多著名的数学家和物理学家都到伯克利作访问，丘成桐和孙理察亦开始研究广义相对论的正质量猜想（positive mass conjecture）。丘成桐和孙理察首先发展了三维流形内的极小曲面理论，再以此为基础在 1978 年解决了正质量猜想，这个工作令霍金（Stephen Hawking）赞叹不已。丘成桐访问了霍金教授，霍金向丘成桐提出正能量猜想（positive energy conjecture），丘成桐和孙理察亦在数月后亦把它解决了。

丘成桐这一系列的工作自然引起数学界的重视，普林斯顿高等研究院（Princeton Institute for Advanced Study）立刻邀请丘成桐在 1979 年度主办微分几何年，广聘这方面的数学家会聚一堂，推动整个领域更上一层楼，这可以说是几何分析的第一个群英会。丘成桐邀请了孙理察、李安·西蒙、李伟光到普林斯顿访问一年，而我亦得到普林斯顿大学数学系的支持，给我一年不用教书，全心全意参加高等研究院的学术活动。这一年大家都住在高等研究院的宿舍，有更多机会切磋讨论。丘成桐又主办了很多学术活动，天下英雄好汉都来作学术访问，互相切磋，丰富了几何分析的内容，扩大了几何分析的影响力，使之成为数学领域的一个重要学科。丘成桐更把整年的学术活动编辑成书，并加上他所订立的 120 个几何分析的重要猜想，为几何分析日后的发展定了明确的方向。自 1980 年到今 30 年间，几何分析蓬勃发展，很多数学难题都以几何分析的方法一一破解，要描述这 30 年的发展要更多的篇幅，并非这篇短文所能概括了。