

临界现象笔记

Q.X. Fang

Kavli ITS, University of Chinese Academy of Sciences

版本: 1.0

更新: 2025 年 4 月 1 日



目录

I	基本概念	4
I.1	相变和序参量	4
I.2	Ising/XY/Heisenberg Model	4
I.3	普遍性和临界指数	5
I.4	自由能的标度	6
I.5	关联和超尺度	7
II	Ginzburg-Landau-Wilson 理论	9
II.1	相互作用玻色子的配分函数	9
II.2	Bose-Einstein 凝聚	10
II.3	Hartree 近似	11
II.4	Landau 平均场理论	12
II.5	上临界维度	13
III	重整化理论	15
III.1	基本概念	15
III.2	壳动量转换	16
III.3	ϵ 展开	19
III.4	非相关耦合	21
IV	超导转变	22
IV.1	迈斯纳效应	22
IV.2	涨落诱导的一级相变	24
IV.3	近四维的第二类超导体	26
IV.4	规范场的反常维度	28

IV.5 临界区宽度	29
V 近低维临界现象	30
V.1 戈德斯通模	30
V.2 默明-瓦格纳-霍恩伯格定理	31
V.2.1 定理证明框架	31
V.2.2 关键量构造	32
V.2.3 二阶项计算	32
V.2.4 不等式整合	33
V.3 非线性 σ 模型	33
V.3.1 约束条件的处理	33
V.3.2 零阶近似分析	34
V.4 低温展开	35
V.4.1 热平均计算	35
V.4.2 四阶项分析	35
V.4.3 重整化群方程	36
V.4.4 临界行为分析	36
V.5 讨论	37
V.5.1 临界展开的局限性	37
V.5.2 理论困境的根源	37
V.5.3 $N = 2$ 超流体的特殊性	37
V.5.4 理论启示	37

I 基本概念

I.1 相变和序参量

相变：在参数空间中热力学函数转变为非解析的点。当系统尺寸无限大时，非解析性只在热力学极限下才会出现。有限大尺寸的系统中，热力学函数始终是解析的（配分函数是有限和）。

相变的分类：连续相变（二阶相变）和不连续相变（一级相变）。

连续相变是：宏观系统在平衡状态下不包含潜热的相变；

非连续相变：有潜热。

接近连续相变系统的非解析性质称为临界现象（critical phenomenon）。发生连续相变的点是临界点（critical point）。

序参量（order parameter）：描述系统状态的参数，用于区分系统的不同相，一般是可观测量（经典 Landau 理论）

I.2 Ising/XY/Heisenberg Model

Ising model: 能量和配分函数:

$$E = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j - H \sum_i S_i, \quad (1)$$

$$Z = \sum_{\{S_i\}} e^{-\beta E}, \quad \beta = \frac{1}{kT}. \quad (2)$$

每个格点上的自旋有两个取值。耦合系数 $J > 0$ 时，自旋倾向于同取向排列， $J < 0$ 时，自旋倾向于反平行排列。 H 为外磁场。在低温 $T \ll J$ 时，系统倾向于有序排列，高温 $T \gg J$ 时，系统无序。序参量定义为每个偶极（一对自旋）上的磁矩：

$$m = \langle S_j \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{S_i} S_j e^{-\beta E}. \quad (3)$$

在外磁场为 0，温度处于临界温度时。铁磁态的序参量不为 0，顺磁态的序参量为 0。当外磁场不为 0 时，自旋更倾向于与外磁场平行排列，因此磁化总是有限的。相图如图：

分析：一维链在有限温度下不会出现磁化。从同一方向出发的自旋翻转需要的能量改变是 $\Delta E = 2J$ ，可以有 N 中不同的翻转选择。熵的改变时： $\Delta S = kT \ln N$ ，熵会增加，在温度有限的情况下，自由能 $F = E - TS$ 会减小，因此有序态不稳定。只有在温度为 0 时，系统才会有序，才会有明显的磁化。

二维状态：存在自发磁化的可能。Onsager 解析解： $kT_c = 2.269J$ 为临界温度，在临界温度附近和这之下，磁化大概有： $m \sim (T_c - T)^{1/8}$ 。在临界温度附近，磁化的关联长度 $\xi \sim |T - T_c|^{-1}$ ，比热的发散 $C \sim -\ln |T - T_c|$ 。

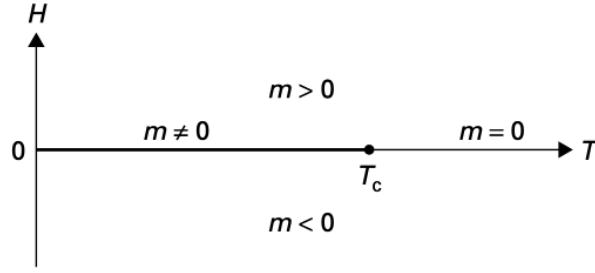


图 1: Ising 模型相图

三维情况现在没有解析解, 只能通过数值模拟。Monte Carlo 方法是一种常用的模拟方法。上述讨论证明了维度可以影响平衡态统计力学下的相变问题。

对称性: 在外磁场为 0 的情况下, Ising model 在所有自旋翻转下保持不变, 因此有 Z_2 对称性。这种对称性也存在于 $m = 0$ 的顺磁相。

配分函数若是对所有构型求和, 则磁化总是消失。为了描述有限磁化, 限制配分函数求和的构型, 方法: 在含外磁场的情况下求和, 然后取热力学极限, 最后取零场极限。

离散对称群 Z_2 的对称性和容易扩展到更高维的对称性, 如 Z_3 等。也可以扩展到连续对称的情况: 自旋在平面或空间中任意指向, 则可以得到 XY 模型和 Heisenberg 模型。XY 模型的自旋在平面上取值, Heisenberg 模型的自旋在三维空间中取值。铁磁耦合的配分函数是:

$$Z = \int \prod_i^N (\delta(|\vec{s}_i| - 1) d^D \vec{s}_i) \exp \left\{ \left(-\beta J \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j + \beta \vec{H} \cdot \sum_i \vec{s}_i \right) \right\} \quad (4)$$

$D = 2$ 时是 XY 模型, $D = 3$ 时是 Heisenberg 模型。耦合强度来自于量子力学效应中的交换作用。波函数性质决定了耦合的正负, 也就是铁磁或者反铁磁。J 如果满足一定的随机分布, 可以得到 spin glass 模型。

L3 普遍性和临界指数

不同物理系统的临界点可能出现相似的临界现象, 这种现象称为普遍性 (universality)。普遍性的一个重要特征是临界指数。

解释普遍性的一个重要工具是重整化群理论 (Renormalization group theory)。

在临界压强 $p = p_c$, 体积固定的的气液相变, 重定义一个无标度温度 $t = \frac{T - T_c}{T_c}$, 在热力学极限下, 临界点附近的比热产生幂律行为:

$$C_V = C_{\pm} |t|^{-\alpha} \quad (5)$$

其中 C_+ 和 C_- 分别对应于 $t > 0$ 和 $t < 0$ 的情况, 其他常数: 恒温压缩比 $K_T = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p}$, 其中 ρ 是密度。在临界点附近, K_T 的幂律行为:

$$K_T = K_{\pm} |t|^{-\gamma} \quad (6)$$

定义序参量: $\rho_L - \rho_G = \rho_c(-t)^\beta$, 其中 ρ_L 和 ρ_G 分别是液相和气相的密度。在临界点的密度为 ρ_c 。无标度压强满足:

$$\frac{p - p_c}{p_c} = \left| \frac{\rho_L - \rho_G}{\rho_c} \right|^\delta \quad (7)$$

这些幂律分布的指数是一些非平凡的实数, 在不同物理系统中有着相同的值。这些指数是临界指数。此外, 缩放函数和振幅比也是一些普遍量, 但临界指数更为常用。

I.4 自由能的标度

标度假设可以给出临界点附近的幂律行为。假设磁化沿一个轴, 可以假设为标量, 这称为“单轴铁磁体”。因此可以保证一个与 Ising 相同对称性顺磁-铁磁相变系统。假设单位体积上的 Gibbs 自由能是温度和外磁场的函数, 在临界点 $T = T_c$ 和 $H = 0$ 附近, 单位体积自由能是:

$$f(T, H) = |t|^{\frac{1}{w}} \Psi_{\pm} \left(\frac{H}{|t|^{\frac{u}{w}}} \right) \quad (8)$$

其中 Ψ_+ 和 Ψ_- 是两个不同的缩放函数, 分别对应于 $t > 0$ 和 $t < 0$ 的情况。 w 和 u 是临界缩放指数。

$H = 0$ 时, 单位体积的磁化强度是:

$$m = - \left. \frac{\partial f}{\partial H} \right|_{H=0} = |t|^{\frac{1}{w} - \frac{u}{w}} \Phi'_{\pm}(0) \quad (9)$$

当 $t > 0$ 时, 系统是顺磁体, 因此 $m = 0$, 这就要求缩放函数为 0。磁化作为顺磁-铁磁转变的序参量, 因此可以定义:

$$m \propto (-t)^\beta, \quad t < 0 \quad (10)$$

对于平均磁化率, 在临界温度附近的幂律表现:

$$\chi = \left. \frac{\partial m}{\partial H} \right|_{H=0} = -|t|^{-\frac{1-2u}{w}} \Psi''_{\pm}(0) \quad (11)$$

其和磁场为共轭变量, 因此表现上类似于压缩比。铁磁顺磁转变: $\chi \sim |t|^{-\gamma}, \gamma = \frac{2u-1}{w}$ 。

对于比热:

$$C_V = -T \left. \frac{\partial^2 f}{\partial T^2} \right|_{H=0} = -\frac{\Psi_{\pm}(0)}{T_c} \frac{1}{w} \left(\frac{1}{w} - 1 \right) t^{\frac{1}{w}-2} \quad (12)$$

于是临界指数: $\alpha = \frac{2w-1}{w}$ 。定义顺磁-铁磁转变的指数 δ , 定义为: $m \propto H^{\frac{1}{\delta}}$ 。相变点 $t = 0$, 在 $H \rightarrow 0$, 于是重标度化单位体积自由能为:

$$f(T, H) = H^{\frac{1}{u}} \tilde{\Psi}_{\pm} \left(\frac{H}{|t|^{\frac{u}{w}}} \right) \quad (13)$$

重标度化的缩放函数是 $\tilde{\Psi}_{\pm}(z) = z^{-\frac{1}{u}} \Psi_{\pm}(z)$ 。于是 $t = 0$ 和较小的 H 情况下:

$$m = -\frac{1}{u} H^{\frac{1}{u}-1} \tilde{\Psi}_{\pm}(\infty) \quad (14)$$

于是 δ 只和 u 有关, $\delta = \frac{u}{1-u}$ 。

四个临界指数只有两个独立，在消除 w 和 u 后，可以得到：

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2, \quad (15)$$

$$\alpha + \beta(1 + \delta) = 2. \quad (16)$$

称为 Rushbrooke 和 Griffiths 关系。自由能标度形式保证了临界指数在临界下和临界上是相同的，但缩放函数不同。

I.5 关联和超尺度

两点关联函数：

$$G(r, t) = \langle (m(r) - m)(m(0) - m) \rangle = \langle m(r)m(0) \rangle - m^2 \quad (17)$$

假设两点关联的缩放形式满足：

$$G(r, t) = r^{2-d-\eta} \phi_{\pm} \left(\frac{r}{\xi(t)} \right) \quad (18)$$

其中关联长度 $\xi(t) \sim |t|^{-\nu}$ ， ν 是临界指数。 d 是空间维度， η 是关联指数。在临界点附近，关联长度趋于无穷大，因此系统的长程关联性质会变得明显。同样，在临界点上下的缩放函数不同。

非局域磁化率：

$$\chi(r - r') = \left. \frac{\partial m(r)}{\partial H(r')} \right|_{H=0} \quad (19)$$

线性响应理论给出： $\chi(\vec{q}) = G(\vec{q})$ ，对于 $(\vec{q} = 0)$ 的磁化率，有：

$$\chi = \chi(\vec{q} = 0) = \int d^d \vec{r} G(\vec{r}, t) \quad (20)$$

这显然回到了局域磁化率。两点关联具有上面的缩放形式，于是：

$$\chi = \int d^d \vec{r} r^{2-d-\eta} \phi_{\pm} \left(\frac{r}{\xi(t)} \right) = \text{const} \times \xi^{2-\eta} \quad (21)$$

做了变量代换，常数：

$$\text{const} = \int d^d \vec{z} z^{2-d-\eta} \phi_{\pm}(z) \quad (22)$$

临界相变上，局域磁化强度关联要求在两个远点的关联为 0。于是 $\phi_+(z)$ 至少是指数小的。在临界点下，磁化不为 0，但长距离上的关联也是十分小的。于是积分给出来的值都是有限的。又由于 $\xi \sim |t|^{-\nu}$ ，于是可以获得临界指数间的关系：

$$\gamma = \nu(2 - \eta) \quad (23)$$

称为 Fisher's scaling law. 假设在临界温度附近的长度标度仅由关联长度提供，则单位体积的自由能有标度：

$$f \propto \xi(t)^{-d} \sim |t|^{-d-\nu} \quad (24)$$

对温度微分两次，得到：

$$C \propto |t|^{\nu d - 2} \quad (25)$$

于是： $\alpha = 2 - \nu d$ 。这称为 Josephson's scaling relation。这个关系是临界指数的一个约束。由于涉及到维度，也被称为超缩放。

