

关于学习数学

丘成桐

编者按：本文根据 1992 年 1 月丘成桐教授在清华大学（新竹）的演讲由赖鹏仁记录并整理而成。

从前我们的时代，念中学和大学的时候，能够挑的科目不是很多；现在比起从前有点大不同，可挑的比较多。如果是要赚大钱，你可以念工商管理，很多不同的科目，你可以赚很多的钱。其实对整个国家来讲，也需要能够管经济或其他方面的人才，赚钱没有什么不好。

所以对于国家，整个社会来讲，没有讲一定要念数学。其实要混口饭吃的学科很多，同时也可能比较容易点，所以念数学不要是混口饭吃就好了。就是讲你跳出这门课来看的时候，最好不要讲念数学就是为了混口饭吃或为什么东西。假如你不想念数学，就早点决定不要念数学，你真的要念数学的话，你就花工夫在这上面。



丘成桐

懂得越多，才知兴趣所在

我的结论就是假如你决定要念数学，挑选了数学以后，你就花全部工夫到数学上面去，希望对数学有兴趣，在数学里你可以得到很大的乐趣。同时这样决定了，对你以后的成就也会有很大的影响。

我觉得最不好的就是你对数学有兴趣，却为了赚钱就跑到其他科目，其实你也不见得赚得到钱。这是讲你的决心要下得很大，不要三心二意，“让我念念看，假如不行的话再转”，很多人是这个样子，尤其是中国学生，进了大

学再试试看嘛，这儿不行就转转，最后搞得两边都不如愿，很多人是这个样子，为什么一定要这样？

这是决心的问题，一个很重要的决定，就是你进数学系时，你预计要做什么事情，对我自己来讲，我很早就下了决心我要念数学，所以从来没有想过要转其他的或是为了其他事情不念数学。

到了你决定以后，你要懂得数学有很多不同门，就是分支，你在大学，对每一门分支的了解可能差得远。就是讲你很难在大学里就决定对数学里哪一门兴趣大一点。

其实兴趣和你懂得的学问是有关系的，因为你可能对某件东西有兴趣，不过你不晓得它时，你就不可能对它有兴趣。譬如你去爬山，你爬过了小山才看得到大山，你还没有看到后面的山以前，就不可能对后面的山有兴趣，所以所谓兴趣和你了解多少是一种非线性的关联。

这个兴趣和你当时的地理环境有关系，跟当时的时间也很有关系，就是和当时的时空关联很大。譬如来讲，因为你刚好在台湾，你旁边的教授若是单做那一行的，你对其他行就不见得晓得。就整个世界来讲，虽然你刚好走到某个地方，也许时间刚好不对，大部分数学家对这一方面兴趣不大，对其他问题兴趣大一点，并不表示其他问题就不重要。所以数学家对数学的了解，跟时空有关，兴趣也会跟这个有关。

我觉得一个年轻的学生，首先要开放心胸，就是讲你要晓得，你念的学科，有很多时候跟其他的学科关系很大，不要以为我念的这门学科跟其他的完全无关，其他的就不念了。例如很多学生，说对某些文学课有兴趣，凡跟这门文学没有关系的，就不再想去念它。比如讲我对泛函分析有兴趣，跟泛函分析关系不大的，就算有一点关系我也不想去看，这是一个错误的观念。其实泛函分析跟偏微分方程及很多不同的理论有关。大学是一个通才教育，就算你单对代数有兴趣，除了代数要懂以外，对微积分也要懂，其实微积分对代数也有很大的影响。所以基本上大学所能提供的课程，我觉得你们年轻人都应该去学，不单要学，而且要尽量学好。

基础打好，对研究帮助很大

很难想象有什么大学课程在研究院是不重要的，你在大学里念的每一门课，和以后研究都有很大的关系，我想关系是绝对有的，就算在研究院里一二年的课，我想对你以后的研究也是有很大的好处的，所以应该尽量将基础打好。其实到你真的做研究时，你会发现你需要很多工具，很不幸，很多东西，你在念大学、念研究院时没有好好地念好。到了念博士那个时候，你常常要赶写论文什么的，你发现工具已不够，要花很多时间去念，工具不够又不

想去念，你就很麻烦。毕业拿个博士以后，你又有很多不同的其他压力，中国台湾比较少，至少在美国是很大的，你要尽量发表文章，一下子没有那么多时间将那门工具重新再念过。所以念大学跟研究院那两年的时候，要尽量将所有基本工具全部念懂，我想这是很有必要的。

譬如来讲，我很多朋友是代数几何做得很好，可是需要用到分析做工具时，他们就觉得很怕，反过来讲，分析念得很好，可是需要代数时就很怕。不过我觉得一个好的数学家，至少要懂得两门以上的数学分支。当题目来的时候不会恐惧，才能很活跃地做一个好研究。

一门学科你要念到什么地步？你自己要晓得。就是讲你遇到一个研究课题的时候，你虽然不见得能够解决掉，至少你要晓得你可以坐下来对这个问题产生一些想法，同时可以找这方面的文献，将它基本的术语弄懂。晓得怎么去攻进这个问题，然后开始解这个问题。这个问题不一定能够解决，不过至少你不觉得不着边际，晓得怎么去对付这个问题。要做到这个地步，其实是要懂很多东西，要经过相当久的训练才能够达到这个地步。

因为我们能力有限，一个人不可能每门都懂，不是我们不想，可是当一个题目来的时候，我们往往会产生很多不同的相关问题，这个题目并不见得正好是我们熟悉的领域，我们希望能够找文献或至少找个适当的做研究的人，问他们碰到这个问题时要怎么对付。

所以你们在大学或研究院要懂得怎么发问，这是个很重要的基本功训练。发问的训练，从小的方面来讲就是问老师或同学，从大的来讲，就是自己做一些比较起来还没有人问过的问题。一个好的数学家跟差的数学家，往往决定于你问的问题有没有意思，是不是重要的问题。你要做到后来成为一个专家的时候，才晓得你问的问题有没有意思。

