Notes on Stochastic Processes

Q. X. Fang

2025-02-05

Contents

VIII Levy 过程

VIII.1 基本概念

有三个条件定义了Levy过程的类别。如上所述，对于给定的Levy过程$L(t)$，无穷小增量dL都是相互独立的，并且都具有相同的概率密度。第三个条件更具技术性：Levy 过程在时间步长Δt中的增量ΔL必须满足:

$$\lim_{\Delta t\to 0} P(\Delta L > \varepsilon) = 0$$

这种情况被称为"随机连续性"，是相当合理的。虽然这个条件允许无穷小增量dL是有限的（跳跃过程），但它表明它们的概率是当dL变为零时，有限值变为零。泊松过程遵循这一点，因为增量dN为单位的概率是$\lambda\,\mathrm{d}t$，因此当dt为零时，它会变为 0. 出于同样的原因，这种情况也消除了在固定（确定性）时间发生跳跃的可能性：在固定时间 t 发生跳跃的概率为非零。随机连续性不能防止无穷小的增量具有确定性。对于 Levy 过程，确定性增量dt是一个完全有效的增量。这意味着 Levy 过程总是有一个随时间线性增加的确定性分量。这被称为漂移.

到目前为止，我们研究的两个过程，维纳过程和泊松过程，都是Levy过程。但也有更奇特的Levy过程。我们首先描述一类有趣的特殊奇异过程，称为稳定 Levy 过程。

VIII.2 稳定 Levy 过程

问题：找到非高斯概率密度分布的卷积满足除了简单的伸缩变换外仍然保持形式吗。这样的概率密度不符合中心极限定理，因此具有无限的方差。

方法：特征函数。将概率密度与其自身卷积等价于将其特征函数平方。此外，按因子a缩放密度等价于按$\frac{1}{a}$缩放其特征函数。下面的特征函数符合这些要求：

$$\chi_\alpha(s) = \exp(-c|s|^\alpha)$$

平方：

$$\chi_\alpha^2(s) = \exp(-2c|s|^\alpha) = \exp\left(-c|2^{\frac{1}{\alpha}}s|^\alpha\right) = x_\alpha\left(2^{\frac{1}{\alpha}}s\right)$$

平方特征函数等价于进行一个$2^{-\frac{1}{\alpha}}$的缩放。将两个密度具有特征函数$\chi_\alpha(s)$的随机变量相加，得到一个密度相同但被因子$2^{\frac{1}{\alpha}}$伸缩的随机变量，高斯型变量是$\alpha = 2$的特例。对应于这些特征函数的概率密度称为稳定密度，因为它们的形式在卷积下不会改变。

如果把常数c写成$c = \sigma^\alpha$，那么σ是相应概率密度宽度的度量。（这是因为将σ乘以某个因子 k 会将概率密度拉伸 k。）因此，通常将特征函数写成：

$$\chi_\alpha(s) = \exp(-\sigma^\alpha\ |s|^\alpha)$$

那么，当$\alpha \neq 2$时，这些特征函数对应的概率密度是多少？事实证明，α必须在$0 < \alpha \leq 2$的范围内，特征函数才能对应于可归一化的概率密度。α只有三个情况其对应的概率密度具有封闭形式。当然，第一个是高斯分布。第二个是柯西密度：

$$C_\sigma(x) = \frac{\sigma}{\pi[x^2 + \sigma^2]}, \quad \alpha = 1$$

第三个是 Levy 密度：

$$L_\sigma(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\sigma}{2\pi x^3}} e^{-\frac{\sigma}{2x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

柯西密度的平均值是有限的(，而它的方差是无限的。Levy 密度甚至更病态，因为它的平均值也是无限的。更一般地说，当$1 \leq \alpha \leq 2$时，稳定密度的平均值是有限的，当$\alpha < 1$时，是无限的。具有有限方差的唯一稳定密度是高斯密度。α越小，密度行为越病态。稳定密度也称为“α稳定”密度，明确指的是当它们的随机变量加在一起时，决定它们如何拉伸的参数。

注意到由于柯西密度的方差是无限的，因此方程中出现的参数σ不是标准差。然而，就 X 从其平均值波动的平均值而言，它确实有明确的含义。具体来说，它是变量与其平均值偏差的绝对值的平均值:

$$\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} |x - \langle X\rangle| C(x)\,\mathrm{d}x$$

