

文章编号: 0258-1825(2012)05-0675-05

# 基于涡激力偏相关的大跨度桥梁 涡激振动线性分析方法

李明水, 孙延国, 廖海黎

(西南交通大学 风工程试验研究中心, 四川 成都 610031)

**摘要:** 周期性旋涡脱落会使大跨度桥梁产生涡激振动, 与旋涡脱落密切相关的涡激力沿跨向并不完全相关。基于 Scanlan 涡激力经验线性模型, 研究了涡激力沿跨向的相关性。通过 Fourier 变换得到二维力谱到三维广义力谱的转换关系, 定义了二维与原型桥梁涡振响应之间的折减系数, 给出了将节段模型涡振试验结果应用到原型桥梁的具体理论方法。最后, 通过不同缩尺比的节段模型风洞试验及全桥气弹模型风洞试验验证了本文理论的有效性。

**关键词:** 涡激振动; 大跨度桥梁; 偏相关; 风洞试验

**中图分类号:** TU311

**文献标识码:** A

## 0 引言

从空气动力学的角度来说, 大跨度桥梁的主梁断面属于钝体断面, 气流分离以及尾流涡脱将导致结构产生振动即涡激振动, 在特定风速范围内, 旋涡脱落频率被结构振动的频率控制, 结构随之发生大幅振动称为锁定现象(lock-in)。Simiu 和 Scanlan 对这种气动弹性现象进行了详细深入的讨论<sup>[1]</sup>。目前, 节段模型试验是研究大跨度桥梁涡激振动的主要手段。为了研究涡激振动产生的机理并将模型试验结果应用到实桥, Scanlan<sup>[2]</sup>、Larsen<sup>[3]</sup>等基于 Van der Pol 振子模型立了多种线性和非线性涡激力半经验模型。然而, 由于涡激力沿跨向的偏相关或非完全相关性以及振型等因素的影响, 节段模型试验结果与实际桥梁的不一致仍然没有得到很好的解释<sup>[4-5]</sup>。

对于实际大跨度桥梁主梁而言, 涡激振动属于沿跨向范围内的三维问题<sup>[6]</sup>。现有的基于模型风洞试验建立的涡激力半经验模型大多假设涡激力沿展向或跨向完全相关, 极少考虑涡激气动力的偏相关, 少数研究也仅采用一维涡激振动气动力线性组合的方式粗略考虑振动沿跨向的变化<sup>[7]</sup>。Wilkinson 采用刚性节段模型测压方法, 研究了方柱体涡激力的相关性, 得到了不同振幅下的涡激力相关函数<sup>[4]</sup>。Ehsan

等人采用双指数函数得到了相关函数的拟合形式, 并利用 Scanlan 经验非线性模型和相关性函数, 粗略讨论了主梁沿跨向涡激振动<sup>[5]</sup>。朱乐东<sup>[8]</sup>指出了考虑涡激力相关性的重要性, 鲜荣<sup>[9]</sup>研究了箱梁的涡激力相关函数并初步将其应用于大跨度桥梁的涡激振动分析。

## 1 涡激振动的线性理论描述

基于 Scanlan 涡激力经验线性模型<sup>[1]</sup>, 考虑涡激力(升力)沿跨向存在相位差, 可将竖向涡激振动运动方程写为:

$$m(\ddot{y} + 2\zeta\omega_0\dot{y} + \omega_0^2 y) = \frac{1}{2}\rho U^2 D[Y_1(K)\frac{\dot{y}}{U} + Y_2(K)\frac{y}{D} + \frac{1}{2}C_L(K)\sin(\omega t + \phi(x))]$$
 (1)

