Notes on Stochastic Processes

Q. X. Fang

2025-02-04

Contents

V 随机过程的应用

V.1 物理问题：布朗运动

描述布朗运动，认为分子上的存在一个快速波动的力，是一个白噪声，则：

$$F_f = -\gamma p = -\gamma m v$$

其中阻尼系数是$\gamma = \frac{6\pi\eta a}{m}$，其中 a 是微粒的直径，$\eta$是流体的粘度，m 是微粒的质量。现在只考虑一维情况，有：

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = F_f + F_g = -\gamma p + g\xi(t) = -\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + g\xi(t)$$

其中：

$$\langle \xi(t)\xi(t+\tau)\rangle = \delta(\tau)$$

微分方程组：

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = \frac{p}{m}\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}p = -\gamma p\,\mathrm{d}t + g\,\mathrm{d}W \end{cases}$$

关于动量的方程是一个 Ornstein-Uhlenbeck 过程，其解是：

$$p(t) = p(0)e^{-\gamma t} + g\int_0^t e^{-\gamma(s-t)}\,\mathrm{d}W$$

方差：

$$V[p(t)] = g^2\int_0^t e^{-2\gamma(s-t)}\,\mathrm{d}s = \frac{g^2}{2\gamma}(1 - e^{-2\gamma t})$$

平均动能：$\langle E\rangle = \left\langle \frac{p^2}{2m}\right\rangle$ 稳态极限$t\to\infty$，平均动能应该等于$\frac{kT}{2}$，所以：

$$\frac{g^2}{2\gamma}\times\frac{1}{2m} = \frac{g^2}{24\pi\eta d} = \frac{kT}{2}, \quad g = \sqrt{12\pi\eta dkT}$$

计算可测量量——位置：

$$\langle x(t)\rangle = \left\langle \frac{1}{m\gamma}(1-e^{-\gamma t})p(0)\right\rangle + \left\langle \frac{g}{m\gamma}\int_0^t (1-e^{-\gamma s})\,\mathrm{d}W(s)\right\rangle$$

$$= \frac{1}{m\gamma}(1-e^{-\gamma t})p(0)$$

$$V[x(t)] = V\left[\frac{1}{m\gamma}(1-e^{-\gamma t})p(0)\right] + V\left[\frac{g}{m\gamma}\int_0^t (1-e^{-\gamma s})\right]$$

$$= \frac{g^2}{m^2\gamma^2}\int_0^t (1-e^{-\gamma s})^2\,\mathrm{d}s$$

$$= \frac{g^2}{m^2\gamma^2}t + \frac{g^2}{2m^2\gamma^3}[4e^{-\gamma t} - e^{-2\gamma t} - 3]$$

朗之万认为阻尼是十分快的，远大于时间分辨率，也就是有条件$\gamma t \gg 1$，因此可以将衰减部分进行近似，得到：

$$V[x(t)] \approx \frac{g^2 t}{m^2\gamma^2} - \frac{3g^2}{2m^2\gamma^3} = \frac{g^2}{(m\gamma)^2}\left(t - \frac{3}{2\gamma}\right) \approx \frac{g^2 t}{m^2\gamma^2} = \frac{kT}{3\pi\eta d}t$$

可以看到方差和时间成正比，因此布朗运动和 Wiener 过程是一致的。考虑位置的演化，有：

$$\mathrm{d}x \approx \alpha\,\mathrm{d}W, \quad or, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \approx \xi(t)$$

由于$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{p}{m}$，因此$p(t)$的表现类似于$\xi(t)$。动量的自相关函数会以阻尼为速率衰减，因此 阻尼较大的情况下，动量的自相关函数会快速达到峰值，类似于白噪声的情况。而阻尼较大的另一种表述是，时间分辨率足够大， 也就是计算的每个时间间隔较大，使得$\delta t \gg \frac{1}{\gamma}$，那么相应的可以认为阻尼较大。

V.2 金融问题：期权定价

看涨期权: 买方当场支付一定价格C的货币来获得期权, 在未来时间t时可以选择获得交付的$S(t)$的资产, 支付为K的执行价格。不执行只损失支付价格。

看跌期权: 买方当场支付一定价格C的货币来获得期权, 在未来时间t时可以选择交隔$S(t)$的资产，收获为K的执行价格。不执行只损失支付价格。

V.2.1 一些基础

利率: 支付的利率为k, 利率存续时间为Δt, 则获得的利息为: $\Delta M = kM\Delta t$, 不动利率连续积累的微分方程:

$$\mathrm{d}M = rM\,\mathrm{d}t$$

其解为:

$$M(t) = M(0)e^{rt}$$

在金融中通常假设所有货币以 r 的指数增长，这称为无风险利率。

套利行为: 利用同一商品不同价格（或有效等价的两种商品）执行不同买入和卖出策略，从中获得无风险利润的方法称为套利行为。 买入低价商品以高价卖出的行为会增加对低价商品的需求, 从而造成商品价格上升; 反之，造成高价商品价格下降，从而使得价格回归一致。因此，市场总是向一致移动。

远期合约: 在未来时间t以约定价格F交易物品。设当前时刻为$t = 0$, 商品价格为P, 交易时间为t。获得 F 的方法是无风险利润估计: 假设现在持有商品，并以P交易出，随后在 t 时刻，不考虑等价物价格变化，在银行增值后持有财产为$P' = e^{rt}P$，于是在 t 时刻以F买入，获得无风险利润$P' - F$。

因此，远期合约价格应该为$F = e^{rt}P$。这是无波动条件下的无套利价格。但引入波动后，$F = 0$的定价也存在变动可能。

V.2.2 Black–Scholes equation:
假设股票价格服从几何布朗运动，即:

$$\mathrm{d}S = \mu S\,\mathrm{d}t + \sigma S\,\mathrm{d}W$$

前者意味着获利过程，和储蓄过程一致，为指数增的。后者为随机部分，和价格正相关，是 Wiener 过程。其中μ为股票价格的回报率，σ为波动率。这是一个线性随机微分方程，可以通过 Ito 引理求解。

为了计算看涨期权 C 的价格，构建两个等价的投资组合，一个包含期权，另一个知道其时间依赖性。根据无套利的假设，能够确定期权的价值。一个投资组合需要能够拥有负金额的资产。当资产价值上升 x 时，我们的投资组合价值也会下降相同的金额。设某人那里借了资产，并同意在 T 后归还，然后立即出售（这被称为卖空）。如果它目前的价格是 P，那么我们现在有 P 美元。我们的投资组合由我们借入的人的资产债务和银行中的 P 美元组成，P 美元是资产的当前价格。如果资产价格上涨，为了能够将资产归还给我们借来的人，我们必须回购资产。如果资产的新价格是 P+x，那么我们必须花费 P+x 美元。因此，我们回购资产后的资金减少了 x 美元。在时间 T，我们的投资组合的总价值是多少？我们赚的钱增加了我们赚的利息，即$(e^{rt} - 1)P$，减少了 x 美元。因此，投资组合的行为就像我们在银行里有正的 P 美元，而资产的数量是负的。

