Notes in Higher Basic Analysis

Q.X. Fang
Kavli ITS, University of Chinese Acemedy of Sciences

版本：1.0
更新：2024 年 9 月 25 日

目录

§0 回顾

在微积分中，研究的主要内容是 $\mathbb{R}^n \to RR^m$ 上的映射 f。为着使这个映射有意义，我们需要对 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^m$ 进行数学结构的赋予。如代数结构、拓扑结构、序列极限和体积元结构。从而可以定义微分、连续性、Riemann 积分等概念。并根据微积分基本定理，使得微积分可以成为互逆的运算。

在分析中，这种思路可以扩展。若研究在 $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 上的函数，即复变函数。实变函数则是对于 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 上的函数的研究，但是将体积元（测度）进行推广。而泛函分析则研究了定义了代数结构、拓扑结构的无穷维抽象空间 $X \to Y$ 上的映射，其中主要研究线性映射，即线性算子。这种思路的推广是非常自然的。

§1 复变函数

首先回顾复数的表示。

幅角主值的取值：

$$argz = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & x>0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0, y>0 \\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0, y\geq 0 \\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0, y\leq 0 \\ \dfrac{-\pi}{2}, & x=0, y<0 \end{cases} \tag{1}$$

定理.1 *若* $argz \neq \pi$*，则：*

$$argz = 2\arctan\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}} \tag{2}$$

证明. 由于 $argz \neq \pi$，所以 $-\pi < argz = \theta < \pi$，所以 $-\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$，则：

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}} \tag{3}$$

定义复数的模 $|z|$ 后可以导出度量 ρ，有两种常用度量：欧式度量和球面度量。于是可以定义邻域：对于一个复数 z_0，定义 $|z-z_0|<\rho$ 为 z_0 的 ρ-邻域。而去心邻域则是 $0<|z-z_0|<\rho$。于是可以定义开集、闭集、连通集、紧集等概念。

道路联通性：设集合 $M \subset \mathbb{C}$, 若对于任意两点 $z_1, z_2 \in M$，存在一条连续的道路 $\gamma : [a,b] \to M$，使得 $\gamma(a)=z_1, \gamma(b)=z_2$，则称 M 是道路联通的。换言之，可以由折线连接。若 M 是道路联通的开集，则 M 是区域。

存在 $t_1 \neq t_2 \in [a,b]$，使得 $\gamma(t_1)=\gamma(t_2)$，则称 γ 是闭道路。若 $\gamma(a)=\gamma(b)$，则重叠点称为重点, 若端点是重点，则称 γ 是闭道路。没有重点的曲线称为简单曲线，或者若尔当曲线。曲线的定义是道路的等价类，即 $z(t)=\gamma(t)=x(t)+iy(t)$. 若只有端点为重点，则为简单闭曲线。

简单闭曲线的正方向：设 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ 是一条简单闭曲线，若 γ 的正方向是从 $\gamma(a)$ 到 $\gamma(b)$ 绕一周时，M 在左侧，则称 γ 是正向的。

单连通区域：设 $M \subset \mathbb{C}$ 是区域，若 M 的边界是一条简单闭曲线，或者说是连通的，则称 M 是单连通的。或者，若 M 内的人艺简单闭曲线 C 全部包含于 M 内，则称 M 是单连通的。否则，称 M 是多连通的。

单值复变函数：定义映射：

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \ \ z = x + iy \to w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

由两个实值函数决定。单值函数是说：若 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$，有 $f(z_1) = f(z_2) \leftrightarrow z_1 = z_2$ 一般地，幂函数 $w = z^n = |z|e^{inargz}$ 和指数函数 $w = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ 是可以是单值的。

多值函数：例如根式函数 $w = z^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{3}} e^{\frac{iargz+2k\pi}{n}}, k = 0, 1, ..., n-1$。例如：$1^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{2k\pi}{3}}, k = 0, 1, 2$

对数函数：$w = \ln z = \ln |z| + i(argz + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$。定义：$z_1^{z_2} := e^{z_1 \ln z_2}$，如 $i^i = e^{i \ln i} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi}, k \in \mathbb{Z}$.

根据 $\mathbb{C}$ 上装配的结构，可以定义函数的连续性、极限和其他性质：连续性：$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 在 $z_0 \in \mathbb{C}$ 连续，当且仅当 $\{z_n\} \to z_0 \ \ \{f(z_n)\} \to f(z_0)$。单复变函数在有界闭区间上连续，则一定有界，具有极值可达性和一致连续性。

导数：$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 在 $z_0 \in \mathbb{C}$ 的导数是：

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}$$

微分：若存在 $A \in \mathbb{C}$，使得 $f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + O(z - z_0)$，即在邻域内改变是线性项和高阶无穷小的和，则称 f 在 z_0 可微。f 在 z_0 可微的充要条件是 f 在 z_0 连续且 f 在 z_0 的导数存在，且 $A = f'(z_0)$。

可导函数必是连续函数，但是连续函数不一定可导。例如 $|z|$ 在 $z = 0$ 处不可导。在复变函数中，可以简单构造处处连续处处不可导函数，如 $f(z) = z^*$。一定

连续 $|f(z)-f(z_0)|=|z^*-z_0^*|=|z-z_0|$，而 $f'(z)=\frac{\delta z^*}{\delta z}$，不同的 $\delta z\to 0$ 方式结果不同，如 $\delta z=\delta x$ 和 $\delta z=i\delta y$，值分别为 1 和-1。此外，$f(z)=Rez\ Imz\ |z|$ 也类似。

解析函数：$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$，在区域 D 内处处可微，则称 f 在 D 内解析。解析函数是复变函数的重要类别，具有很多良好的性质。例如，解析函数的导数也是解析函数。解析函数和区域相关。例如，$f(z)=\frac{1}{z}$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析，但是在 $z=0$ 处不解析。解析函数的导数是连续的。解析函数的导数的导数也是解析的。解析函数的幂级数展开是收敛的。

定义：若 $f(z)$ 在 z_0 某个邻域内解析，则称 $f(z)$ 在 z_0 处内解析。连续性和可微性都是单点性质，但是解析性是区域性质。

$f(z)$ 在区域 D 内解析的充要条件是 $f(z)$ 在 D 内处处解析。

定义：若 $f(z)$ 在 z_0 不解析，但 z_0 的任一邻域内，总有 $f(z)$ 的解析点，则称 z_0 是 $f(z)$ 的奇点。

定理.2 以下条件等价:

1. $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $z=x+iy$ 在区域 D 内解析.
2. u,v 在 D 内可微且满足 Cauchy-Riemann 方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{4}$$

3. u_x,u_y,v_x,v_y 在 D 内连续且满足 Cauchy-Riemann 方程。
4. $f(z)$ 在 D 内连续且对于 D 内的任意逐段光滑的简单闭曲线 C，有:

$$\oint_C f(z)dz=0 \tag{5}$$

5. $f(z)$ 在 D 内任一点 z_0 的某个邻域内有幂级数展开:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,\ \ \forall z\in B(z_0,\rho) \tag{6}$$