六个临界指数： $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \nu, \eta$ 。

II Ginzburg-Landau-Wilson 理论

II.1 相互作用玻色子的配分函数

相互作用的玻色子系统是一个具有连续相变的系统。玻色子的多体态:

$$|n_{i_1}, n_{i_2}, \dots, n_{i_N}\rangle = \prod_{i=1}^N \frac{(\hat{a}_{i_s}^\dagger)^{n_{i_s}}}{\sqrt{n_{i_s}!}} |0\rangle \quad (26)$$

一个任意多体态:

$$|\Psi\rangle = \sum_{n_{i_1}, n_{i_2}, \dots, n_{i_N}} C_{n_{i_1}, n_{i_2}, \dots, n_{i_N}} |n_{i_1}, n_{i_2}, \dots, n_{i_N}\rangle \quad (27)$$

对于相干态 $|\alpha\rangle$, 若有: $\hat{a}_{i_s} |\Phi\rangle = \alpha_{i_s} |\Phi\rangle$, 则:

$$C_{n_{i_1}, n_{i_2}, \dots, n_{i_N}} = \prod_{i=1}^N \frac{(\alpha_{i_s})^{n_{i_s}}}{\sqrt{n_{i_s}!}} \quad (28)$$

仿照单粒子相干态, 可以得到多粒子相干态的展开形式:

$$|\alpha\rangle = \sum_{\{n_{i_s}\}} \prod_s \frac{(\alpha_{i_s} \hat{a}_{i_s}^\dagger)^{n_{i_s}}}{n_{i_s}!} |0\rangle = \exp\left\{\sum_{i_s} \alpha_{i_s} \hat{a}_{i_s}^\dagger\right\} |0\rangle \quad (29)$$

同单粒子相干态类似, 有超完备特征。

巨正则配分函数:

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} \quad (30)$$

体系的哈密顿量是:

$$\hat{H} = \sum_i e_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \sum_{i,j,k,l} u_{ijkl} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k \hat{a}_l \quad (31)$$

其中: e_i 是单粒子能量, $u_{ijkl} = \langle ij|V|kl\rangle$ 是相互作用势能。粒子数算符: $\hat{N} = \sum_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$ 。相干态下巨正则配分函数可以写成:

$$Z = \int \prod_i \frac{d\alpha_i^* d\alpha_i}{2\pi i} \exp\left\{-\sum_i \alpha_i^* \alpha_i\right\} \langle \alpha | e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} | \alpha \rangle \quad (32)$$

类似于路径积分的方法, 将温度 T , 确切的说是 β 对应视为虚时间, 进行拆分:

$$Z = \int \prod_{k=0}^{M-1} \prod_i \frac{d\alpha_{i,k}^* d\alpha_{i,k}}{2\pi i} \exp\left\{-\sum_{k=0}^{M-1} \sum_i \alpha_{i,k}^* \alpha_{i,k}\right\} \prod_{k=1}^{M-1} \langle \alpha_{k-1} | e^{-\epsilon(\hat{H} - \mu \hat{N})} | \alpha_k \rangle \quad (33)$$

其中 α_k 是在虚时间 k 的相干态。 $\alpha_0 = \alpha_M = \alpha$, $\epsilon = \frac{\beta}{M}$ 。矩阵元展开到一阶近似:

$$\langle \alpha_{k-1} | e^{-\epsilon(\hat{H} - \mu \hat{N})} | \alpha_k \rangle = e^{-\epsilon \langle \alpha_{k-1} | 1(\hat{H} - \mu \hat{N}) | \alpha_k \rangle} + O(\epsilon^2) \quad (34)$$

正规乘积: 产生算符在湮灭算符左侧。哈密顿算符和粒子数算符满足该条件。在正规乘积下的算符 A 在相干态下的矩阵元:

$$\langle \alpha | A(\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_i) | \alpha' \rangle = A(\alpha_i^*, \alpha'_i) e^{\sum_i -\alpha_i^* \alpha'_i} \quad (35)$$

取 $M \rightarrow \infty$, $\epsilon \rightarrow 0$, 连续极限下获得配分函数是:

$$Z = \lim_{M \rightarrow \infty} \int \prod_{k=0}^{M-1} \prod_i \frac{d\alpha_{i,k}^* d\alpha_{i,k}}{2\pi i} e^{-\sum_{k=0}^m \sum_i \alpha_{i,k}^* (\alpha_{i,k} - \alpha_{i,k+1})} \times \exp \left\{ - \sum_{k=0}^{M-1} \epsilon (H(\alpha_{i,k}^*, \alpha_{i,k+1}) - \mu \sum_i \alpha_{i,k}^* \alpha_{i,k}) \right\} \quad (36)$$

于是连续的泛函积分:

$$Z = \int_{\alpha_i(0)=\alpha_i(\beta)} D\alpha_i^*(\tau) D\alpha_i(\tau) e^{-S[\alpha_i^*(\tau), \alpha_i(\tau)]} \quad (37)$$

作用量:

$$S[\alpha_i^*(\tau), \alpha_i(\tau)] = \int_0^\beta d\tau \left[\sum_i \alpha_i^*(\tau) (\partial_\tau - \mu) \alpha_i(\tau) + H[\alpha_i^*(\tau), \alpha_i(\tau)] \right] \quad (38)$$

如果考虑坐标:

$$S = \int_0^\beta d\tau \int d\vec{x} \left[\Phi^*(\vec{x}, \tau) \left(-\partial_\tau - \mu - \frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \right) \Phi(\vec{x}, \tau) + \int d\vec{y} |\Phi(\vec{x}, \tau)|^2 V(\vec{x} - \vec{y}) |\Phi(\vec{y}, \tau)|^2 \right]. \quad (39)$$

配分函数可以看作是空间和虚时间中所有可能的具有周期性的复函数的和, 这个泛函积分包含了所有信息。

II.2 Bose-Einstein 凝聚

对于无相互作用体系, 周期性函数做 Fourier 分解: (上文中所有 α 替换为 Φ)

$$\Phi(\vec{x}, \tau) = \frac{1}{\beta} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} \sum_n e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} + \omega_n \tau)} \Phi_n(\vec{k}, \omega_n) \quad (40)$$

其中松原频率 $\omega_n = 2\pi n/\beta$, n 是整数。路径积分就可以写成:

$$\begin{aligned} Z &= Z_0 = \prod_{\vec{k}, \omega_n} \int \frac{d\Phi^*(\vec{k}, \omega_n) d\Phi(\vec{k}, \omega_n)}{2\pi i} e^{-\beta^{-1} \sum_{\vec{k}, \omega_n} (-i\omega_n + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu) |\Phi(\vec{k}, \omega_n)|^2} \\ &= \prod_{\vec{k}, \omega_n} \frac{\beta}{-i\omega_n + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu}. \end{aligned}$$

有了配分函数, 可以计算各种物理量。自由能是 $F_0 = -kT \ln Z_0$, 于是粒子数:

$$N = -\frac{\partial F_0}{\partial \mu} = \frac{1}{\beta} \lim_{\eta \rightarrow 0} \sum_{\vec{k}} \sum_{\omega_n} \frac{e^{i\omega_n \eta}}{-i\omega_n + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu} \quad (41)$$

考虑沿无限大圆曲线上的积分:

$$I = \int_C d\omega \frac{e^{\omega \eta}}{(e^{\omega \beta} - 1)(\omega - x)} \quad (42)$$

得到:

$$I = 2\pi i \left(\frac{e^{x\eta}}{e^{\beta x} - 1} + \sum_{\omega_n = 2\pi n/\beta} \frac{e^{i\omega_n \eta}}{\beta (i\omega_n - x)} \right) \quad (43)$$

计算出在空间位置 x 的标准粒子数:

$$\frac{1}{\beta} \sum_{\omega_n} \frac{e^{i\omega_n \eta}}{-i\omega_n + x} = \frac{e^{x\eta}}{e^{\beta x} - 1} = n_B(x) \quad (44)$$

令 $\eta = 0$, 获得标准 Bose 粒子数分布, η 在这里的作用只是保证之前的积分式中的收敛性。在热力学极限下, 将波矢求和化为积分, 得到:

$$\frac{N}{V} = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} \left[e^{\frac{(\hbar^2 k^2/2m) - \mu}{k_B T}} - 1 \right]^{-1} \quad (45)$$

为了令所有情况下的占据数都不为负, 化学势必须小于或等于零。粒子数固定, 化学势必须是递减函数。假设在温度 T_{BEC} 时, 化学势为零, 三维条件下:

$$\frac{N}{V} = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar^2 k^2/2m}{k_B T_{BEC}}} - 1} = 2.612 \left(\frac{2\pi m k_B T_{BEC}}{h^2} \right)^{3/2} \quad (46)$$

在低于该温度时, 所有的化学势都为 0。当粒子数固定式, 在转变温度下, 有一些单粒子态被总粒子数的部分占据, 因此, 这种温度下的宏观占据态是零动量的基态。这种现象称为 Bose-Einstein 凝聚。转变温度满足:

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_{BEC}} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (47)$$

注意前面的积分和维数有关系, 比如当 $d = 2$ 时, 积分是发散的, 因此没有 BEC。三维 Bose-Einstein 凝聚是非相互作用系统的唯一相变。

II.3 Hartree 近似

令相互作用势的形式为 $\lambda\delta(r)$ 的形式, 可用于研究超流体问题。

配分函数的计算存在困难, 多体项给出:

$$\begin{aligned} & \lambda \int_0^\beta d\tau \int d\vec{r} |\Phi(\vec{r}, \tau)|^4 \\ &= \frac{\lambda}{\beta^4} \int \frac{d\vec{k}_1 \cdots d\vec{k}_4}{(2\pi)^{3d}} \sum_{\omega_1, \dots, \omega_4} \delta_{\omega_1 + \omega_2, \omega_3 + \omega_4} \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3 - \vec{k}_4) \\ & \times \Phi^*(\vec{k}_1, \omega_1) \Phi^*(\vec{k}_2, \omega_2) \Phi(\vec{k}_3, \omega_3) \Phi(\vec{k}_4, \omega_4) \end{aligned} \quad (48)$$

Hartree 平均使用一个简单的二次项平均来代替四次项:

$$|\Phi(\vec{r}, \tau)|^4 \rightarrow \langle |\Phi(\vec{r}, \tau)|^2 \rangle |\Phi(\vec{r}, \tau)|^2 \quad (49)$$

平均值的计算是自洽计算, 这称为 Hartree 近似。这个近似是平均场近似的一种, 该近似的一个作用是将化学势进行了转换:

$$\mu \rightarrow \tilde{\mu} = \mu - \lambda \langle |\Phi(\vec{r}, \tau)|^2 \rangle \quad (50)$$

计算得到一个有效无相互作用系统，展开计算：

$$\tilde{\mu} = \mu - \frac{\lambda}{\beta} \sum_n \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\omega_n \eta}}{-i\omega_n + \frac{2}{2m} - \tilde{\mu}} \quad (51)$$

BEC 在 $\tilde{\mu} = 0$ 处发生，因此：

$$\mu = \mu_c(T) = \lambda \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} \left[e^{-\frac{\hbar^2 k^2}{2mkT}} - 1 \right] \quad (52)$$

在 $d > 2$ 时，波矢是有限的。利用温度重新缩放，在低温下相变点化学势 $\mu_c(T) \propto T^{\frac{d}{2}}$ 在 $T = 0$ 时，相变化学势为 $\mu_c(0) = 0$ ，在 $T = 0$ 时，称为量子相变。量子相变的发生源于对哈密顿量的耦合常数进行调整。在 $T = 0$ 时，松原频率连续化，有限温度下，积分对于非 ω_0 的部分作用。在 $|n| \geq 1, quad T > 0$ 的 ω_n 是非临界的，因为对临界转变没有多少贡献。

热力学奇异性：热力学奇异性主要来自于对波矢的积分。0 模式和其他模式有 gap。

II.4 Landau 平均场理论

有限温情况中，考虑到 $\omega_n > 0$ 的部分对于相变作用较小，因此省略，在配分函数中只保留了 $\omega_0 = 0$ 的部分。于是作用量：

$$S[\Phi] = \frac{1}{\beta} \int d\vec{x} \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \Phi(\vec{x})|^2 - \mu |\Phi(\vec{x})|^2 + \lambda |\Phi(\vec{x})|^4 \right] \quad (53)$$

这个平均场就是 Ginzburg-Landau-Wilson 理论。对于其中的场 Φ ，可以是一个 N 分量的场。 $N = 1$ 时，场值的正负翻转对于作用量时不变的，这与 Ising 的全局 \mathbb{Z}_2 对称性一致。对于 $N = 3$ 的情况，在全局旋转 $\Phi_i(\vec{x}) \rightarrow A_{ij} \Phi_j(\vec{x})$, $A^T A = 1$ 是 $SO(3)$ 对称的。这与海森堡模型由相同的对称性。对于 $N = 2$ 的情况，则是 XY 模型。这些模型都是具有连续对称性的模型。