上式中,  $m$  为结构质量;  $\zeta$  为结构阻尼比;  $\omega_0$  为结构固有频率;  $\rho$  为空气密度;  $U$  为来流风速;  $D$  为结构迎风向特征尺寸(高度);  $y(x, t)$  为桥面上任意一点涡振响应,  $x$  为沿桥跨向坐标;  $K$  为无量纲折算频率( $K = \omega D/U$ ,  $\omega$  为旋涡脱落频率);  $Y_1(K)$ 、 $Y_2(K)$ 、 $C_L(K)$ 、 $\phi(x)$  为待识别参数。

引入广义坐标  $y(x, t) = \phi(x)\xi(t)D$ , 式中  $\phi(x)$  为主梁振型函数;  $\xi(t)$  为无量纲广义坐标。令  $s = Ut/D$ 、 $K_0 = \omega_0 D/U$ , 则式(1)可以写成如下形式:

\* 收稿日期: 2011-05-23; 修订日期: 2011-11-14

基金项目: 国家自然科学基金(50978223, 90815016)

作者简介: 李明水(1966-), 男, 教授, 主要从事结构风工程研究。E-mail: lms\_rcwe@126.com

$$\ddot{\xi}(s) + (2\zeta K_0 - \frac{\rho D^2}{2m_{eq}} Y_1) \dot{\xi}(s) + (K_0^2 - \frac{\rho D^2}{2m_{eq}} Y_2) \xi(s) = \frac{\Gamma F(s)}{\vartheta} \quad (2)$$

式中,  $\Gamma = \frac{\rho D^2 C_L}{4m_{eq}}$ ;  $\vartheta = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \phi^2(x) dx$ ;  $m_{eq} = \frac{M}{L}$ ;

$M$  为模态对应的全桥广义质量,  $L$  为主梁长度;

$$F(s) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} |\phi(x)| \sin[Ks + \phi(x)] dx;$$

$$M = \int_{-L/2}^{L/2} m(x) \phi(x)^2 dx.$$

下面讨论  $F(s)$  的相关性:

$$\text{令 } f(s, x) = \sin[Ks + \phi(x)],$$

$$\text{则 } F(s) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} |\phi(x)| f(s, x) dx,$$

$F(s)$  的相关性可用下式表示:

$$R_{F(\tau)} = \frac{1}{L^2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} |\phi(x_1)| \cdot |\phi(x_2)| R_{f(\tau)} dx_1 dx_2 \quad (3)$$

对上式两边进行 Fourier 变换可得:

$$S_F(\omega) = \frac{1}{L^2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} |\phi(x_1)| \cdot |\phi(x_2)| \cdot S_f(\omega, |x_2 - x_1|) dx_1 dx_2 \quad (4)$$

Houbt 等人<sup>[10-11]</sup>都曾定义过如下形式的空间谱的相关函数:  $R(M, M', \omega) = S_F(M, M', \omega) / S(\omega)$

( $M, M'$  为空间任意两点)。利用上式, 则有:

$$S_F(\omega) = \frac{1}{L^2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} |\phi(x_1)| \cdot |\phi(x_2)| \cdot R(\omega, |x_2 - x_1|) S(\omega) dx_1 dx_2 \quad (5)$$

式中,  $S(\omega)$  为点谱, 这里可以看作纯二维的涡激力谱; 根据 Wilkinson<sup>[4]</sup> 给出的相关函数形式,  $R$  与频率无关 (鉴于涡振为单一频率的振动, Strouhal 数在特定雷诺数范围内为常数, 因此  $R$  与频率无关是合理的)。上式进一步写为:

$$S_F(\omega) = R_F S(\omega) \quad (6)$$

$$R_F = \frac{1}{L^2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} |\phi(x_1)| \cdot |\phi(x_2)| R(|x_2 - x_1|) dx_1 dx_2 \quad (7)$$

定义振型的自卷积分为<sup>[12]</sup>:

$$\theta(\Delta x) = 2 \int_{-L/2}^{L/2 - \Delta x} |\phi(x)| \cdot |\phi(x + \Delta x)| dx \quad (8)$$

