丘成桐与卡拉比猜想 60 年

——谨以此文献给丘成桐教授荣获菲尔兹奖 30 周年

刘克峰

刘克峰，出生于河南开封，1993 年获哈佛大学博士学位，师从丘成桐先生。2002 年起任加州大学洛杉矶分校教授，2003—2009 年任浙江大学数学系主任。2003 年起至今担任浙江大学光彪讲座教授、数学中心执行主任。在微分几何、拓扑、数学物理等研究方向取得了大量国际一流的创新成果。他获得过享有盛名的 Sloan 研究奖和 Guggenheim 奖，并在 2002 年北京国际数学家大会上作特邀报告，2004 年荣获世界华人数学家的最高奖 —— 晨兴数学奖金奖。世界著名数学杂志《几何分析通讯》主编。乒乓球高手，现任浙江大学乒协副会长。

20 世纪 50 年代是几何与拓扑学最辉煌的时代。一批年轻的数学家证明了一系列伟大的数学定理，开天辟地，创造了一个崭新的时代。他们与他们的定理一起，熠熠生辉，照亮了整个数学的历史。

1941 年的 Hodge 理论刚刚由 Weyl 和 Kodaira 整理完成。1945 年陈省身引进的陈示性类由 Hirzebruch 发扬光大，证明了拓扑中的符号差定理与代数几何中 Hirzebruch-Riemann-Roch 定理。工程师出身的 Bott 证明了他不朽的同伦群周期性定理。这些结果很快激发出了 Atiyah-Singer 指标定理。Serre 用 Leray 的谱序列计算了代数拓扑中球面的同伦群，用层论写下了代数几何名篇 GAGA，将复分析系统地引入代数几何。Kodaira 证明了他著名的嵌入定理，发展了复流形的形变理论。稍后，Milnor 发现了七维怪球，Nash 证明了 Riemann 流形的嵌入定理。这些伟大的数学家与他们的定理，如繁星闪耀在天空，令人目不暇接。

1954 年的国际数学家大会，菲尔兹奖的获奖者是 Kodaira 和 Serre，他们的主要获奖工作都是将复分析、微分几何与代数几何完美地结合在一起。正如 Weyl 在他的颁奖词中所说，他们的成就远远超越了他年轻时的梦想，他们的成就代表着数学一个新时代的到来。

也是在这届数学家大会上，31 岁的意大利裔数学家 Calabi (卡拉比) 在会议的邀请报告中用一页纸写下了他著名的猜想：令 M 为紧致的 Kähler 流形，那么对其第一陈类中的任何一个 $(1,1)$ 形式 R，都存在唯一的一个 Kähler 度量，其 Ricci 形式恰好是 R。Calabi 还粗略地描述了一个他的猜想的证明方案，并证明了，如果解存在，那必是唯一的。但 3 年后，在 1957 年的一篇关于日后被称为 Calabi-Yau 流形的几何结构的文章中，他意识到这个证明根本行不通。这里需要求解一个极为艰深而复杂的偏微分方程，叫做复的 Monge-Ampère 方程。他去请教天才数学家 Weil，无所不知的 Weil 告诉他，当时还没有足够的数学理论来攻克它。

众所周知，Poincaré 著名的单值化定理告诉我们，一维复流形的万有覆盖只有简单的三种，球面、复平面和单位圆盘。如何将单值化定理推广到高维流形，这个问题几乎主导了现代几何与拓扑的发展。而即使从复一维到复二维流形，问题的复杂性已经远超想象，被数学家称作是从天堂到了地狱。或者说是上帝创造了 Riemann 面，简单美丽而又丰富多彩，是魔鬼制造了复曲面，内容复杂，令人眼花缭乱，头晕目眩。Calabi 猜想可以认为是单值化定理在高维不可思议的大胆推广，竟然给出了高维复流形中难得一见的一般规律。特别的是它在复 Kähler 流形的第一陈类大于零、等于零和小于零三个情形，指出了 Kähler-Einstein 度量的存在性，即此度量的第一陈形式等于其 Kähler 形式。这恰好对应于 Riemann 面三种单值化的推广。在当时，人们知道的 Einstein 流形的例子都是局部齐性的，甚至都不知道复投影空间中的超曲面，如 K_3 曲面上，是否有 Einstein 度量。在这样一种情况下，Calabi 竟然做出如此大胆的猜测，可见其胆识过人，也难怪此后多数几何学家都怀疑此猜想的正确性，许多人都在努力寻找反例，而不是证明它。正如 Poincaré 的单值化定理，Hodge 定理需要经过数年乃至数十年努力才得到完美的证明一样，Calabi 猜想也在数学界的期盼中等待着它真正的王者到来，这一等就是 21 年。

