

Universidad Nacional de Lomas de Zamora
Facultad de Ingeniería



Informe de Práctica Profesional Supervisada
Realizada

Institución:
Universidad Nacional de Lomas de Zamora, Facultad de Ingeniería

Alumno: Fernando Lagomarsino

Carrera: Ingeniería, Especialidad: Mecánica

D.N.I.: 33.007.343

Correo electrónico: fernando.lagomarsino@gmail.com

.....
Dra. Samira Abdel Masih
Prof. Titular. Análisis Matemático III

.....
Ing. Jorge Cabrera
Jefe de Laboratorio de Materiales

Observaciones:

Índice

Resumen.....	4
Descripción general del trabajo realizado.....	5
<i>Estado del arte</i>	5
Estudio de una viga simplemente apoyada y de una viga empotrada	9
<i>Sistema de ejes coordenados ortogonales</i>	9
<i>Sistema de unidades</i>	9
<i>Sistema de fuerzas</i>	11
Caso de una viga simplemente apoyada	12
<i>Primer Caso</i>	13
<i>Segundo Caso</i>	18
<i>Determinación de las condiciones iniciales para el sistema de ecuaciones diferenciales</i>	22
<i>Ensayo de una viga</i>	23
<i>Hipótesis previas al ensayo</i>	25
<i>Desarrollo del ensayo</i>	26
<i>Comparación contra un modelo simplificado</i>	27
<i>Simulación</i>	29
Caso de una viga empotrada.....	30
<i>Primer Caso</i>	31
<i>Segundo Caso</i>	34
<i>Determinación de las condiciones iniciales para el sistema de ecuaciones diferenciales</i>	38
<i>Simulación</i>	39
Tabla de propiedades de un perfil doble “T” del 8	40
Conclusiones	41
Apéndice	42
<i>Módulo de elasticidad o módulo de Young</i>	42
<i>Ley de Hooke</i>	42
<i>Momento de inercia de segundo orden</i>	44
<i>Vinculación</i>	46
<i>Cálculo de reacciones</i>	47
<i>Diagrama de momento flector</i>	48
Bibliografía	50

Resumen

A menudo, cuando se construyen estructuras, nos interesa conocer no sólo la fatiga producida por las cargas que soportan las mismas sino también las **deformaciones** que dichas cargas provocan. Este tipo de estudio nos permitirá tomar decisiones a la hora de realizar una construcción, pues en la mayoría de los casos estas deformaciones deben ser limitadas, ya sea por una cuestión de seguridad, de construcción o de estética.

En el presente informe de práctica profesional supervisada se estudiarán dos casos: el primero analizará las deformaciones producidas por una carga puntual móvil y una carga distribuida sobre una viga simplemente apoyada, y el segundo comprenderá fuerzas de la misma naturaleza que las del caso anterior, pero sobre una viga empotrada.

La meta de este estudio es predecir los efectos de estas cargas al actuar en distintas posiciones de la viga y variando, además, sus correspondientes módulos. Todo esto será simulado mediante el Software Wolfram Mathematica, versión 8.0.4, con el fin de obtener valores tanto visuales como numéricos de forma exacta, los cuales serán posteriormente cotejados de forma experimental en el Laboratorio de Materiales de la Facultad de Ingeniería. Allí se llevará a cabo la verificación con la máquina de ensayo universal, simulando la carga distribuida y puntual móvil sobre ambas vigas. Se medirán las deformaciones producidas sobre las mismas mediante el uso de un comparador y se cotejarán con los resultados obtenidos teóricamente.

Para poder llevar adelante el estudio de ambos casos, se realizará un minucioso análisis de la ecuación diferencial de la elástica utilizando la expresión rigurosa de la curvatura. No haremos uso de la ecuación diferencial simplificada ya que, para elementos estructurales de poca rigidez, esta última ecuación no constituye un modelo matemático apropiado.

Descripción general del trabajo realizado

Estado del arte

El estudio del comportamiento de las vigas ha sido una fuente de aportes teóricos y de resultados prácticos de gran interés para la Ingeniería, a partir del cual surgieron importantes áreas como la Estabilidad (antiguamente llamada Resistencia de Materiales). Su análisis se ha fundamentado en distintas ramas como la Mecánica Clásica y la Mecánica Moderna: Elasticidad y Plasticidad. Todo ello ha permitido la utilización de métodos de resolución que se han desarrollado en el campo de la Física y de la Matemática. La evolución del estudio de este tema no ha sido continua y durante sus avances se han entrecruzado distintas cuestiones.