将上式代入式(7), 可得偏相关下涡激力折减系数:

$$\Phi = \sqrt{R_F} = \sqrt{\frac{1}{L^2} \int_0^L \theta(\Delta x) R(\Delta x) d\Delta x} \quad (9)$$

显然,  $\Phi \in (0, 1]$ 。

基于以上推导, 式(2)可重写为:

$$\ddot{\xi}(s) + (2\zeta K_0 - \frac{\rho D^2}{2m_{eq}} Y_1) \dot{\xi}(s) + (K_0^2 - \frac{\rho D^2}{2m_{eq}} Y_2) \xi(s) = \frac{\Gamma \Phi \sin(Ks + \phi_0)}{\vartheta} \quad (10)$$

式(10)是广义坐标下线性涡激振动运动方程, 其中常数  $\phi_0$  为相位差。可将其改写为:

$$\ddot{\xi}(s) + 2\gamma \hat{K}_0 \dot{\xi}(s) + \hat{K}_0^2 \xi(s) = \frac{\Gamma \Phi}{\vartheta} \sin(Ks + \phi_0) \quad (11)$$

式中  $2\gamma \hat{K}_0 = 2\zeta K_0 - \frac{\rho D^2}{2m_{eq}} Y_1$ ,  $\hat{K}_0^2 = K_0^2 - \frac{\rho D^2}{2m_{eq}} Y_2$ 。

涡激振动运动方程(11)的稳态解为:

$$\xi(s) = \frac{\Gamma \Phi}{\vartheta \hat{K}_0^2} \frac{\sin(Ks - \theta)}{\sqrt{(1 - \beta_v^2)^2 + (2\gamma \beta_v)^2}} \quad (12)$$

$$\theta = \arctan \frac{2\gamma \beta_v}{1 - \beta_v^2} \quad (\beta_v = K / \hat{K}_0)$$

对于扭转涡激振动可采用类似的推导过程得到涡激振动的稳态解。

## 2 节段模型试验结果在原型桥梁应用的讨论

目前尚缺乏桥梁断面沿跨向的涡激力相关性研究, 下文以 Wilkinson 涡激力相关函数为例, 讨论将节段模型试验的结果应用到原型桥梁的方法。

Wilkinson<sup>[4]</sup>通过对方柱体节段模型测压试验得到涡激力相关函数的近似公式:

$$R(\Delta x) = \exp[-f_1(\eta) (\frac{\Delta x}{D})^{f_2(\eta)}] \quad (13)$$

其中  $\eta$  为振幅与  $D$  之比。Ehsan<sup>[5]</sup>拟合得到如下结果:

$$f_1(\eta) = \frac{0.052}{(0.298 + \eta^{0.25})}; f_2(\eta) = \frac{0.065}{0.042 + \eta} \quad (14)$$

图1为根据 Wilkinson 测压试验结果拟合的相关性曲线。

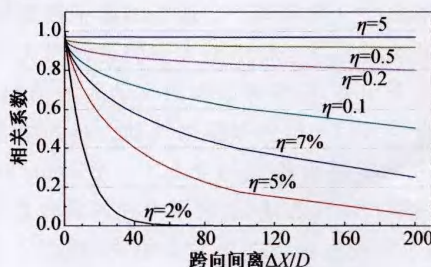


图1 涡激力相关函数

Fig. 1 Wilkinson's correlation function



## 2.1 节段模型试验

对于节段模型风洞试验,其振型函数  $\phi(x)=1$  时,有  $\theta(\Delta x)=2(L-\Delta x)$ 。

当相关函数  $R(\Delta x)=1$  时(即全相关的情况),折减系数  $\Phi=1$ 。因此,当涡激力沿跨向完全相关时,对应的折减系数为1,这与现行传统试验方法采用的理论完全一致。

当相关函数  $R(\Delta x) \neq 1$  时(偏相关的情况),

$$\Phi = \frac{1}{L} \sqrt{\int_0^L 2(L-\Delta x) \exp[-f_1(\eta) \cdot (\Delta x/D)^{f_2(\eta)}] d\Delta x}$$