Ginzburg-Landau-Wilson 理论只能给出普遍的临界行为，不能给出临界区外的热力学行为。

自发对称性破缺：作用量具有最小化原理限制，因此可以取最小化的作用量直接计算自由能 $F = kTS[\Phi_0]$ ，其中 Φ_0 是最小化 S 的场，也就是：

$$\left. \frac{\delta S}{\delta \Phi} \right|_{\Phi_0} = 0 \quad (54)$$

立刻可以得到：

$$|\Phi_0|^2 = \frac{\mu}{2\lambda} \quad (55)$$

分析参数：对于 $\mu < 0$ 的情况，给出正常相，方程没有非平凡的解。因此 $\Phi_0 = 0$ ，是单一态。当 $\mu > 0$ 时：

$$S[\Phi_0] = -\frac{\mu^2}{4\lambda} \frac{V}{kT} < S[0] = 0 \quad (56)$$

考虑 $\mu(T)$ 转变符号的温度为 T_c ，作用量中二次项系数为 $-\mu$ ，在转变温度附近展开： $\mu \sim (T_c - T) + O(T_c - T)^2$ ，

当 $\mu > 0$ 时, $\Phi_0 = 0$ 可以达到局部最大值。序参量定义成 $\langle \Phi(\vec{x}) \rangle$ 。对于相位, 相位的选择是任意的, 但一般选择为 0, 这都破坏了全局的 $U(1)$ 对称性: $\Phi(\vec{x}) \rightarrow e^{i\phi} \Phi(\vec{x})$ 也就是说, 在超流体中 $U(1)$ 对称是自发破缺的。

作用量对温度的二次微分, 比热在转变处只有有限的不连续性, 临界指数 $\alpha = 0$ 。定义超流体的全局磁化率:

$$\chi(r - r') = \left. \frac{\delta^2 \ln Z[j]}{\delta j^*(r) \delta j(r')} \right|_{j=0} \quad (57)$$

这是含源的配分函数, 因此作用量换成:

$$S \rightarrow S + \int d\vec{x} [\Phi(\vec{x}) j(\vec{x}) + \Phi^*(\vec{r}) j^*(\vec{r})] \quad (58)$$

计算得到:

$$\chi(r - r') = \langle \Phi^*(\vec{r}) \Phi(\vec{r}') \rangle - |\langle \Phi(\vec{r}) \rangle|^2 \quad (59)$$

系统是平移不变的, 因此 $\chi(r - r')$ 只依赖于 $r - r'$, 在超流体中, $j(r)$ 并没有直接的物理意义, 只是数学处理。

在鞍点近似下, $\Phi(\vec{x})$ 在鞍点附近的微扰可以用于计算磁化率, 设 $\mu < 0$, 在正常的平凡鞍点附近展开, 设置 $\lambda = 0$, 于是计算:

$$\ln Z[j] = \int d\vec{x} d\vec{x}' j^*(\vec{x}) \chi_0(\vec{x} - \vec{x}') j(\vec{x}') + const. \quad (60)$$

常数与源场无关。正常相的平均磁化率和无相互作用系统一致, 即:

$$\chi_0(\vec{x}) = kT \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu} \quad (61)$$

相变点附近 $\mu(T_c) = 0$, 于是有:

$$\chi_0(\vec{x}) = \frac{2mkT_c}{\hbar^2} \frac{F(r/xi)}{r^{d-2}} \quad (62)$$

放缩函数:

$$F(z) = z^{d-2} \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\vec{q} \cdot \vec{z}}}{q^2 + 1} \quad (63)$$

关联长度是 $\xi = \hbar/\sqrt{2m|\mu|}$, 因此, 关联长度的临界指数 $\nu = \frac{1}{2}$, 异常维度 $\eta = 0$ 。在傅立叶空间中 $\chi(\vec{k} = 0) \sim |\mu|^{-1}$, 因此 $\gamma = 1$ 。

II.5 上临界维度

Landau 理论只能用于描述临界下的行为。在临界点上的行为, 微扰理论失效。取无量纲的场、长度和相互作用:

$$\Phi \rightarrow \xi^{(d-2)/2} \frac{\Phi}{\Lambda}, \quad \vec{z} \rightarrow \frac{\vec{z}}{\xi}, \quad \hat{\lambda} = \frac{2m\Lambda^2}{\hbar^2} \lambda \xi^{4-d} \quad (64)$$

其中关联长度 $\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{2m|\mu|}}$, Λ 是高能截断。于是化学势小于 0 的作用量:

$$S = \frac{\hbar^2 \Lambda^2}{2mkT} \int d\vec{z} \left[\left| \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{z}} \right|^2 + |\Psi|^2 + \hat{\lambda} |\Psi|^4 \right] \quad (65)$$

微扰理论要求 $\hat{\lambda}$ 必须很小, 但在相关长度发散的临界点附近, 就和维度 d 有关了,

1. $d > 4$ 时, $|\mu| \rightarrow 0, \hat{\lambda} \rightarrow 0$, 平均场理论给出正确临界行为
2. $d < 4$ 时, $|\mu| \rightarrow 0, \hat{\lambda} \rightarrow \infty$ 微扰理论在临界区域失效, 在远离临界区域才可以继续成立

因此, Landau 理论的上临界维度即为 $d = 4$, 这与场的分量个数无关。在临界维度上, 关联长度和耦合常数无关, 在临界区域上耦合始终一致, 那么平均场在特殊条件下成立。

III 重整化理论

III.1 基本概念

无量纲耦合常数和关联长度有关，平均场理论在低于上临界维度的情况下由于关联长度的发散会失效。而有限尺寸系统关联长度则会收到尺寸限制，因此微扰理论是可能成立的。临界点的热力学现象来自热力学极限，更确切的，无限大系统有能量任意低的模式，称为红外奇点。

质量项提供的是能量标度，因此可以将之吸收到化学势中去，定义如下的缩放：

$$\mu \rightarrow \frac{2m\mu}{\hbar^2}, \quad \lambda \rightarrow \frac{2m\lambda}{\hbar^2} \quad (66)$$

在临界点附近，可以使用临界温度来代替温度，然后缩放作用量：

$$S \rightarrow \frac{2mkT_c}{\hbar^2} S \quad (67)$$

经过这些简化后，磁化率仅仅成为波矢量、化学势和耦合常数的函数：

$$\chi(\mathbf{k}, \mu, \lambda) = F(\mathbf{k}, \mu, \lambda) \quad (68)$$

其中隐含了对于紫外截止的依赖。紫外截止是能量量纲，因此其逆是长度量纲。紫外阶段对应最大截断能量，对应的逆就是最小的长度尺度。对于不同波矢对应的模式，慢的模式是奇异临界现象主要贡献者，因此可以保留这些模式，将快的模式积掉，即 $\frac{\Lambda}{b} < k < \Lambda, b \approx 1$ 。这样就可以得到仅保留了 $k < \frac{\Lambda}{b}$ 的部分模式。积分包含了粗粒化变量 b ，因此化学势和耦合常数也成为 b 的函数，磁化率是：

$$\chi(\mathbf{k}, \mu, \lambda) = b^x F(b\mathbf{k}, \mu(b), \lambda(b)) \quad (69)$$

波矢量的缩放容易理解，是由于积分变量缩放导致的时空变量缩放（积分上限被缩放）。右侧的因子 b^x 是单位长度上的磁化率的维度，即 $\chi \sim \Lambda^{-x}$ ，现在取 $b \rightarrow \infty$ ，定义：

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \lambda(b) = \lambda^* \quad (70)$$

对于较大的 b ，就可以把耦合常数先固定下来，写成： $\chi(\mathbf{k}, \mu, \lambda) = b^x F(b\mathbf{k}, \mu(b), \lambda^*)$ 如果 λ^* 较小，则可以使用微扰理论。

一些讨论：

1. b 的增加可能带来的高次项： $\lambda'(b)|\Phi|^6, \lambda''(b)|\Phi|^8, \lambda'''(b)|\nabla\Phi|^2|\Phi|^2$ ，对称性会限制相关项，比如 $U(1)$ 对称性要求不能存在 $\Phi^*\Phi^2$ 这样的项。当 $b \rightarrow \infty$ 时，耦合常数可能会到 0 或者有限值。极限为 0 时，称为无关耦合。有限的情况下需要包含 b 的演化，则是相关耦合。有限值的情况称为重整化。
2. λ^* 可能有限大，而不是有限小，恰好使得微扰理论不合适。这种计算情况需要计算更高阶展开。
3. 若 λ^* 不是有限的， $\lambda(b)$ 随着 b 增加趋于无穷大，则存在一阶跃迁。

因此在这里讨论第一种的情况，并且要求 $b \gg 1, \mu < 0$ ，假设 $\mu(b) \approx \mu b^y$ ，选择参数 $\mu b^y = \mu_0$ ， μ_0 是一个常数。这样就可以得到：

$$\chi(\vec{k}) = \left| \frac{\mu_0}{\mu} \right|^{x/y} F \left(k \left| \frac{\mu_0}{\mu} \right|^{1/y}, \mu_0, \lambda^* \right) \quad (71)$$

傅立叶变换后可以看到临界指数： $\nu = \frac{1}{y}, \gamma = \frac{x}{y}$

III.2 壳动量转换

设置 $\frac{\hbar^2}{2m} = kT_c = 1$ ，考虑虚时间独立的截断下的所有动量。将场分为高能部分和低能部分：

$$\Phi(\vec{x}) = \Phi_L(\vec{x}) + \Phi_H(\vec{x}) \quad (72)$$

低能部分是 $k < \frac{\Lambda}{b}$ ，高能部分是 $\Lambda > k > \frac{\Lambda}{b}$ 。配分函数：

$$Z = \int \prod_{k < \Lambda} \frac{d\Phi^*(\vec{k}) d\Phi(\vec{k})}{2\pi i} e^{-(S_{0L} + S_{0H} + S_{\text{int}})} \quad (73)$$

其中：

$$\begin{aligned} S_{0L} &= \int_0^{\Lambda/b} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} (k^2 - \mu) |\Phi(\vec{k})|^2 \\ S_{0H} &= \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} (k^2 - \mu) |\Phi(\vec{k})|^2 \end{aligned} \quad (74)$$

相互作用部分：

$$S_{\text{int}} = \lambda \int_0^{\Lambda} \frac{d\vec{k}_1 \dots d\vec{k}_4}{(2\pi)^{3d}} \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3 - \vec{k}_4) \Phi^*(\vec{k}_4) \Phi^*(\vec{k}_3) \Phi(\vec{k}_2) \Phi(\vec{k}_1) \quad (75)$$

在 λ 微扰的情况下，零阶计算出配分函数 $Z = Z_{0L} Z_{0H}$ ，分解为高能 and 低能部分的乘积。高能部分只对自由能中的正常和解析部分起作用，低能部分形式上和无相互作用配分函数一致，但是上限被放缩到 λ/b 。将波矢量重新放缩： $b\vec{k} \rightarrow \vec{k}$ ，则有：

$$S_{0L} = \frac{1}{b^d} \int_0^{\Lambda} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} \left(\frac{k^2}{b^2} - \mu \right) |\Phi(\vec{k})|^2 \quad (76)$$

重参数化 $\mu(b) = \mu b^2$ ，缩放场量为： $\Phi(\vec{k})/b^{(d+2)/2} \rightarrow \Phi(\vec{k})$ 。积分的最终结果不应该受到缩放本身的影响，也就是配分函数的测度中的缩放只对自由能贡献了一个可加的正则部分，因此在零阶微扰展开下：

$$\mu(b) = \mu b^2 + O(\lambda) \quad (77)$$

因此临界指数 $\nu = \frac{1}{2}$ ，正常相零阶相互作用下磁化率是：

$$\chi(k) = \frac{b^2}{(bk)^2 - \mu(b)} \quad (78)$$

临界指数 $\gamma = 1$ 。零阶近似给出的和平均场一致。

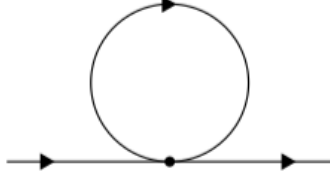


图 2: 一阶圈图

一阶近似下:

$$Z = Z_{0H} \int \prod_{k < \Lambda/b} \frac{d\Phi^*(\vec{k})d\Phi(\vec{k})}{2\pi i} e^{-S_{0L}} \left[1 - \lambda \int_0^\Lambda \frac{d\vec{k}_1 \dots d\vec{k}_4}{(2\pi)^{3d}} \right. \\ \left. \times \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3 - \vec{k}_4) \langle \Phi^*(\vec{k}_4) \Phi^*(\vec{k}_3) \Phi(\vec{k}_2) \Phi(\vec{k}_1) \rangle_{0>} + O(\lambda^2) \right] \quad (79)$$