然而，对于 Levy 密度，参数σ不能直接与平均值附近的平均波动的简单度量相关，因为平均值是无限的。

由此产生的 Levy 过程称为α稳定 Levy 过程，我们将用$\mathrm{d}S_\alpha$表示它们的无穷小随机增量。然而，为了定义α稳定过程，我们确实需要弄清楚每个稳定密度σ_α的宽度必须如何随时间步长Δt缩放。以高斯为例:

$$\sqrt{2}\sigma\left(\frac{\Delta t}{2}\right) = \sigma(\Delta t)$$

于是：$\sigma(\Delta t) = \sqrt{\Delta t}$。那么对一个$\alpha$稳定过程，应该有:

$$2^{\frac{1}{\alpha}}\sigma_\alpha\left(\frac{\Delta t}{2}\right) = \sigma_\alpha(\Delta t)$$

于是显然有:

$$\sigma_\alpha(\Delta t) = (\Delta t)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Cauchy 过程的无穷小增量是$\mathrm{d}S_1$，则:

$$P(\mathrm{d}S_1)=\frac{\mathrm{d}t}{\pi\left[(\mathrm{d}S_1)^2+(\mathrm{d}t)^2\right]},\quad \sigma\propto\Delta t$$

于是 1-稳定形式的积分:

$$S_1=\int_0^T \mathrm{d}S_1(t)$$

具有柯西概率密度(因为该过程在求和下是稳定的,就像高斯函数一样),其宽度由$\sigma=T$给出。对于一般的α稳定过程,其积分$S_\alpha(T)$的宽度为$T^{\frac{1}{\alpha}}$。因此,α越小，积分过程的宽度随时间增加得越快。

在我们继续之前，我们给出了生成所有稳定 Levy 过程的密度的完整特征函数集,因为这些函数比我们上面讨论的更一般。通过特征函数的增量生成完整的稳定 Levy 过程集:

$$\chi_{\alpha,\beta}(s)=\begin{cases}\exp\left(-\sigma^\alpha\ |s|^\alpha\ \left[1-i\beta\,\mathrm{sgn}(s)\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right]+i\mu s\right), & \alpha\neq 1\\ \exp\left(-\sigma|s|\left[1-i\left(\frac{2\beta}{\pi}\right)\mathrm{sgn}(s)\ln(|s|)\right]+i\mu s\right), & \alpha=1\end{cases}$$

这里σ是宽度（或缩放）参数，μ是改变密度的参数。对于那些平均值有限的密度，μ是平均值。新参数β是一个不对称或偏斜参数。当$\beta=0$时，平均值有限的密度关于$x=\mu$是对称的。当β不等于零时,就会导致这些密度变得不对称。β 的值必须在$-1\leq\beta\leq 1$的范围内。我们仍然将所有这些 Levy 过程称为α稳定的，而不管β的值如何，因为β只影响密度的形状，而不影响它们稳定的事实，也不影响它们在卷积下的缩放方式。

VIII.2.1 稳定 Levy 过程的随机微分方程

微分方程是:

$$\mathrm{d}x=f(x,t)\,\mathrm{d}t+g(x,t)\,\mathrm{d}S_\alpha$$

因为过程是稳定的，因此可以类似于 Gaussian 方法求解。O-U 形式:

$$\mathrm{d}x = -\gamma x\,\mathrm{d}t + g\,\mathrm{d}S_\alpha$$

解是:

$$x = x_0 e^{-\gamma t} + g\int_0^t e^{\gamma(s-t)}\,\mathrm{d}S_\alpha(s)$$

任何时间函数的随机变量的概率密度:

$$Y(t) = g\int_0^t f(t)\,\mathrm{d}S_\alpha(s)$$

相关特征函数在$\mu = 0$的情况:

$$\sigma = g\left[\int_0^t [f(t)]^\alpha\,\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

多元情况类似。线性方程:

$$\mathrm{d}x = -\gamma x\,\mathrm{d}t + gx\,\mathrm{d}S_\alpha$$

由于

$$\langle \mathrm{d}S_\alpha \rangle = \infty, \quad \alpha \neq 2$$

因此没有闭合解。

VIII.2.2 数值模拟

$S_{a,b}$将表示$\alpha = a, \beta = b, \sigma = 1$和$\mu = 0$的$\alpha$稳定随机变量。需要一个具有“标准”指数密度的随机变量 y。首先描述如何生成这个随机变量，标准指数密度:

$$P(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ e^{-y}, & y \geq 0 \end{cases}$$