这是解析函数的等价表示。

定理.3 若 $f(z)$ 在区域 D 内解析，且 $|f(z)| = const$，则 $f(z)$ 在区域 D 内是常数。

证明. 设 $f(z) = u + iv$, $|f(z)| = M$，则：$u^2 + v^2 = M^2$, 进而：

$$2(uu_x + vv_x) = 0 \ \ 2(uu_y + vv_y) = 0$$

由 Cauchy-Riemann 方程，得到：

$$uu_x + vv_x = 0 \ \ uu_y + vv_y = 0$$

两式相加得到：

$$2uv_y - 2vu_y = 0$$

则：

$$2v^2v_y + 2u^2v_y = 0 \ \ 2(u^2 + v^2)v_y = 0$$

即：$v^2 + u^2 = 0$ 或者 $v_y = 0$。前者不可能，后者得到 $v = const$。同理，$u = const$。所以 $f(z)$ 是常数。

定理.4 若 $w = f(z) = u + iv$ 在区域 D 内 z 点可微，等价于 u, v 在 z 可微且满足 Cauchy-Riemann 方程。

证明. 充分性：设 $f(z)$ 在 z 点可微，则：

$$f(z + z_0) - f(z) = f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0) \tag{7}$$

令 $z = x + iy$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, $f'(z) = \alpha + i\beta$, $o(\Delta z) = \eta_1 + i\eta_2$，则：

$$\begin{aligned} f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) &= f'(z_0)\Delta z + o(\Delta z) \\ &= \alpha\Delta x - \beta\Delta y + i(\alpha\Delta y + \beta\Delta x) + \eta_1 + i\eta_2 \\ &= u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) \end{aligned} \tag{8}$$

根据高阶无穷小的定义，有：

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{O(\Delta z)}{\Delta z}=0\ \to\ \lim_{\Delta x,\Delta y\to 0}\frac{\eta_1+i\eta_2}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0 \tag{9}$$

对应实部和虚部，得到：

$$\begin{aligned} u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)&=\alpha\Delta x-\beta\Delta y+\eta_1\\ v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)&=\alpha\Delta y+\beta\Delta x+\eta_2 \end{aligned} \tag{10}$$

这正是二元函数可微的定义，且根据定义，立刻得到：

$$\begin{gathered} u_x=\alpha\ \ u_y=-\beta\\ v_x=\beta\ \ v_y=\alpha \end{gathered} \tag{11}$$

这就直接给出了 Cauchy-Riemann 方程。

必要性：利用两个实值函数的可微定义：

$$\begin{aligned} u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)&=u_x\Delta x+u_y\Delta y+\eta_1\\ v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)&=v_x\Delta x+v_y\Delta y+\eta_2 \end{aligned} \tag{12}$$

其中 η_1,η_2 为 $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 的高阶无穷小。根据 Cauchy-Riemann 方程，设：

$$\alpha=u_x=v_y\ \ \beta=u_y=-v_x \tag{13}$$

于是：

$$\begin{aligned} f(z+\Delta z)-f(z)&=u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)+i[v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)]\\ &=\alpha\Delta x-\beta\Delta y+i(\alpha\Delta y+\beta\Delta x)+\eta_1+i\eta_2\\ &=(\alpha+i\beta)(\Delta x+i\Delta y)+(\eta_1+i\eta_2) \end{aligned} \tag{14}$$

注 $f(z)$ 的求导方法：1. 定义求导；2. 利用 Cauchy-Riemann 方程；$f'(z)=u_x+iv_x=v_y-iu_y$；3. 利用实函数求导的基本公式。

例.1 求 $f(z)=(z^3+2z-1)^5-\frac{1}{z^2}$ 的导数。

解：$f(z)$ 是多项式和有理函数的复合函数，所以 $f(z)$ 是解析函数。所以 $f'(z)$ 存在。直接利用求导的基本公式：

$$\begin{aligned} f'(z) &= 5(z^3+2z-1)^4(3z^2+2)-(-2z^{-3}) \\ &= 5(z^3+2z-1)^4(3z^2+2)+2z^{-3} \end{aligned} \tag{15}$$

注 洛必达法则的使用：首先 $f(z),g(z)$ 在 z_0 点解析，函数值都为 0，且一阶导 $g'(z)\neq 0$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z)}{g'(z)}$$

积分与可积性：给出一个有向曲线 $C: z=z(t)$，起点为 $a=z(t_1)$，终点为 $b=z(t_2)$，定义 $f(z)$ 沿 C 的积分：在曲线上做划分 $\{z_k\}$，有：

$$a=z_1,z_2,...,z_{k-1},z_k=b \tag{16}$$

注意复数无法比较大小，在两点间 $[z_{i-1},z_i]$ 上取值 ξ_i，则：

$$S_k=\sum_{i=1}^{k}f(\xi_i)(z_i-z_{i-1}) \tag{17}$$

直径：

$$\lambda=\max_{1\leq i\leq n}|z_i-z_{i-1}| \tag{18}$$

若 $\lambda\to 0$，则 $S_k\to S$，则定义 $f(z)$ 沿 C 的积分：

$$\int_C f(z)dz=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(z_i-z_{i-1}) \tag{19}$$

积分路径为 C 是定向的，这意味着反方向积分将给出相反的值。这里显然是 Riemann 积分的推广。若 $f(z)$ 在 C 上连续，则 $f(z)$ 沿 C 的积分存在。若 $f(z)$ 在 C 上有界，则 $f(z)$ 沿 C 的积分有界。

积分的求法：1. 定义求积分；2. 利用参数方程求积分 (转换为第二型曲线积分)；3. 利用 Riemann 积分的基本公式。

例.2 求 $f(z)=1$ 沿任意定向曲线 $C: a \to b$ 的积分。

解：根据定义，有：

$$\int_C 1dz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} 1(z_i - z_{i-1}) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} (z_i - z_{i-1}) = b - a \tag{20}$$

化为第二型曲线积分：设 $z = u + iv$，则有：

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \int_C (u+iv)(dx+idy) \\ &= \int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy) \end{aligned} \tag{21}$$

参数化方法：设 $z = z(t) = u(t) + iv(t)$, $\alpha \le t \le \beta$，则有：

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt \\ &= \int_\alpha^\beta f(u(t)+iv(t))(u'(t)+iv'(t))dt \\ &= \int_\alpha^\beta [u(t)f(u(t)+iv(t))u'(t) - v(t)f(u(t)+iv(t))v'(t)]dt \\ &+ i\int_\alpha^\beta [v(t)f(u(t)+iv(t))u'(t) + u(t)f(u(t)+iv(t))v'(t)]dt \end{aligned} \tag{22}$$

例.3 求 $f(z)=z$ 沿单位圆周 $C: |z|=1$ 的积分。

解：根据参数方程，有：

$$\begin{aligned} z &= \cos t + i\sin t \\ dz &= -\sin t + i\cos t dt \end{aligned} \tag{23}$$

于是：

$$
\begin{aligned}
\int_C z dz &= \int_0^{2\pi} (\cos t + i\sin t)(-\sin t + i\cos t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos t \sin t + i\sin^2 t + \cos^2 t - i\cos t \sin t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} i\sin^2 t + i\cos^2 t dt \\
&= i\int_0^{2\pi} dt \\
&= 2\pi i
\end{aligned} \tag{24}
$$

例.4 设 $f(z) = \frac{1}{(z-a)^n}$，其中 $a \in \mathbb{C}$，$n \in \mathbb{Z}$，求 $f(z)$ 沿圆心为 a、半径为 ρ 的曲线 C 的积分。

解：根据参数方程，有：

$$
\begin{aligned}
z &= a + \rho\cos t + i\rho\sin t \\
dz &= -\rho\sin t + i\rho\cos t dt
\end{aligned} \tag{25}
$$