为了计算期权的价格，我们将期权和精心选择的资产量组成一个投资组合，并证明这个投资组合没有风险。既然没有风险，那就相当于在银行里有钱。要构建这个特殊的投资组合，请考虑一个期权，该期权赋予持有人购买或出售价格为 S 的资产 S 的权利。我们说期权是"写在"资产上的，S 是"标的资产"，或期权的"底层"。我们现在假设期权 C 的价值（无论它是什么）将仅取决于标的资产 S 的价值和时间。因此，我们可以写出$C = C(S,t)$。我们还将假设期权的价值是资产价格和时间的平滑函数，因此衍生品$\frac{\partial C}{\partial S}$，$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$，$\frac{\partial C}{\partial t}$存在。现在我们构建一个由期权和一定数量的标的资产 S 组成的投资组合。投资组合的价值为:

$$\Pi = C + \alpha S$$

其中α是我们选择的资产数量。利用价格的随机方程，计算价值函数的微分方程:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\Pi &= \mathrm{d}C + \alpha\,\mathrm{d}S \\
&= C(S+\mathrm{d}S, t+\mathrm{d}t) - C(S,t) + \alpha\,\mathrm{d}S \\
&= \left[\frac{\partial C}{\partial S} + \alpha\right]\mathrm{d}S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(\mathrm{d}S)^2 + \frac{\partial C}{\partial t}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{\partial C}{\partial S} + \alpha\right](\mu\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W)S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(\mu\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W)^2 S^2 + \frac{\partial C}{\partial t}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{\partial C}{\partial S} + \alpha\right](\mu\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W)S + \left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + \frac{\partial C}{\partial t}\right]\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{\partial C}{\partial S}\mu S + \alpha\mu S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + \frac{\partial C}{\partial t}\right]\mathrm{d}t + \left[\frac{\partial C}{\partial S} + \alpha\right]\sigma S\,\mathrm{d}W
\end{aligned}
$$

若使得:

$$\alpha = -\frac{\partial C}{\partial S}$$

则价格方式是确定性方程而非随机方程，这意味着投资组合中没有随机成分，其价值变化与货币价值变化相同，即:

$$\mathrm{d}\Pi = r\Pi\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + \frac{\partial C}{\partial t}\right]\mathrm{d}t$$

令$\Pi = C + \alpha S = C - \frac{\partial C}{\partial S}S$得到波动方程:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = rC - rS\frac{\partial C}{\partial S} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2$$

这就是 Black–Scholes 方程。

V.2.3 类期权投资

直接利用资金和期权等价物建立投资组合，有:

$$\mathrm{d}C = \mathrm{d}\Pi - \alpha\,\mathrm{d}S$$

当$\alpha=-\frac{\partial C}{\partial S}$时，$\mathrm{d}\Pi$的表现和有资金类似。那么用 M 美元和$-\alpha$份的标的资产 S 建立投资组合，有：

$$\Phi=M-\alpha S$$

其微分方程为：

$$\mathrm{d}\Phi=\mathrm{d}M-\alpha\,\mathrm{d}S$$

注意到资金本身和投资价值等价，那么$\mathrm{d}\Phi$等价于$\mathrm{d}C$。为了构建一个投资组合，使其在下一次时间增量 dt 中的价值变化与期权完全相同，首先通过求解 Black-Scholes 方程来计算期权 C 的当前价值。然后购买价值αS的资产，并将$M-\alpha S$美元存入银行（从而获得无风险利率）。要做到这一点必须使用总共 C 美元。为了制作一个与 C 等价的投资组合，它每次都应该有 C 的值，因此必须花费这笔钱来获得它。如果我们现在等待时间$\mathrm{d}t$，我们知道投资组合的新值$\Phi(t+\mathrm{d}t)$仍然具有与$C(t+\mathrm{d}t)$相同的值，因为两者的变化是相同的。

在这种过程下，资金在资金池和资产上不断再分配（买入和卖出），并且是无交易成本的。正是这种人为创造期权的过程，使金融机构能够向人们出售期权。他们以当前价值 C 将期权出售给某人，然后用这笔钱构建与期权等价的投资组合。然后，他们每隔一段时间重新平衡投资组合，使其与期权相等（不能完全做到这一点，但做得足够好，使风险保持在可接受的范围内）。然后，在期权到期时，如果期权有价值（如果它是“现金”），该机构将在投资组合中拥有这笔金额，并可以将其交给期权所有者。由于构建人工期权的成本不超过所有者为期权支付的价格，因此机构在出售期权时只承担了最

小的风险。然而，由于交易成本以及该机构在重新平衡投资组合方面所做的工作，它将收取比其“真实”价值 C 更高的期权费用。

V.2.4 欧式期权

期权到期时的价值，作为股价的函数，称为偿付函数。对于执行价格为 E 的欧洲看涨期权，那么在期权到期时，如果$S(T) > E$（其中 S 是股价，T 是到期时间），则其价值为$S(T) - E$，或者如果$S(T) < E$，则价值为零。因此，我们可以将欧洲看涨期权的支付函数写成$f(S) = \max(S(T) - E, 0)$。对于欧洲看跌期权（赋予持有人以固定价格 E 出售股票的权利)，其支付函数为 F(S）=max(E–S(T),0)。

边界条件是$S = 0$（股票没有价值）和$S \to \infty$（股价远大于执行价格的极限)。通过检查 S 的随机方程，我们看到当 S=0 时，在以后的所有时间里都将保持为零。这意味着当 S=0 时，看涨期权的值为零。当 S 趋于无穷大时，看涨期权的值也趋于无穷大。对于看跌期权，当 S=0 时，在某个时间 t，它将保持为零，所以看跌期权在到期时的价值将是执行价格 E。如果我们知道在时间 t 我们将有 E 美元，那么这就相当于在时间 t 银行有$e^{-(T-t)}E$美元.因此，在 S=0 边界上，看跌期权的值为$P(0, t) = e^{-(T-t)}E$。当$S \to \infty$时，则 S>E，使得 put 的值为 0。

欧式看涨期权对应方程解:

$$C(S, t) = SD(x) - Ee^{-r(T-t)}D(y)$$

其中 D 是高斯分布:

$$D(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}z$$

其中:

$$x=\frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\quad y=\frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

看跌期权的价值:

$$P(S,t)=-SD(-x)+Ee^{-r(T-t)}D(-y)$$

因此，任何价值 V 仅是 S 和 t 的函数的投资组合都将满足 Black-Scholes 方程。因此，投资组合在任何时候的价值（即 Black-Scholes 方程的解）完全由投资组合在指定最终时间和其他“边界”的价值决定.因此，在单个时间 T，两个此类投资组合的所有 S 值都相等，这两个投资组合在所有时间都具有相同的值，因此是等效的投资组合.