一阶展开对化学势的贡献是单圈图的重整化, 高能部分的平均值定义成:

$$\langle A \rangle_{0H} = \frac{1}{Z_{0H}} \int \prod_{\Lambda/b < k < \Lambda} \frac{d\Phi^*(\vec{k})d\Phi(\vec{k})}{2\pi i} e^{-S_{0H}} A \quad (80)$$

由于非相互作用的作用量是场的平方项, 且是 k 的对角, 于是有:

$$\begin{aligned} \langle \Phi^*(\vec{k}_1) \Phi(\vec{k}_2) \rangle_0 &= \frac{(2\pi)^d}{k_1^2 - \mu} \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \\ \langle \Phi^*(\vec{k}) \rangle_0 &= \langle \Phi^*(\vec{k}_1) \Phi^*(\vec{k}_2) \rangle_0 = \langle \Phi^*(\vec{k}_1) \Phi(\vec{k}_2) \Phi(\vec{k}_3) \rangle_0 = 0 \\ \langle \Phi^*(\vec{k}_4) \Phi^*(\vec{k}_3) \Phi(\vec{k}_2) \Phi(\vec{k}_1) \rangle_0 &= \langle \Phi^*(\vec{k}_4) \Phi(\vec{k}_2) \rangle_0 \langle \Phi^*(\vec{k}_3) \Phi(\vec{k}_1) \rangle_0 \\ &\quad + (\vec{k}_1 \leftrightarrow \vec{k}_2) \end{aligned} \quad (81)$$

这可以由 Wick 定理得到。对于积分有贡献的几个情况:

1. $k_4 = k_2, \Lambda/b < k_2 < \Lambda, k_3 = k_1, k_1 < \Lambda/b$, or $k_2 \leftrightarrow k_1$
2. $k_4 \leftrightarrow k_3$
3. all $k < \Lambda/b$
4. all $\Lambda/b < k < \Lambda$

最后一种情况对积分常数有贡献, 单圈图有四种不同组合方式。低能部分的作用量也可以写出:

$$\begin{aligned} S_L &= \int_0^{\Lambda/b} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} \left(k^2 - \mu + 4\lambda \int_{\Lambda/b}^\Lambda \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 - \mu} \right) |\Phi(\vec{k})|^2 \\ &\quad + \lambda \int_0^{\Lambda/b} \frac{d\vec{k}_1 \dots d\vec{k}_4}{(2\pi)^{3d}} \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3 - \vec{k}_4) \Phi^*(\vec{k}_4) \Phi^*(\vec{k}_3) \Phi(\vec{k}_2) \Phi(\vec{k}_1) \\ &\quad + O(\lambda^2) \end{aligned} \quad (82)$$

重新缩放时空量 (动量) 从而恢复积分上限为 Λ , 得到:

$$\begin{aligned} \mu(b) &= b^2 \left(\mu - 4\lambda \int_{\Lambda/b}^\Lambda \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 - \mu} + O(\lambda^2) \right) \\ \lambda(b) &= b^{4-d} \lambda + O(\lambda^2) \end{aligned} \quad (83)$$

分析化学势，化学势的临界情况给出：

$$\mu_c(b) = 4\lambda \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2} + O(\lambda^2) \quad (84)$$

重定义： $\tilde{\mu} = \mu - \mu_c(b)$ ，于是：

$$\tilde{\mu}(b) = b^2 \left(\tilde{\mu} - 4\lambda \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^d} \left(\frac{1}{q^2 - \tilde{\mu}} - \frac{1}{q^2} \right) + O(\lambda^2) \right) \quad (85)$$

临界区域内， $|\tilde{\mu}| \ll \Lambda^2$ ，于是：

$$\tilde{\mu}(b) = b^2 \tilde{\mu} \left(1 - 4\lambda \frac{\Lambda^{d-4} S_d}{(2\pi)^d} \int_{1/b}^1 \frac{x^{d-1} dx}{x^4} + O(\lambda^2) \right) \quad (86)$$

其中 $S_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$ 是 d 维单位球面积。积分的结果是：

$$\int_{1/b}^1 \frac{x^{d-1} dx}{x^4} = \frac{1}{d-4} \left(1 - \frac{1}{b^{d-4}} \right) = \ln b + O(d-4) \quad (87)$$

假设 $|d-4| \ll 1$ ，定义无量纲的耦合常数为 $\hat{\lambda} = \lambda \Lambda^{d-4} \frac{S_d}{(2\pi)^d}$ ，于是有：

$$\tilde{\mu}(b) = b^2 \tilde{\mu} \left(1 - 4\hat{\lambda} \ln b + O(\hat{\lambda}(d-4), \hat{\lambda}^2, \hat{\lambda} \tilde{\mu}) \right) \approx \tilde{\mu} b^{2-4\hat{\lambda}+O(\hat{\lambda})} \quad (88)$$

假设无量纲的耦合常数足够小，在 $b \rightarrow \infty$ 时， $\tilde{\mu}(b)$ 有三种可能性：

1. $\tilde{\mu} > 0$, $\tilde{\mu}(b) \rightarrow \infty$ ，极限对应于超流体相（对称性被破坏）；
2. $\tilde{\mu} < 0$, $\tilde{\mu}(b) \rightarrow -\infty$ ，极限对应于正常相（对称性保持）；
3. $\tilde{\mu} = 0$, $\tilde{\mu}(b) = 0$ ，这是相变的不动点。而且是不稳定不动点，受扰动时化学势会增长。

根据前面对指数 y 的定义，可以看到 $y = 2(1 - 2\hat{\lambda}^* + O((\hat{\lambda}^*)^2))$ ，于是临界指数：

$$\nu = \frac{1}{2} + \hat{\lambda}^* + O((\hat{\lambda}^*)^2) \quad (89)$$

其中 $\hat{\lambda}^* = \lim_{b \rightarrow \infty} \hat{\lambda}(b)$ 。对于 $\lambda(b)$ 的方程，在 $d > 4$ 时，有 $\hat{\lambda} \ll 1$, $\hat{\lambda}^* = 0$ ，在壳动量变换下，四维以上的弱相互作用的尺度是 0，因此是非相关的。这种情况下和平均场得到的一致。 $\hat{\lambda}^* = 0$ 是四维以上的不动点。当 $d < 4$ 时，弱相互作用的强度和 b 一同增长，并且一定包含到更高阶项。化学势、相互作用强度在非相互作用不动点都是相关耦合。

计算二阶项，计算到二阶的动量积分：

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda^2}{2} \int_0^{\Lambda} \frac{d\vec{p}_1 \dots d\vec{p}_4 d\vec{q}_1 \dots d\vec{q}_4}{(2\pi)^{6d}} \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \delta(\vec{q}_1 + \vec{q}_2 - \vec{q}_3 - \vec{q}_4) \\ & \times \langle \Phi^*(\vec{p}_4) \Phi^*(\vec{p}_3) \Phi(\vec{p}_2) \Phi(\vec{p}_1) \Phi^*(\vec{q}_4) \Phi^*(\vec{q}_3) \Phi(\vec{q}_2) \Phi(\vec{q}_1) \rangle_{0H} \end{aligned} \quad (90)$$

按照量子场论的方法，计算所有有贡献的二阶圈图，可以得到：

$$\begin{aligned} & - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^{\Lambda/b} \frac{d\vec{k}_1 \dots d\vec{k}_4}{(2\pi)^{3d}} \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3 - \vec{k}_4) \Phi^*(\vec{k}_4) \Phi^*(\vec{k}_3) \Phi(\vec{k}_2) \Phi(\vec{k}_1) \\ & \times \left[16 \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 - \tilde{\mu})((\vec{q} + \vec{k}_2 - \vec{k}_4)^2 - \tilde{\mu})} \right. \\ & \left. + 4 \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 - \tilde{\mu})((\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{q})^2 - \tilde{\mu})} \right] \end{aligned} \quad (91)$$

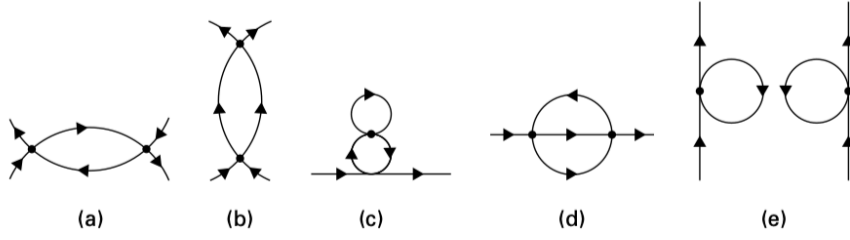


Figure 3.2 Second-order diagrams. Diagrams (a) and (b) contribute to the renormalized interaction, and (c) and (d) to the quadratic part of $S_{<}$. Diagram (e) is disconnected and therefore non-contributing.

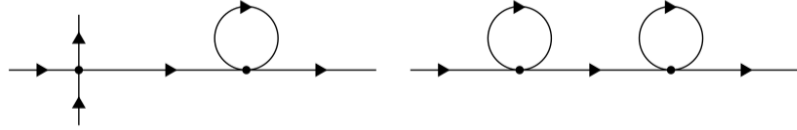


图 3: 二阶圈图

执行缩放之后，可以获得在二阶圈图修正后的相互作用强度：

$$\lambda(b) = b^{4-d}\lambda \left(1 - 10\lambda \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 - \tilde{\mu})^2} + O(\lambda^2) \right) \quad (92)$$

临界点 $\tilde{\mu} = 0$ ，引入无量纲相互作用：

$$\hat{\lambda}(b) = b^{4-d}\hat{\lambda}(1 - 10\hat{\lambda} \ln b + O(\hat{\lambda}^2)) = b^{4-d-10\hat{\lambda}+O(\hat{\lambda}^2)}\hat{\lambda} \quad (93)$$

III.3 ϵ 展开

写出重整化化学势和相互作用强度的 β 函数，在 $|4-d| \ll 1$ 时：

$$\begin{aligned} \beta_{\tilde{\mu}} &\equiv \frac{d\tilde{\mu}(b)}{d \ln b} = \tilde{\mu}(b)(2 - 4\hat{\lambda}(b) + O(\epsilon\hat{\lambda}, \hat{\lambda}^2, \hat{\lambda}\tilde{\mu})) \\ \beta_{\hat{\lambda}} &\equiv \frac{d\hat{\lambda}(b)}{d \ln b} = \epsilon\hat{\lambda}(b) - 10\hat{\lambda}^2(b) + O(\epsilon\hat{\lambda}^2, \hat{\lambda}^3, \tilde{\mu}\hat{\lambda}^2) \end{aligned} \quad (94)$$

其中 $\epsilon = 4-d$ 。壳动量变换可以理解成在参数空间中参数满足如上微分方程的流。要理解 $\hat{\lambda} - \tilde{\mu}$ 平面上的流动，应当寻找不动点 $\beta_{\tilde{\mu}} = \beta_{\hat{\lambda}} = 0$ 。上面的两个递归方程的两组不动点：

1. $\tilde{\mu} = 0, \hat{\lambda} = 0$, Gaussian 不动点；
2. $\tilde{\mu} = 0, \hat{\lambda} = \epsilon/10 + O(\epsilon^2)$, Wilson-Fisher 不动点。

在高于四维的情况下，在 Wilson-Fisher 不动点为负相互作用，是非物理的。有两个关联耦合，不稳定。高斯不动点，在 λ 的方向上是稳定的，但是在 μ 的方向上是不稳定的。有一个不稳定方向的不动点称为临界点。不稳定线 $\tilde{\mu} = 0$ 称为临界面。因此，在四维以上的情况，负相互作用的平均场是精确的，因为临界区域处于非相互作用的高斯不动点。微小相互作用不相关，且流动到 0。

在小于四维情况下，Wilson-Fisher 不动点移动到物理区域并且与 Gaussian 不动点交换稳定性。小于四维情况临界行为由非平凡的 Wilson-Fisher 不动点控制，并由 ϵ 控制。假设这是一个连续参数，并考虑极小情况 $\epsilon \ll 1$ 以控制临界行为的特征。

在等于四维的情况，两个不动点重合，弱正相互作用流向 0，但由于 β_λ 中的线性项小时，这导致上临界维度有对数缩放。

分析稳定性的方法包括稳定性矩阵：

$$M_{ij} \equiv \frac{\partial \beta_{x_i}}{\partial x_j} \Big|_{x_i=x_i^*} \quad (95)$$

取不动点附近。其中变量 x_i 是 $\tilde{\mu}, \hat{\lambda}$ 。稳定性矩阵的特征值决定了流动的稳定性的。正特征值对应的特征向量是不动点处相关方向（不稳定），负特征值对应的特征向量是不动点处的无关方向（稳定）。在临界点，只有一个方向是相关的，即特征值对应 y 的方向。关联长度的临界指数为 $\nu = 1/y$ 。例如，在 Wilson-Fisher 不动点，稳定性矩阵给出的 $y = 2 - \frac{2\epsilon}{5}$ ，则关联长度指数：

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{10} + O(\epsilon^2) \quad (96)$$

当 $\epsilon = 1$ 时， $\nu \approx 0.6$ ，这是一个合理的值。第二个特征值是 $-\epsilon$ ，这给出了缩放校正。

下面寻找反常维数，在缩放场和动量前，先对低能部分做变换：

$$k^2 \rightarrow Z_k k^2, \mu \rightarrow Z_\mu \mu, \lambda \rightarrow Z_\lambda \lambda \quad (97)$$