于是:

$$
\begin{aligned}
\int_C \frac{1}{(z-a)^n}dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{(\rho\cos t + i\rho\sin t)^n}(-\rho\sin t + i\rho\cos t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho^n(\cos t + i\sin t)^n}(-\rho\sin t + i\rho\cos t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho^n}e^{-int}(-\rho\sin t + i\rho\cos t)dt \\
&= \frac{1}{\rho^{n-1}}\int_0^{2\pi} e^{-int}(-\sin t + i\cos t)dt \\
&= \frac{1}{\rho^{n-1}}\int_0^{2\pi} e^{-int}(-\sin tdt + i\cos tdt) \\
&= \frac{i}{\rho^{n-1}}\int_0^{2\pi} e^{-int}e^{it}dt \\
&= \frac{i}{\rho^{n-1}}\int_0^{2\pi} e^{-i(1-n)t} \\
&= \begin{cases} 2\pi i, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}
\end{aligned} \tag{26}
$$

积分的性质:

1. 定向性:若 C_1 和 C_2 是同一条曲线,但是定向不同,则

$$\int_{C_1} f(z)dz = -\int_{C_2} f(z)dz$$

2. 线性性:若 $f(z), g(z)$ 沿 C 的积分存在,则 $(f(z)+g(z))$ 沿 C 的积分存在,且:

$$\int_C (f(z)+g(z))dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz$$

3. 积分的可加性:若 $f(z)$ 沿 C 的积分存在,则 $f(z)$ 沿 $C_1 \cup C_2$ 的积分存在,且:

$$\int_{C_1\cup C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

4. 弧长微分:$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y$,则弧长的微分是:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$$

于是存在不等式：

$$|\int_C f(z)\mathrm{d}z| \leq \int_C |f(z)||\mathrm{d}z|$$

后者正是第一型曲线积分。

5. 积分的估值：若 $f(z)$ 在 C 上有界，则：

$$|\int_C f(z)dz| \leq Ml$$

其中 M 是 $f(z)$ 的上界，l 是 C 的长度。

6. 积分的可微性：若 $f(z)$ 在 C 上连续，则 $f(z)$ 沿 C 的积分存在。若 $f(z)$ 在 C 上可微，则 $f(z)$ 沿 C 的积分可微。
7. 积分的路径无关性：若 $f(z)$ 在区域 D 内解析，则 $f(z)$ 沿 C_1 和 C_2 的积分相等。

注 积分中值定理不能直接推广到复变函数。例如 $f(z) = z$ 在 $C : |z| = 1$ 上的积分为 $2\pi i$，但是 $f(z)$ 在 C 上有一点 z_0，使得 $f(z_0) = 0$，则 $f(z)$ 在 C 上的积分为 0。

定理.5 若 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，且 $f'(z)$ 在 D 内连续，则 $f(z)$ 沿区域内任意周线 C 的积分为 0。

证明. 设 $z = x + iy, f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$，则有：

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \int_C (u + iv)(dx + idy) \\ &= \int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy)\end{aligned} \tag{27}$$

因为 $f'(z)$ 在 D 内连续，所以 u_x, u_y, v_x, v_y 在 D 内连续。根据 Green 公式，有：

$$\begin{aligned}\int_C (udx - vdy) &= -\iint_D (v_x + u_y)dxdy \\ \int_C (vdx + udy) &= \iint_D (u_x - v_y)dxdy\end{aligned} \tag{28}$$

根据 C-R 方程，有:

$$\begin{aligned} v_x + u_y = 0 \\ u_x - v_y = 0 \end{aligned} \tag{29}$$

于是:

$$\int_C f(z)dz = \iint_D 0dxdy = 0 \tag{30}$$

定理.6 (Cauchy 积分定理) 设一条简单闭曲线 C，其内部为 D，若 $f(z)$ 在 D 内解析，且在 $\bar{D} = D + C$ 上连续，则 $f(z)$ 沿 C 的积分为 0。

Cauchy 定理可以得到上面的定理，因而更强。

证明. 待补充

定义.1 复周线: 设 $C_0, ..., C_n$ 一组简单闭曲线，其中 $C_1, ..., C_n$ 在 C_0 内且不交，若取除去 C_0 内所有周线包含的区域后的单连通区域为 D，则其所有边界为复周线 C。其正向仍旧是使得区域内部在左侧的。

定理.7 (Cauchy 积分定理的推广) 设复周线 $C = C_0 + C_1^- + ... + C_n^-$，$D$ 是 C 包含的区域，若 $f(z)$ 在 D 内解析，在 $\bar{D}$ 上连续，则:

$$\int_C f(z)dz = 0$$

例.5 设 C 是周线，a 是 C 内部的点，找一个 a 的半径为 ρ 的邻域，则由 Cauchy 积分定理:

$$\int_C \frac{1}{(z-a)^n} \mathrm{d}z = \begin{cases} 0, & n \neq 1 \\ 2\pi i, & n = 1 \end{cases} \tag{31}$$

可以看成外部曲线连续的变形到所取邻域的边界过程，其中没有奇点，则积分的结果不应该改变。

推论 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，则 $f(z)$ 在 D 内的积分与积分路径无关。

定理.8 (微积分基本定理) 设 f 在单连通区域 D 内解析，$z_0 \in D$，则:

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\xi)\mathrm{d}\xi,\ z\in D$$

则 $F(z)$ 在 D 内解析，且 $F'(z)=f(z)$。

证明. 待补充

推论 若 f 在单连通区域 D 内连续，且积分与积分路径无关，则:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int_{z_0}^{z} f(\xi)\mathrm{d}\xi=f(z) \tag{32}$$

定理.9 若 f, F 在单连通区域 D 内解析，且 $f(z)=F'(z)$，则:

$$\int_{z_0}^{z} f(\xi)\mathrm{d}\xi=\int_{z_0}^{z} F'(\xi)\mathrm{d}\xi=F(z)-F(z_0) \tag{33}$$

证明. 设:

$$\Phi(z)=F(z)-\int_{z_0}^{z} f(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{34}$$

则:

$$\Phi'(z)=F'(z)-f(z)=0 \tag{35}$$

于是 $\Phi(z)$ 是常数，若取 $z=z_0$，则 $\Phi(z_0)=F(z_0)-\int_{z_0}^{z_0} f(\xi)\mathrm{d}\xi=F(z_0)=C$，所以 $F(z)-F(z_0)=\int_{z_0}^{z} f(\xi)\mathrm{d}\xi$。

定理.10 (Cauchy 积分公式) 设复周线 C，函数 $f(z)$ 在 C 上连续，在 C 内区域 D 中解析 (连续)，则:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi=f(z) \tag{36}$$

内部值可由边界值表示，从而有了研究局部性的工具。

证明. 待补充

定理.11 (平均值定理) 设 $f(z)$ 在单连通区域 $B(z_0,R)$ 内解析，且到边连续，则：

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+Re^{i\theta})d\theta \tag{37}$$

证明. 圆周 $\partial B(z_0,R)$ 的参数方程为 $\xi=z_0+Re^{i\theta}$，则由 Cauchy 积分公式，有：

$$\begin{aligned}f(z_0)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z_0,R)}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}}Re^{i\theta}d\theta\quad=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+Re^{i\theta})d\theta\end{aligned}\tag{38}$$