不过对你们年轻人来讲，问一些你自己认为有意思的问题是一个很好的训练，你问的问题可能是专家们熟知的或是人家已经解决了，其实也没有什么关系，问问题是一个很重要的训练，并不容易，不过你要尽量在这方面自己训练自己。

我想你们大学念到一年班、二年班时，应当通过跟同学讨论来训练自我，也要通过向老师问问题来训练自己。

我不晓得你们清华的同学间，彼此讨论的情况怎么样？我觉得这是很重要的。无论是懂的问不懂的人，或是不懂的问懂的人，这两方面都有很大的好处。

你自己不懂的问题去问很懂的人，当然对你自己有好处。反过来讲，你跟不懂的人解释自己很懂的东西，也是一个很好的训练。因为往往我们认为很懂的东西，在向别人解释时，才发现自己其实不懂。向对方解释数学命题

时（一般来讲，你大学读到的是比较已知的命题），往往会发现本来以为对的解释原来是错的。所以无论是你自己觉得自己学问不大好的，或是自己学问做得很好的，我觉得互相讨论对双方都有好处。

高年级同学比较知道，在看课外书或是参考书时，前面的第一章，觉得很容易，第二章也很容易，到第三章可能模糊，到第四章时好像很形式化，并不懂什么意思。为什么会产生这种现象呢？这很简单，因为第一章比较浅一点，你是真的看懂了，第二章其实你不懂，你就跳过去了。这个证明没看懂，但自以为，大概这样就对了。越看越多时，前面知识越累积向后面，错就越来越多，到了最后时，根本就没办法控制。

假如你看一本书时，你对一个人讲，甚至对一个黑板讲也可以。对其他同学讲，不单有意思，而且同学往往会问你些问题，让你晓得你什么地方是没有搞清楚的，经过整个过程以后，你会晓得什么地方你懂，什么地方你不懂。所以我们往往鼓励学生一定要教书。

我们做研究的人也一样，一定要教书，不能够单单做研究就算了，不用教书。教书的好处跟刚才讲的一样，你在讲自己的研究的时候，或者在讲一个命题时，你往往一路讲一路发觉自己有什么不足的地方。你不讲自己的研究，你发觉你好像很模糊搞不清楚；当你向别人讲时，一点一滴讲出来，你就晓得自己在哪方面不足，中间的联系，并不是你想象的那么完善。常常因为我们发觉研究不够完善，所以我们还要继续向前做研究。假如研究都是充足的话就可以告一段落了。

所以同学跟同学间，同学跟老师间的讨论，我想都是很重要的。

任何一门科学，包括数学，都不能说已经发展得很完善了，在每一个层次上我们都可以问一些很重要的问题。基本上数学里即使很简单的学问，你也可以问出很重要的问题，这些问题你并不一定能够解决，你可以跟老师或者跟同学讨论。

不过你在问问题时，可以将自己的整个思想、思考搞清楚，这是一个很重要的训练，我很鼓励你们尽量去问一些问题。

我觉得很得意的，就是我从很早的时候，就常问一些数学问题。我在中学时开始问一些问题，自己看有没有办法解决。

其中有一个问题，我考虑了一年：给一个三角形多少数据，就可以完全决定一个三角形呢？普通给定三个数据，例如一条边两个角 (ASA) 或三条边 (SSS)，都可以决定三角形，假如给的是三个分角线的长又如何呢？三角形的数据一般有边长、角度、分角线长、中垂线长等等，随便抽三个出来是否就能决定一个三角形？

你试试看，大部分的都能解，只有一两个不能解。我中学的时候研究过

这个问题，考虑了一年多，最后发现这个问题并不简单。我小时候坐火车，在火车上都在想，最后看了一本参考书才知道能不能解，不过整个过程对我的思考帮助很大。

从前是二年级的时候开始念平面几何，我在三年班的时候开始想这个问题，还有很多比这个问题更复杂的问题，所以在最简单最平凡的问题中你可以找到很多有意思的问题问自己。

问题并不少，在自然界里或数学中问题多得不得了，问题是自己去找或如何去找。这个要自己训练，方法很多，要自己努力，同时要跟别人多来往。训练要花很多工夫，就是问，从早到晚你究竟花了多少工夫在那里？你要动脑筋，不是随便讲两句就行了。

做学问用功很重要

我从前有一个博士生，资质不错，想法也不错，我跟他说你一天，最少要花六个钟点在数学上面想论文，他说不行，后来他也没有再做下去了。我不晓得你们能不能坐六个小时想数学，或看数学？做学问全神贯注很重要，假如你觉得不能全身心投入的话，你干脆不要念数学算了。

从前我大学毕业后，我一天最少有十多个钟头在想数学，你并不一定要这样子，不过你至少要花一定工夫的钻研才能做一个好的数学家。你愿意花很多工夫以后我想你一定会有收获。

当然，一个好数学家，除了用功之外，也要有一些运气在里面，聪明很有影响，你们能考上清华，聪明应该不会差太远，真正重要的，还是全神贯注的能力。

从前，我们在中国香港长大，很想看参考书，但又贵又不容易找到。你们现在在清华，我想，你们要找什么都找得到，要找些比较好的研究员来跟你们讲东西，现在也容易多了，所以我想主要是你们能不能够做，最好不要找借口。

在国外很多大的学校，学生很多，不大容易找到好的老师，研究的机会可能也比这边少得多，我读大学时的经验就是这样，主要是你肯用功。

做学问是靠自己，做研究也靠自己。一般来讲，你到一个学校，刚好跟你做同一行的很少很少，顶多两三个而已。基本上是自己。在台湾参考书都有了，不一定要靠别人，要有发动自己的能力，自己肯问问题，单靠自己应该不会差太远的。