在四维附近的低阶系数：

$$Z_k = 1 + O(\hat{\lambda}^2), Z_\mu = 1 - 4\hat{\lambda} \ln b + O(\hat{\lambda}^2), Z_\lambda = 1 - 10\hat{\lambda} + O(\hat{\lambda}^2) \quad (98)$$

反常维数是：

$$\eta = \frac{dZ_k}{d \ln b} \Big|_{\hat{\lambda}=\hat{\lambda}^*} \quad (99)$$

假设反常维数有限，现在重新回到截止能量 Λ ，这要求动量 $bk \rightarrow k$ ， $\frac{\Phi}{b^{2+d-\eta/2}} \rightarrow \Phi$ ，这要求：

$$\tilde{\mu}(b) = b^{2-\eta} \tilde{\mu} Z_\mu, \hat{\lambda}(b) = b^{\epsilon-2\eta} \hat{\lambda} Z_\lambda \quad (100)$$

计算如下图，在 $|\epsilon| \ll 1$ 得到：

$$Z_k = 1 + c\hat{\lambda}^2 \ln b + O(\hat{\lambda}^3) \approx b^{c\hat{\lambda}^2} \quad (101)$$

c 是一个和场的分量数相关的数，于是反常维数是 $\eta = c(\hat{\lambda}^*)^2$ 。当反常维数不为 0，低能正常相的超流体磁化率

$$\chi(k) = \frac{b^{2-\eta}}{(bk)^2 - \tilde{\mu}(b)} \quad (102)$$

于是 $x = 2 - \eta$ 。

动量壳变换在低能情况下的新耦合常数：例如 $|\Phi|^6$ 理论，给出耦合常数：

$$\beta_g = \frac{dg}{d \ln b} = 2(3-d)g + O(g\hat{\lambda}) \quad (103)$$

$d = 4$ 时，在无关的 Wilson-Fisher 不动点。在 $d = 3$ 时，线性项消失，在高斯不动点成为边缘耦合。高阶项要求在 Wilson-Fisher 不动点附近仍是不相关的。

III.4 非相关耦合

剩余的临界指数 α, β, δ 可以通过非相关耦合计算。引入弱外源, 与序参量耦合, 令 $j(\vec{x}) = j$, 超流相中在截断 Λ/b 的单位体积的自由能是:

$$F = b^{-d} F(\mu(b), \lambda(b), j(b)) \quad (104)$$

引入的外源项 $j(\Phi^* + \Phi)$ 破坏了 $U(1)$ 对称性, 因此不可以由高能部分的直接积分给出。在小 j 处变换仅有在场缩放前的方程决定 $j(b) = j b^{(2+d-\eta)/2}$ 。因此, 外源在 Gaussian 不动点和 Wilson-Fisher 不动点处都是相关的。

在临界点附近: $\mu(b) = b^{1/\nu} \mu$, 取 $\mu(b) = \mu_0$, $b \gg 1$, 得到:

IV 超导转变

介绍了描述超导体中迈斯纳效应的金兹堡-朗道理论，并定义了两类超导体。研究表明规范场的涨落会导致第一类超导体中的一级相变。针对第二类超导体进行了近四维计算，并讨论了流图对组分数的依赖性。详细阐述了转变附近关联长度和穿透深度的标度行为。

IV.1 迈斯纳效应

大多数元素金属和许多合金在低温下会经历一个急剧的相变过程：当冷却到几开尔文时（图 4.1），材料在弱磁场中成为完全抗磁体并完全失去电阻。这种“超导”转变目前在高温超导体中已观测到高达 $\sim 150\text{ K}$ 的温度。超导电性与 ^4He 中的超流现象密切相关，不同之处在于电子带电并能承载电流。

在金属和合金超导微观理论发展之前，V. Ginzburg 和 L. Landau 就提出了对转变和超导态的唯象描述。用现代语言表述，他们的提议是：有限温度下的超导转变可以用配分函数描述：

$$Z = \int D\Phi^* D\Phi D\vec{A} \exp \left[- \left(\int d\vec{x} L_{GL}[\Phi, \vec{A}] \right) / T \right], \quad (4.1)$$

其中

$$L_{GL} = \left| (\nabla - ie\vec{A}(\vec{x}))\Phi(\vec{x}) \right|^2 + a(T)|\Phi(\vec{x})|^2 + \frac{b}{2}|\Phi(\vec{x})|^4 + \frac{1}{2}(\nabla \times \vec{A}(\vec{x}))^2,$$

这里 $\Phi(\vec{x})$ 是空间坐标的复函数， $\vec{A}(\vec{x})$ 是涨落的电磁矢势。系数 $a(T) = a_0(T - T_0)$ ， a_0 和 b 是常数， e 是电子电荷的两倍。为简化起见，我们设 $\hbar = c = k_B = 1$ ，并照常假设波矢有紫外截断 Λ 。

金兹堡-朗道理论可能是所谓规范理论类中最简单的代表，这类理论被认为描述了基本粒子“标准模型”中的所有微观系统参数。在粒子物理中，它通常被称为希格斯模型。从临界现象的角度来看，它代表了一个特别有趣的相变例子，在一个相对简单的背景下展示了几个非平凡的特征，值得详细理解。

当 $e = 0$ 时， L_{GL} 等价于第 2 章介绍的描述电中性超流体（如 ^4He ）转变的朗道作用量。主要新特点是超导体带电，因此复序参量与电磁矢势的涨落耦合。这导致了迈斯纳效应——弱外磁场从超导体内部被排出，这是超导态的定义性特征。

假设 $T < T_0$ ，我们将作用量在场 $\Phi_0 = \sqrt{|a(T)|/b}$ 的鞍点值附近展开：

$$\Phi(\vec{x}) = e^{i\phi(\vec{x})} (\Phi_0 + \psi(\vec{x})). \quad (4.3)$$

首先考虑中性超流体，即 $e = 0$ 。展开结果为：

$$L_{GL} = L_0 + |\Phi_0|^2 (\nabla \phi(\vec{x}))^2 + (\nabla \psi(\vec{x}))^2 + 2|a(T)|\psi(\vec{x})^2 \\ + \frac{1}{2}(\nabla \times \vec{A}(\vec{x}))^2 + O(\psi^4, \phi^4, \phi^2 \psi^2).$$

我们可以说有序态中的振幅涨落 ψ 是“有质量的”：即使它们在空间中任意缓慢变化，也需要有限的能量 $2|a(T)|$ 。另一方面，相位涨落 ϕ 是“无质量的”：当 $\nabla \phi \rightarrow 0$ 时其能量消失。这是朗道 ($e = 0$) 作用量全局 $U(1)$ 对称性的结果；用空间常数的 ϕ 均匀旋转 $\Phi_0 \rightarrow e^{i\phi}\Phi_0$ 不会消耗任何能量。这是南部-戈德斯通定理的一个例子：当连续全局对称性被自发破缺时，有序态中存在无质量模。还需注意当 $e = 0$ 时，矢势 \vec{A} 在转变上下都是无质量的。

关于戈德斯通模的更详细讨论将在下一章给出。这里我们感兴趣的是当 $e \neq 0$ 时无质量相位模的命运。首先注意对于 $e \neq 0$ ，作用量在更大的局域 (空间依赖的) $U(1)$ 变换下保持对称：

$$\Phi(\vec{x}) \rightarrow e^{i\phi(\vec{x})}\Phi(\vec{x}),$$

只要伴随规范变换：

$$\vec{A}(\vec{x}) \rightarrow \vec{A}(\vec{x}) + \frac{1}{e}\nabla\phi(\vec{x}). \quad (4.6)$$

将 $\Phi(\vec{x})$ 按式 (4.3) 在 Φ_0 附近展开后，相位 $\phi(\vec{x})$ 因此可以完全被重新定义的矢势吸收。所以当 $e \neq 0$ 时，

$$L = L_0 + (\nabla \psi(\vec{x}))^2 + 2|a(T)|\psi^2(\vec{x}) + O(\psi^4) \\ + e^2 |\Phi_0|^2 \vec{A}^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}(\nabla \times \vec{A}(\vec{x}))^2.$$

与中性 ($e = 0$) 情况相反，超导相中不存在无质量模： ϕ 已完全从 L 中消失。然而电磁矢势 \vec{A} 变得有质量。这是希格斯机制的最简单例子，今天被认为是基本粒子标准模型中弱力介导粒子质量的来源。

根据式 (4.7)，超导相中磁场的关联函数为：

$$\langle (\nabla \times \vec{A}(\vec{x}))_i (\nabla \times \vec{A}(0))_j \rangle = \int d^3\vec{q} \frac{q^2 (\delta_{ij} - \hat{q}_i \hat{q}_j)}{q^2 + 2e^2 |\Phi_0|^2} e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} \sim \frac{\hat{x}_i \hat{x}_j - \delta_{ij}}{4\pi\lambda^2 |\vec{x}|} e^{-x/\lambda},$$

对于 $|\vec{x}|/\lambda \gg 1$ ，其中 $\lambda = 1/\sqrt{2e^2 |\Phi_0|^2}$ 是磁场穿透深度。磁场的关联在长度 λ 上呈指数衰减。这意味着弱外磁场无法穿透尺寸远大于穿透深度的超导体内部，即完全抗磁性。这就是迈斯纳效应。

因此超导体有两个特征的温度依赖长度：描述序参量涨落空间依赖性的关联长度 $\xi^{-2} = |a(T)|$ ，以及进入磁场空间涨落的穿透深度 $\lambda^{-2} = 2e^2 |a(T)|/b$ 。它们的无量纲比

$$\kappa = \frac{\lambda}{\xi} = \sqrt{\frac{b}{2e^2}} \quad (4.9)$$

定义了超导体的一个重要特征，称为金兹堡-朗道参数。众所周知，超导体对外磁场的响应关键取决于 κ 的值：对于 $\kappa < 1/\sqrt{2}$ ，随着磁场增加从迈斯纳相到正常相的转变是直接且不连续的，而对于 $\kappa > 1/\sqrt{2}$ ，中间存在超导-正常混合相。这两类材料分别称为第一类和第二类超导体；前者包括所有金属，后者包括许多合金和高温超导体。关于磁场中超导性的讨论可以在许多固体物理书籍中找到，这里不再赘述。下面我们讨论金兹堡-朗道参数在零外磁场下对超导转变的作用。

IV.2 涨落诱导的一级相变

超导转变的本质是一个相当微妙的问题，长期以来一直是临界现象理论中的一个难题。这种微妙性源于超导序参量与涨落规范场的耦合，后者在正常相中是无质量的。因此，本章后面将讨论的类似问题预计会在序参量与无质量模耦合时出现。这种情况例如普遍存在于相互作用巡游电子的量子相变中，其中序参量与电子费米海的粒子-空穴激发耦合。

由于 L_{GL} 在矢势中是二次的，可以尝试将其积分出来。这可以在场 Φ 的平均场近似中完成：假设 Φ 在空间上是常数值，对矢势进行积分，然后通过最小化所得作用量来确定 Φ 的鞍点值。矢势的积分将在横向规范 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ 中进行，其中

$$\langle A_i(\vec{q}) A_j(-\vec{q}) \rangle = (2\pi)^d \frac{\delta_{ij} - \hat{q}_i \hat{q}_j}{q^2 + 2e^2 |\Phi|^2}. \quad (4.10)$$

选择横向规范在当前例子中不仅仅是便利问题：如附录 C 所讨论的，只有在这个规范中，通常的关联函数 $\langle \Phi^*(\vec{x}) \Phi(0) \rangle$ 在 T_c 以下才会变得长程。对均匀 Φ 和在 $d = 3$ 中积分矢势的两个横向分量后，得到的单位体积自由能为

$$F = a(T) |\Phi|^2 + \frac{b}{2} |\Phi|^4 + T_0 \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \ln (q^2 + 2e^2 |\Phi|^2). \quad (4.11)$$

取导数并稍作整理，我们发现

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d|\Phi|} = & 2 \left(a(T) + 2T_0 e^2 \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{q^2} \right) |\Phi| + 2b |\Phi|^3 \\ & - 8e^4 T_0 \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{|\Phi|^3}{q^2 (q^2 + 2e^2 |\Phi|^2)}. \end{aligned}$$

第一项中的积分因此简单地以有限量降低了转变温度。我们假设这个位移已包含在 T_0 的定义中。执行最后一项的积分并假设在转变附近 $\Lambda/(e\Phi) \gg 1$,

$$\frac{dF}{d|\Phi|} = 2a(T)|\Phi| + 2b|\Phi|^3 - \frac{\sqrt{2}e^3T_0}{\pi}|\Phi|^2, \quad (4.13)$$

最终积分得到

$$F = a(T)|\Phi|^2 - \frac{\sqrt{2}e^3T_0}{3\pi}|\Phi|^3 + \frac{b}{2}|\Phi|^4. \quad (4.14)$$