还是这一年，5 岁的丘成桐正在世界的另一端过着清贫的生活，那时的香港几乎没有人知道什么是微分几何。14 岁时父亲的去世，更令他饱尝人间冷暖，也造就了他不屈不挠的性格。11 年后他进入香港中文大学，3 年后负笈求学来到伯克利，那是 1969 年。那一年，著名的几何学家伍鸿熙教授在给另一位著名几何学家 Greene 的信中，预言这个 19 岁的年轻人将会改变微分几何的面貌。很难知道伍鸿熙教授如何看出了一个 19 岁年轻人不同寻常的王者之气。读研究生的第一年，丘成桐初试身手便解决了微分几何中一个有关负曲率流形基本群的结构问题，事后他才知道这就是微分几何中著名的 Wolf 猜想。这一点颇像 Milnor 把扭结理论里的猜想当成家庭作业完成一样。当遇到 Calabi 猜想后，他像是见到了美丽的天使，一见钟情。此后童话般的故事人人

皆知，其中的痛苦与快乐也只有丘成桐自己才能体会。后来他告诉所有人，他成功的诀窍是用苦功而非天才，他曾尝试过近五千个实验函数来发展流形上梯度估计的技巧。所以我们知道，一只苹果掉到头上，令牛顿豁然开朗地发明了微积分，那只是个传说。为了解决 Calabi 猜想，他需要系统地创建和发展流形上的非线性分析，特别是 Monge-Ampère 方程的理论、方法与技巧。他先与郑绍远合作，用实的 Monge-Ampère 方程解决了著名的 Minkowski 猜想和 Minkowski 时空中的 Bernstein 问题，此后再将他自己发展的梯度估计技术发挥到极致，终于在 1975 年完全解决了 Calabi 猜想。此时，除了丘成桐，最高兴的应该是 Calabi，从 1954 年到 1975 年，整整 21 年的梦想终于成为了现实！那一年的圣诞节，他、丘成桐和 Nirenberg 一起在纽约的 Courant 研究所度过，整天就是讨论丘成桐的证明。Calabi 猜想终于成为了 Calabi-Yau 定理！Calabi 后来回忆，那是他一生中唯一的一次在圣诞节开会，而那个猜想的证明就是最好的圣诞礼物。1991 年当他获得了美国数学会终身成就奖时，他动情地说：我特别要感谢丘成桐，因为他，今天我才能站在这个领奖台上。

Serre 说过，一个真正好的数学猜想，它的解决应该随之而来一系列的推论和绵延不断的影响。Calabi 猜想就是如此，这里我仅举几个例子。首先，对于第一陈类小于和等于零的紧 Kähler 流形，Calabi 猜想告诉我们，Kähler-Einstein 度量总是存在。其中对小于零的情形，其简单的推论就解决了长期悬而未决的 Severi 猜想，复二维投影空间的复结构是唯一的，甚至任意维数复投影空间的 Kähler 结构也是唯一的。另一个匪夷所思的推论是，在任意维数的这类复流形上，存在一个奇妙的陈示性数不等式，而此前代数几何学家却只能得到复二维的情形。第一陈类等于零的二维复流形是有名的 K_3 曲面，Todorov 用 Calabi-Yau 定理证明了其周期映射是满射，萧荫堂利用 Calabi-Yau 度量证明了所有的 K_3 曲面都是 Kähler 曲面，而高维数的第一陈类为零的复流形的基本结构定理也随之而来。这些都是复几何与代数几何中著名的猜想，在 Calabi 猜想证明之前，人们毫无办法，望而却步。最令人惊奇的是 20 世纪 80 年代初，超弦学家们认识到第一陈类等于零的三维复流形恰好是他们的大统一理论所需要的十维时空中的一个六维空间，这神秘的六维空间在我们看不到的尺度里主宰着我们大千世界的千变万化。这个发现引导了物理学的一场革命。物理学家们兴奋地把这类流形称为 Calabi-Yau 空间，Yau 便是丘成桐的英文姓氏。有兴趣的朋友如果在 Google 中输入 Calabi-Yau，就会发现近四十万个条目。以至于不少物理学家都以为 Calabi 是丘成桐的名字。正如 Witten 所言，在这场物理学的革命中，每一个有重要贡献的人都会名扬千古。Calabi-Yau 也在数学中引发了一系列重大的进展，如超弦学家 Candelas 等人通过研究不同的 Calabi-Yau 流形给出的相同的超对称共形场论所发现的镜对称猜想。这个猜想由丘成桐、连文豪与我