令$y = -\ln(x)$，x在$[0,1]$上均匀分布

Cauchy 密度：$S_{1,0} = \tan(x), x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$，x 是均匀分布的

稳定密度$S_{\frac{1}{2},1} = \frac{1}{w^2}$，其中$w$是方差为 2，均值为 0 的高斯分布。

全$\beta = 0$的密度:

$$S_{\alpha,0} = \frac{\sin(\alpha x)}{(\cos(x))^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\cos[(1-\alpha)x]}{y} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

其中x是在$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$上均匀分布的，$y$是上面的标准指数形式。

$\beta = 1$的所有稳定密度的坎特方法。这些随机变量由下式给出:

$$S_{\alpha,1} = \frac{\sin(\alpha x)}{(\sin(x))^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\sin[(1-\alpha)x]}{y} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

其中x是在$[0, \pi]$上均匀分布的，y是上面的标准指数形式。

所有稳定密度的坎特方法:

$$S_{\alpha,\beta} = \eta_+ A - \eta_- B$$

其中A和B是两个随机变量，且:

$$\eta_\pm = \left\{ \frac{\sin[\frac{\pi}{2}(1 \pm \beta)(1 - |1-\alpha|)]}{\sin[\pi(1 - |1-\alpha|)]} \right\}^{\frac{1}{\alpha}}$$

VIII.3 描述所有 Levy 过程的特征

事实证明，有一种非常优雅的方法来描述所有可能的 Levy 过程。这是因为每个 Levy 过程的特征函数都有一个相当简单的形式。为了介绍这种形式，并理解其各个部分的含义，我们应该首先检查维纳和泊松过程生成的随机变量的特征函数，并添加确定性漂移。对于具有漂移和单个维纳噪声的 Levy 过程，由随机方程给出:

$$\mathrm{d}z = \mu \,\mathrm{d}t + \sigma \,\mathrm{d}W$$

解是高斯分布，均值为μt，方差为$\sigma^2 t$。特征函数是:

$$\chi(s) = \exp(i\mu ts - \sigma^2 t^2 s^2)$$

因此，指数中在 s 中呈线性的项描述了确定性漂移，在 s 中为二次的项描述高斯噪声。

Possion 过程类似，特征函数:

$$\chi_N(s) = \exp\left[\lambda t\left(e^{i\delta s} - 1\right)\right]$$

更一般的跳跃过程$J(t)$看作多个不同速率的泊松过程的组合,每个速率对应于一个跳跃的大小。称为复合泊松过程。特征函数是:

$$\chi_J(s) = \exp\left\{t\sum_{m}^{M}\left(e^{i\delta_m s} - 1\right)\lambda_m\right\}$$

连续化需要将求和换成积分:

$$\chi_J(s) = \exp\left\{t\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{i\delta s} - 1\right)\lambda(\delta)\,\mathrm{d}\delta\right\}$$

令:

$$\lambda = \int_{-\infty}^{\infty}\lambda(\delta)\,\mathrm{d}\delta$$

则:

$$\chi_J(s) = \exp\left\{\lambda t\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{i\delta s} - 1\right)p(\delta)\,\mathrm{d}\delta\right\}$$

将$|\delta| > 1$部分称为 Levy 度量，这部分必须有限。另一部分是小于等于 1 的部分。

$$e^{i\delta s} - 1 = i\delta s - \frac{1}{2}\delta^2 s^2 + \dots$$

是描述跳跃过程的。展开第一项是与确定部分完全相同的，$\lambda(\delta)$趋于无穷大，δ趋于 0 的时候，第一项是无限漂移。因此在$\delta = 0$处爆炸，剔除后:

$$\chi_J(s)=\exp\left\{t\int_{|\delta|\ \le 1}\left(e^{i\delta s}-1-i\delta s\right)\lambda(\delta)\,\mathrm{d}\delta+t\int_{|\delta|>1}\left(e^{i\delta s}-1\right)\lambda(\delta)\,\mathrm{d}\delta\right\}$$