En los primeros tiempos, la elaboración de una teoría capaz de modelar y explicar el comportamiento de piezas prismáticas rectas, resultó ser un proceso en el que se combinaron distintos elementos: por una parte, aspectos físicos como el concepto de tensión y deformación y por otra, aspectos geométricos relacionados con el desplazamiento y deformación que soporta la pieza.

En particular, el problema de la elástica fue planteado por primera vez por *Giordano de Nemore*, un matemático del siglo XIII. En su obra titulada "*Deratione Ponderi*" afirmaba que:

"Cuando el medio se mantiene firme, las piezas finales son más fáciles de curvar".

Sin embargo, planteaba una incorrecta resolución:

"...Y así ocurre que desde los extremos ceden más fácilmente, mientras que las otras partes siguen cediendo en la medida en que están más cerca de los extremos; de este modo todo el cuerpo se curva en un círculo...".

De hecho, el círculo es una posible solución a la elástica, pero no para el problema específico que se planteaba.

Podemos afirmar que el primer científico que se ocupó de estudiar el comportamiento resistente de una pieza prismática fue Galileo Galilei (1564 - 1642). En su publicación de 1638 llamada "*Discorsi e Dimostrazioni matematiche*", sin utilizar ninguna ley que relacionara tensión con deformación, trató de obtener algunos resultados sobre la resistencia de una viga sometida a cargas transversales, y aunque algunas de las hipótesis que empleaba en su análisis no eran correctas (como por ejemplo, la referente a la posición de la fibra neutra), su forma de abordar el tema representó un modelo aplicado por investigadores posteriores, particularmente por Edme Mariotte (1620 - 1684).

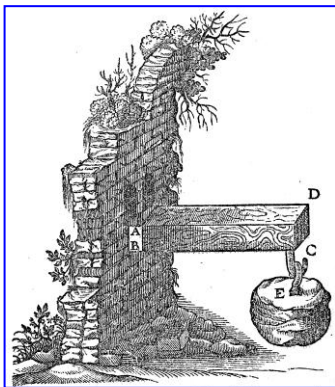


Figura 1: Problema de Galileo (1638)

Años más tarde, en 1691, Jakob Bernoulli (1654 - 1705) planteó el problema de la elástica:

“Si se tiene una lámina AB de espesor uniforme, de anchura y peso despreciable, apoyada en su parte inferior A y con un peso colgando de su parte superior B, entonces, si la fuerza del peso a lo largo de la línea BC es suficiente para doblar la lámina, la curva que ésta describe verifica la siguiente propiedad: El rectángulo formado por la tangente entre el eje y su propia tangente tiene área constante.”

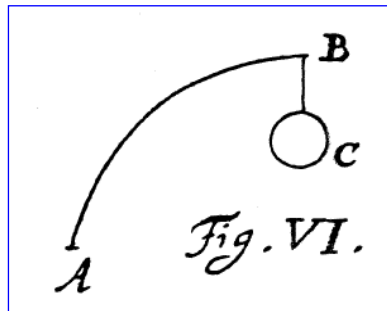


Figura 2: Problema de Jakob Bernoulli

Este resultado se conoce actualmente como la *rectangular elástica*, ya que la fuerza aplicada a un extremo de la curva se inclina a un ángulo recto con respecto al otro extremo que se mantiene fijo.

Para 1692 Jakob Bernoulli había resuelto por completo la caja rectangular de la elástica planteada anteriormente. En su obra *Meditatione CLXX*, y bajo el título “*Quadratura Curvae*”, pudo mostrar gráficamente cuál era la curva de una lámina doblada.