以及 Givental 独立证明，它解决了代数几何中遗留了上百年的 Schubert 计数问题。基于 Calabi-Yau 流形的基本结构，著名超弦学家 Witten 和 Vafa 等人发展的 Chern-Simons 与拓扑弦对偶理论给出了 Riemann 面模空间中许多奇妙的公式，如 Marino-Vafa 公式给出了无穷多个模空间积分的组合闭公式，此猜想由刘秋菊、周坚与我一起证明。可以说 Calabi-Yau 流形早已成为弦论学家们必不可少的魔匣，利用它，他们不断地变换出令人炫目的猜想，这已经成为数学与理论物理发展的潮流，至今方兴未艾。

Hodge 理论、Kodaira 嵌入定理、Calabi-Yau 定理是复几何发展史上的三个最伟大的里程碑，也是整个数学中屈指可数的最美妙的定理。它们有许多异曲同工的地方。它们都是用微分几何证明的，都是连接几何与其他领域必不可少的桥梁，如代数几何等。它们所需要的条件都简单而容易验证，都包含代数几何与微分几何中最有意义的一大类流形。它们的应用都给出源源不断的重要推论，都成为复几何教科书中必不可少的篇章。这是数学中所有伟大定理的共同特征。

Calabi 猜想的证明也标志着微分几何一个新时代的到来。一个新的学科随之产生，称为几何分析。它的定义就是用非线性微分方程的方法来系统地解决几何与拓扑中的难题，反过来也用几何的直观与想法来理解偏微分方程的结构。丘成桐在 1978 年的国际数学家大会的大会报告中系统而清晰地描绘了几何分析与高维单值化理论的发展前景。由此方法，一系列著名的问题得到解决，特别是以 Donaldson 为代表的规范场理论与低维拓扑的结合，Hamilton 的 Ricci 流与 Poincaré 猜想的历史性进展，将几何分析的发展带到了一个高峰。另一方面，早在 1983 年，丘成桐的学生曹怀东和 Bando 便在他的指导下首先用 Ricci 流的方法开始研究 Kähler 流形上标准度量的存在性，使 Kähler-Ricci 流成为复流形研究中重要的工具之一。

另一个与 Calabi 猜想密切相关的问题是代数几何中全纯向量丛的稳定性与其上的 Hermit-Einstein 度量的对应问题，这个问题约化成一个与规范场理论相关的极为困难的非线性方程解的存在性问题。1986 年丘成桐与 Uhlenbeck 合作，在 Kähler 流形上完全解决了这个问题。稍后，Donaldson 也在投影流形上用不同的方法将这个问题解决。1988 年，Simpson 将这些结果推广并与 Hodge 变分理论相结合，发展成为代数几何中一个极为有效的工具。

对于复流形的切丛，Kähler-Einstein 度量可以认为是没有挠率的 Hermite-Einstein 度量，所以 Kähler-Eienstein 度量意味着流形的切丛在代数几何意义下是稳定的，但要更细致更深刻。多年来，丘成桐一直考虑什么样的代数稳定性对应着 Kähler-Einstein 度量的存在。从我 1988 年来到哈佛成为丘成桐的学生，他的讨论班里最多的话题就是代数几何中各种稳定性的概念与相