平均场自由能现在包含一个 $|\Phi|$ 的负三次项。这个项显然在 $|\Phi|^2$ 中是非解析的，这仅仅是因为被积分的电磁势在正常相中是无质量的。 Φ 的值由方程 $dF/d\Phi = 0$ 确定。在高温时唯一解是 $\Phi = 0$ 。随着温度降低，出现两个新解，第一个描述作用的局部最大值，第二个描述局部最小值（图 4.2）。低于临界温度时，非平凡最小值处的自由能变为负值，系统经历从正常态的不连续转变。临界温度 T_c 和 $\Phi \neq 0$ 在 T_c 处的值由方程 $F = 0$ 和 $dF/d\Phi = 0$ 确定。消去 Φ 给出

$$a(T_c) = \frac{e^6T_0^2}{(3\pi)^2b}. \quad (4.15)$$

为了验证在积分电磁势过程中忽略 Φ 涨落的合理性，需要确定一级相变的尺寸 $t_{fo} = (T_c - T_0)/T_0$ 。由式 (4.15) 可得：

$$t_{fo} = \frac{b^2T_0^2}{72\pi^2|a(0)|}\kappa^{-6}. \quad (4.16)$$

我们可以识别 $|a(0)| = \xi_0^{-2}$ ，其中 ξ_0 是 $T = 0$ 时的关联长度。回顾在 $d = 3$ 中，无量纲四次相互作用可定义为 $\hat{b} = b\xi T_0/(2\pi^2)$ （式 3.62），上述表达式可改写为：

$$t_{fo} = \frac{\pi^2}{18}\hat{b}_0^2\kappa^{-6}. \quad (4.17)$$

上一章中 ϵ 的最低阶计算给出在 $e = 0$ 时临界区域内 $\hat{b} \approx 1/10$ ，此时标度由 Wilson-Fisher 不动点控制。因此序参量涨落变得重要的临界区域是：

$$t_{cr} \approx 100\hat{b}_0^2. \quad (4.18)$$

忽略式 (4.17) 中的数值因子，我们可以写成：

$$t_{fo} \approx \frac{t_{cr}}{100\kappa^6}. \quad (4.19)$$

因此，对于 $\kappa < 1$ 的良好第一类超导体，忽略 Φ 的涨落是完全合理的。在这种情况下，一级相变确实发生在远高于序参量涨落临界区域的温度。而对于第二类超导体， Φ 的涨落会在临界区域内变得重要。

在结束本节之前，可以用另一种形式表达式 (4.16)。由于 $e = 0$ 时平均场自由能密度在 T_0 以下为 $-a^2(T)/2b$ ，对温度微分两次得到 $e = 0$ 时平均场近似下单位体积比热的跃变为 $\Delta C = a_0^2 T_0/b$ 。因此我们可以写出：

$$t_{cr} = \frac{100|a(0)|^3}{(2\pi^2)^2 (\Delta C)^2} = \frac{100}{4\pi^4 (\Delta C \xi_0^3)^2}. \quad (4.20)$$

量 $\Delta C \xi_0^3$ 本质上是参与转变的关联体积中的自由度数量。对于像金属这样的弱耦合超导体， $\xi_0 \sim 10^3 \text{ \AA}$ ， $t_{cr} \sim 10^{-16}$ 。这就是为什么元素超导体在所有可达到的温度下都能被平均场理论完美描述。而在液晶中， $\xi_0 \sim 1 \text{ \AA}$ 且 $t_{cr} \sim 1$ ，临界涨落很容易观察到。关系式 (4.20) 也被称为金兹堡判据，为估计给定相变中临界涨落的重要性提供了有用参考。

通过将上述金属中 t_{cr} 的估计值代入式 (4.19)，我们发现例如在铝中 ($\kappa \approx 0.02$):

$$t_{fo} \approx 10^{-6} \quad (4.21)$$

由于铝的 $T_0 \sim 1.19 \text{ K}$ ， $T_c - T_0 \sim 1 \mu\text{K}$ ，目前看来这个值小到无法观测。这解释了为什么涨落诱导的一级相变尚未在超导体中被观察到。¹

IV.3 近四维的第二类超导体

在第二类超导体中，序参量的涨落不可忽略，前一节的平均场理论是不一致的。我们因此可以尝试重整化群方法，其中将对大波矢 $\Lambda/s < |\vec{k}| < \Lambda$ 的序参量和矢量场模进行积分。这种积分将产生三个耦合的流动： $a(T)$ 、 b 和电荷 e 。

动量壳积分的结果是慢模的作用量：

$$\begin{aligned} S_{GL} = & \int_0^{\Lambda/s} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} \left[(Z_\eta k^2 + Z_a a(T)) \Phi^*(\vec{k}) \Phi(\vec{k}) \right. \\ & + Z_{v1} e \int_0^{\Lambda/s} \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^d} (2\vec{k} + \vec{q}) \cdot \vec{A}(\vec{q}) \Phi^*(\vec{k} + \vec{q}) \Phi(\vec{k}) \\ & + Z_{v2} e^2 \int_0^{\Lambda/s} \frac{d\vec{q} d\vec{p}}{(2\pi)^{2d}} \vec{A}(\vec{q}) \cdot \vec{A}(\vec{p}) \Phi^*(\vec{k} + \vec{q} + \vec{p}) \Phi(\vec{k}) \\ & + \frac{b'}{2} \int_0^{\Lambda/s} \frac{d\vec{k}_1 \dots d\vec{k}_4}{(2\pi)^{3d}} \Phi^*(\vec{k}_1) \Phi^*(\vec{k}_2) \Phi(\vec{k}_3) \Phi(\vec{k}_4) \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3 - \vec{k}_4) \\ & \left. + \frac{1}{2} \int_0^{\Lambda/s} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^2} \left[Z_A k^2 (\delta_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j) + \frac{k_i k_j}{g} \right] A_i(\vec{k}) A_j(-\vec{k}) \right] \end{aligned}$$

除了四次相互作用外，当 $e \neq 0$ 时还有两个相互作用顶点对应于上式中的第二和第三项，如图 4.3 所示。我们在整个计算中考虑复序参量分量的一般数量 N ，并假设 $d = 4 - \epsilon$ 维。我们还引入了“规范固定参数” g 。取 $g = 0$ 完全抑制了矢势的纵向分量，因此定义了上一节使用的横向规范。读者可以参考附录 C 了解规范固定过程及这一特定规范选择。

重整化因子 Z_η 和 Z_a 由图 4.4 中的图表决定。图 4.4(a) 已在问题 3.1 中计算过，得到 $Z_a = 1 - (N+1)\hat{b}\ln(s)$ 。图 4.4(b) 仅给出转变温度的有限移动。图 4.4(c) 则给出：

$$\begin{aligned} & -e^2 \int_{\Lambda/s}^{\Lambda} \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^d} \frac{(2k+q)_i(\delta_{ij} - \hat{q}_i\hat{q}_j)(2k+q)_j}{q^2((\vec{q} + \vec{k})^2 + a(T))} \\ & = -3k^2\hat{e}^2\ln(s) + O(k^4, k^2a(T)) \end{aligned}$$

因此对 Z_η 有贡献： $Z_\eta = 1 - 3\hat{e}^2\ln(s)$ 。这里 $\hat{e}^2 = e^2\Lambda^{d-4}S_d/(2\pi)^d$ 是无量纲电荷。

读者可以自行计算重整化因子 Z_{v1} 和 Z_{v2} ，并证明在 e^2 阶， $Z_{v1} = Z_{v2} = Z_\eta$ 。例如，对 Z_{v1} 有贡献的图如图 4.5 所示。这是 Ward-Takahashi 恒等式的一个例子，它在微扰论的所有阶都成立，是金兹堡-朗道作用量规范不变性的结果。这意味着当紫外截断变化时，金兹堡-朗道作用量保持其在方程 (4.1) 中的规范不变形式。

耦合 b' 由图 4.6 中的图表决定。所有其他可能贡献的图在外动量设为零时在横向规范中消失。这种图的一个例子如图 4.7 所示。唯一有限的新图是图 4.6 中的最后一个。它很容易计算为：

$$-e^4 \int_{\Lambda/s}^{\Lambda} \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^d} \frac{(\delta_{ij} - \hat{q}_i\hat{q}_j)(\delta_{ij} - \hat{q}_i\hat{q}_j)}{q^4} = -3e^2\hat{e}^2\ln(s)$$

在四维中。三个图一起给出：

$$\hat{b}' = \hat{b} - (N+4)\hat{b}^2\ln(s) - 6\hat{e}^4\ln(s)$$

最后，图 4.8(a) 中的“极化”图给出：

$$\begin{aligned} & -Ne^2 \int_{\Lambda/s}^{\Lambda} \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^d} \frac{(\vec{k} + 2\vec{q})_i(\vec{k} + 2\vec{q})_j}{(q^2 + a(T))((\vec{q} + \vec{k})^2 + a(T))} \\ & = \frac{N\hat{e}^2}{3}\ln(s)(k^2\delta_{ij} - k_ik_j) \end{aligned}$$

这给出 $Z_A = 1 + N\hat{e}^2\ln(s)/3$ 。注意极化纯粹是横向的，因此规范固定参数 g 没有被重整化。在方程 (4.26) 的结果中，我们丢弃了作为紫外截断人为产物的与波矢无关的项，这显然在大波矢处破坏了规范不变性。图 4.8(b) 中的图也因同样的原因被丢弃。

我们现在可以重新标度动量和场，并读出慢模作用量中重整化的参数。和以前一样， $a(T, s) = Z_a a(T)s^2/Z_\eta$ 和 $b(s) = b's^\epsilon/Z_\eta^2$ 。在将矢势重新定义为 $e\vec{A} \rightarrow \vec{A}$ 后，我们可以将重整化电荷定义为 $e^2(s) = e^2s^\epsilon/Z_A$ 。对 $\ln(s)$ 微分，得到耦合 b 和 e 以及参数 ϵ 最低阶所需的 β 函数：

$$\begin{aligned} \frac{da(T)}{d\ln(s)} &= a(T)(2 - (N+1)b + 3e^2) \\ \frac{db}{d\ln(s)} &= \epsilon b + 6e^2b - (N+4)b^2 - 6e^4 \\ \frac{de^2}{d\ln(s)} &= \epsilon e^2 - \frac{N}{3}e^4 \end{aligned}$$

其中无量纲耦合 b 和 e^2 的帽子已被去掉。

临界平面 $a(T) = 0$ 中流图的结构关键取决于分量数 N 。在 $e^* = 0$ 处总是有通常的高斯不动点和 Wilson-Fisher 不动点，它们在电荷方向上都是不稳定的。其他不动点位于 $(e^*)^2 = 3\epsilon/N$ 和：

$$b_{\pm}^* = \frac{\epsilon}{2(N+4)} \left(1 + \frac{18}{N} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{18}{N}\right)^2 - \frac{216(N+4)}{N^2}} \right)$$

b_{\pm}^* 对 $N > N_c = 182.952$ 是实数，否则为复数。对于 $N > N_c$ ，有两个额外的带电不动点，一个是稳定的，另一个在 b 方向上不稳定。前者是临界点，后者是双临界的，因为它有两个不稳定方向。连接高斯不动点和双临界点的线将临界点的吸引域与流向 $b < 0$ 的区域分开。当 $b < 0$ 时，需要在金兹堡-朗道作用量中添加正的 $|\Phi|^6$ 项，这通常会导致一级相变（见问题 4.2）。另一方面，对于 $N < N_c$ ，在相互作用 b 的实值处没有带电不动点，流总是朝向 $b < 0$ 的区域，相变是一级的。两种定性不同的情况如图 4.9 所示。

在 $N > N_c$ 的临界点，关联长度指数为：

$$v^{-1} = 2 - (N+1)b_+^* + \frac{9\epsilon}{N} + O(\epsilon^2)$$

序参量的反常维度为：

$$\eta = -\frac{9\epsilon}{N} + O(\epsilon^2)$$

其他指数遵循通常的标度律，这些标度律都满足，包括 Josephson 定律。与 Wilson-Fisher 不动点相比，在带电临界点反常维度在 ϵ 的最低阶就已经是有限的（且为负）。

因此，对于 $N = 1$ ，即使在包含序参量涨落后，超导转变似乎仍然是不连续的。然而， N_c 的大数值是欺骗性的。在 ϵ 展开的下一阶，人们发现对 N_c 有一个同样大且负的修正（问题 4.6），这表明在三维中 N_c 实际上可能大幅降低。如今人们相信，对于 $N = 1$ 和 $d = 3$ ，流图实际上与图 4.9(b) 定性相同，尽管有最低阶 ϵ 展开结果。我们将在第 7 章引入对偶性概念时回到这个问题。

IV.4 规范场的反常维度

除了第 1 章介绍的标准临界指数外，通过涨落矢势还可以定义一个额外指数。对于 $T < T_c$ ，横向规范中规范场关联函数可以写成标度形式：

$$\langle A_i(\vec{q}) A_j(-\vec{q}) \rangle = (\delta_{ij} - \hat{q}_i \hat{q}_j) q^{-(2-\eta_A)} F_-(q\lambda), \quad (4.33)$$