定理.12 设复周线 C 中的函数 $f(z)$ 在 C 上连续，在 C 内区域 D 中解析 (连续)，则 $f(z)$ 在 D 内任意阶可导，且其 n 阶导数满足：

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\mathrm{d}\xi \tag{39}$$

注 在微积分中，f 可微并不导致 f' 可微，但是在复变函数中，f 解析则 $f^{(n)}$ 解析。

根据定理，很容易看出，边界值也决定了内部的导数值。同时，积分式决定微分值。

如果积分求导可交换，那么从 Cauchy 积分公式可以直接得到导数的公式：

$$f'(z)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int_C\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi\quad=\int_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}\mathrm{d}\xi \tag{40}$$

于是问题在于积分微分是否可换，可证。

例.6 计算：

$$\int_C\frac{\cos z^{\,3}}{z-i}\mathrm{d}z \tag{41}$$

周线绕 $z=i$ 一周。

解：$z=i$ 在 C 内部，则令 $f(z)=\cos z$：

$$\begin{aligned}\int_C \frac{\cos z^3}{z-i}\mathrm{d}z &= \frac{2\pi i}{2!}f''(i) \\ &= \pi i(-\cos i)\end{aligned} \tag{42}$$

定理.13 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内解析，则 u,v 在 D 内有一阶连续偏导数，且满足 Cauchy-Riemann 方程，反之 u,v 满足上述条件，则 $f(z)$ 在 D 内解析。

证明. 由于 u,v 均有一阶偏导，则两者可微，于是 f 解析，于是其任意阶导数解析 (见前述定理)。又 f 解析连续，则：

$$f'(z)=u_x+iv_x=v_y-iu_y$$

故四个实函数连续

§2 级数

定义：$\sum_{n=0}^{\inf} c_n(z-a)^n$ 称为幂级数。

Abel 定理：若 $\sum_{n=0}^{\inf} c_n(z-a)^n$ 在 $z=z_1$ 处收敛，则 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 在 z_1 的半径 a 邻域内绝对收敛且内闭一致收敛。

注
1. 若 $\sum_{n=0}^{\inf} c_n(z-a)^n$ 在 $z=z_2(\neq a)$ 处发散，则级数在 z_2 的半径 a 邻域的外部发散。
2. 存在一个 $R>0$，使得 $\sum_{n=0}^{\inf} c_n(z-a)^n$ 在 $B(a,R)$ 内收敛，在外发散，则这个邻域为收敛圆，R 为收敛半径。

Abel 定理. 任取 $z\in B(a,|z-a|)$，因为 $\sum_{n=0}^{\inf} c_n(z-a)^n$ 收敛，所以各项应该有界，即存在一个 M，使得 $\forall n, |c_n(z_1-a)^n|\leq M$，则：

$$|c_n(z-a)^n| = \left|c_n(z_1-a)^n\cdot(\frac{z-a}{z_1-a})^n\right| \leq M\left|\frac{z-a}{z_1-a}\right|^n \tag{43}$$

注意到 $(\frac{z-a}{z_1-a})^n<1$, 因此 $\sum_{n=0}^{\inf} M\left|\frac{z-a}{z_1-a}\right|^n$ 收敛。

由 U 判别法，$\sum_{n=0}^{\inf} c_n(z-a)^n$ 在 $B(a,|z-a|)$ 内绝对收敛。

下证内闭收敛，思路是寻找有界闭集。任取 F 为有界闭集，$F\subset B(a,|z_1-a|)$。则存在 $0<\rho<|z_1-a|$，使得 $F\subset B(a,\rho)$。下面希望寻找一个与 z 无关的收敛级数，为控制级数。

对任意 $z\in F$，有:

$$|c_n(z-a)^n| \le \left|c_n(z_1-a)^n\cdot(\frac{z-a}{z_1-a})^n\right| \le M\left|\frac{\rho}{z_1-a}\right|^n \tag{44}$$

注意到 $(\frac{\rho}{z_1-a})^n<1$，因此 $\sum_{n=0}^{\inf} M\left|\frac{\rho}{z_1-a}\right|^n$ 收敛。

由 U 函数判别法，$\sum_{n=0}^{\inf} c_n(z-a)^n$ 在 F 内闭一致收敛。

收敛半径计算公式:

$$R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}} \tag{45}$$

例.7 计算 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ 的收敛半径。

解：根据公式，有:

$$\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=1 \tag{46}$$

于是 $R=1$。

注 在收敛圆边界上的敛散性，不能直接确定，需要根据级数情况判断。例如级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$, $R=1$，在边界上处处发散。

例.8 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$，$R=1$ 的收敛性。

解：在收敛圆周上,$|\frac{z^n}{n^2}|\le\frac{1}{n^2}$，U 函数判别法则处处收敛。

对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n}$, $R=1$，在边界上回到实函数，其收敛性不定。

定理.14 幂级数：$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ 的和函数 $f(z)$ 在其收敛圆内解析。且：

$$f^{(p)}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}t^p}c_n(z-a)^n \tag{47}$$

例.9 求 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$，$R=1$

解：注意到：

$$\begin{aligned}\int_0^z f(s)\mathrm{d}s&=\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)s^n\mathrm{d}s\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\int_0^z s^n\mathrm{d}s\\&=\frac{z}{1-z}\end{aligned} \tag{48}$$

复变函数的 Taylor 定理：设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，$a\in D$，则 $f(z)$ 在 $B(a,R)\in D$ 内有幂级数展开：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \tag{49}$$

而：

$$f^{(n)}(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\mathrm{d}\xi,\ C=\partial B(a,\rho),\ 0<\rho<R \tag{50}$$

证明. 任取 $z\in B(0,R)$，存在 $0<\rho<R$，使得 $z\in B(0,\rho)$，则 $f(z)$ 在 $B(0,\rho)$ 内解析，由柯西积分公式：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,\rho)}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi \tag{51}$$

注意 $z\in B(0,\rho)$，$\phi\in\partial B(0,\rho)$，有 $|\frac{z-a}{\phi-a}|<1$。回顾：

$$\frac{1}{1-w}=\sum_{n=0}^{\infty}w^n,\ |w|<1 \tag{52}$$

有

$$\frac{1}{1-\frac{z-a}{\phi-a}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\phi-a)^n} \tag{53}$$

因为 $\frac{z-a}{\phi-a}<1$，所以级数一致收敛。

定理.15 $f(z)$ 在区域 D 内解析 $leftrightarrow f(z)$ 在 D 内任一点 a 的邻域内可以展开成 $(z-a)$ 的幂级数。

计算泰勒展开式的步骤：

1. 定义计算
2. 微积分技巧

例.10 求 $f(z)=\frac{1}{(1-z)^3}$ 在 $|z|<1$ 的邻域内的泰勒展开式。

解：不难验证：

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-z)^3} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z}\right)'' \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)'' \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)z_{n-2} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)z_n\end{aligned} \tag{54}$$

定义.2 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，$a\in D$，则 $f(a)=0$ 时，称 a 是 $f(z)$ 的零点，若存在 $m>0$，使得 $f^{(m-1)}=0$，$f^{(m)}\neq 0$，则称 $f(z)$ 在 a 处有 m 阶零点。若 $m=1$，则称为单零点。