V.3 Stratonovich 积分

在上述布朗运动的例子中，噪声不取决于粒子的状态（粒子的位置或速度）。与系统状态无关的噪声被称为“加性”噪声。如何描述与粒子位置成比例的波动力，即相关的噪声？之所以如此微妙，是因为维纳噪声是一种理想化。它假设在每个无穷小的时间间隔内噪声引起的增量与前一个间隔的增量不同（并且独立）。这意味着噪声的波动无限快，任何物理过程都不可能真正具有这种性质。

布朗运动粒子在小间隔内的加速度:

$$\overline{a}(\Delta t)=-\gamma p+\beta\frac{\Delta W}{\Delta t}$$

波动项有 $\frac{1}{\sqrt{\Delta t}}$ 的大小，在随着时间间隔趋于 0 的情况，加速度会趋于无穷大。这限制了 Wiener 过程的应用范围，要求力在与系统运动频率范围相比较宽的频率范围内有波动。下面给出其他获得连续极限的方法。一般的 Ito 差分方程是:

$$\Delta x = f(x,t)\Delta t + g(x,t)\Delta W$$

定义 $x_n = x(n\Delta t), t_n = \Delta t$，第一个增量是 ΔW_0，于是:

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + \Delta x_{n-1} \\ &= x_{n-1} + f(x_{n-1}, t_{n-1})\Delta t + g(x_{n-1}, t_{n-1})\Delta W_{n-1} \end{aligned}$$

其一般解:

$$x_N = x(N\Delta t) = x_0 + \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n, t_n)\Delta t + \sum_{n=0}^{N-1} g(x_n, t_n)\Delta W_n$$

对于波动部分，取无穷大极限，可以得到积分:

$$\int g(x(t), t)\,\mathrm{d}W = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} g(x_n, t_n)\Delta W_n$$

Stratonovich 积分定义方法:

$$\begin{aligned} \int_0^t g(x(t), t)\,\mathrm{d}W &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} g\left(\frac{x[(n+1)\Delta t] + x[n\Delta t]}{2}, n\Delta t\right)\mathrm{d}W_n \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} g\left(\frac{x_{n+1} + x_n}{2}, t_n\right)\Delta W_n \end{aligned}$$

如果 $\mathrm{d}W$ 是时间平滑函数的增量，Ito 和 Stratonovich 积分期望是相等的，但事实不是。在 Ito 积分中，在第 n 个时间步长中，是时间步长开始时的 $g(x,t)$ 值乘以增量 ΔW_n，不包含新增量，因此 $(\mathrm{d}W_n)^2$ 项不存在于第 n 项中。但是在

Stratonovich 积分中，第 n 项包含该时间步长区间末尾的 g 值。这意味着在每个时间步长中，Stratonovich 积分都包含一个与$(\Delta W_n)^2$成比例的额外项。因此在平滑连续后，随机增量的一阶效应消失，但是二阶效应等价于对时间的一阶微分，得到了保留。

在 Ito 方程中定义的随机变量是:

$$x_n = x_{n-1} + \Delta x_{n-1} = x_{n-1} + f(x_{n-1}, t_{n-1})\Delta t + g(x_{n-1}, t_{n-1})\Delta W_{n-1}$$

Stratonovich 积分中的第 n 项是:

$$g\left(\frac{x_{n+1} + x_n}{2}, t_n\right)\Delta W_n = g\left(x_n + \frac{\Delta x_n}{2}, t_n\right)\Delta W_n$$

展开到二阶:

$$g\left(x_n + \frac{\Delta x_n}{2}, t_n\right) = g(x_n, t_n) + \left(\frac{f_n}{2}\frac{\partial g_n}{\partial x} + \frac{g_n^2}{4}\frac{\partial^2 g_n}{\partial x^2}\right)\Delta t + \left(\frac{g_n}{2}\frac{\partial g_n}{\partial t}\right)\mathrm{d}W_n$$

用 Ito 积分中出现的 gn 完全表示了 Stratonovich 积分中出现在第 n 项中的 g。将其代入 Stratonovich 积分的离散和，根据 Ito 积分的求和写出:

$$\sum_{n=0}^{N-1} g\left(x_n + \frac{\Delta x_n}{2}, t_n\right)\Delta W_n = \sum_{n=0}^{N-1} g_n \Delta W_n + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{g_n}{2}\frac{\partial g_n}{\partial x}\Delta t$$

利用极限得到:

$$⨍_0^t g(x(t), t)\,\mathrm{d}W = \int_0^t g(x(t), t)\,\mathrm{d}W + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial g(x,t)}{\partial x} g(x,t)\,\mathrm{d}t$$

若随机方程的解:

$$\mathrm{d}x = f(x,t)\,\mathrm{d}t + g(x,t)\,\mathrm{d}W$$

利用 Stratonovich 积分代替 Ito 积分，得到:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= y(0) + \int_0^t f(y(t),t)\,\mathrm{d}t + \fint_0^t g(y(t),t)\,\mathrm{d}W \\
&= y(0) + \int_0^t \left[f(y(t),t) + \frac{g((y(t),t))}{2}\frac{\partial g(y(t),t)}{\partial y} \right] \mathrm{d}t + \int_0^t g(y(t),t)\,\mathrm{d}W
\end{aligned}
$$

利用 Ito 积分得到的则是:

$$
\mathrm{d}y = \left[f + \frac{g}{2}\frac{\partial g}{\partial y} \right] \mathrm{d}t + g\,\mathrm{d}W
$$

因此，我们看到，使用 Stratonovich 积分作为随机微分方程的解与使用我们常用的方法（Ito 积分）求解方程相同，但通过添加$\frac{g}{2}\frac{\partial g}{\partial y}$来改变确定性项 f

Ito 和 Stratonovich 随机向量方程之间的关系。一般向量 Stratonovich 方程:

$$
\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\,\mathrm{d}t + B(\boldsymbol{x},t)\,\mathbf{d}\boldsymbol{W}
$$

分量形式:

$$
\mathrm{d}x_i = A_i(\boldsymbol{x},t)\,\mathrm{d}t + \sum_j B_{ij}(\boldsymbol{x},t)\,\mathrm{d}W_j
$$

如果定义为 Stratonovich 积分，那么对应的 Ito 方程为:

$$
\mathrm{d}x_i = \left(A_i + \frac{1}{2}\sum_{j,k} B_{kj}\frac{\partial B_{ij}}{\partial v_k} \right) \mathrm{d}t + \sum_j B_{ij}\,\mathrm{d}W_j
$$

考虑真实物理系统中的乘性噪声时，自然出现的是 Stratonovich 积分，而不是 Ito 积分：事实证明，如果我们有一个真实的波动力，并且取波动带宽变得非常宽的极限（与系统的时间标度相比），那么 Stratonovich 积分就是这个过程的极限.