所以一旦做决定后，你要享受做数学的乐趣，好比下棋，假若对下棋没有兴趣，被逼去下棋就很痛苦，可是你对下棋有兴趣的话，你越下越有意

思，下到困难的地方更有意思，做数学也是一样，碰到困难的问题更有意思，所以一定要建立兴趣。

兴趣是要培养的。如果你问一个小学生：“你对微积分有没有兴趣？”你当然可以讲他对微积分没有兴趣，因为他根本不懂微积分。

同样的意思，如果我问你对微分几何有多大的兴趣，在你还没有开始做之前，你当然不晓得，因为你根本不懂微分几何。这其实是很空洞的问题，不能讲我现在有兴趣，或我现在没兴趣。不过到你真的做进去以后，你才发现你对它有很大的兴趣。

回答师生问题

问：请问丘成桐老师，您当初是什么原因才选择做几何这方面？是否有什么机缘？另一个问题是，我已经大四了，一些老师问过我以后想要念些什么，我以前的想法是要念数学，现在碰到这样的问题，好像对分析、几何比较有感觉，可是念到代数和拓扑，又觉得很有挑战性，好像很可以去念一番，以您的经验，不知您有什么建议？

答：我从前在香港时，觉得泛函分析很有意思，我很想念泛函分析，你讲我为什么对几何有兴趣，因为刚好我去以后，很多人在谈几何的问题，我自己也在看一些几何的问题，就这样做进去了。其实我的兴趣在很多方面，不能讲我的兴趣就在几何。我觉得数学不应当将它们分界得很明显，我也做很多其他方面的，这是第一点。弄懂第一个问题的回答后，也很容易回答你的第二个问题。因为整个数学的走向不应当有很大的分界线，你现在念大四，既然对代数、拓扑也有很大的兴趣，你就应该花很大的工夫去看，将这方面的基础全部打好。你要开放心胸，根本不要讲你对哪几门有兴趣，干脆每一门都尽量念好就差不多了。譬如你刚念微分几何，几何的东西是在一个拓扑流形上才能做的，你非要将拓扑搞清楚，才能做微分几何，对不对？假如你要念分析，其实现在有很多人用拓扑的方法去做，用不动点原理，用比较不同的拓扑去做，这也要学。不然就像我很多朋友一样，分析很好很好，可是一遇到所谓微分流形上的方程，或一些与这些有关的问题就通通不敢碰。当然也不能讲一定不好，就是有一定的局限性在里面。一个好的数学家，每一门都要做得很好。你现在大四，念了几门，至少在大学的课程里面，每一门都应该念好。你不要讲你有没有能力做到，事实上你一定有能力。你现在不把大学课程念好，你以后还是要念好。因为数学本来无分彼此，不要分得太厉害，所以我的建议是在大学时，不一定就讲你固定喜欢哪一门，你可以讲我现在对某门课兴趣比较大，不过你随时可以改变，我想这是比较好的观点。

数学是很自然的科学，研究很自然的现象，所以你看了以后知道什么东

西比较重要，什么东西不重要。有一些数学我是不愿意做的，因为很矫揉造作 (artificial)。每一个人的观点不同，我的观点是我不愿意做这些事。我是这样分的，而不是你们讲的按这一门那一门来分。

历史上有许多科目到了某一地方以后，不是讲它们不行了，而是它们发展成熟到了一个地步以后，被吸收融合到其他科目中去了，这个领域基本上便不再独立存在。如一般拓扑学，在历史上起了一定的重要作用，可是在变成基础以后，被吸收到所有数学领域中去了，我们现在根本不谈了。一般拓扑学变成一个工具，不成为一个领域了。我们可以想象数学里面有很多这种课，就是讲到了某个地步以后，我们对整个理论了解透彻以后，不再需要分这门课，假如你刚好念到这门课，而你又不愿意且不懂其他门课，你做这行就很麻烦了。

问：我听说有些数学家会对其他东西感兴趣，譬如对哲学有兴趣，不知道实际上怎么样？

答：当然每一个人在课余的时候，都会有不同的兴趣，这是很重要的。我认为凡是对思考有帮助的科目，你去看它总是有好处的。哲学对你的思考有帮助，有好处。譬如爱因斯坦就对哲学有很大的兴趣，爱因斯坦一开始在做广义相对论的时候，讨论过哲学上的问题，他也受了一定的影响。我们念数学，当然主要的精神是用在数学上面，我想念其他对你思考有帮助，很明显对你的学科本身也会有好处。每一个人有不同的反应，你对文学可能有兴趣，我个人喜欢看历史，我觉得历史对我很有帮助。

问：可不可以具体一点说明，像历史对数学的帮助在哪里？二流数学家做一流题目也算是一流数学家？历史经验帮你选取一流问题？

答：历史总归来讲，就是看从前的经验，对事物对不同东西的经验。经验对你在做题目时是有好处的。对一个题目取舍的问题，就是一开始讲的，这是一个表面上很简单的问题，其实有很大的学问。一个第一流的数学家，假如他选取的问题都是第二流的，他顶多也只是能做第二流的数学家。一个第二流的数学家，假如他选取的题目都是第一流的，他不一定做得到这个题目，可是他做到这个题目的二分之一，他也算是第一流的数学家，因为他对整个数学的发展有一定的贡献。什么叫第二流的学问？就是讲琐碎的问题，我们基本上对这些问题都有一定的认识，有很多人不太愿意做，或是有其他的原因不大愿意去做。你做第二流的问题，用了很大工夫去做，你做通了，对整个数学的进展没有很大的帮助。对题目的取舍，往往跟你的经验有关。譬如哲学的问题或是历史的问题，你可以晓得，经验对你有帮助，念其他书有时对你也有帮助。像文学好了，你看某些小说，或是看一本好的小说，我是讲很经典的文学小说，或者红楼梦或者三国演义（我不是讲武侠小说不行），你

就晓得取舍的问题有很大的不同。

问：过去数学家发展有很多理论，后来物理学家发现有许多物理理论的结构跟数学的结构一样。最近十年超弦的发现，是因物理学家认为应该用到更复杂的数学来研究高能物理，所以他们把代数几何或更抽象的数学引进来，你觉得这样走的路会不会是错的？杨振宁说过这种从抽象数学出发的路对的机会不大，不晓得您的看法如何？