零点的性质：零点孤立

定理.16 (零点孤立性) 若点 a 是在该点全纯函数 $f(z)$ 的零点，且 $f(z)$ 不在 a 的任何一个邻域内恒为零，则存在正整数 n，使得：

$$f(z)=(z-a)^n g(z) \tag{55}$$

其中 $g(z)$ 在 a 的邻域内解析，且 $g(z)$ 在 a 的一个邻域内不为 0。

证明. 将 f 在 a 的邻域内展开成幂级数，由于 $f(a)=0$，所以幂级数的自由项等于零，但幂级数的全部系数不可能全为 0，否则 f 在 a 的邻域内恒为 0，与题设矛盾。所以存在最小的 n，使得 $f^{(n)}(a)\neq 0$，则有:

$$f(z)=f(a)+f'(a)(z-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+(z-a)^n g(z) \tag{56}$$

其中:

$$g(z)=c_n+c_{n+1}(z-a)+\cdots \tag{57}$$

其中 $g(z)$ 在 a 的邻域内解析，且 $g(z)$ 在 a 的一个邻域内不为 0。

定理.17 (唯一性) 若两个函数 $f_1,f_2\in O(D)$ 在集合 E 内相同，而 E 至少有一个属于 D 的极限点，则在整个 D 上 $f_1=f_2$。

证明. 取 $f=f_1-f_2\in O(D)$，易知 f 在 D 内恒为 0，集合 $E\subset F=\{z\in D: f(z)=0\}$ 与 D 重合，极限点是 f 的零点，则根据零点的孤立性，在 a 的一个邻域内函数 f 恒为 0。因此，集合 F 的核非空。

定理.18 (最大模原理) 若函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，且在 D 内某点取得最大模，则 $f(z)$ 是常数。

或者:

若函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，且在 $D+\partial D$ 上连续，则 $|f|$ 在边界达到极大。

证明. 参见复分析导论卷 I P.153

定理.19 (洛朗) 任意在圆环 $V: r<|z-a|<R$ 内解析的函数 $f(z)$ 都可以在此圆环上都可以展开成收敛级数:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{58}$$

其中：

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\mathrm{d}\xi,\ C=\partial B(a,\rho),\ r<\rho<R,\ n=(0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{59}$$

证明. 参见复分析导论卷 I P.90-91

定义.3 系数由上决定的级数称为洛朗级数。这个级数中幂次为非负整数的项称为正部，负整数的项称为主部。

§2 实变函数论

§2.1 基础

黎曼和与 Riemann 积分：取划分 $0\le t_1\le\cdots\le t_n=1$，取 $\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$，则黎曼和为:

$$S_n=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(t_i-t_{i-1}) \tag{60}$$

直径：$d(T)=\min t_i-t_{i-1}$，则若极限存在，则称为黎曼积分，记为

$$\int_0^1 f(x)dx \tag{61}$$

例.11 狄利克雷函数:

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases} \tag{62}$$

不同黎曼和:

$$S_n=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(t_i-t_{i-1})=\sum_{i=1}^n 1\cdot(t_i-t_{i-1})=1,\ \ \xi in\mathbb{Q} \tag{63}$$

$$S_n=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(t_i-t_{i-1})=\sum_{i=1}^n 0\cdot(t_i-t_{i-1})=0,\ \ \xi\notin\mathbb{Q} \tag{64}$$

由此，极限不存在，Riemann 不可积。

对于狄利克雷函数，做一个划分，令:

$$E_0 = \{x|x \in [0,1], D(x) = 0\},\ \ E_1 = \{x|x \in [0,1], D(x) = 1\} \tag{65}$$

则:

$$E_0 \cap E_1 = \emptyset,\ \ E_0 \cup E_1 = [0,1] \tag{66}$$

定义积分方法：分别记两个集合长度为 $|E_0|, |E_1|$，则有:

$$\int_0^1 D(x)dx = 1|E_1| + 0|E_0| \tag{67}$$

这样，类似的，可以推广到 $\mathbb{R}^n$ 中，由此，需要定义测度，即集合大小。

§2.2 测度论

设集合 $X = \mathbb{R}^n$，取 $a = (a_1, \ldots, a_n)^T$, $b = (b_1, \ldots, b_n)^T$，若其中 $a_i \leq b_i$ 总成立，则：$a \leq b$. 半开半闭区间：$I = (a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n,\ a_i < x_i \leq b_i,\ \forall i \in [1, n]\}$.

定义.4 设集族：$\mathcal{C} = \{(a, b] \subset \mathbb{R}^n,\ a, b \in \mathbb{R}^n,\ a \leq b\}$，于是可以定义映射:

$$\mu :=\ \mathcal{C} \to \mathbb{R}^+ \cap \{\infty\},\ \ (a, b] \to \mu((a, b]) \tag{68}$$

满足:

$$\mu((a, b]) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \tag{69}$$

称为测度。

设集族 $\mathcal{B} = \{B \in \mathbb{R}^n,$ B 由可数个半开半闭区间的交或者并得到$\}$

可证，集族 $\mathcal{B}$ 有以下性质:

1. $\mathbb{R}^n,\ \emptyset \in \mathcal{B}$
2. $B \in \mathcal{B} \Rightarrow B^c = \mathbb{R}^n \backslash B \in \mathcal{B}$
3. $B_1, B_2, \cdots \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{B}$

称 $\mathcal{B}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的 Borel σ 代数，其元素为 Borel 集。于是可以定义测度:

$$\mu :=\ \mathcal{B} \to \mathbb{R}^+ \cap \{\infty\},\ \ B \to \mu(B) \tag{70}$$

满足:

$$\mu(B) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(I_i),\ B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \right\} \tag{71}$$

测度满足性质:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $B_1, B_2, \cdots \in \mathcal{B},\ B_i \cap B_j = \emptyset \Rightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i)$

该测度称为 Borel 测度。

注 问题：1.Borel 集族不能覆盖 $\mathbb{R}^n$ 所有子集；2.$B \subset \mathcal{B}, \mu(B) = 0, \exists E \subset B$, 且 $E \notin \mathcal{B}$.

于是，仍需扩张集族。记 $\bar{\mathcal{B}} = \{E \subset \mathbb{R}^n,\ E = B \cap Z,\ B \in \mathcal{B},\ Z \subset F \in \mathcal{B},\ \mu(F) = 0\}$. 则 $\bar{\mathcal{B}}$ 满足:

1. $\mathbb{R}^n,\ \emptyset \in \bar{\mathcal{B}}$
2. $E \in \bar{\mathcal{B}} \Rightarrow E^c = \mathbb{R}^n \backslash E \in \bar{\mathcal{B}}$
3. $E_1, E_2, \cdots \in \bar{\mathcal{B}} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \bar{\mathcal{B}}$

于是称 $\bar{\mathcal{B}}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的 Lebesgue σ 代数，其元素为 Lebesgue 集。由此，可以定义 Lebesgue 测度:

$$\mu :=\ \bar{\mathcal{B}} \to \mathbb{R}^+ \cap \{\infty\},\ \ E \to \mu(E) \tag{72}$$

满足:

$$\mu(E) = \mu(B) \quad (Borel) \tag{73}$$

该测度也满足:

1. $\mu(\emptyset)=0$
2. $E_1,E_2,\cdots\in\bar{\mathcal{B}},\ E_i\cap E_j=\emptyset\Rightarrow\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)$

该测度称为 Lebesgue 测度。

注 仍存在问题:集族 $\bar{\mathcal{B}}$ 不能覆盖 $\mathbb{R}^n$ 所有子集。但目前仅研究到 Lebesgue 测度。

由此，我们考虑一个元组 $(\mathbb{R}^n,\bar{\mathcal{B}},\mu)$，称为 Lebesgue 测度空间，即在 $\mathbb{R}^n$ 上定义了 Lebesgue σ 代数结构，并在代数上定义了 Lebesgue 测度。