处理程序：写下一个随机方程来描述由物理噪声驱动的系统的动力学时，其幅度取决于系统的状态，这是一个 Stratonovich 随机方程。由于 Ito 方程的求解比 Stratonovich 方程简单得多，我们在继续之前将 Strathonovich 方程转换为 Ito 方程。

VI 高斯噪声的数值方法

VI.1 Euler 方法

差分方程:

$$\Delta x = f(x,t)\Delta t + g(x,t)\Delta W$$

对每一个随机步长，给出一个随机生成器生成的高斯随机数ΔW，然后添加到随机函数上。这是对一个路径的模拟，多次重复模拟以获得不同的路径。这对于扩展到多维系统也是非常有用的。

VI.1.1 生成高斯随机变量

要生成均值为零的高斯随机变量。以下方法生成两个方差$\sigma^2 = 1$的独立零均值高斯变量。首先取两个随机变量 x 和 y，它们均匀分布在区间[0,1]上，计算:

$$x' = 2x - 1, \quad y' = 2y - 1$$

这些新的随机变量现在均匀分布在区间[−1,1]上。现在计算:

$$r = x'^2 + y'^2$$

若$r = 0$或$r \geq 1$，回到第一步计算新的 x 和 y。否则:

$$g_1 = x'\sqrt{-2\frac{\ln(r)}{r}}, \quad g_2 = y'\sqrt{-2\frac{\ln(r)}{r}}$$

这样就是两个均值为 0 的方差为 1 的高斯随机变量。若希望方差为c，只需要将g_1和g_2乘以$\sqrt{c}$即可。

VI.2 检验精确性和精度

当时间步长趋于零时，模拟给出的近似样本路径在极限内收敛到真实样本路径。检查使用特定时间步长的模拟准确性的一种简单方法是再次执行模拟，但这次时间步长减半。如果两次模拟的结果仅相差很小，则可以假设第一次模拟的精度接近它们之间的差异。这是因为我们预计第二次将时间步

长减半的结果会比第一次改变的结果小得多。缩小时间步长会增加随机变量数量，即要求:

$$\Delta W'_{2n} + \Delta W'_{2n+1} = \Delta W_n$$

可以不断减小时间步长，直到模拟的结果满足所需的精度。

Euler 方法保证误差按照Δt的一阶精度收敛。数值方法的精度称为阶数。Euler 是半阶，是由于增量的幂级数展开时，增量与步长的开根相同尺度。

VI.3 Milstien 方法

Milstien 方法在 Euler 方法上对随机变量的微分:

$$\mathrm{d}x = f(x,t)\,\mathrm{d}t + g(x,t)\,\mathrm{d}W$$

进行修改，由离散形式:

$$\Delta x = f\Delta t + g\Delta W + \frac{g}{2}\frac{\partial g}{\partial x}[(\Delta W)^2 - \Delta t]$$

VI.3.1 标量噪音的向量方程

对于一个标量噪声的向量方程:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},t)\,\mathrm{d}W$$

变量和函数都是 N 维向量。Milstien 方法的离散形式:

$$\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}\Delta t + \boldsymbol{g}\Delta W + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}}[(\Delta W)^2 - \Delta t]$$

分量形式:

$$\Delta x_i = f_i\Delta t + g_i\Delta W + \frac{1}{2}\sum_j g_j\frac{\partial g_i}{\partial x_j}[(\Delta W)^2 - \Delta t]$$

上述方程的两种特殊形式:

1. 具有标量噪声的 Ornstein-Uhlenbeck 方程。过程是:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = F\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{g}\,\mathrm{d}W$$

其中 F 是常数矩阵，g 是常数向量。Milstien 方法的离散形式和 Euler 方法相同:

$$\Delta\boldsymbol{x} = F\boldsymbol{x}\Delta t + \boldsymbol{g}\Delta W$$

这意味着对于加性噪声，欧拉方法是一阶方法。

2. 具有标量噪声的一般线性随机方程。对于具有单个噪声源的一般线性随机方程:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = F\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t + G\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}W$$

其中 F 和 G 是常数矩阵。Milstien 方法的离散形式:

$$\Delta\boldsymbol{x} = F\boldsymbol{x}\Delta t + G\boldsymbol{x}\Delta W + \frac{1}{2}G^2\boldsymbol{x}[(\Delta W)^2 - \Delta t]$$

VI.3.2 交换噪声的向量方程

当存在多个噪声源(即噪声增量向量)时，Milstien 的方法通常要复杂得多。考虑一种特殊情况，这种方法仍然很简单。一般向量随机微分方程由下式给出:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)\,\mathrm{d}t + G(\boldsymbol{x},t)\,\mathbf{d}\boldsymbol{W}$$

有 M 个噪声源，$G(\boldsymbol{x},t)$是一个$N \times M$矩阵。如果矩阵满足:

$$\sum_m G_{mj}\frac{\partial G_{ik}}{\partial x_m} = \sum_m G_{mk}\frac{\partial G_{ij}}{\partial x_m}$$

则称噪声是交换的。许多重要的特殊情况都属于这一类，包括加性噪声，其中 G 独立于 x，对角线噪声指 G 是对角线。分离的线性噪声:

$$G_{ij} = g_{ij}(t)x_i$$

这意味着G_{ij}在$j \neq i$时不含x_j 当噪声交换时，分量的 Milstien 方法为:

$$\Delta x_i = f_i \Delta t + \sum_j G_{ij} \Delta W_j$$

$$+\frac{1}{2}\sum_j\sum_k\left[\sum_m G_{mj}\frac{\partial G_{ik}}{\partial x_m}\right]\Delta W_j \Delta W_k - \frac{1}{2}\sum_j\left[\sum_m G_{mj}\frac{\partial G_{ij}}{\partial x_m}\right]\Delta t$$

VI.3.3 一般向量方程

对于一个完全通用的向量随机方程，Milstien 的表达式涉及一个无法用离散噪声增量表示的随机积分ΔW_j。这个表达式是:

$$\Delta x_i = f_i \Delta t + \sum_j G_{ij} \Delta W_j + \sum_{jk}\left[\sum_m G_{mj}\frac{\partial G_{ik}}{\partial x_m}\right]\int_t^{t+\Delta t}\int_t^s \mathrm{d}W_j(t')\,\mathrm{d}W_k(s)$$

当$j=k$时，二重积分简化为:

$$\int_t^{t+\Delta t}\int_t^s \mathrm{d}W_j(t')\,\mathrm{d}W_k(s) = \frac{1}{2}\Big[\big(\Delta W_j\big)^2 - \Delta t\Big]$$

但在不相等时，需要采用近似方法，例如 Kloeden 和 Platen 的方法。定义a_{jm}, b_{jm}, c_{jm}，是相互独立的均值为 0 和单位方差的高斯随机变量。定义:

$$\gamma_m = \frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2}\sum_n \frac{1}{n^2}$$

令:

$$H_{jk} = \int_t^{t+\Delta t}\int_t^s \mathrm{d}W_j(t')\,\mathrm{d}W_k(s)$$

近似值可以利用:

$$H_{jk}^{(m)} = \left(\frac{\Delta W_j \Delta W_k}{2} + \sqrt{\frac{\gamma_m}{\Delta t}}\left[a_{jm}\Delta W_k - a_{km}\Delta W_j\right]\right)$$

$$+\frac{\Delta t}{2\pi}\sum_n^m\left(b_{jn}\left[\sqrt{\frac{2}{\Delta t}}\Delta W_k + c_{kn}\right] - b_{kn}\left[\sqrt{\frac{2}{\Delta t}}\Delta W_j + c_{jn}\right]\right)$$

m 的值越大，近似的效果越好，误差:

$$\left\langle H_{jk}^{(m)} - H_{jk} \right\rangle = \frac{(\Delta t)^2}{2\pi^2} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{(\Delta t)^2}{2\pi^2 m}$$