答：这个问题看你是怎么讲法。爱因斯坦一开始做广义相对论的时候，没有物理的支持，他是从哲学或者科学哲学的方面来讲，晓得他会要什么东西，同时有数学的工具帮忙，做成了广义相对论。刚好过了没有多久，就有证明，某种程度的证明，广义相对论是对的。可是最大的问题是超弦不像爱因斯坦那样，积极找出他需要的哲学背景，超弦理论是刚好它没有一个很坚实的哲学背景。另一方面，它知道有某些东西在里面，就是讲有某种程度的对，不过还没有找到数学的背景在里面，所以现在正在找，最大的问题并不是数学的问题，而是物理上的哲学背景在什么地方。现在差不多好像在钓鱼，你看到鱼竿在那里动，可是看不到鱼在哪里，也不知道是不是真的是一条鱼。不过问题是我们从种种迹象来看，因为它在数学上具有惊人的相容性，至少作为一个数学家，我认为在某种程度上超弦应当是描述一个自然界的现象，否则不应当会有这样一个融洽的数学理论在里面。基本上很多人都是这样的看法，就是说我们要找它的哲学背景。现在还没有找到，基本上的原因是这样的，超弦的前提是非摄动的理论，可是现在所有的理论都是摄动出来的，问题是摄动和非摄动的关系是相差很远的，所以我们不晓得究竟是什么原因。

问：不过我们用量子场论的方法，也就是用摄动的方法用得非常好，为什么突然一下跳到超弦这个层次？

答：我想问题不单是超弦，自然界有四种力，强作用力、重力、弱作用力和电磁力，在强作用力下，摄动就已经不行了，已经不对了。

问：量子色动力学 (QCD) 还是一个摄动理论？

答：不过，QCD 里面很多用线性摄动做出来的结果跟实验已经不符合了。所以我想在 QCD 就已经开始出现分歧，所以并没有十分的证据显示超弦理论不对，因为弦论假设是非重力，所以我认为并不能成为超弦理论的致命工具。

问：不过苏联有一个很好的物理学家，认为重力甚至不是一个基本力，他觉得重力不该量子化，如果从这个角度来看，那整个超弦理论就错了，超弦理论是为了要把重力量子化。

答：这个问题是这样子，我记得陈省身常常跟我讲，四个力在那边很好嘛，为什么要统一它？就是刚才讲的，我们相信什么东西，假如你相信这个字

宙是在一个很简单的基础上建立起来的，那为什么有四种不同的力，我们没有办法解释它，那就一定要统一它。就好像数学上面，平面几何有许多不同的公理、不同的理论，可是为什么我们很高兴找到几个公理，全部将它解释掉。问题是同样意思，这是一个信念，我们相信有这个简洁，我们要找几个公理可以假设，或是几个简单的定律可以解释不同的现象，越简单越好。你们相信的话，这个问题就没有什么好讲的。

问：那依照你的看法，超弦这个东西跟自然界过程还是有某种程度的关联？

答：就是刚才讲的，因为它在数学上得到不同的自洽，因为不是一个场，而是好几个不同的场都很自洽，基本上它不能解释它本来要解释的东西，它应当解释另一种物理现象。像从前做杨-米尔斯规范场的时候，或是从前 Hermann Weyl 研究规范的时候，往往一开始解释的物理现象不是要解释的，最后得到的是一个对的理论，不过这个理论解释不同的物理现象。

问：对于大学部高年级同学，若是对微分几何有兴趣，有哪些书较适合读？

答：我不晓得你们这边大学的微分几何念什么书？（答：通常是 Do Carmo 的书。）Do Carmo 的书念懂了也很不错了。微分几何的书其实也不少，看你自己念还是跟别人念。自己念的话，Spivak 的那本书写得很详细，好像还不错吧！Spivak 的好处就是它的符号弄得很清楚。你要跟一个讨论班念的话就大不同，Spivak 不是特别出色的专家，他的书本身没有教给你做微分几何的方法。Spivak 的书你念完后，将基本的符号搞懂，应念其他比较好的书。Milnor 的几本书写得很好，其实我从前念微分几何就是从 Milnor 那本《Morse 理论》开始念的，写得很简单很紧凑。

问：大学里面，除了数学以外有很多其他的科系，我们会想去碰文学或其他的东西。您作为一个数学家，不晓得对这些身外的世界有什么看法？

答：刚刚一开始讲过，第一件事，你一定要决定自己想做什么。无论做什么学问，你一定要有一段时间全神贯注，一定要将某门学问搞得很懂，搞到一个可以自认是专家的地步。你搞得很专以后，其间可能还会牵涉到其他学问，不过，你主要的注意力还是在那个地方。譬如来讲，我一天花十多个小时念数学，当然有其他几个钟头是跟其他人谈谈其他东西，有时候系里的课也听听，有时候物理的课也听听，不过我都有一个主要的研究课题。我不反对你们去看历史，去看哲学、文学，不过，你要晓得你的主题在什么地方，就是刚才讲的，你认为什么东西最重要。

一个人不可能又红又专，你刚开始的时候，假如你认为你可以同时又搞文学又搞数学，我想你两头都搞不好。这种同时搞两个完全不同学问能搞得

好的所谓天才，我还没见过。有一些人讲你要对社会关心，你对社会关心与你做数学并没有矛盾，你在做数学的同时花了时间去关心社会我不反对，我也不反对你花全部精力从事社会活动，不过你在做这个决定的时候，你要晓得你的数学会做不好，因为你事实上没有这么大的才能能够同时专心在两个不同的问题上。历史上我还没见过同时搞两门学问同时搞得真正通的，不大可能的。可是这并不排除你将数学搞通以后，你再去搞文学，或者搞完文学再来搞数学，当然搞完文学再搞数学要比较困难一点。很多数学家弹琴弹得很好，唱歌唱得很好，什么东西都有，有几个弹琴弹得第一流，不过，很明显他们晓得什么是主要的什么是次要的。做偏微分方程做得很出名的 Morrey，弹琴弹得第一流；做 Banach 空间上算子代数很出名的 Enflo，跟我共事过，年纪跟我差不多，他弹钢琴在瑞典是第一名或是第二名，不过并没有矛盾，他是在做完数学再去弹的，就是说你有个先后。