关的度量和分析问题。丘成桐的几个学生，如田刚、李骏、梁乃聪、罗华章等人的博士论文都是讨论这方面的题目。他的一些想法记录在他 1990 年所发表的 100 个几何问题集里，这个问题集是为陈省身 79 岁生日而整理的。第 65 个问题就猜测 Kähler-Einstein 度量的存在性应该等价于代数几何中几何不变量意义下的稳定性。在第一陈类大于零的复流形上，这个猜想首次给出了 Kähler-Einstein 度量存在的充分必要条件，建立了标准度量与代数几何的密切关系。他当时的不少学生，包括田刚在内，都感觉到丘成桐猜想指出了新的研究方向，非常漂亮，也很有意义，开始努力研究丘成桐猜想。在此之前丘成桐也考虑了如何用 Bergman 核的想法来逼近 Kähler-Einstein 度量，如何将 Calabi 猜想推广到开流形与有奇点的流形上，并在几篇著名的综述文章中予以详细的阐述。这些都成为今后复几何发展的重要纲领，并引领了日后 Donaldson 和田刚等人关于 Kähler-Einstein 度量方面的工作。基于他的一部分想法，丘成桐与郑绍远、莫毅明和田刚整理并发表了一系列的文章，其中一部分组成了田刚的博士论文。众所周知，田刚日后的主要工作大都从丘成桐的这些想法和猜想引发而来。

与第一陈类小于和等于零的情况相反，直到丘成桐提出他的猜想前，第一陈类大于零的情况一直显得颇为迷离。首先这类流形有不存在 Kähler-Einstein 度量的例子。20 世纪 80 年代初，Futaki 发现了此类流形存在 Kähler-Einstein 度量的障碍，被称之为 Futaki 不变量。此后近 30 年，田刚一直沿着丘成桐猜想所指出的研究方向不懈努力，试图理解正曲率条件下，稳定性与 Kähler-Einstein 度量的存在性如何相关。田刚用 Futaki 不变量定义了一个解析稳定性的概念，他称为 K-稳定性，并取得了一些进展。然而这个问题的真正突破来自于 Donaldson。他在 2001 年证明了如果 Kähler 流形上的 Kähler 类中存在一个常数量曲率的度量，并且其自同构群是离散的，那么这个流形在代数几何意义下就是稳定的。他所用的关键工具恰好是丘成桐考虑过的 Bergman 核的逼近方法，他敏锐地观察到 Bergman 核渐进展开的第二项正是数量曲率，如果它为常数，则相应的偏微分方程便可解。此后 Donaldson 引进了适合研究丘成桐猜想的代数几何意义下的 K-稳定性概念，并在 2010 年公布了证明 K-稳定性与 Kähler-Einstein 度量存在等价性的丘成桐猜想的纲领，最近陈秀雄–Donaldson–孙崧在网上发表了三篇文章实现了这些想法。而田刚最近在 Donaldson 纲领的基础上也宣称完成了这个猜想的证明。由于这些文章相当复杂，Donaldson 等人写了三篇长文，田刚也在贴出自己的文章后不断做出修改，所以这些证明的正确性还有待专家们详细验证。

第一陈类大于零的复流形也叫作 Fano 流形，这类流形比第一陈类小于零的流形相对来得少，其内容也远不如后者丰富，例如复一维情形只有一个球面，而复二维的流形从拓扑来看也只是复投影空间吹大几个点。更有意思的