VI.4 类龙格-库塔方法——Milstien-Platen 方法

Milstien 方法的一个潜在缺点是，必须计算乘以随机增量的函数$g(x,t)$的一阶导数。对于确定性微分方程，龙格-库特方法族消除了计算此类导数的需要。对于随机方程，也可以找到类似的方法。在这里，我们介绍了 Platen 在 Milstien 方法的基础上获得的这种一阶方法。我们将其称为 Milstien-Platen 方法.通过用一阶有效的近似值替换 g 的导数。对于仅包含单个变量 x 的随机方程。一阶近似是:

$$g(x,t)\frac{\partial}{\partial x}g(x,t) \approx \frac{1}{\sqrt{\Delta t}}[g(q,t) - g(x,t)]$$

其中：$q = x + f\Delta t + g\sqrt{\Delta t}$，带入 Milstein 方法的离散形式，得到:

$$\Delta x = f\Delta t + g\Delta W + \frac{1}{2\sqrt{\Delta t}}[g(q,t) - g(x,t)][(\Delta W)^2 - \Delta t]$$

标量噪声的向量方程的分量形式:

$$\Delta x_i = f_i\Delta t + g_i\Delta W + \frac{1}{2\sqrt{\Delta t}}\left[g_{i(\boldsymbol{q},t)} - g_{i(\boldsymbol{x},t)}\right][(\Delta W)^2 - \Delta t]$$

其中：$q_i = x_i + f_i\Delta t + g_i\sqrt{\Delta t}$

对一般方程，一阶导数要对矩阵成立，于是相应的有:

$$\sum_m G_{mj}(\boldsymbol{x},t)\frac{\partial}{\partial x_m}G_{ik}(\boldsymbol{x},t) \approx \frac{1}{\sqrt{\Delta t}}\left[G_{ij}\left(\boldsymbol{q}^{(k)},t\right) - G_{ij}(\boldsymbol{x},t)\right]$$

其中第 i 个分量:

$$q_i^{(k)} = x_i + f_i\Delta t + G_{ik}\sqrt{\Delta t}$$

VI.5 隐方法

求解微分方程的数值方法可能会受到不稳定性的影响。不稳定性被定义为误差的指数级(因此是快速的)增加，当一个时间步长中的小误差导致下一个时间步中的大误差时就会发生，以此类推。这可能会在某个时间点自发发生，即使在此之前解算是准确的。虽然这个问题相当罕见，但对于在两个或多个非常不同的时间尺度上产生运动的微分方程来说，它更为普遍。(也就是说，解在一个快速的时间尺度上振荡，也在一个更长的时间尺度下变化，其中较长的时间尺度是我们真正感兴趣的。) 具有两个或多个不同时间尺度的微分方程被称为“刚性”微分方程

如果一个特定的方法有不稳定的问题，通常可以通过使用“隐式”方法来解决。隐式方法就像我们上面讨论的“显式”方法一样，但它们使用时间步长末尾的一个或多个变量的值来计算导数，而不是开始时的值。例如，将单个变量的 Euler 方法写成:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta x(t) = x(t) + f[x(t), t]\Delta t + g[x(t), t]\Delta W$$

替换掉 f 和 g 中的 x:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + f[x(t + \Delta t), t]\Delta t + g[x(t + \Delta t), t]\Delta W$$

这是一个隐式方程，求解可以使用 Newton-Raphson 方法。

VI.6 弱解

数值方法收敛到样本路径称为强收敛。同样，给出强收敛性的方法称为强方法，它们生成的样本路径称为强解。如果对样本路径不感兴趣，而只对 x 在某个最终时间 T 的概率密度的性质感兴趣，那么只需要考虑这些性质(如均

值和方差)收敛的速度。这些性质是通过在许多样本路径上求平均值来确定的，对于给定的数值方法，通常会以与单个样本路径不同的速率收敛。随机过程$x(T)$的概率密度矩的收敛称为弱收敛。提供这种收敛性的方法称为弱方法，由这些方法生成的样本路径称为弱解。例如，Euler 方法是一个半阶强方法，是一个一阶弱方法。

VI.6.1 二阶弱方法

单变量随机过程的二阶方法:

$$\Delta x = f\Delta t + g\Delta W + \frac{1}{2}gg'\left[(\Delta W)^2 - \Delta t\right] + \frac{1}{2}\left(ab' + ba' + \frac{1}{2}b^2 b''\right)\Delta W\Delta t$$

$$+\frac{1}{2}\left(aa' + \frac{1}{2}b^2 a''\right)(\Delta t)^2$$

其中带撇的是对 x 的导数。对于多变量随机过程，有分量方程:

$$\Delta x_i = f_i\Delta t + Df_i(\Delta t)^2 + \sum_j^M G_{ij}\Delta W_j + \frac{1}{2}\sum_j^M\left[DG_{ij} + \sum_k^N G_{kj}\frac{\partial f_i}{\partial k}\right]\Delta W_j\Delta t$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j,k}^M\left(\sum_m^N G_{mj}\frac{\partial G_{ik}}{\partial x_m}\right)(\Delta W_j\Delta W_k - \xi_{jk}\Delta t)$$

其中微分算子:

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_n^N f_n\frac{\partial}{\partial x_n} + \frac{1}{2}\sum_{n,m}^N\sum_l^M G_{nl}G_{ml}\frac{\partial^2}{\partial x_n\partial x_m}$$

其中:

$$\xi_{ii} = 1, \quad \xi_{ij} = -\xi_{ji}, \quad j < i$$

对于$j > i$，ξ_{ij}是一个等概率的二值独立随机变量:

$$P(\xi_{ij} = \pm 1) = \frac{1}{2}$$

VII Fokker-Planck 方程和反应扩散系统

前述的随机方程是在确定性系统上增加了噪声给出的，由噪声驱动，对应随机过程。通过求解随机过程的随机微分方程可以找到随机过程的概率密度。还有一种替代方法，即推导出随机过程概率密度的偏微分方程。然后，求解该方程以获得作为时间函数的概率密度。如果该过程是由高斯噪声驱动的，则概率密度的微分方程称为 Fokker-Planck 方程。用 Fokker-Planck 方程描述随机过程并不能像 Ito 随机微分方程那样直接获得那么多的信息，因为它没有提供一种获得过程样本路径的实用方法。然而，在许多情况下，当无法从随机微分方程中获得稳态概率密度的解析表达式时，它可以用来获得这些表达式。它还有另一个用途，即描述许多随机扩散粒子的演化

VII.1 Fokker-Planck 方程

Ito 随机微分方程给出一个随机变量:

$$\mathrm{d}x = f(x,t)\,\mathrm{d}t + g(x,t)\,\mathrm{d}W$$

首先，计算一个以x为变量的函数的平均值，利用 Ito 引理，相应的 SDE 方程是:

$$\mathrm{d}h = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}f(x,t)\,\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}x^2}\frac{g^2(x,t)}{2}\,\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}g(x,t)\,\mathrm{d}W$$

计算平均值，等价于积分:

$$\mathrm{d}\langle h\rangle = \left\langle f(x,t)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\right\rangle \mathrm{d}t + \left\langle \frac{g^2(x,t)}{2}\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}x^2}\right\rangle \mathrm{d}t$$