问：老师刚刚说做学问主要的是全神贯注。年轻人感情的问题常会造成困扰，老师当年求学是不是也有这种困扰？如何处理这种事情？能不能给个建议？

答：不应当有矛盾的。跟刚才一样，你做学问跟其他东西，如感情可以分得很干净的。你应当可以分得很干净，我看不出有什么特别大的矛盾。出名的数学家如 Euler，他有十多个儿子，家事很忙。从前做数学跟现在不同，比现在辛苦，你还要去支持整个家庭，有一大堆小孩要照顾。你去图书馆看 Euler 写的文章，至少几十本文集，你单抄书就要抄很久才抄得完。由此可见并不一定有矛盾。你不可能整天在想女孩子吧？

问：爱因斯坦说过一句话：“专家不过是训练有素的狗。”不晓得你对这句话的看法？

答：首先我不相信爱因斯坦说过这句话。其次什么叫作专家是个很难讲的问题。假如单是重复人家能够做的，叫作专家的话，你可以说你的话是对的。你可以做一个擅长考试的学生，每次考试都考得最好，这是训练有素的，你叫他狗也好，叫什么也好。专家不专家实在很难定义，有时候你看小孩子玩电脑游戏，我觉得他们比我懂，他也算是专家。

不要讲一条狗，一条狗其实比机器聪明。现在很多人在做计算机应用，训练计算机想题目或者是做定理。现在还差得很远，最简单的问题就是“品味”的问题没有办法解决，就是一开始我讲的选题目的问题。你要决定一条定理好或是不好，这个问题机器没有办法决定，狗也没有办法决定。假如你所谓的专家是这样子的专家，他当然没有办法决定。我觉得怎么决定你做的题目有没有意思，是第一流的还是第二流的，这是一个很严重的问题。你当然可以讲所谓第一流、第二流是一个形式，随便你讲。不过微积分跟加减乘除既

然有区别，研究当然也有好的差的。假如你连这点都没办法分开，我们就不能讲是高层次的研究。

问：我们大一要念计算机概论，有人说对计算机懂一些对我们将来学数学会蛮有用的，又有人说没有用。请就你的了解，说明计算机跟数学有多大的关系。

答：就是刚才讲的，其实你学到一门严谨的学问，对你的学问总是有好处，计算机基本上也是一样。尤其是我们做数学，总是不懂我们要什么东西，不晓得应当什么是对的，什么应当是不对的，做研究的趣味就在这里。假如我们自己晓得什么是对什么是错的话，当然还是可以去证明，不过最有意思的还是没有决定什么是对什么是不对的时候，这时我们往往要做实验。我们数学上的实验很多是用计算机做的，现在因为计算机比从前高级多了，所以对纯数学本身有很大的好处。跟刚刚找题目的意思一样，我们找找看有没有办法晓得有一定的规律出来，然后从那边再找我们要求的定理是什么东西。就是讲，你除了单在脑子里猜外，还可以让计算机帮你的忙。譬如研究非线性常微分方程和非线性偏微分方程，你很难预测它的大范围的行为是怎么样的。假如你很精通计算机，你可以用计算机算算看它怎么走法，对你有很大帮助。我个人其实不懂怎么做数学实验，我是找人家帮忙，所以你能够大学里面就学懂怎么做这个程序，做一个好的数学实验，本身是一个很重要的素质。

问：16、17 世纪的数学家，好像比较涉及其他的领域，比如物理天文方面，现在的数学家好像比较专注于数学，似乎不大一样，对不对？

答：其实没有不一样。问题是现在的天文、物理比从前的难，没有办法不难，我们观测到的数据多得多，就实验物理来讲，我们做数学的很难去接触，并不是我们不想，是因为数据实在太多了，很难处理。我觉得我们现在跟理论物理的关系和 16、17、18 世纪也差不多，不过那时学问分得没有这么细，所以看起来好像比较密切一点。其实我想再过一百年重新再看 20 世纪的数学跟物理的关系，我想不见得差很远。

首先你要晓得因为我们生在这个时代，很多东西看起来比较乱；其实过了一百年后，我们现在做的学问大部分都被忘掉了，剩下来几个重要的，所以那时候看可能比较清楚一点。我想你看 16、17 世纪的学问，很多东西根本就不见了，所以你看不出来，就是当时很多做的全部与数学无关的你也不晓得，单做数学的你也看不出来，你看到几个主要的人物，看到牛顿，看到莱布尼茨，没有多少人物可以数得出来，你单看到几个人的工作所以看起来好像很密切的样子。所以再过一百年以后，你看这个世界的工作，也是只看到几个人而已。图书馆里面，一天可以找到很多发表的文章，一千多篇都有，大部分文章都不见了，所以你可以想象得到。

问：那些不见的东西，有没有它的实质？

答：问题是这样的，好像打仗一样，几十万人去打仗，结果几十万人你都不记得他们的名字，只记得几个将军，或者几个国家。你讲他们不重要，他们当然是最重要的，基本是一样的意思。