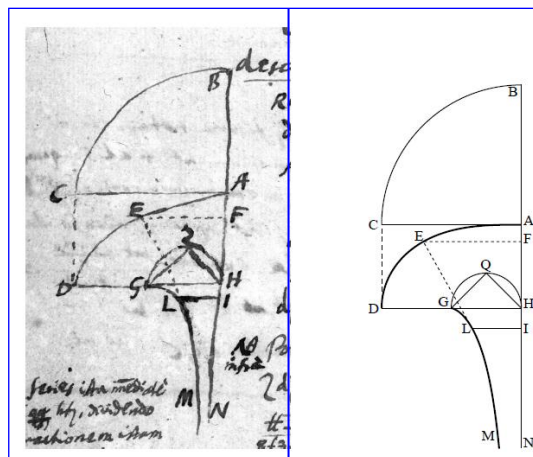


Figura 3: Izquierda: Dibujo de Jakob Bernoulli (1692) de la curva de una lámina doblada. Derecha: Reconstrucción moderna.

Resulta evidente que Bernoulli estaba trabajando con la evoluta, y su curvatura es fundamental en la teoría de la elástica. En particular, por definición de evoluta, la longitud del segmento \overline{EL} (véase Figura 3) es el radio de curvatura en el punto E de la curva \overline{AED} . En 1694 James Bernoulli publica la primera solución teórica de la curva de una lámina doblada e inicia el trabajo de dar una ecuación general para su curvatura. Para ello utilizó el concepto de diferenciales a fin de establecer una relación entre la curvatura de una curva y la de un círculo.

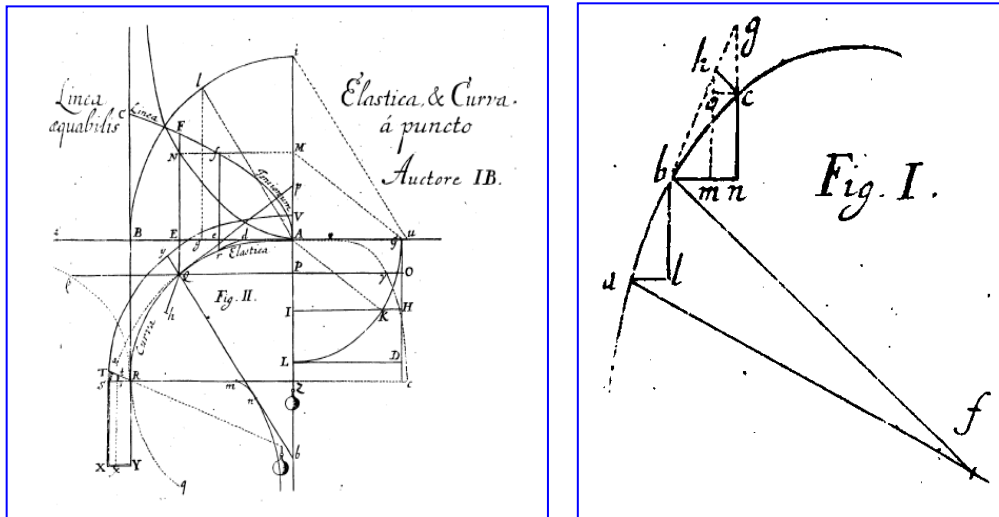


Figura 4: Izquierda: Publicación de la elástica (1694). Derecha: Justificación.

Posteriormente Daniel Bernoulli (1700 - 1782) propone otras variantes técnicas. En una carta dirigida a Leonhard Euler (1707 - 1783), discutió con éste acerca del problema general de la elástica, aunque no llegaron a ninguna conclusión.

Finalmente, en 1744 y gracias a la obra de los Bernoulli, Euler logró caracterizar completamente a la familia de curvas conocidas como “*curvas elásticas*”. Su tratamiento fue riguroso, a punto tal que es utilizado por las normas modernas.

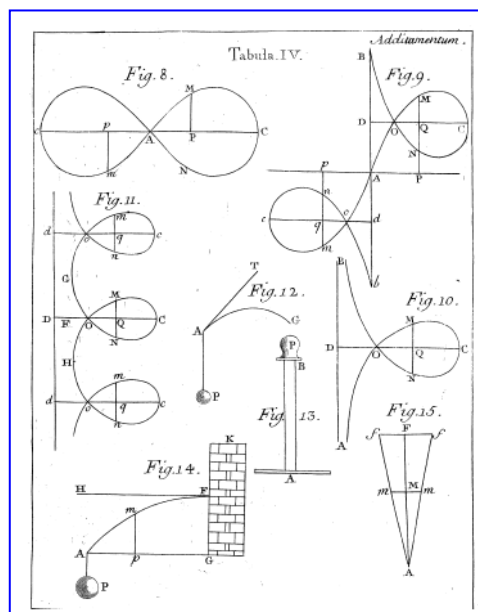


Figura 5: Tabla de familias de curvas elásticas de Euler (Tabula IV)

A pesar de que la ecuación general de la elástica se publicó en 1695, las curvas no habían sido trazadas con precisión hasta que en 1906 Max Born (1882 - 1970) presentó su tesis doctoral titulada “*La investigación de la estabilidad de la línea elástica en el plano y en el espacio*”.