于是:

$$\frac{\mathrm{d}\langle h\rangle}{\mathrm{d}t}=\left\langle f(x,t)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\right\rangle+\left\langle\frac{g^2(x,t)}{2}\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}x^2}\right\rangle$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(x,t)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}+\frac{g^2(x,t)}{2}\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}x^2}\right]P(x,t)\,\mathrm{d}x$$

分别分部积分，注意$\lim_{x\to\pm\infty}P(x,t)=0$，以及概率对 x 积分的归一化（等时归一化条件），得到:

$$\frac{\mathrm{d}\langle h\rangle}{\mathrm{d}t}=\int_{-\infty}^{\infty}h(x)\left[-\frac{\partial}{\partial x}[f(x,t)P(x,t)]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[g^2(x,t)P(x,t)]\right]\mathrm{d}x$$

又因为:

$$\langle h\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}h(x)P(x,t)\,\mathrm{d}x$$

于是:

$$\frac{\mathrm{d}\langle h\rangle}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty}h(x)P(x,t)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}h(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(x,t)\,\mathrm{d}x$$

对比两式，可以得到:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(x,t)=-\frac{\partial}{\partial x}[f(x,t)P(x,t)]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[g^2(x,t)P(x,t)]]$$

这就是对于x的概率密度的 Fokker-Planck 方程。对于多维随机过程，可以类似推导出多维 Fokker-Planck 方程:

$$\mathbf{d}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)+G(\boldsymbol{x},t)\,\mathbf{d}\boldsymbol{W}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}P=-\sum_{i}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}[f_iP]+\frac{1}{2}\sum_{i,j}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}[D_{ij}P]$$

其中$D=GG^T$，P在此处是联合概率密度。

VII.2 概率流

考虑概率的流动问题，如果单变量方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}[f(x,t)P(x,t)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[g^2(x,t)P(x,t)] = -\frac{\partial}{\partial x}J(x,t)$$

于是有流守恒方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}J(x,t) = 0$$

其中$J(x,t)$为 x 处在 t 时刻的概率流。对于多维随机过程，有:

$$J_i(\boldsymbol{x},t) = f_i P - \frac{1}{2}\sum_j^N \frac{\partial}{\partial x_j}(D_{ij}P)$$

VII.3 吸收和反射边界

求解 FP 方程还需要指定边界条件。如果 x 取整条实数线上的值，那么这是不必要的，因为我们知道 P 在 x 趋于无穷时趋于零，这将反映在初始条件中，即 t=0 时$P(x,t)$的选择。然而，如果 x 有一些有限域，比如区间$[a,b]$，那么我们需要指定在边界 a 和 b 处发生了什么。三种最常见的可能性如下。

1. 吸收边界。吸收边界是指粒子在撞击边界后立即被移除的边界。这意味着粒子在边界上的概率始终为零，因此这种情况由以下条件描述:$P(c,t) = 0$。其中 c 是吸收边界的位置。
2. 反映边界。反射边界是粒子无法通过的边界。这意味着边界上的概率流必须为零，因此由以下条件给出：$J(c,t) = 0$。其中 c 是反射边界的位置。
3. 周期性边界。在这种情况下，区间的两端（边界）连接在一起。这意味着粒子在闭环上移动，例如一维的圆或二维的环面。在这种情况下，由于两

端描述了在相同的物理位置，两端的概率密度和概率流必须相同。因此，这可以用两个条件来描述：$P(a,t)=P(b,t)$和$J(a,t)=J(b,t)$。其中 a 和 b 是周期性边界的位置。

这三种边界条件也可以应用于多维 FP 方程。对于反射边界，这意味着将矢量流与边界面上的法向量的点积为零。

VII.4 一维定态解

定态解是$P(x,t)$不随时间变化的解,即$P(x,t)=P(x)$。通常，对于概率密度的所有初始选择，$P(x,t)$在$t\to\infty$时趋于定态解，因此定态解很重要。方程为：

$$-\frac{\partial}{\partial x}[f(x,t)P(x,t)]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[g^2(x,t)P(x,t)]=-\frac{\partial}{\partial x}J(x,t)=0$$

这意味着流是稳定的守恒的，空间各处概率流不变。

如果是反射边界条件，那么在至少一个边界上$J=0$，因此在所有地方$J=0$。在这种情况下，稳态解的微分方程为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[D(x)P(x)]=2f(x)P(x)$$

令$\xi(x)=D(x)P(x)$，则有：

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}=\frac{2f(x)}{D(x)}\xi$$

得到解为：

$$P(x)=\frac{1}{CD(x)}\exp\left(\int_a^x\frac{f(u)}{D(u)}\,\mathrm{d}u\right)$$

其中C是归一化常数，$D(x)=g^2(x)$。归一化常数满足条件：

$$\int_a^b P(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

如果是周期性的边界条件，J 不一定消失，而由平稳性的假设决定。在这种情况下，稳态解的方程$P(x)$由下式给出:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[D(x)P(x)] = 2f(x)P(x) - J$$

类似反射边界条件处理方式:

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = \frac{2f(x)}{D(x)}\xi - J$$

解是很简单的:

$$P(x) = \frac{Z(x)}{D(x)}\left[P(a)\frac{D(a)}{Z(a)} - 2J\int_a^x \frac{\mathrm{d}u}{Z(u)}\right]$$

其中:

$$Z(x) = \exp\left(\int_a^x \frac{f(u)}{D(u)}\,\mathrm{d}u\right)$$

周期性边界条件$P(a) = P(b)$（注意，我们已经通过使 J 恒定在 J 上应用了边界条件），这给出:

$$J = \frac{P(a)}{2\int_a^b \frac{\mathrm{d}u}{Z(u)}}\left[\frac{D(a)}{Z(a)} - \frac{D(b)}{Z(b)}\right]$$

于是解是:

$$P(x) = P(a)\frac{\left[\frac{D(b)}{Z(b)}\int_a^x \frac{\mathrm{d}u}{Z(u)} - \frac{D(a)}{Z(a)}\int_x^b \frac{\mathrm{d}u}{Z(u)}\right]}{\frac{D(x)}{Z(x)}\int_a^b \frac{\mathrm{d}u}{Z(u)}}$$

VII.5 物理解释：单粒子的热化

考虑一个状态由向量 x 描述的物理系统。当这个系统与一个更大的系统（称为浴）接触，在温度 T 下处于热平衡状态时，系统的概率密度“稳定下来”并变得静止。这个平稳概率密度$P(x)$是与$e^{-\beta E(\boldsymbol{x})}$成比例的。概率密度稳定到静止状态的过程称为热化。平稳概率密度称为玻尔兹曼分布。

热化模型：考虑一个浸没在流体中的小粒子，就像布朗运动的情况一样，并且像以前一样只考虑沿一维的运动。这意味着系统的状态由向量$x = (x, p)$描述，因此系统的 FP 方程将是二维的。这一次，我们通过允许粒子受到任意空间相关力$F(x)$的作用，使描述比我们之前对布朗运动的处理更具普遍性。在这种情况下，粒子的势能为$V(x)$，其中$F = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$。粒子运动的随机方程现在是:

$$\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}p\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{p}{m}\\ -V'(x) - \gamma p\end{pmatrix}\mathrm{d}t + \begin{pmatrix}0\\ g\end{pmatrix}\mathrm{d}W$$