问：老师，您会不会觉得我们现在念的东西相对以前要困难很多？譬如说平面几何，以前是第一流的数学家在做的，现在我们拿来当基本工具。

答：跟刚才讲的意思是一样的，很多东西当时是困难，过了 50 年以后，你再看这些东西就很简单了。你想想看量子力学在几十年前除了几个出名的物理学家以外，可能对所有的物理学家都是很难的问题，现在每一个人都在用，同时用的时候假设成立根本没有问题。这是什么原因？我们开始研究的时候是很痛苦的，有不同的理论在里面，不同的理论当然有错的或不完美的，最后你要丢掉它，你丢掉它以后，就很干净，很容易看。这样我们一路做，一路将整个学问了解得清楚很多，到了解以后，这个学问变得清晰，吸收到其他不同的概念里面，就不见了。我举个例子来讲，当年高斯算很多微分几何的东西的时候，对当时而言都是很神秘的，高斯的一个著名定理说，曲率是内蕴不变量。我记得我大学的时候，写得很复杂的等式，看起来难得不得了，可是大概在你懂微分几何以后，你就觉得是很简单的结论。就是很多计算或很多重要的东西，时代远了以后，慢慢将它融会，变作一个数学里面的观念，不再是工具，这个观念你接受以后，你根本不会觉得困难。所以我并不觉得我们现在的科学会比以前难得多，而是我们刚刚好在这个时候发展科学，很多观念还没弄清楚，才觉得困难。

问：可是整体上知识的累积还是越来越多？

答：我想目前为止，我们的脑袋可以容许这些，并不见得有什么特别困难。因为知识不断地进来，我们不断地消化它。一个好的定理在刚出来时，往往难得不得了，几百页的证明，你当然晓得 Picard 定理，Picard 证明这个定理的时候，是一百多页的证明，现在 Picard 定理的证明可以一页多就证完了，这是什么原因？我们说这个定理重要，我们就会花很大力气慢慢将它消化，直到最后的定理看起来是平凡的，基本上重要的定理，就算不是短期的，十年、二十年后，这个证明会很简单，因为通常我们将这些定理的证明分解，分解成很小部分，各个小部分吸收到不同地方去，最后剩下的是一个平凡的证明，历史上所有的发展都是这样。比如平面几何，在埃及的时代，由于阿拉伯人一把火把埃及亚历山大图书馆烧掉了，埃及当然是没有文献留下来。不过我相信埃及造金字塔用了两千年，图书馆中一定搜存了很多关于平面几何的定理和事实。当时没有欧氏公理，所有的现象很乱，乱得不得了，这边一条定理，那边一条定理你可能觉得很难很难。可是这整个东西，等你将定理整个

了解以后，就变简单了，我想差不多是这个意思。

问：通常一个数学问题，会衍生出好多个问题来，但是数学家增加的速率远比问题增加的速率小，会不会造成一大堆问题做不完？

答：这个问题不大嘛，譬如刚才讲的平面几何，到现在你要找平面几何难的问题还是很多，你去看 Erdős 的问题集，很多是平面几何的问题还没有解决。没解决并不表示我们对平面几何不懂，我们对平面几何基本上是懂的，可是有未解决问题在里面，并不表示不好，而是表示这个领域还是很活跃的，表示还有很多问题可以做。反过来说，一个领域里面，没有未解决的问题，表示这个领域已经被我们了解透彻了，没有东西可以让我们继续再做下去。这个领域就可以说是枯竭了。

问：如果你现在从头再当大一学生，整个生活可以按照自己理想安排，你会怎么安排整个大学一直到研究所的生活？

答：我刚开始第一句就讲，我从前当学生的过程和现在不一定一样，因为时代不同，我们那时候的香港和你们这个时代就很不同。譬如来讲，你们比我们富有多了，我们那时，简单一句话讲，根本没有钱。你们现在找图书没有问题，我猜你们没有人抱怨图书不够，现在专业的工具也是完备多了。我们那时在香港要找一篇文章或一本书都很难，找到后有没有钱去买也是一个大的问题。那时老师比你们现在的不行，老师拿一个博士学位就很了不起了，大部分拿个硕士我们就觉得很不错了。所以我的大学经验和你们的经验有很多不同。你们的经验跟我在研究院的经验差不了太远，有好的研究人才，借书什么都不成问题。那时候我觉得在里面能够全神贯注于数学，我在研究院一年半的时候，基本上伯克利能够讲授的所有数学课程我都听过，我去听，有时还在课里面讲课，不单是听，同时要真的去做。所以要花很多时间，我不相信你们愿花时间去做到这一点。大学跟研究生的时候，是最容易念书，也是了解全部基本工具的最好时候，否则你毕业以后，有种种不同的因素，要重新再念基本工具就困难得多了。所以我说你能够花多少时间就尽量花进去，基本的课程要尽量能够念，甚至我认为你能够去念理论物理，去念理论化学都很好，看你自己的兴趣，对你会有很大的帮助。当然你对实验物理也有兴趣最好，只是这样你不会来念数学就是了。

问：在大学的时代，尤其像我们大一应看些什么课外书或杂志？因为大一，很多东西还没学，应该多看多学不同的东西还是多做练习？譬如平面几何的练习或高中大学的练习？

答：不能笼统地这么讲，要看每一个人的程度。你大一基本的东西还没懂的话，还能看什么课外书？我不晓得你们大一念什么课？线性代数念不念？主要是念微积分？微积分念懂了没？念不懂就不要跟人家讲什么东西了。至少要

将微积分念得很透，就是刚才讲过，你不要以为你要念代数，所以不念微积分，这是不可能的事，微积分在代数里面很重要，所以微积分你非要弄得很懂不可，否则的话，根本没有什么好讲的。课里面的书，你一定要念懂，习题要懂得做，这是第一点。习题要做不是为了考试，而是检验一下你对书里面内容有多少了解，然后再去念课外书，看你自己的兴趣。比如 Hardy-Littlewood 很多文章和书其实跟微积分有很大关系，或者你去看 Fourier 分析，你可以看分析怎么应用到数论。其实参考书很多，你尽量去多看一下。不过这跟每个人的兴趣有关系，或者代数的书，线性代数都可以。