其中 η_A 是规范场的反常维度， λ 是磁场穿透深度。标度函数 $F_-(z)$ 在 z 趋近于无穷大（即正好在临界点）时接近常数，而对于小 z ， $F_-(z) \sim z^{2-\eta_A}$ 。类似的标度形式可以写成 $T > T_c$ ，用不同的函数 $F_+(q\xi)$ ，并用关联长度 ξ 代替穿透深度 λ （后者为无穷大）。

有趣的是，指数 η_A 可以精确求得。类比于序参量的反常维度 η ， η_A 定义为

$$\eta_A = \left. \frac{d \ln Z_A}{d \ln(s)} \right|_{e=e^*, b=b^*}. \quad (4.34)$$

由于 $e^2(s) = s^\epsilon e^2/Z_A$, 对 $\ln(s)$ 微分可以写出

$$\beta_e = e^2(\epsilon - \eta_A). \quad (4.35)$$

当 $e^* = 0$ 时 (如在 Wilson-Fisher 不动点), $Z_A = 0$, 因此 $\eta_A = 0$ 。然而在带电不动点, $e^* \neq 0$ 且 $\eta_A = \epsilon$, 精确无误, 没有进一步的修正。特别地, 在 $d = 3$ 中, $\eta_A = 1$ 。

这个精确结果的物理意义可以理解如下: 回顾为了确定电荷的重整化, 我们必须在式 (4.2) 中将矢势重新定义为 $e\vec{A} \rightarrow \vec{A}$ 。新的矢势因此具有长度的倒数维度, 即 $A \sim \xi^{-1}$ 。式 (4.2) 的规范不变性意味着这个量纲分析的简单结果实际上是精确的。结合标度关系 $L_{GL} \sim \xi^{-d}$, 这意味着有序相中规范场的 Higgs 质量标度行为为 $\sim \xi^{2-d}$ 。最后, 从式 (4.33) 的标度形式看, 同样的质量行为表现为 λ^{η_A-2} 。这意味着

$$\lambda^{\eta_A-2} \propto \xi^{2-d}. \quad (4.36)$$

由于 $\eta_A = 4 - d$ 精确成立, 在任何维度下

$$\lambda \propto \xi, \quad (4.37)$$

在临界区成立。反常维度 η_A 的值确保了两个特征长度以完全相同的指数 ν 发散, 正如平均场理论所暗示的那样。因此, 金兹堡-朗道参数成为一个有限的普适数, 表征了带临界点 (问题 4.5)。

在 $T = T_c$ 时, $d = 3$ 中 $\langle A_i(\vec{q})A_j(-\vec{q}) \rangle \sim q^{-1}$, 这意味着实空间中的 $\sim r^{-2}$ 。这种带临界点处规范场关联从 $\sim r^{-1}$ 到 $\sim r^{-2}$ 的定性变化已在数值计算中得到证实。

IV.5 临界区宽度

带临界点的效应可能在第二类材料 (如高温超导体) 中变得可观测。临界区宽度可以通过要求无量纲电荷接近其不动点值 $e^2\xi \sim 1$ 来估计。回顾 $2e^2 = \kappa^{-2}b$, $\xi \sim \sqrt{t}$, 以及 Wilson-Fisher 临界区宽度 $t_{cr} \sim b^2$, 我们发现

$$t_{\text{charged}} \sim t_{cr}\kappa^{-4}. \quad (4.38)$$

在像元素金属这样的低温超导体中, 与 Wilson-Fisher 不动点相关的临界区宽度为 $t_{cr} \sim 10^{-16}$, t_{charged} 同样小到无法测量。在高温超导体中 $t_{cr} \sim 10^{-1}$, 序参量涨落的效应很容易观测到。另一方面, 金兹堡-朗道参数的典型值是 $\kappa^2 \sim 10^3$, 因此 $t_{\text{charged}} \sim 10^{-7}$, 这又太小而不易观测。

V 近低维临界现象

V.1 戈德斯通模

我们回到中性超流体和磁性相变，在 Ginzburg-Landau 作用量（式 4.2）中取 $e = 0$ 极限。在有序相中，通过场量在鞍点值附近的振幅和相位涨落展开得到式 (4.4)。我们已注意到，虽然振幅涨落具有质量，但相位涨落是无质量的——当波矢趋近于零时其能量消失。这对转变温度以下的序参量有着深远影响。考虑高斯近似下的热平均：

$$\langle \phi(\vec{x})\phi(\vec{y}) \rangle = \frac{T}{2|\Phi_0|^2} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}}{k^2}, \quad (5.1)$$

其中我们始终假设动量积分存在紫外截断。当 $\vec{x} = \vec{y}$ 时，该积分在维度 $d \leq 2$ 时发散，其他情况下收敛。这种发散显然可能推翻我们关于 $d \leq 2$ 维度存在有序态的基本假设。假设温度足够低，可以忽略序参量振幅的涨落，则可写出：

$$\langle \Phi^*(\vec{x})\Phi(0) \rangle \approx |\Phi_0|^2 \left\langle e^{i(\phi(\vec{x})-\phi(0))} \right\rangle. \quad (5.2)$$

而右边的高斯近似平均可表示为：

$$\left\langle e^{i(\phi(\vec{x})-\phi(0))} \right\rangle = e^{-\frac{1}{2}\langle (\phi(\vec{x})-\phi(0))^2 \rangle} = \exp \left(-\frac{T}{2|\Phi_0|^2} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{1 - e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{k^2} \right).$$

该式可直接通过展开左边平均并利用高斯平均的 Wick 定理验证。当 $d > 2$ 时，指数中的积分收敛。但在 $d = 2$ 情况下，积分变为：

$$\int_0^{\Lambda x} \frac{dq}{2\pi q} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} (1 - e^{iq \cos \theta}) = \int_0^{\Lambda x} \frac{dq}{2\pi q} (1 - J_0(q)),$$

其中贝塞尔函数 $J_0(q) \approx (2/\pi q)^{1/2} \cos(q - (\pi/4))$ （当 $q \gg 1$ ）。因此在 $d = 2$ 维度有：

$$\langle \Phi^*(\vec{x})\Phi(0) \rangle \approx |\Phi_0|^2 e^{-\frac{T \ln(\Lambda x)}{4\pi|\Phi_0|^2}} \sim x^{-\frac{T}{4\pi|\Phi_0|^2}}, \quad (5.5)$$

关联函数在大距离下缓慢衰减至零，即使在低温下也是如此。相位涨落破坏了 $d = 2$ 维度在任何有限温度下的长程序！在 $d < 2$ 维度该效应更强。我们将特定模型中不存在长程序的最大维度称为下临界维度 d_{low} 。上例中 $d_{\text{low}} = 2$ 。

尽管上述简单论证表明二维超流长程序不可能存在，但关联函数的幂律衰减仍与高温下预期的指数行为有本质区别。我们将这种具有幂律关联的相称为代数有序相。对于 $d = 2$ 超流体，存在低温代数有序态与高温无序态之间的特殊转变，这将是下一章的讨论主题。

当有序态破坏作用量的连续全局对称性时，这类相位无质量模必然存在。该结论的严格表述称为南部-戈德斯通定理，相应的无质量模称为戈德斯通模。戈德斯通模的数量等于对称群破缺生成元的数量。例如对于海森堡模型，作用量的对称性是三维序参量空间的旋转群 $O(3)$ 。在有序态中破缺为 $O(2)$ ——绕有限磁化轴的旋转。由于绕其余两个正交轴的旋转不再是有序态下的对称操作，因此存在两个戈德斯通模。而对于 Ising 模型，全局对称性是交换“上”与“下”的离散变换 Z_2 ，故不存在戈德斯通模。因此 Ising 模型的 $d_{\text{low}} = 1$ （习题 1.1），而 $O(N)$ 模型的 $d_{\text{low}} = 2$ 。

关于戈德斯通模在二维破坏有限温度长程序的结论，可严格推广至具有全局 $O(N)$ 对称性且相互作用足够短程的模型类，即下节将讨论的默明-瓦格纳-霍恩伯格定理。这并不意味着二维体系不可能存在相变——如前所述，当对称性为 $O(2)$ 时确实存在这类转变。

当系统中存在足够长程相互作用（如前章规范场介导的作用）时，南部-戈德斯通定理不再成立。此时本应是无质量戈德斯通模的激发在 $k \rightarrow 0$ 时被 Higgs 机制推至有限能量。

V.2 默明-瓦格纳-霍恩伯格定理

本节将证明默明-瓦格纳-霍恩伯格定理，该定理断言在具有连续对称性的二维系统中，任何有限温度下都不可能存在真正的长程序。为简洁起见，我们仅考虑具有 $O(2)$ 对称性的 XY 模型（式 1.4），但证明可直接推广至 $O(N)$ 对称情形。¹

V.2.1 定理证明框架

均匀磁场中 XY 模型的能量构型为：

$$E = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\phi_i - \phi_j) - H \sum_{i=1}^N \cos \phi_i, \quad (5.6)$$

其中 ϕ_i 表示格点 \vec{r}_i 处单位矢量 \vec{s}_i 相对于磁场 \vec{H} 方向的夹角。假设二维方形晶格包含 N 个格点，晶格常数设为 1。

证明的核心在于 Bogoliubov-Schwartz 不等式：

$$\langle AA^* \rangle \geq \frac{|\langle AB^* \rangle|^2}{\langle BB^* \rangle}, \quad (5.7)$$

该不等式对任意量 A 和 B 成立，符号 $\langle \dots \rangle$ 表示常规统计平均。

¹原著注：此处采用与原始文献不同的证明方法，更直观显示与式 (5.5) 对数发散的联系

V.2.2 关键量构造

通过精心选择 A 和 B 的表达式:

$$A = \frac{1}{N} \sum_j e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}_j} \sin \phi_j, \quad (5.8)$$

$$B = \frac{1}{N} \sum_k e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}_k} \frac{\partial E}{\partial \phi_k}, \quad (5.9)$$

首先由 A 的定义可得:

$$\sum_{\vec{q}} \langle AA^* \rangle = \frac{1}{N} \sum_j \langle \sin^2 \phi_j \rangle \leq 1. \quad (5.10)$$

类似地计算交叉项:

$$\langle AB^* \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_{j,k} e^{-i\vec{q} \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_k)} \left\langle \frac{\partial E}{\partial \phi_k} \sin \phi_j \right\rangle, \quad (5.11)$$

其中右式平均可表示为:

$$\left\langle \sin \phi_j \frac{\partial E}{\partial \phi_k} \right\rangle = \delta_{jk} T \langle \cos \phi_j \rangle. \quad (5.12)$$

该结果通过分部积分并利用 XY 模型的周期性得到。因此:

$$\langle AB^* \rangle = \frac{Tm}{N}, \quad (5.13)$$

其中 $m = \langle \cos \phi_k \rangle$ 为磁化强度。

V.2.3 二阶项计算

对于 B 的二阶矩:

$$\langle BB^* \rangle = \frac{T}{N^2} \sum_{j,k} e^{-i\vec{q} \cdot (\vec{r}_k - \vec{r}_j)} \left\langle \frac{\partial^2 E}{\partial \phi_k \partial \phi_j} \right\rangle, \quad (5.14)$$

再次通过分部积分计算导数项后可得:

$$\begin{aligned} \langle BB^* \rangle &= \frac{TJ}{N^2} \sum_k \sum_j' \left(1 - e^{-i\vec{q} \cdot (\vec{r}_k - \vec{r}_j)} \right) \langle \cos(\phi_k - \phi_j) \rangle \\ &\quad + \frac{TH}{N^2} \sum_l \langle \cos \phi_l \rangle, \end{aligned} \quad (5.15 - 5.16)$$

其中 j 的求和限于 k 的最近邻格点。由于 $\langle \cos(\phi_k - \phi_j) \rangle$ 对所有最近邻为常数, 可改写为:

$$\langle BB^* \rangle \leq \frac{T(H + J(q_x^2 + q_y^2))}{N}. \quad (5.18)$$

V.2.4 不等式整合

将式 (5.10)、(5.13) 和 (5.18) 代入 Bogoliubov-Schwartz 不等式得:

$$1 \geq \sum_{\vec{q}} \langle AA^* \rangle \geq \frac{Tm^2}{N} \sum_{\vec{q}} \frac{1}{H + Jq^2}. \quad (5.19)$$

取热力学极限 $N \rightarrow \infty$ 可得:

$$1 \geq Tm^2 \int \frac{d^2\vec{q}}{(2\pi)^2} \frac{1}{H + Jq^2}. \quad (5.20)$$

当磁场 H 趋近于零时, 右侧积分发散, 因此在二维热力学极限下严格有:

$$\lim_{H \rightarrow 0} m = 0. \quad (5.21)$$

注意这是与式 (5.5) 相同的对数红外发散导致的结果。在一维情况下发散更强, 定理同样适用。该结论不排除代数有序态的存在, 也不直接适用于具有长程相互作用的系统 (参见习题 5.5 和 5.6 的示例)。