取  $z=\Delta x/L, \hat{L}=L/D$  上式可重写为:

$$\Phi(\hat{L}) = \sqrt{\int_0^1 2(1-z) \exp[-f_1(\eta) \cdot (\hat{L}z)^{f_2(\eta)}] dz} \quad (15)$$

从上式可以看出:折减系数的大小由跨(展)长和振幅决定。采用 Ehsan 拟合的结果,对公式(15)进行数值积分,得到不同振幅下涡激力折减系数随展长变化的情况,如图2所示。节段模型的长高比决定了二维涡激力向空间涡激力转换时的折减系数的大小。模型越接近纯二维,该折减系数越接近1;而模型的长宽比越大时,这种折减作用越大。同时,涡振振幅与折减系数呈反比关系。

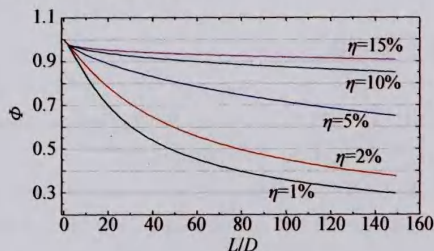


图2 涡激力折减系数

Fig. 2 Reduced factor of vortex-induced force

## 2.2 原型桥梁

大跨度桥梁的振型函数需通过模态分析得到。对于大跨度悬索桥的振型函数可近似用三角函数表示,其一阶对称竖弯模态的振型函数可近似写为  $\phi(x)=\cos(\pi \cdot x/L)$ ,一阶反对称竖弯模态的振型函数为  $\phi(x)=\sin(2\pi \cdot x/L)$ 。将振型函数代入式(9),即可得到实际桥梁或全桥气弹模型对应的折减系数。图3和图4分别为悬索桥一阶对称和反对称竖弯振型对应的折减函数。需要说明的是涡激力沿跨向的相关函数仍近似采用式(13)的表达形式。对于斜拉桥,折减函数的计算需要采用有限元分析得到的振型函数;当然,对于悬索桥,精确计算折减函数同样需要

采用有限元分析的模态函数。

由图3和图4可以看出,二维涡激力向空间涡激力转换时的折减系数  $\Phi$  随结构长高比的增大而衰减。即桥梁跨度越大,折减系数越小;反之,折减系数越大。同时,折减系数也与涡振振幅有关,振幅大,折减系数也大。

由于涡激力沿跨向不完全相关,在二维涡振响应向空间涡振响应转换时便存在一个小于1的折减系数,该折减系数的大小由模型的长高比有关,这恰可以解释不同长高比的节段模型风洞试验结果以及节段模型试验与全桥气弹模型试验结果均不一致的现象。

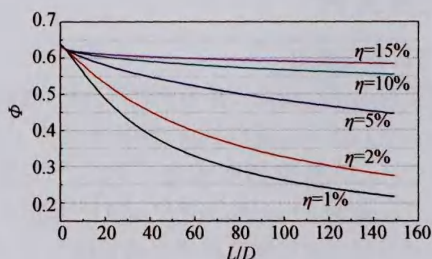


图3 悬索桥一阶对称竖弯振型

Fig. 3 Reduced factor of the first symmetric mode

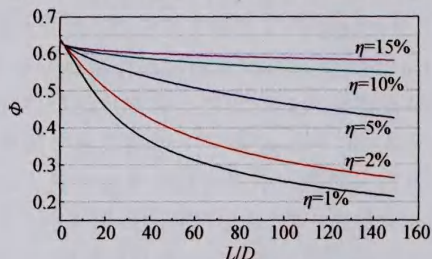


图4 悬索桥一阶反对称竖弯振型

Fig. 4 Reduced factor of the first asymmetric mode

## 2.3 节段模型试验结果在原型桥梁的应用

对于节段模型涡振试验,如果质量、刚度、阻尼等参数均满足相似比要求(质量和阻尼修正方法见文献[8]),节段模型试验的涡振振幅可以通过迭代关系式(16)转换为原型桥梁的振幅:

$$A_{pi+1} = nA_m \frac{\Phi_{pi} \vartheta_m}{\Phi_m \vartheta_p} \quad (16)$$

式中,  $n$  为缩尺比;  $A$  为涡振振幅;  $\Phi$  为折减系数;  $\vartheta_m = 1, \vartheta_p = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \phi^2(x) dx$ ; 下标  $m$  和  $p$  分别代表节段模型和原型桥梁的振幅。具体计算步骤如下:

(1) 由已知节段模型试验得到  $A_m$ , 根据式(9)得到节段模型的折减系数  $\Phi_m$ ;

(2) 首先令原桥振幅  $A_{p1} = nA_m$ , 根据式(9)得到

原桥某阶振型的折减系数  $\Phi_{p1}$ ;

(3) 由节段模型参数及  $\Phi_{p1}$  通过式(16)计算原桥振幅  $A_{p2}$ , 再由式(9)计算可得到原桥某阶振型的折减系数  $\Phi_{p2}$ ;

(4) 在进行第一次迭代时已经对振型函数的差异进行修正, 后续的迭代仅需对振幅进行修正, 即由  $A_{pi+1} = nA_m\Phi_{pi}/\Phi_m$  进一步迭代计算至结果收敛, 便可得到原型桥梁的涡振振幅  $A_p$ 。

利用上述步骤亦可对不同尺度的节段模型涡振振幅进行转换。此时,  $n$  为两个节段模型缩尺比之比;  $\partial_{m1} = \partial_{m2} = 1$ 。

### 3 工程实例

#### 3.1 节段模型试验

以拟建的黄舢长江大桥为例进行分析, 黄舢长江大桥为双塔双索面三跨斜拉桥, 跨径布置为 150m+520m+293m, 主梁宽 31m, 梁高 3.2m。分别设计了大尺度节段模型(1:20)和常规尺度节段模型(1:50)进行风洞试验。大尺度节段模型的长度为 3.460m, 常规尺度节段模型的长度为 2.095m。

试验时两种节段模型均发现了明显的涡激振动。在 0.5%量级阻尼下, 大尺度节段模型得到的涡振振幅为 7.94cm, 常规尺度节段模型的涡振振幅为 6.54cm。大尺度节段模型的试验结果比常规尺度节段模型的试验结果大 21.4%, 这种不一致性是由节段模型的长高比不同引起的。不同长高比导致涡激力沿模型跨向的相关性不一致, 从而两者的振幅有所差异。根据两种节段模型的长高比以及各自的振幅, 应用本文阐述的涡激力偏相关理论对大尺度节段模型试验结果进行修正后, 其振幅减小为 6.97cm, 该结果与常规尺度节段模型试验结果基本一致。

#### 3.2 全桥气弹模型试验

以柳州双拥大跨度悬索桥为研究对象, 该桥的孔跨布置为: 40m+430m+40m, 全长 510m。主梁采用流线型箱梁设计, 桥面全宽 38m, 主梁高 3.5m。分别制作了缩尺比为 1:50 的节段模型和缩尺比为 1:60 的全桥气弹模型进行风洞试验。

节段模型试验得到的振幅为 18.2cm, 全桥模型试验得到的最大振幅为 5.11cm(对称竖弯)和 6.44cm(反对称竖弯)。节段模型的试验结果明显偏大。利用本文阐述的涡激力偏相关理论对节段模型结果进行修正。根据节段模型的参数及试验结果利用迭代关系式(16)对试验结果修正, 得到振幅为