其中$V' = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$，系统能量$E = V(x) + \frac{p^2}{2m}$，于是 F-P 方程是:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{p}{m}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial p}[V'P + \gamma p P] + \frac{g^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial p^2}$$

于是解是:

$$P(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{C}\exp\left(-\frac{\gamma}{g^2}[2mV(x) + p^2]\right)$$

若取$g = \sqrt{\frac{2\gamma m}{\beta}}$,那么定态解就是玻尔兹曼分布。

VII.6 含时系统的解

由于 FP 方程描述的系统与维纳噪声驱动的随机方程相同，已经知道 FP 方程的许多解：这些解与等效随机方程的解相同。多维 F-P 方程形式:

$$\frac{\partial}{\partial t}P = -\sum_i^N \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_j^N F_{ij}x_jP + \frac{1}{2}\sum_{i,j}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}[D_{ij}P]$$

等价于多维 Ornstein-Uhlenbeck 方程:

$$\mathbf{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t + G\,\mathbf{d}\boldsymbol{W}$$

其中$D = GG^T$，若取初始值为$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\mu}_0$,那么解为:

$$P(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{\mu}_0) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det[\Gamma(t)]}}\exp\left(-\frac{1}{2}[\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}(t)]^T[\Gamma(t)]^{-1}[\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}(t)]\right)$$

其中平均值向量和协方差矩阵是;

$$\boldsymbol{\mu}(t) = e^{Ft}\boldsymbol{\mu}_0, \quad \Gamma(t) = \int_0^t e^{F(t-s)}GG^Te^{F^T(t-s)}\,\mathrm{d}s$$

如果变量的初始值不精确，我们也可以很容易地确定解。在这种情况下，初始值向量$\boldsymbol{\mu}_0$一个具有概率密度的随机变量:

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\mu}_0 + e^{Ft}\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t e^{F(t-s)}G(s)\,\mathbf{d}\boldsymbol{W}(\boldsymbol{s})$$

于是一般解的概率密度是:

$$P_g(\boldsymbol{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty} P(\boldsymbol{\mu}_0)P(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}_0, t, \mathbf{0})\,\mathrm{d}\mu_0^1...\,\mathrm{d}\mu_0^N$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P(\boldsymbol{\mu}_0)P(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{\mu}_0)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}_0$$

VII.6.1 Green 函数

还有另一种方法可以推导出奥恩斯坦-乌伦贝克过程 FP 方程的通解（方程（7.42)），这种方法也可以应用于其他过程。为此，我们首先注意到所有 FP 方程都是线性的。也就是说，它们不包含 P 的非线性函数或其导数。因此，FP 方程的一个或多个解的任何线性组合也是一个解。接下来，我们注

意到，对于变量具有固定（已知）初始值$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{\mu}_0$的 FP 方程的解是初始条件的解:

$$P(\boldsymbol{x},0)=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_0)$$

有:

$$P_0(\boldsymbol{x})=\int_{-\infty}^{\infty}P_0(\boldsymbol{y})\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}$$

如果初始δ函数$\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_0)$的 FP 方程解为$P_{\boldsymbol{\mu}_0}(\boldsymbol{x},t)$，则由于所有 FP 方程都是线性的，因此一般初始条件$P(\boldsymbol{x},0)=P_0(\boldsymbol{x})$的解与方线性组合相同，但现在它是解$P_{\boldsymbol{\mu}_0}(\boldsymbol{x},t)$的线性组合。因此，一般的解是:

$$P_{g(\boldsymbol{x},t)}=\int_{-\infty}^{\infty}P_0(\boldsymbol{\mu}_0)P_{\boldsymbol{\mu}_0}(\boldsymbol{x},t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}_0$$

VII.7 计算初次通过时间

过程的第一次通过时间是样本路径达到某个指定值 a 的第一次时间。或者，可以考虑粒子离开区域的第一次穿过时间。这是采样路径首次到达区域边界的时间。对于一维过程，这是过程到达给定区间$[a,b]$的一端的时间。首次通过时间也称为“退出时间”。在这里，我们考虑计算漂移和扩散函数 f 和 D 与时间无关的一维过程的首次通过时间

VII.7.1 间隔

我们现在考虑一个从位置$x(0)=y$开始的过程，其中 y 在区间$[a,b]$中，并展示如何获得退出时间 T 大于 t 的概率的微分方程。这也是该过程在 T 之前（包括 T 在内）一直保持在区间内的概率。我们将此概率称为$P_{in}(t,y)$。为了计算$P_{in}(t,y)$，我们在区间$[a,b]$的末尾对 FP 方程施加吸收边界条件。在这些

边界条件下，FP 方程解$P(x,t|y,0)$在区间$[a,b]$上的积分给出了过程在时间 t 仍在区间内的概率，从而得到$P_{in}(t,y)$。这就是:

$$P(T>t)=P_{in}(t,y)=\int_a^b P(x,t|y,0)\,\mathrm{d}x$$

我们现在注意到，由于 FP 方程是时间齐次的（因为 f 和 D 是时间独立的），移动时间原点不会改变解:

$$P_{in}(t,y)=\int_a^b P(x,0|y,-t)\,\mathrm{d}x$$

这样写，退出时间大于 t 的概率是过程开始的时间和地点的函数。

福克-普朗克方程描述了一个过程的概率密度的演变，假设它在固定的时间和固定的地点开始。但我们也可以考虑推导一个微分方程，作为初始位置和时间的函数，前提是最终位置和时间是固定的。也就是说，函数的微分方程:

$$R(y,t)=P(x,0|y,-t)$$

$R(y,t)$的微分方程称为倒向福克-普朗克方程。倒向 F-P 推导相当复杂。对于由（正向）F-P 方程描述的过程:

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t)=-\frac{\partial}{\partial x}[f(x,t)P(x,t)]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[D(x,t)P(x,t)]]$$

相应的倒向 F-P 方程是:

$$\frac{\partial}{\partial t}R(y,t)=-f(y)\frac{\partial}{\partial y}R(y,t)+\frac{1}{2}D(y)\frac{\partial^2}{\partial y^2}R(y,t)$$

由于该过程在 t=0 的区间内，因此我们有$P_{in}(0,y)=1$。如果过程在边界上开始，那么在 t=0 时，它已经到达出口（因为一旦它在其中一个边界上，它

就会立即被吸收），因此对于所有$t\geq 0$的情况，$P_{in}(t,a)=P_{in}(t,b)=0$，对于$P_{in}(t,y)$也遵循倒向 F-P 方程:

$$\frac{\partial}{\partial t}P_{in}(t,y)=-f(y)\frac{\partial}{\partial y}P_{in}(t,y)+\frac{1}{2}D(y)\frac{\partial^2}{\partial y^2}P_{in}(t,y)$$

边界条件:

$$P_{in}(0,y)=1,\quad a<y<b;\quad P_{in}(t,a)=P_{in}(t,b)=0,\quad t\geq 0$$

于是 T 的分布:

$$D_T(t)=P(0\leq T\leq t)=1-P_{in}(t,y)$$

概率密度:

$$P_T(t)=\frac{\partial}{\partial t}D_T(t)=-\frac{\partial}{\partial t}P_{in}(t,y)$$