V.3 非线性 σ 模型

考虑从有序相出发的 Ginzburg-Landau-Wilson 理论中具有 $O(N)$ 对称性的相变。为方便起见, 我们假设磁序参量, 并采用有限但小的晶格间距 a 。引入显式破坏 $O(N)$ 对称性的小磁场 \vec{B} 将有助于分析。将场量表示为 $\Phi(\vec{x}) = (\sigma(\vec{x}), \vec{\Pi}(\vec{x}))$, 其中 $\sigma(\vec{x})$ 沿磁场方向, $\vec{\Pi}(\vec{x})$ 包含 $N-1$ 个垂直于 \vec{B} 的实分量 (满足 $\vec{B} \cdot \vec{\Pi}(\vec{x}) = 0$)。在低温极限下忽略振幅涨落, 可将场分量的约束条件写为:

$$\sigma^2(\vec{x}) + \vec{\Pi}^2(\vec{x}) = \Phi_0^2,$$

为简便起见设 $\Phi_0^2 = 1$ 。此时配分函数可表示为:

$$Z = \int D\vec{\Pi}(\vec{x}) D\sigma(\vec{x}) \prod_{\vec{x}} \delta(\sigma^2(\vec{x}) + \vec{\Pi}^2(\vec{x}) - 1) \\ \times e^{-\frac{1}{T} \int d\vec{x} [\frac{1}{2}((\nabla\sigma(\vec{x}))^2 + (\nabla\vec{\Pi}(\vec{x}))^2) - B\sigma(\vec{x})]}$$

这定义了非线性 σ 模型。在式 (5.23) 中我们忽略了场量及其导数的高阶项。虽然作用量在场量 σ 和 $\vec{\Pi}$ 上是二次的, 但由于积分测度中的约束条件, 该模型并非简单的高斯型。

V.3.1 约束条件的处理

求解约束条件并将 $\sigma(\vec{x}) = \sqrt{1 - \vec{\Pi}^2(\vec{x})}$ 代入配分函数, 得到:

$$Z = \int \prod_{\vec{x}} \frac{d\vec{\Pi}(\vec{x})}{2\sqrt{1-\vec{\Pi}^2(\vec{x})}} e^{-\frac{1}{T} \int d\vec{x} \left[\frac{1}{2} \left((\nabla \sqrt{1-\vec{\Pi}^2(\vec{x})})^2 + (\nabla \vec{\Pi}(\vec{x}))^2 \right) - B \sqrt{1-\vec{\Pi}^2(\vec{x})} \right]}$$

利用表达式:

$$\prod_x \frac{1}{\sqrt{1-\vec{\Pi}^2(x)}} = e^{-\frac{1}{2a^d} \int d\vec{x} \ln(1-\vec{\Pi}^2(\vec{x}))},$$

其中 $a \sim \Lambda^{-1}$ 可理解为晶格间距, 将作用量展开至 $\vec{\Pi}(\vec{x})$ 的四阶项后得到:

$$S = \frac{1}{2T} \int d\vec{x} \left[(\nabla \vec{\Pi}(\vec{x}))^2 + \frac{1}{4} (\nabla \vec{\Pi}^2(\vec{x}))^2 - \frac{T}{a^d} \vec{\Pi}^2(\vec{x}) - \frac{T}{2a^d} \vec{\Pi}^4(\vec{x}) + B \left(\vec{\Pi}^2(\vec{x}) + \frac{1}{4} \vec{\Pi}^4(\vec{x}) \right) + O(\vec{\Pi}^6) \right]$$

这种形式下作用量显含三种不同类型的四阶项, 成为显式的非高斯模型。

V.3.2 零阶近似分析

首先采用零阶近似忽略所有四阶项。低温下还可忽略积分测度产生的二次项, 将二次部分写为:

$$S_0 = \frac{1}{2T} \int_0^\Lambda \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} (k^2 + B) \Pi_\alpha(\vec{k}) \Pi_\alpha(-\vec{k}),$$

其中 $\alpha = 1, 2, \dots, N-1$ 为隐含求和。对快模进行常规积分并重标度 $b\vec{k} \rightarrow \vec{k}$ 使截断恢复原值后, 磁场需按 $b^2 B \rightarrow B$ 标度变换。在高斯近似下似乎不需要重标度 $\Pi_\alpha(k)$ 。但在解除约束前, 作用量 (5.23) 中磁场相关项为 $\sim B\sigma(k=0)/T$ 。由于 $\sigma(k)$ 与 $\Pi_\alpha(k)$ 标度行为相同, 且作用量本身不标度, 组合 B/T 和 $\Pi_\alpha(k)$ 必须按相反方式标度: $Z_\Pi \vec{\Pi}(\vec{k}) \rightarrow \vec{\Pi}(\vec{k})$, $Z_\Pi^{-1} B/T \rightarrow B/T$ 。与式 (5.27) 比较可得重标度因子 $Z_\Pi = b^{-d} + O(T)$ 。因此零阶近似下温度在快模积分后变为:

$$T \rightarrow T(b) = b^{2+d} Z_\Pi^2 T = b^{2-d} T + O(T^2).$$

对于 $d < 2$, 低温是相关参数并在重整化下增长。由于高温区重整化总是使温度升高, 在 $d < 2$ 维度 $T = 0$ 固定点显得不稳定, 重整化流向高温区 (见图 5.1)。而对于 $d > 2$, $T = 0$ 固定点变为稳定。由于高温重整化仍应使温度升高, 预期存在有限温度的亚稳定固定点分隔两个区域。因此可推测:

$$\beta_T = \frac{dT}{d \ln(b)} = (2-d)T + O(T^2),$$

其中 $O(T^2)$ 项为正。若确实如此，将在临界点处存在：

$$T^* \propto (d-2),$$

该值在接近且高于二维时很小。这为我们提供了替代的微扰参数 $\epsilon = d - d_{\text{low}}$ 。如 5.4 节所述，被忽略的四阶项将贡献 β_T 中 $O(T^n)$ ($n \geq 2$) 的项。因此原则上可通过二维附近的低温展开获得临界指数。

V.4 低温展开

V.4.1 热平均计算

考虑以下热平均表达式：

$$\langle \Pi_\alpha(\vec{k}_1) \Pi_\beta(\vec{k}_2) \rangle = (2\pi)^d G(k_1) \delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2),$$

其中 $G^{-1}(k) = (k^2 + B)/T$ 为零级（领头阶）温度近似，如式 (5.27) 所示。作用量中剩余的二次及高阶项将对此形式产生温度的高阶修正，这些修正可被重新吸收到场量、磁场和温度的重定义中。由于 $G(k) \sim T$ ，在温度的一阶近似下可忽略作用量中除四阶项外的所有项，因为高阶项会引入 $G(k)$ 的高次幂从而仅产生温度的高阶修正。在一阶温度近似下亦可忽略测度产生的四阶项。

V.4.2 四阶项分析

作用量 (5.26) 中两个剩余的四阶项在傅里叶空间可表示为：

$$\frac{B}{8T} \int \frac{d\vec{k}_1 \dots d\vec{k}_4}{(2\pi)^{3d}} \delta\left(\sum_{i=1}^4 \vec{k}_i\right) \Pi_\alpha(\vec{k}_1) \Pi_\alpha(\vec{k}_2) \Pi_\beta(\vec{k}_3) \Pi_\beta(\vec{k}_4),$$

以及

$$-\frac{1}{8T} \int \frac{d\vec{k}_1 \dots d\vec{k}_4}{(2\pi)^{3d}} \delta\left(\sum_{i=1}^4 \vec{k}_i\right) (\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \cdot (\vec{k}_3 + \vec{k}_4) \Pi_\alpha(\vec{k}_1) \Pi_\alpha(\vec{k}_2) \Pi_\beta(\vec{k}_3) \Pi_\beta(\vec{k}_4),$$

此处对重复指标采用爱因斯坦求和约定。在温度的一阶近似下，快模积分导致格林函数的修正：

$$G^{-1}(q) = \frac{1}{T} (q^2 + B) - \frac{1}{a^d} + (N+1) \frac{B}{2} \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 + B} \\ + \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{q^2 + k^2}{k^2 + B},$$

该式可改写为更明确的形式:

$$\begin{aligned} G^{-1}(q) = & \frac{q^2}{T} \left(1 + T \frac{\Lambda^{d-2} S_d}{(2\pi)^d} \ln(b) + O(BT, T^2) \right) \\ & + \frac{B}{T} \left(1 + T \frac{N-1}{2} \frac{\Lambda^{d-2} S_d}{(2\pi)^d} \ln(b) + O(BT, T^2) \right) \\ & - \frac{1}{a^d} \left(1 - (\Lambda a)^d \frac{S_d}{(2\pi)^d} \ln(b) \right). \end{aligned}$$

末项表明积分快模后晶格常数已有效增大。剩余慢模的作用量可表示为:

$$S_{<} = \frac{1}{2T} \int_0^{\Lambda/b} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} G^{-1}(k) \Pi_\alpha(\vec{k}) \Pi_\alpha(-\vec{k}).$$

V.4.3 重整化群方程

对场量进行重标度变换 $Z_\Pi \vec{\Pi}(k) \rightarrow \vec{\Pi}(k)$ 和 $Z_\Pi^{-1} B/T \rightarrow B/T$, 上述形式暗示:

$$Z_\Pi = b^{-d} \left(1 + T \frac{N-1}{2} \frac{\Lambda^{d-2} S_d}{(2\pi)^d} \ln(b) + O(T^2) \right).$$

重整化后的温度则变为:

$$\begin{aligned} T(b) = & b^{2+d} Z_\Pi^2 T \left(1 - T \frac{\Lambda^{d-2} S_d}{(2\pi)^d} \ln(b) + O(BT, T^2) \right) \\ = & b^{2-d} T \left(1 + T(N-2) \frac{\Lambda^{d-2} S_d}{(2\pi)^d} \ln(b) \right). \end{aligned}$$

定义无量纲温度 $\hat{T} = T \Lambda^{d-2} S_d / (2\pi)^d$, 最终可得温度 β 函数:

$$\beta_T = \frac{d\hat{T}}{d\ln(b)} = (2-d)\hat{T} + (N-2)\hat{T}^2 + O(\hat{T}^3).$$

V.4.4 临界行为分析

当 $d > 2$ 且 $N > 2$ 时, 确实存在临界点 $\hat{T}^* = (d-2)/(N-2) + O((d-2)^2)$ (见图 5.2)。该临界点处 β 函数的斜率决定关联长度指数:

$$v^{-1} = \left. \frac{d\beta_T}{d\hat{T}} \right|_{\hat{T}=\hat{T}^*} = d-2 + O((d-2)^2).$$

通过式 (5.35) 和 (3.44) 可求得反常维度:

$$\eta = \hat{T}^* + O\left(\left(\hat{T}^*\right)^2\right) = \frac{d-2}{N-2} + O((d-2)^2).$$

其余指数可通过常规标度律获得。对于 $d \leq 2$ 且 $N > 2$ 的情况, 重整化变换总是使温度升高, 唯一稳定固定点为 $T = \infty$ 。这种流动意味着系统在任何有限温度下都处于无序相。

V.5 讨论

V.5.1 临界展开的局限性

上述基于 $d - 2$ 展开的临界指数计算可推广至更高阶项，但与上临界维度展开相比，其精度显著不足。例如对于 $d = 3$ 和 $N = 3$ 的情况，前三阶展开给出的关联长度指数倒数序列为 $v^{-1} = (1, 2, 2.5)$ 。即便通过 Borel-Padé 变换处理第四阶项，最佳估计值 $v = 0.799$ 仍远高于精确值 $v = 0.705$ 。反常维度的情况更为严重，前三阶展开直接给出 $\eta = (1, -1, 2)$ 的发散序列。

V.5.2 理论困境的根源

这种围绕下临界维度展开的明显失效，其根本原因至今尚未完全阐明。该问题不仅具有学术意义，因为在某些物理问题（如随机势场中的量子力学波函数局域化）中，非线性 σ 模型作为有效理论时可能不存在有限的上临界维度。反常维度的巨大数值尤其令人担忧，这可能暗示着式 (5.23) 中忽略场量高阶导数项的梯度展开存在根本性缺陷。

V.5.3 $N = 2$ 超流体的特殊性

对于超流体 ($N = 2$) 情形， β_T 函数的二次项完全消失——实际上所有高阶项也同时消失。这在物理上源于非线性 σ 模型可用序参量相位表示为：

$$S = \frac{|\Phi_0|^2}{2T} \int d\vec{x} (\nabla \phi(\vec{x}))^2,$$

其中角度 ϕ 不受约束。此时温度的微扰展开是平庸的。但这并不意味着二维超流体不存在相变：微扰理论仅考虑相位的小梯度变化（连续近似足够），而式 (5.42) 的连续表达式忽略了 ϕ 实际是周期变量这一事实。相位的周期性将导致二维超流体在低温代数有序相与高温无序相之间出现特殊转变——这正是下一章将要讨论的 Kosterlitz-Thouless 相变。

V.5.4 理论启示

该案例揭示了临界现象研究中两个重要原则：

- 下临界维度展开在 $d \geq 2$ 时收敛性较差，尤其对反常维度的预测
- 连续对称性破缺系统的拓扑性质（如相位周期性）可能引发超越微扰论框架的相变