5.21cm(对称竖弯)和 5.04cm(反对称竖弯)。修正后的结果与全桥气弹模型试验结果有较好的一致性。

由于本文推导是基于 Ehsan 拟合的相关函数, 与流线型钢箱梁断面的相关系数有所不同; 另一方面, 涡激力的气动非线性等因素也会对结果的精度产生影响。因此, 修正后的结果与全桥气弹模型试验结果仍存在一定误差。

### 4 结 论

本文基于涡激力经验线性模型, 研究了涡激力沿跨向的相关性, 利用频域分析的方法得到二维力谱到空间力谱的折减关系, 定义了二维涡振响应向空间转换的折减系数, 并给出了节段模型涡振试验结果应用到原型桥梁的具体方法。工程实例结果表明, 应用本文提出的涡激力偏相关理论对试验结果进行修正, 不同尺度的节段模型及全桥模型得到的涡激振动试验结果与理论结果呈现较好的一致性。

另外, 本文对涡激力折减系数的推导基于 Ehsan 拟合的相关函数, 鉴于实际桥梁主梁的涡激力相关函数会有所不同, 为更加准确的预测全桥的涡激振动振幅, 宜采用适当试验途径获得主梁的涡激力相关函数。

#### 参 考 文 献:

- [1] SIMIU E, SCANLAN R H. Wind effects on structures [M]. 2nd Edition. New York, 1986.
- [2] SCANLAN R H. On the state-of-the-arts methods for calculation flutter, vortex-induced vibration and buffeting response of bridge structures[R]. National technical information service, FHWA/RD-80/050. Springfield, 1981.
- [3] LARSEN A. A generalized model for assessment of vortex-induced vibrations of flexible structures [J]. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 1995, 57: 281-294.
- [4] WILKINSON R H. Fluctuating pressures on an oscillating square prism, Part II: Spanwise correlation and loading[J]. *Aero. Quarterly*, 1981, 32(2): 111-125.
- [5] EHSAN F, SCANLAN R H. Vortex-induced vibrations of flexible bridges[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1990, 116: 1392-1410.
- [6] WILLIAMSON C H K. The existence of two stages in the transition to three dimensionality of a cylinder wake [J]. *Physics of Fluids*, 1988, 31: 3165-3168.

- [7] LEE S, LEE J S, KIM J D. Prediction of vortex-induced wind loading on long-span bridges[J]. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 1997, 67-68: 267-278.
- [8] 朱乐东. 桥梁涡激共振试验节段模型质量系统模拟与振幅修正方法[J]. 工程力学, 2005, 22(5): 204-208, 176.
- [9] 鲜荣. 大跨度桥梁沿跨向主梁涡激振动研究[D]. [博士学位论文]. 四川成都: 西南交通大学, 2008.
- [10] HOUBLT J G. On the response of structural having multiple random inputs [R]. WGLR-Jahrbuch, No. 1957, 1958.
- [11] ROBERT J B, SURRY D B. Coherence of grid generated turbulence[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 1973, 99(12): 1227-1245.
- [12] LI Ming-shui, TANAKA H. Extended joint acceptance function for buffeting analysis[J]. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 1996, 64: 1-4.

## A linear approach of vortex induced vibration for long span bridge based on partial correlation of aerodynamic force

LI Ming-shui, SUN Yan-guo, LIAO Hai-li

(Research Centre for Wind Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu Sichuan 610031, China)

**Abstract:** Periodical wake vortices may cause vortex induced vibration of a long span bridge, the vortex-induced aerodynamic force produced by vortices is partial correlation along the span. Based on Scanlan's semi-empirical linear model, the correlation of vortex-induced aerodynamic force along span is studied. The inner-relation of force spectrum from 2D to 3D is found by Fourier transform, and reduced factor of vortex induced response between 2D to 3D is defined, and the methodology for applying modeling test results into prototype is discussed. Validity of proposed theory is proved by different scale sectional models and full aeroelastic model wind tunnel tests.

**Key words:** vortex-induced vibration; long span bridge; partial correlation; wind tunnel tests