问：现在教科书，像微积分这类书，越写越厚，习题一大堆，对于这点，不知您的看法如何？

答：微积分至少有一千多本书，我不可能都看过。从前我们看从前的老书，老书其实很好的，我们大学的时候读 Apostol 的书，有两本，现在还觉得蛮不错的。在大学一年多时间里，我从那两本书中学了不少东西。里面的习题有一本比较容易做，深的一本较难做，我想都可以学学。从前英国式的如 Courant 或 Hardy 的书都写得不错，他们是做分析的专家，所以写的书有一定的深度。其实我们从前中学看过 Hardy 写的《不等式》，是很好的书。这本书对你以后帮助会很大，就是了解不等式是怎么推导的，多学这个技巧，怎么弄不等式，我觉得很有意思。一般认为很奇特的东西不一定就比较重要，好像泛函分析、希尔伯特空间这些东西，并不见得最重要。微积分里面很多很基本的工具很重要，还有解题的方法也很重要。

问：我们念数学或上数学课的时候，往往感觉证明很长很长，弄不懂为什么这么证，又是怎么想出来的，念完整个领域，也搞不懂它在干什么？

答：这是一个很重要的问题，学生往往背了方法，记下来，定理就懂了，证明就完了，以为你基本上将定理背懂了，当然你因此考试可以考得很高分。不过，你要将一个定理想想，最重要的你要了解，为什么它要这样做，究竟为什么要证明这个定理，这个定理有什么意思，这是第一步。然后你想想假设你不懂这个证明以前，你怎么去做这个问题，就是怎么样看待整个问题，这是很要紧的。为了要了解这个定理，你应该想办法，将整个定理看看有没有办法推广它，推广这个定理，最广泛的情形是什么样子？我并不是讲你为了推广定理而推广，这是一个学习的方法，从这个推广的过程你会慢慢了解这个定理的证明。你可以随便找个定理给我，我可以跟你们讲大概怎么样去推广它。

问：像隐函数定理？

答：你虽然没有学过希尔伯特，不过你可以试试在二维空间是怎么样。你看隐函数是什么意思，试试看你有没有办法写下隐函数出来。隐函数定理

就是从一方程式，比如两个变量的， $F(x, y) = 0$ ，试试看找出 $y = f(x)$ 满足这个方程，想想看怎么去找，你自然就会明白，隐函数定理是怎么证的，回家试试看吧！隐函数定理是用迭代的方法证的，整个隐函数定理的步骤也是如此，你可以试一个具体写下来的方程，你试试看怎么去证明它，你就可以晓得整个思路的过程是怎么样的。如果有计算机，你可以试试看这整个迭代过程里面，用计算机是怎么一步步操作的。运行几次以后，你就可以比较清楚怎么走，然后你可以改进算法，晓得整个思路是什么样子。并不是讲这个东西很多人想过，不过在不断改进的过程中，你对这个问题会了解很多。

隐函数定理推广到希尔伯特空间上面去以后，就成为一个很重要的偏微分方程的方法，你可以试试看隐函数定理在希尔伯特空间是怎么做的，这个推广很重要，当然你可能还没有学过希尔伯特，不过你大可以试试看，你因此可以将希尔伯特空间学好，明白这个无限维空间是怎么回事。应用隐函数在希尔伯特空间上，这可以用来解微分方程。隐函数定理是不动点定理的应用，你当然晓得，你看整个不动点怎么用，迭代压缩映射，那边可以有很多不同的做法。有很多人一辈子在做隐函数定理的应用。所以随便一个数学问题，你可以找到很多不同的讨论的地方。最简单的问题你都可以找到很多不同的有意思的地方，所以你这样子才会将数学看得比较活一点。

问：请问丘教授在大学时代，对数学就是这样尝试的吗？

答：为什么不可以呢？反正有时间嘛。你大学的时候其实最舒服，你做不到也没有关系，做得到最好，就有兴趣。譬如来讲，你玩玩计算机看看，你觉得好玩，就玩下去，不好就找另外一个问题再做，没有谁讲你今天做不出来就不行。所以我想，这跟游戏差不多，其实跟念文学也差不多，主要是看你有没有兴趣的问题，你觉得有兴趣就继续玩下去，没有就算了。

问：老师以前读书的时候，有没有碰到读书的压力？

答：这个问题看你说的压力是怎么样的。譬如来讲，你考试总是希望拿到高分，尤其考微积分考算式，看你算得准不准，你怕算错了，这种压力当然有。不过如果你将整个微积分看懂了以后，这压力就不大了。就是说你已经懂了，你给个东西要我来微分、积分，我基本上会做，不过就是细节。譬如你要积分一个东西，积分出来刚好是它的答案，你当然会有这种压力。同时积分要用到不同的技巧，有不同的方法，你当然希望多学一些技巧，怕考试刚好要用到这个技巧，这种压力总是有的。另一方面，你对整个学问基本上懂了，在一方面你会比人家觉得没有压力。中学、大学都会有这种压力，有压力好过没有压力，假如你觉得很没压力，有时候，你根本觉得没有意思。

不可否认，每个人都有惰性，就是讲反正无所事事也好，不写文章也没什么关系，你就慢慢吞吞的，可是做学问没有这么简单，你要全盘了解，有一

定的压力在，其实对你很好。你在学生的时候把考试的压力看得很重要，其实你考试的压力比你以后要写篇好的文章的压力轻多了。考试的压力，就是你们前几天刚好在考试，你觉得很辛苦，有多少天？你顶多花十几天在里面，可是你毕业以后，你要做个好文章，你怎么晓得你有好的想法？你好像觉得很渺茫。另一方面，经验讲只要你用功的话，你总有一些好的想法，只要坚持不懈，你可以试十次，十次不中，第十一次中了就行。这跟下棋不同，下棋下错了举手无悔，不能重新改变，做研究你改变十次都没有关系，错了就继续第二个方法。所以问题就是刚才讲的，你错了十次，假如你们有压力的话，不能就算了，不做了，有点压力，就再试第十一次，你就中了，这没有什么不好，所以我觉得压力对你是个好事，不是个不好的事。