是代数几何中研究这类流形的工具也远比微分几何的方法强大。特别是 1979 年 Mori 在 Fano 流形上用有限域的技巧发现的有理曲线存在性，这是迄今为止微分几何方法一直无法超越的天才发明。以此为工具，代数几何学家对 Fano 流形几何的了解走在了微分几何研究的前面。这种情况与第一陈类小于和等于零的情形形成了鲜明的对比，这两类流形包含比 Fano 流形丰富得多的例子，而由于丘成桐证明的 Calabi 猜想，在这些流形的研究中，微分几何的方法和工具更强大也更有效。这里我们还要注意到，正如 Donaldson 等人在他们的文章中所阐述的，K-稳定性并不是一个容易验证的条件，其实用性也与丘成桐所证明的 Calabi 猜想相差甚远。目前他们所证明的丘成桐猜想唯一有意思的推论还是丘成桐所指出的，K-稳定形可以推出切丛的稳定性。所以即使 K-稳定性等价于 Kähler-Einstein 度量的存在性的猜想得到证明，其重要性也需要在日后的应用中才能得到检验。而丘成桐本人则在勾画了他的猜想的证明纲领后，便将题目交给他了的学生和朋友，一方面他认为他的猜想虽然重要，但与他证明的 Calabi 猜想相比还是有很大的距离，另一方面他认为弦理论引发的数学问题要比他自己的猜想更具挑战性，也有更大的潜力。事实上，他和他的学生与博士后在 Calabi-Yau 流形上的工作已经在近代数学中开创了一个新的重要研究方向。至于丘成桐猜想证明的正确性和其在几何学中的前景，只有他这个开创者和专家才有资格来评判了。

当然，Calabi 猜想只是丘成桐众多数学成就的一部分。1978 年受邀在国际数学家大会做大会报告时，他 29 岁。1983 年获得数学界最高奖——菲尔兹奖时，他 34 岁。特别要说的是那个时候他持香港护照，还是中国公民。他也一直以此为豪。此后他几乎囊括了这个世界上一个数学家所能得到最高荣誉，包括沃尔夫奖、Crafoord 奖、美国国家科学奖章。然而 Calabi 猜想的证明毫无疑问是他数学事业中最为绚丽的篇章，它承载了无数数学家 60 年的光荣与梦想，造就了几何分析四十载的传奇与辉煌。

“落花人独立，微雨燕双飞”，这是丘成桐描述自己证明了 Calabi 猜想时的心情所用的诗句。从那一刻起，丘成桐一跃而成为一个伟大的数学领袖，领导了几何学近 40 年的辉煌。他代表了数学与超弦理论的一个时代。正如《纽约时报》所言，他是当之无愧的数学皇帝。

编者按：原文刊载于《光明日报》2013 年 2 月 25 日“光明讲坛”。

附读者来信

期待数学的春天

任国征

读完光明讲坛 2 月 25 日《丘成桐与卡拉比猜想 60 年——谨以此文献给丘成桐教授荣获菲尔兹奖 30 周年》，作为一名数学爱好者，心情不能平静。这使我还想起两年前光明讲坛推出的四期“数学与人文”系列演讲，当初丘成桐、刘克峰、维拉尼（法）、杨乐和季理真等数学家的演讲十分精彩。

数学的魅力正像罗素在《神秘主义与逻辑》（1918 年）中说：“公正而论，数学不仅拥有真理，而且拥有至高无上的美。”那么，数学美在何处呢？数学其实并不是遥不可及的象牙塔之物，可以说是身边处处皆数学。现从我数百册数学藏书里挑选一些经典书目仅供参考。

1. 趣味几何学（苏联 1959 年第九版，中国青年出版社 1980 年第二版，18 万字），作者为苏联科普作家别莱利曼，很多学者多次修订。

2. 什么是数学——对思想和方法的基本研究（*What is Mathematics*，牛津大学出版社 1996 年版，复旦大学出版社 2005 年版，50.3 万字），归入西方数学文化理念传播译丛。作者为美国数学家柯朗和罗宾，斯图尔特修订。

3. 数学史选讲（张奠宙主编，上海科学技术出版社 1997 年版，22.5 万字）

4. 数学无国界——国际数学联盟的历史（*Mathematics Without Borders: A History of the Mathematical Union*，纽约施普林格出版社 1998 年版，上海教育出版社 2002 年版，35.2 万字），归入通俗数学名著译丛。作者为国际数联秘书长、芬兰数学家莱赫托。

5. 数学猜想集（徐本顺等编著，湖南科学技术出版社 1999 年版，21.3 万字），归入潜科学丛书。

6. 数学的力量——漫话数学的价值（李文林，任辛喜著，科学出版社 2007 年版，4.9 万字），《七彩数学》丛书之一。

1985 年 6 月，丘成桐的老师陈省身教授为《数学教学》杂志题词“21 世纪的数学大国”，我国是数学古国和数学大国，我们期待数学的春天能够早日到来，这个愿望能够很快实现！