这是一个良好的过程，因为这要求了$\int_{|\delta|<1}\delta^2\lambda(\delta)\,\mathrm{d}\delta<\infty$，于是有 Levy-Khinchin 表示：每个 Levy 过程都有一个特征函数

$$\chi_J(s)=\exp\{t[i\mu s-\sigma^2 s^2]\}$$

$$\times\exp\left\{t\int_{|\delta|\ \le 1}\left(e^{i\delta s}-1-i\delta s\right)\lambda(\delta)\,\mathrm{d}\delta+t\int_{|\delta|>1}\left(e^{i\delta s}-1\right)\lambda(\delta)\,\mathrm{d}\delta\right\}$$

其中$\lambda(\delta)$称为 Levy 测度。上述结果意味着，每个 Levy 过程都可以构造为（1）漂移、（2）维纳过程、（3）复合泊松过程和（4）被指定为跳跃过程但具有无穷小跳跃率的过程的总和。因此，我们可以将 Levy 过程分为两组——具有有限跳跃率的 Levy 过程和具有无限跳跃率的奇异 Levy 过程。那些具有无限跳跃率的过程被称为无限活动 Levy 过程。所有具有无限方差的过程都是无限的活动。

例如，上述结果意味着可以使用跳跃而不是显式的柯西增量来模拟柯西过程。α稳定过程的 Levy 密度具有以下形式:

$$\lambda(\delta)=\begin{cases}a\delta^{-(\alpha+1)}, & \delta>1\\ b|\delta|^{-(\alpha+1)}, & \delta<0\end{cases}$$

VIII.4 Levy 过程的随机积分

Levy 过程随机变量:

$$\mathrm{d}x(t)=f(x,t)\,\mathrm{d}t+g(x,t)\,\mathrm{d}W+\mathrm{d}J$$

其中J是复合泊松过程。并:

$$\mathrm{d}x_c(t)=f(x,t)\,\mathrm{d}t+g(x,t)\,\mathrm{d}W$$

且$\Delta J_i = \Delta J(t_i)$ 利用 Ito 规则，设$y = y(x,t)$，则:

$$\mathrm{d}y = \frac{\partial y}{\partial x}\,\mathrm{d}x_c(t) + \frac{\partial y}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \frac{g(x,t)}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,\mathrm{d}t$$

跳跃发生则有:

$$\mathrm{d}y(t_i) = y(x_i + \Delta J_i) - y(x_i)$$

其中，我们定义了x_i，即第 i 次跳跃发生之前的$x(t)$值。由于$\mathrm{d}y$是这两个数的和，我们有

$$\mathrm{d}y = \frac{\partial y}{\partial x}\,\mathrm{d}x_c(t) + \left[\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{g(x,t)}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]\mathrm{d}t$$

$$+\sum_i\left[y(x_i + \Delta J_i, s) - y(x_i, s) - \frac{\mathrm{d}y(x_i, t_i)}{\mathrm{d}x}\Delta t\right]$$

VIII.4.1 Levy 过程的线性随机方程

$$\mathrm{d}x = -\gamma x\,\mathrm{d}t + x\,\mathrm{d}L$$

其中 Levy 过程增量$\mathrm{d}L$是:

$$\mathrm{d}L = \beta\,\mathrm{d}t + g\,\mathrm{d}W + \Delta L_J$$

前两项是确定项和维纳项，最后一项是跳跃项。取$y = \ln(x)$，于是:

$$\mathrm{d}y = -\left(\gamma - \frac{g^2}{2}\right)\mathrm{d}t + \mathrm{d}L + \ln(x + \Delta x) - \ln(x) - \frac{\delta x}{x}$$

Δx是 x 的不连续增量。因此：$\Delta x = x\Delta L_J$，于是:

$$\mathrm{d}y = -\left(\gamma - \frac{g^2}{2}\right)\mathrm{d}t + \mathrm{d}L - \Delta L_J + \ln(1 + \Delta L_J)$$

积分/求和得到:

$$y(t) = y_0 - \left(\gamma - \frac{g^2}{2}\right)t + L(t) + \sum_n^N \ln[1 + \Delta L_J(t_n)] - \Delta L_J(t_n)$$

这里的索引 n 枚举了跳跃发生的时间，n 是区间$[0,t]$中的跳跃总数。指数 n 可以是离散的，如复合泊松过程，也可以是连续的。在后一种情况下，N 不再相关，总和成为一个整数。将上述方程指数化，得到$x=e^y$，最终解为：

$$x(t)=x_0\exp\left\{-\left(\gamma-\frac{g^2}{2}\right)t+L(t)\right\}\prod_n^N[1+\Delta L_J(t_n)]e^{-\Delta L_J(t_n)}$$