由此，更抽象的定义测度:

定义.5 设集合 X，$\mathcal{A}$ 为 X 上的集族，且满足:

1. $X,\ \emptyset\in\mathcal{A}$
2. $A\in\mathcal{A}\Rightarrow A^c\in\mathcal{A}$
3. $A_1,A_2,\cdots\in\mathcal{A}\Rightarrow\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{A}$

则称 $\mathcal{A}$ 为 X 上的 σ 代数，集合中的元素为可测集。若 $\mu:\mathcal{A}\to\mathbb{R}^+\cap\{\infty\}$ 满足: μ 为 $\mathcal{A}$ 上的测度，则称 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 为测度空间。

§2.3 集合论初步

定义.6 设集合 $A_k\subset\mathbb{R}^n,k\in\mathbb{N}$，称上极限集是:

$$\limsup_{k\to\infty}A_k=\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=m}^{\infty}A_k \tag{74}$$

下极限集是:

$$\liminf_{k\to\infty}A_k=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{k=m}^{\infty}A_k \tag{75}$$

注 $\limsup_{k\to\infty} A_k$ 是指对于 $x\in\mathbb{R}^n$，对于任一 j，存在 $k\geq j$，使得 $x\in A_k$. 类似地，$\liminf_{k\to\infty} A_k$ 是指对于 $x\in\mathbb{R}^n$，存在 j，使得对于任一 $k\geq j$，有 $x\in A_k$.

定义.7 设集合 A,B，若存在一个双射 $f:A\to B$，则称 A,B 等势。

定理.20 (Fubini) Suppose $f \in L(\mathbb{R}^n)$, and $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, $p+q=n$, and:

$$f:\ \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R},\ \ (x,y) \to f(x,y)$$

then:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)dx \right) dy \tag{76}$$

§3 泛函分析初步

§3.1 思路

分析学希望研究映射 $f : X \to Y$，其中 X, Y 为集合，f 为映射。在复分析中，空间是 $\mathbb{C}$，在实分析中，空间是 $\mathbb{R}$，在泛函分析中，空间是 X，这是一个抽象空间。在这些空间上赋予一些结构，例如拓扑结构（复变），测度结构（实变），范数结构（泛函分析）。

首先从实变函数出发，构造抽象空间。

§3.2 赋范空间

Suppose $E \subset \mathbb{R}^n$，为 Lebesgue 可测集，上有可测函数 $f : E \to \mathbb{R}^n$，考虑一个等价类：

$$[f(x)] = \{g(x)|g(x) \in E,\ f(x) = g(x), a.e. \in E\}$$

so for any two functions $f, g \in [f(x)]$，Lebesgue integral of f and g are the same.

定义.8 For $1 \leq p \leq \infty$,

$$L^p(E) = \{[f]|f : E \to \mathbb{R}^n,\ \int_E |f(x)|^p dx < \infty\} \tag{77}$$

注意这个集合中的元素就是等价类，是由等价类集合构成的集合。每个等价类都满足后面的条件。

定义.9 For $p = \infty$,

$$L^\infty(E) = \{[f]|f : E \to \mathbb{R}^n,\ ||f||_\infty = \inf_{Z \subset E m(Z)=0} \sup_{x \in E \setminus Z} |f(x)| < \infty\} \tag{78}$$

条件中 $||f||_\infty$ 称为本性上界，且对 f，有：$|f| < ||f||_\infty, a.e.x$

注 也可以简单记为：

$$L^p(E)=\{f|f:E\to\mathbb{R}^n,\ \int_E|f(x)|^pdx<\infty\} \tag{79}$$

定义.10 Suppose X is a set, $K=\mathbb{R}(\mathbb{C})$, define a map as:

$$+:\ X\times X\to X,\ (x,y)\to x+y$$

which satisfies the following conditions:

1. $x+y=y+x$
2. $(x+y)+z=x+(y+z)$
3. $\exists!0\in X,\ \forall x\in X,\ x+0=0+x=x$
4. $\forall x\in X,\ \exists-x\in X,\ x+(-x)=0$

Define another map as:

$$\cdot:\ K\times X\to X,\ (k,x)\to k\cdot x=kx$$

which satisfies the following conditions:

1. $k(x+y)=kx+ky$
2. $(k+l)x=kx+lx$
3. $(kl)x=k(lx)$
4. $1x=x$

称 $(X,K,+,\cdot)$ 为线性空间。

例.12 定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的向量空间是线性空间。

现在希望将 $L^p(E)$ 定义为线性空间。考虑：

$$X=L^p(E),1\leq p\leq\infty,\ K=\mathbb{R},\ +:\ X\times X\to X,\ (f,g)\to f+g,$$
$$\cdot:\ K\times X\to X,\ (\alpha,f)\to\alpha f(x)$$

需要证明定义这样的二元关系后，所得结果仍在空间内，即证明：

$$\int_E |\alpha f + \beta g|^p \mathrm{d}x < \infty \tag{80}$$

注 $(a+b)^p \le 2^p \max(a,b)^p \le 2^p(a+b)^p$

定义.11 设 X 是线性空间，定义算子：

$$||\cdot||:\ X \to \mathbb{R},\ x \to ||x||$$

满足：

1. $||x|| \ge 0$
2. $||x|| = 0 \Rightarrow x = 0$
3. $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$
4. $||x+y|| \le ||x|| + ||y||$

称 $||\cdot||$ 为范数。，称 $(X, ||\cdot||)$ 为线性赋范空间。

注 有了范数后，可以定义距离：

$$d(x,y) = ||x-y|| \tag{81}$$

这也称为度量，满足

1. $d(x,y) \ge 0$
2. $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$
3. $d(x,y) = d(y,x)$
4. $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$

构成度量空间。

例.13 $X = \mathbb{R}^n, ||\cdot|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \to ||x||_p,\ ||x||_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

在 $L^p(E)$ 上定义范数：

$$||f||_p = \left(\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}},\ 1 \le p < \infty \tag{82}$$

当 $p=\infty$ 时，定义：

$$||f||_\infty = \inf_{Z\subset E m(Z)=0} \sup_{x\in E\setminus Z} |f(x)| \tag{83}$$

则 $L^p(E)$ 是线性赋范空间。

注 Hodder 不等式：$\exists p,q>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$f\in L^p(E)$，$g\in L^q(E)$，

$$\int_E |fg|\mathrm{d}x \le \left(\int_E |f|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \tag{84}$$

另，几何平均数 $\le$ 算数平均数：

$$a,b>0,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}} \le \frac{a}{p}+\frac{b}{q}$$

令：$a=\frac{|f|^p}{||f||^p}$，$b=\frac{|g|^q}{||g||^q}$ 证明。

赋范空间 $(X,||\cdot||)$

例.14 $(\mathbb{R}^n,||\cdot||_p)$，$1\le p\le\infty$，$||x||_p=(\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$，$1\le p\le\infty$，$||x||_\infty = \max_{i=1}^n |x_i|$

例.15 $(L^p(E),||\cdot||_p)$，$||f||_p=\left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