因此，倒向 F-P 方程的解为我们提供了关于区间首次退出时间的所有信息。

使用上述结果，我们可以得到一个进程退出区间所需的平均时间的闭式表达式。平均首次通过时间为:

$$\langle T\rangle=\int_0^\infty tP_T(t)\,\mathrm{d}t=-\int_0^\infty t\frac{\partial}{\partial t}P_{in}(t,y)\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty P_{in}(t,y)\,\mathrm{d}t$$

最后一步是分部积分, 注意到$P_{in}(\infty,y)=0$。这给出了一个非常简单的表达式，从 F-P 方程两侧积分，得到:

$$-1=-f(y)\frac{\partial}{\partial y}\langle T\rangle+\frac{1}{2}D(y)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\langle T\rangle$$

令$G(y)=\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial y}$，于是获得一个边界条件$\langle T(a)\rangle=\langle T(b)\rangle=0$的一阶微分方程，解得:

$$\langle T(y)\rangle=\frac{2}{\Omega_a^b}\left[\Omega_a^y\int_y^b\int_a^x\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x'}{Z(x)B(x')}-\Omega_y^b\int_a^y\int_a^x\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x'}{Z(x)B(x')}\right]$$

其中：

$$Z(y)=\exp\left(-2\int_a^y \frac{f(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x\right),\quad \Omega_x^y=\int_x^y \frac{\mathrm{d}x'}{Z(x')}$$

VII.7.2 从间隔的一端退出的时间

当$c=-\infty$时，过程从下方达到值 a 的第一个通过时间等于过程从区间$[c,a]$退出到 a 结束所花费的时间。我们将用T_a表示进程退出区间$[c,a]$到 a 的时间。我们可以通过对区间某一端的概率流进行积分来计算该端的退出概率。从$x\in[c,a]$开始的过程在时间 t 或之后通过 a 退出的概率是通过将 a 处的概率流从 t 积分到∞来给出的。该概率表示为

$$P_{in}(t,x)=P(T_a\geq t)=\int_t^\infty J(a,t'|x,0)\,\mathrm{d}t'$$

其中：

$$J(a,t|x,0)=f(a)P(a,t|x,0)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a}[D(a)P(a,t|x,0)]$$

我们现在可以通过注意到$P(a,t|x,0)$在 x 和 t 中服从倒向 F-P 方程来推导$P_{in}(t,x)$的微分方程。因此，将$J(a,t|x,0)$的表达式代入倒向 F-P 方程，表明$J(a,t|x,0)$也服从该方程。现在，我们写下$J(a,t|x,0)$的倒向 F-P 方程，并相对于 t 对两边进行积分，得到对于$P_{in}(t,x)$的微分方程：

$$-f(x)\frac{\partial}{\partial x}P_{\mathrm{in}}+\frac{D(x)}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}P_{\mathrm{in}}=\frac{\partial}{\partial t}P_{\mathrm{in}}=J(a,t|x,0)$$

该方程在$x=c$和$x=a$处的边界条件很简单。在$x=a$时，粒子在时间 t 通过 a 离开区间，因此$P_{\mathrm{in}}(t,a)=1$。在$x=c$时，粒子在时间 t 通过 c 离开区间，因此它不能通过 a 离开，我们有$P_{\mathrm{in}}(t,c)=0$。然而，我们不知道初始条

件$P_{\text{in}}(0,x)$，因为这是过程在某个时候通过 a 退出的总概率。我们将这个总概率称为$P_a(x)$。因为$f(x)$和$D(x)$只是 x 的函数。这使我们能够从P_{in}的方程中推导出$P_a(x)$的微分方程。

为了计算$P_a(x)$，我们将 t=0 代入P_{in}的方程中。由于$P_{\text{in}}(x,0)=P_a(x)$，我们得到以下$P_a$的微分方程:

$$-f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_a+\frac{D(x)}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}P_a=J(a,0|x,0)$$

其中，我们用普通导数替换了 x 的偏导数，因为 x 现在是唯一的自变量。我们知道，对于$x\neq a, J(a,0|x,0)=0$、 因为除非$x=a$，否则过程在$t=0$时无法通过 a 退出。虽然我们不知道$x=a$时$J(a,0|x,0)$的值，但正如我们将看到的，我们不需要它。我们确实需要P_a的边界条件，即$P_a(a)=1$（如果过程从 x=a 开始，则肯定会通过 a 退出），$P_a(c)=0$（因为如果过程从 c 开始，则无法通过 a 离开）。我们现在可以写出P_a的微分方程:

$$-f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_a+\frac{D(x)}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}P_a=0,\quad c\leq x<a$$

定义$Q(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_a$，立刻解出:

$$Q(x)=C\exp\left(2\int_c^x\frac{f(u)}{D(u)}\,\mathrm{d}u\right),\quad c\leq x<a$$

于是:

$$P_a(x)=C\int_c^x Q(v)\,\mathrm{d}v$$

我们看到边界条件$P_a(c)=0$已经满足。微分方程没有为我们提供$P_a(a)$的值，但它为我们提供了任意接近 a 的 x 的P_a。现在我们只需要$x=a$的边界

条件，即$P_a(a)=1$。我们可以通过将上述$P_a(x)$的表达式除以从 c 到 a 的$Q()$上的积分来满足这个边界条件。因此，我们最终得到:

$$P_a(x)=\frac{\int_c^x \exp\left(2\int_c^v \frac{f(u)}{D(u)}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v}{\int_c^a \exp\left(2\int_c^v \frac{f(u)}{D(u)}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v}$$

我们现在有了P_{in}的初始条件，因此可以通过解析或数值方法求解方程。从P_{in}可以得到T_a的概率密度，我们用$P_T^a(T)$表示。为此，我们注意到，如果进程在某个时间确实通过 a 退出，则进程在时间 t 后退出的概率为$\frac{P_{\text{in}}}{P_a(x)}$。$T_a$的概率分布为$1-\frac{P_{\text{in}}}{P_{a(x)}}$，因此$T_a$的几率密度:

$$P_T^a(t)=-\frac{1}{P_{a(x)}}\frac{\partial}{\partial t}P_{\text{in}}(t,x)$$

我们还可以计算通过 a 的平均退出时间的运动方程（假设该过程确实通过 a 退出），平均退出时间由下式给出:

$$\langle T_a(x)\rangle=\int_0^\infty tP_T^{a(t)}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{P_{a(x)}}\int_0^\infty t\frac{\partial}{\partial t}P_{\text{in}}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{P_{a(x)}}\int_0^\infty P_{\text{in}}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

还可以获得微分方程和边界条件:

$$-f(x)\frac{\partial}{\partial x}\left[P_{a(x)}\langle T_a\rangle\right]+\frac{1}{2}D(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[P_{a(x)}\langle T_a\rangle\right]=-P_{a(x)}$$

$$P_{a(c)}\left\langle T_{a(c)}\right\rangle=P_{a(a)}\left\langle T_{a(a)}\right\rangle=0$$