照我晓得的，基本上所有好的、出名的数学家或是科学家，都有压力在里面，有些人骗你，跟你吹他完全没有压力，很潇洒的样子，是装出来的。我觉得近代科学家里面，最出名最潇洒的是 Feynman，他讲话轻而易举的样子。Feynman 的物理课是很出名的，可是每一个人都晓得他花了很多工夫备课。他最后的演讲很潇洒，举手投足之间，什么东西都讲得很清楚，其实他花了很多工夫去准备。Milnor 写书也是写得很好，可是他也是花费了很多的工夫。

世界上是没有任何一个东西是不花工夫就可以得到很好的结果，他可能刚好想了很久以后，突然有段时间没有想，重新再想想出来。他那个时候想出来，好像不费吹灰之力，其实花了很多工夫。爱因斯坦是出名的物理学家，我在普林斯顿的时候，爱因斯坦所有的工作都在那边，爱因斯坦做广义相对论、量子理论花了很多工夫，天天都在想这个问题。压力可以说是同行间为了竞争做到同样的问题，就有很大的压力。这压力你讲是其他人给的也好，你讲不是也可以。因为并没有特别道理一定要将那个东西解出来，所以跟你的兴趣也有点关系，好胜心也有点关系。反正有不同的因素在里面。不过照我晓得，科学家总是有一定的压力在里面。很多人讲：“我这一个大天才，我今天要想出来就想出来。”没有这种事，很多人做成这样子给你看，也不是第一流的数学家会跟你这么讲，第一流的工作是尝试了很多次才做出来的。

问：请问丘老师，我还有两个问题！好几年前，我们常常听到美国有一些很聪明的华人学生，得到“西屋” (Westinghouse) 科学奖，可是，过了一阵子后，这些人好像都消失了。那些聪明的华人都跑到哪里去了？以您在美国多年的经验，您的看法如何？是不是就像你刚才讲的，都跑去赚钱了？还有，您在北京当过客座，可不可以请您讲一下，那边学生读书的态度和这边的学生有何不同？据我所知，那边不管你从事什么行业，薪水都是一样的，所以他们很乐于做数学或比较基础科学方面的研究。

答：像“西屋”这个奖我觉得很好，因为一个学生要多方面思考才做得出来，当然很多是家长帮忙什么的，我就不清楚了。据我晓得拿“西屋”奖以后

出来的，大部分都是很能干的科学研究人才。你问华裔拿了“西屋”以后都怎么样？因为其中的大部分都不念数学，所以我不能很明确地讲他们的前途是怎么样的。

不过很多出名的公司里面有很多出色的华裔工程师，有很多与学术界的联系并不是那么密切，所以不一定听过。不过，有些华裔在美国，或中国台湾、香港、大陆很早毕业或很早什么的，反而有很多以后不行的。我想这跟“西屋”有一点点不同，因为很早毕业其实没有什么了不起，什么东西都没有搞通，你早毕业反而对你有坏处，所以有很多出名一下子后就消失了，我倒可以讲，我也可以了解他们为什么不行。“西屋”奖得主中因为念数学的不多，所以我不能跟你讲。

这五六年来，中国大陆念数学的也很少，原因就是现在在中国念工程念商学赚钱比较容易。十多年前中国大陆要出国留学，要到美国留学的，基本上他们是要念理论科学，数学、物理，所以那个时候要出国念数学、物理的很多，他们也为了这个很用功，当然里面也有不少为了学问而念学问的，不过很多是为了出国而念的，我想。最近几年因为中国大陆的经济比以前好多了，所以他们念数学的少多了，跟中国台湾有什么不同？我觉得反而这几年中国台湾还比较好一点，我想因为中国台湾钱多了，没有什么特别道理一定要念数学，所以大部分念数学的可能是对数学兴趣大点才来念的，所以中国台湾以后培养好的数学人才反而容易一点，希望如此。另一方面，中国有十多亿人口，要找到念数学的人还是有的，好的人才还是有的。

问：我们在做作业解问题的时候，常常想了很久都不知道该怎么办，可是翻开解答一看，它的想法实在非常怪异，不晓得我们要如何去了解这种怪异的想法？它在我们学习数学的过程中扮演什么样的角色？对我们整个思想又有什么影响？

答：我不懂你说的什么叫怪异？一个数学题目的解决，往往有很多不同的途径，尤其你们还没有做研究的经验。你讲的怪异是花了很多工夫来解决，或是很自然的解法？

问：只要几个步骤就解决了，然后你会很惊讶。

答：其实这对你有个好处，你能够懂得惊讶就对你很好，你要看懂了解决的方法，你就对解决的方法很难忘掉，对不对？假如你不惊讶你就背下来，一下子就忘掉了，这对你根本没有好处。每一个解决问题的方法，假如跟标准的书里不同的话，这是一个工具，可以讲是解决一个题目的方法的工具，逐渐积累起来以后，就是等于一个工程师他口袋里有很多不同的小工具。等你做其他问题的时候，这个工具可以重新再去用，所以为什么学生应当去解题目就是这个缘故。就是一方面你晓得一个数学的大方向，一方面你口袋里面

要有很多工具。

有很多人讲哲学、讲理论，“我认为数学什么样子，什么样子”，结果真正到了要解决一个问题的时候，口袋里面没有一定的工具。一个大房子盖的时候，你可以晓得基本上的工程是怎么盖的，可是你不能够就这样讲就算了，到了你真正要去盖的时候，就发觉这边要上螺丝，那边要上铁条，你不懂得上你就盖不起来，就是这个意思，所以做题目很要紧就是这个样子。基本上，如果你没有想之前就看那个解答，看了以后，这很简单嘛！基本上就是这边乘一乘，那边除一除就行了。可是，你先想那个题目，再去看解答，你才了解，这个解答并不是那么容易的，你搞一搞就搞不懂，为什么他就搞得懂？所以你一定要先想题目再看解答，一定要学这种工具，这种很奇异的解答要将它学会，学会以后，第二次再出现同样的问题，你就可以用。