定义.12 数列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$，$x_0\in X$，若 $\forall \epsilon>0, \exists N>0, s.t. \forall n>N$，有：$d(x_n,x_0)<\epsilon$，则称该列收敛于 x_0；若只有 $s.t. \forall m,n>N$，$d(x_m,x_n)<\epsilon$，则称为柯西列。

注 收敛列一定是柯西列，但柯西列不一定是收敛列。如：$X=(0,1)$，数列 $\{\frac{1}{n}\}$ 是柯西列，但极限 0 不在集合内，所以不是收敛列。

定义.13 若 X 中任意柯西列都是收敛列，则称 X 是完备的赋范空间，又称 Banach Space。

例.16 $(\mathbb{R}^n,||\cdot||_p)$，$(L^p(E),||\cdot||_p)$，$(C[a,b],||\cdot||_c)$ 是 Banach Space。如 $(X,d(0,1))$ 不是完备的，记为 B^* 空间。

定义.14 设 X 是赋范空间,若 $\exists E \subset X$,若 E 是稠密子集,即:$\forall x \in X, \exists \{x_n\} \in E$,使得 $x_n \to x$;且 E 为可数集,则称 X 是可分的。

例.17 $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p)$, $(L^p(E), ||\cdot||_p)$, $(C[a,b], ||\cdot||_c)$ 是可分的。$(L^\infty(E))$ 是不可分的。

下面介绍空间维数:

定义.15 设 X 是线性空间,$||\cdot||$ 是 X 上的范数,若 X 是赋范空间,则称 $(X, ||\cdot||)$ 是线性赋范空间。对于 $\{x_1, ..., x_n\} \in X$,若存在 $\{a_1, ..., a_n\} \in K$,使得 $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$,则称 $\{x_1, ..., x_n\}$ 线性相关;否则称线性无关。则称 X 为维数 n 的有限维空间,记 $dim X = n$,否则为无限维空间。

例.18 $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p)$ 是有限维空间,$dim\mathbb{R}^n = n$。$(L^p(E), ||\cdot||_p)$, $(C[a,b], ||\cdot||_c)$ 是无限维空间。

范数等价的定义:

定义.16 设 X 是线性空间,$||\cdot||_1, ||\cdot||_2$ 是 X 上的两个范数,若 $\exists c_1, c_2 > 0$,使得 $\forall x \in X$,有:

$$c_1||x||_1 \leq ||x||_2 \leq c_2||x||_1$$

则称 $||\cdot||_1$ 与 $||\cdot||_2$ 等价。

注 若 $||\cdot||_1$ 与 $||\cdot||_2$ 等价,则在第一个范数下的收敛性与第二个范数下的收敛性是等价的。

等价的传递性:若 $||\cdot||_1$ 与 $||\cdot||_2$ 等价,$||\cdot||_2$ 与 $||\cdot||_3$ 等价,则 $||\cdot||_1$ 与 $||\cdot||_3$ 等价。

定理.21 若 X 是有限维赋范空间,则 X 上的任意两个范数等价。

注 $\mathbb{R}^n$ 上的 2-范数和 p-范数等价。

无穷维空间上的范数不一定等价。例如:$C[0,1]$ 上的无穷范数和 1-范数不等价。

证明. 设 $dimX = n$，取一组基 $\{e_1, ..., e_n\}$，则 $\forall x \in X$，有 $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$，设 $\|\cdot\|$ 是 X 上的任一范数，定义算子:

$$T : (X, \|\cdot\|) \to (K^n, \|\cdot\|_2) \;\; X \to TX$$

其中 $TX = (a_1, ..., a_n)^T = \vec{a}$，则 T 是线性映射，且是双射。证明 T 是同构映射，即证明 T 是双射且保范。记 $\|x\|_T = \|TX\|_2$，易证 $\|x\|_T$ 是 X 上的范数。考虑函数 $p : (K^n, \|\cdot\|_2) \to \mathbb{R}$，$\vec{a} \to p(a)$，其中:

$$p(a) = \|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\| = \|x\|$$

由三角不等式:

$$p(\alpha) - p(\beta) \leq \|\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) e_i\|$$

注意到 Cauchy-Schwarz 不等式:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

于是:

$$p(\alpha) - p(\beta) \leq \|\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i)^2\|^{\frac{1}{2}} \|\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2\|^{\frac{1}{2}} = C\|(\alpha - \beta)\|_2$$

于是 p 一致连续。设 $S = \{\psi \in K^n, \|\psi\|_2 = 1\}$ 是 K^n 中有界闭集，于是 p 可以在 S 上取到最大值和最小值，记为 M, m，则 $\forall \vec{a} \in K^n$，有:

$$m \leq p\left(\frac{\vec{a}}{\|a\|_2}\right) = \frac{1}{\|a\|_2} p(\vec{a}) \leq M$$

分母移动到两边，2-范数为 T-范数，只要证明 $m > 0$ 即可证完。又若 $m = 0$，则 $\exists \eta \in S$，使得 $p(\eta) = m = \|\sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i\| = 0$，这要求系数 (η) 全为 0，与 $\eta \in S$ 矛盾，所以 $m > 0$，证毕。

推论 相同维数的有限维赋范空间存在一个线性保范双射。

定义.17 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间，Y 是 X 的子空间，若对 Y 中任任意点列 $\{y_n\}$，存在收敛子列 $\{y_{n_k}\}$，子列极限在 X 中，则称 Y 是列紧的。若子列极限在 Y 中，则称 Y 是自列紧的。

这是有界闭的推广。有限维赋范空间中，有界闭集一定是自列紧的。

定理.22 设 X 是赋范空间，单位球面 $S = \{x \in X, \|x\| = 1\}$ 是列紧的，则 X 是有限维的。

引理.23 若 $F(K^n, ||\cdot||_2) \to \mathbb{R}$ 满足:

1. F 是连续的
2. $||\cdot||_2 \to \infty$, $F \to \infty$

则存在 $\beta \in K^n$，使得 $F(\beta) = \min_{\alpha \in K^n} F(\alpha)$

引理.24 设 X 是赋范空间，$\{e_1, ..., e_i\} \subset X$，则对任意 $x \in X$，有:

$$\|x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\| = \min_{\beta \in K} \|x - \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i\|$$

证明. 令 $\beta \in K^n$，定义函数：$F : (K^n, ||\cdot||_2) \to (\mathbb{R}, ||\cdot||), \beta \to \|x - \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i\|$. 易证，$F$ 是连续的，且:

$$F(\beta) = \|x - \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i\| \geq \|\sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i\| - \|x\| = P(\beta) - \|x\|$$

于是易知 $P(\beta)$ 也是 K^n 上的范数。又由于有限维空间上任何两个范数相等，由此，$\exists c_1 > 0$，使 $P \geq c_1\|\cdot\|$. 由此可以得到：$F \leq c_1\|\cdot\| - \|x\|$，于是根据前一引理，$F$ 存在极值。

接下来证明定理本身:

证明. 若 X 是有限维的，有界闭集一定是自列紧集。由于 S 是有界闭的，所以 S 是自列紧的。现设 X 是无穷维，取 $x_1 \neq 0 \in X$, $\|x_1\| = 1$，有:

$$span\{a_1 \cdot x_1, a_1 \in K\}$$

是真子空间，则存在 $y = X/span\{x_1\} \in X$。由前引理，存在 $x \in span\{x_1\}$，使得:

$$\|y - x\| = \min_{x' \in span\{x_1\}} \|y - x'\|$$

又令 $x_2 = \frac{y-x}{\|y-x\|}$, $\|x_2\| = 1$，有:

$$\|x_2 - x_1\| = \|\frac{y - x}{\|y - x\|} - x_1\| = \frac{1}{\|y - x\|}\|y - (x + \|y - x\|x_1)\| \geq \frac{1}{\|y - x\|}\|y - x\| = 1$$

