关于曲面的一般研究 (节录)

高　斯

编者按: 高斯 (Johann Carl Friedrich Gauss, 1777—1855), 出生于德国不伦瑞克 (Brunswick) 市的一个穷人家庭, 儿童时就展现数学天赋, 在不伦瑞克公爵资助下完成学业并做研究; 公爵去世后, 他从 1807 年起终身担任格丁根天文台台长兼教授。高斯被公认是人类有史以来三位最伟大的数学家之一 (另外两位是阿基米德和牛顿), 他在几何、代数、分析、数论等几乎所有的数学主要分支领域都有开创性工作, 同时对于物理学、天文学和大地测量学也作出了重要贡献。作为非欧几何的发现者之一, 他曾主持测量了由三座山峰连接而成的三角形的内角, 以弄清现实的物理空间究竟是欧氏还是非欧空间。

本文是高斯在 1827 年 10 月向格丁根皇家学会递交的, 原文用拉丁文写就, 题目为 Disquisitiones generales circa superficies curvas, 这是一篇开创现代微分几何学的经典文献。

原文有 40 页长。这里选登的是高斯亲自为该文写的部分摘要内容, 个别之处根据正文中的表述做了改动。

高斯首先利用辅助单位球面定义了曲面上任一部分的 “全曲率” (后来被称为 “高斯曲率”) 以及曲面上任一点的 “曲率测度”。然后证明了他的所谓 “绝妙定理” (Theorema Egregium): 曲面展开时, 其各点的曲率测度保持不变。进而指出曲面上有一类性质与其在三维空间中的位置无关, 关于此类性质的研究是一个完全新的领域。高斯在此开创了曲面的 “内蕴” (intrinsic) 几何学。接着他证明了 “曲面论中最优美的定理” (the most elegant in the theory of curved surfaces): 对于曲面上由三条最短线连接起来的三角形, 其内角之和与两直角的差等于该三角形的全曲率。这就是高斯–博内–陈省身定理的最早的形式。易见它是《几何原本》第一卷命题 32 的推广: 该命题只是定理在曲率为零时的特例。

尽管几何学家们很重视曲面的一般研究, 并且获得的成果已占高等几何领域的相当一部分, 但是该课题还远未完成, 以至可以这样贴切地说, 在这块极其富饶的土地上, 迄今为止只耕耘了一小片。几年前, 作者解决了在保持最小元素不变的条件下, 找出给定曲面到另一曲面的所有表示的问题, 从而给出了一个新的研究方向。本文旨在进一步介绍其他一些新观点, 并讨论由此而得到的一些新结果 ······

当问题涉及空间中无限多个直线方向时, 用固定球面上的点来表示它们是有好处的, 这些点是与这些方向平行的球半径在球面上的端点。这一辅助球面的球心和半径是任意的。半径可以取为单位长度 ······ 如果我们就这样用球面上相应的点来表示曲面上各点的法方向, 则一般来讲, 曲面上的每一条线就会对应于球面上的一条线; 曲面上的每一部分则对应于球面上的一部分, 并且曲面上的一部分越接近于平面, 球面上相应的部分就越小。从而, 一个很自然的想法就是, 用辅助球面上相应部分的面积作为曲面上某一部分的全曲率 (total curvature) 的度量。作者就称此面积为曲面上那一部分的**总曲率** (integral curvature)。除了考虑该部分的大小外, 同时还应该考虑其**位置**。两个部分可以在此位置上相似或相反, 而与它们的大小完全无关。这两种情况可以用全曲率的正负号来区别 ······ 将曲面上一部分和球面上相应部分作面积比较, 导致一个新概念 (就如同体积与质量之比导致密度的概念)。作者定义曲面上某点处的曲率测度 (measure of curvature) 为一分数: 其分母为曲面在该点处的无穷小部分之面积, 分子为辅助球面上相应部分的面积, 即相应的总曲率 ······

······ 因此我们注意到, 为了确定曲率测度, 只需知道线素 (linear element) 的一般表达式, 而不必了解关于坐标 x, y, z 的具体表达式。由此直接得到这个 "绝妙定理": *如果一个曲面, 或它的一部分, 可以展开到 (is developed upon) 另一个曲面上, 则在展开后其每一点的曲率测度保持不变。*特别地, 对于一个可以展开成平面的曲面来说, 其曲率测度处处为零。由此立刻得到可展曲面的特征方程 ······ 这些定理引导我们用一种新方法来研究曲面理论——于是出现了一个广袤的、完全未开发的新领域, 它正等待我们去深入研究。如果我们不把曲面看成是物体的边界, 而把它看成是消失了一维的物体, 同时我们设想它有柔韧性而没有延展性, 则我们必须区分两种本质不同的曲面性质: 一种性质预先假设了曲面在空间中有确定的坐标形式; 而另一种则与曲面可能会有的种种坐标形式无关。本文研究后一种性质。根据前面的讨论, 曲率测度属于此类性质。而且容易看出, 当考察曲面上的图形时, 诸如它们的夹角、面积、总曲率, 以及连接两点的最短线之类也属于此类性质 ······

如果从曲面上某一初始点引出无穷多条等长的最短线, 则穿过这些最短线末端的那条线与其中每条最短线都正交。如果从曲面上任意一条线上的每一点, 引出与该线正交的等长最短线, 则所有这些最短线也都垂直于穿过它们另一端点的

那条线。以上这两条定理 (其中后一条可看作是前一条的推广) 将在本文中用分析方法和简单的几何想法得到证明。我们得到了可以算作是曲面理论中最优美的定理: *由最短线形成的三角形的内角之和与两个直角的差等于该三角形的全曲率*。显然, 我们也可以如此表达这一重要的定理: 由最短线形成的三角形的内角之和与两个直角的差, 随着对应于其总曲率的辅助球面那部分趋于整个球面, 趋于八个直角。一般来讲, 一个 n 边形的内角之和与 $2n-4$ 个直角的差, 如果这些边都是最短线的话, 将等于该 n 边形的总曲率。

……