其中括号是指这是在 $span\{x_1\}$ 中的线性组合。于是 $span\{x_1, x_2\}$ 是真子空间，继续构造 x_3，仿照上述证明，得到一个 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$，满足自身范数为 1，且两两间范数大于 1。这样的序列不是 Cauchy 列，其子列自然也不是 Cauchy 列。与列紧集假设矛盾，不成立。

定义.18 设 X, Y 是数域 K 上的线性空间，$D(T) \subset X$ 是线性子空间，$T : D(T) \subset X \to Y$ 称为算子，若满足:

1. $T(x + y) = T(x) + T(y)$
2. $T(\alpha x) = \alpha T(x)$

则称 T 是线性算子。

定义.19 若 X, Y 是赋范空间，$T : D(T) \subset X \to Y$ 是线性算子，若 $\exists M > 0$，使得 $\forall x \in D(T)$，有:

$$||T(x)||_Y \leq M||x||_X$$

则称 T 是有界线性算子。

寻找最小的 M，即为 $\frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$ 的上确界。

定义.20 $T: D(T) \subset X \to Y$ 是线性算子，若 T 是有界的，称

$$\|T\| = \sup_{x \in D(T) \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} < \infty$$

为 T 的算子范数。

定理.25 设 X, Y 是赋范空间，所有有界线性算子的集合:

$$B(X,Y) = \{T: D(T) \subset X \to Y,\ T\text{是有界线性算子}\}$$

这个空间可以定义加法:

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x)$$

以及数乘:

$$(\alpha T)(x) = \alpha T(x),\ \alpha \in K$$

以及范数:

$$B(X,Y) \to \mathbb{R},\ \|T\| = \sup_{x \in D(T) \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$$

于是 $B(X,Y)$ 是线性赋范空间。

下面介绍一些性质:

命题.26 若 $T \in B(X,Y)$, 则:

$$\|T\| = sup_{x \in X \|x\| = 1} \|T(x)\|$$

证明思路：令 $y = \frac{x}{||x||}$，取遍整个圆盘，保持函数不变。

例.19
1. 0 算子是有界线性算子，$\|0(x)\| = 0$
2. 恒等算子 $I: X \to X$ 是有界线性算子，$\|I(x)\| = 1$
3. $P[a,b] = \{f: [a,b] \to \mathbb{R},\ \text{多项式}\}$, 装配范数为 $||f(t)|| = \max_{a \geq t \geq b} |f(t)|$。定义微分算子 $T: P[a,b] \to P[a,b],\ f(t) \to f'(t)$，则 T 是无界线性算子。为着方便，取 $[a,b] = [0,1]$。令 $f_n(t) = t^n$，则 $||f_n|| = 1$，但 $||T(f_n)|| = n$，从而不存在一个正数使得 f 的范数能够控制算子范数。所以 T 是无界的。

4. 积分算子：$T: L^p[0,1] \to \mathbb{R}$, $f \to \int_0^1 f(s)ds$，则 T 是有界线性算子。证明：$||T(f)||_p = 1$。注意到

$$\|T(f)\| = |\int_0^1 f(s)ds| \geq \int_0^1 |f(s)|ds \geq \int_0^1 \max_{0\geq s\geq 1} |f(s)|ds = ||f|| \int_0^1 ds = 1$$

由此

$$||T|| \geq \sup_{x\in D(T)\neq 0} \frac{\|T(f)\|}{\|f\|} \geq 1$$

又取 $f_0 = 1$，则

$$||T|| \leq \sup_{x\in D(T)\neq 0} \frac{\|T(f_0)\|}{\|f_0\|} \leq 1$$

定理.27 (共鸣定理 (一致有界定理)) 设 X, Y 是赋范空间，$\{T_n\} \subset B(X,Y)$，若 $\forall x \in X$，$\{T_n(x)\}$ 是有界的，则 $\{T_n\}$ 是有界的。即，若：

$$\sup_{n\in\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \|T_n(x)\| < \infty,\ \forall x \in X$$

则 $\exists M \in \mathbb{R}$:

$$\sup_{n\in\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \|T_n\| \leq M$$

注意到，对于条件 $\forall x \in X$, $\sup ||Ax|| < \infty$，这说明 $\forall x \in X$，$\exists M_x > 0$ 使得：

$$\|Ax\| \leq M_x||x||,\ \forall A$$

这是一个局部性质，而共鸣定理是一个全局性质，其结论给出的是一个全局的上界。由此，这说明整个算子族是点点有界的，因而，称为一致有界定理。

定理.28 (Hahn-Banach 定理) 设 X 是赋范空间, Y 是 X 的线性子空间, $p: Y \to \mathbb{R}$ 是 Y 上的有界线性泛函, 则 $\exists$ 有界线性泛函 $\tilde{p}: X \to \mathbb{R}$，满足：

1. $\tilde{p}(x) = p(x)$, $\forall x \in Y$
2. $\|\tilde{p}\| = \|p(x)\|$, $\forall x \in X$

该定理说明了，可以将线性泛函从子空间扩展到整个空间，且范数不变。下面给出一个推论：

推论 设 X 是赋范空间，$x_1, x_2 \in X$，$x_1 \neq x_2$，则 $\exists$ 线性泛函 $p : X \to \mathbb{R}$，满足：

$$p(x_1) \neq p(x_2)$$

证明. Let $x_0 = x_1 - x_2 \neq 0$, then we use x_0 to form a subspace $Y = \{tx_0, t \in \mathbb{R}\}$, then we can find a linear functional p on Y, which satisfies $tx_0 \to p(tx_0) = t\|x_0\|$. $p(x_0) = ||x_0||$, and $||p|| = \sup \frac{||p(tx_0)||}{||tx_0||} = 1$. Then we can use Hahn-Banach theorem to extend p to the whole space X.

这一个推论说明了，赋范空间中存在足够多的连续线性泛函。例如，如果对 n 维向量取坐标的操作是一种泛函，这是自然存在区分两个元素的泛函，而推论使这样的结论推广到了无穷维空间上。

定义.21 若对 $\forall f \in X$，即对任何在 X 中的有界线性泛函，$\exists x_n \in X$，使得 $f(x_n) \to f(x_0)$，则称列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0，记为 $x_n \to x_0$。

注意，依范数收敛可以推出弱收敛，但反之不成立。例如，$X = L^p[0,1]$, $f_n(t) = t^n$，则 $f_n \to 0$ 弱收敛，但不依范数收敛。

例.20 在 $L[0,1]$ 上的列 $\{\sin n\pi x\}$，弱收敛于 0，其依范数收敛到 $C \neq 0$

考试内容

5.8 8:30 考试

以上课例子为主要内容，无大定理证明。

I Hilbert Space

I.1 half-double linear form

半双线性型的定义：设 E, F 是两个复向量空间，$E \times F$ 上的映射 f 称为半双线性型，如果有:

$$f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y) \tag{85}$$

$$f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2) \tag{86}$$

$$f(\alpha x, y) = \alpha f(x, y) \tag{87}$$

$$f(x, \beta y) = \beta^* f(x, y) \tag{88}$$