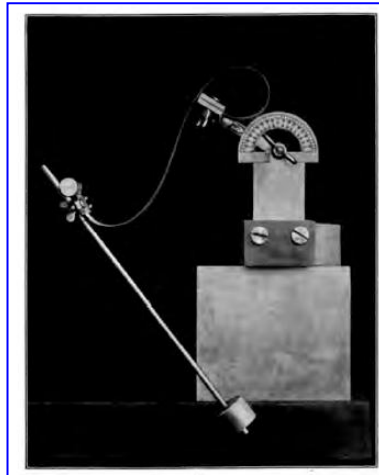


Figura 6: Instrumento de Born para la medición de la elástica

Con la llegada de la computadora digital de alta velocidad se produjo una fuerte demanda de algoritmos eficientes para calcular la elástica. Nuevas técnicas numéricas se iniciaron a partir de 1958 hasta la actualidad, a fin de encontrar soluciones aproximadas de la curva elástica.

Por otro lado, la tecnología de computadoras ha brindado en los últimos años una potente herramienta que permite reproducir un fenómeno de la vida real mediante un proceso más sencillo y menos costoso: la simulación.

En este trabajo haremos uso de esta técnica a fin de obtener información y predecir resultados referentes a las posibles soluciones de la ecuación elástica.

Estudio de una viga simplemente apoyada y de una viga empotrada

En esta sección analizaremos las deformaciones a la que es sometida una viga bajo la acción de una distribución de cargas, cuando se encuentra simplemente apoyada o empotrada. Antes de iniciar nuestro estudio, destacaremos los siguientes conceptos:

Sistema de ejes coordenados ortogonales

Es habitual, cuando fijamos un sistema de coordenadas cartesianas en el plano, llamar al eje de abscisas con la letra “x” y al eje de ordenadas orientarlo positivamente hacia arriba. Sin embargo, en honor a Leonhard Euler (1707-1783), que fue el primero en publicar las “*curvas elásticas*” que describen las vigas, llamaremos al eje de abscisas como eje “z”, tal como él lo definió. Los ejes serán orientados como se muestra en la siguiente figura:

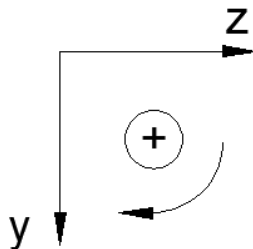


Figura 7: Sistema de ejes coordenados

Al semieje “y” positivo lo orientamos hacia abajo, ya que es la dirección en la que actúan las fuerzas provocadas por la acción de la gravedad. El momento estático resultante de una fuerza será positivo si gira en sentido de las agujas del reloj o dextrógiro, y negativo cuando ocurra en sentido opuesto o sinistrógiro.

Sistema de unidades:

Las unidades en las que se basa este trabajo serán:

Unidad de fuerza: Kilogramo fuerza [Kgf]

Unidad de longitud: Centímetros [cm].

Ahora, consideremos una viga de longitud L y supongamos que sobre ella actúan cargas que tienen la misma dirección y sentido que la del semieje “y” positivo. Estudiaremos el caso en que la viga, por acción de estas fuerzas, sufre una deformación elástica (es decir que se doblará pero, al dejar de actuar las cargas, recuperará su forma inicial).

Para simplificar nuestro modelo de estudio supondremos además que la viga, cualquiera sea su sección transversal, soporta la misma deformación. Por esta razón analizaremos solamente una de sus secciones transversales y la ubicaremos sobre el eje “z”, de modo tal que uno de sus extremos coincida con el origen de coordenadas.

Definimos entonces la función $y: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ de manera tal que $y(z)$ representa la distancia vertical que se desplaza cada punto “z” de la viga de su posición de equilibrio. La función “y” es usualmente llamada la “*flecha de la viga*” y su gráfica recibe el nombre de “*curva elástica*”.

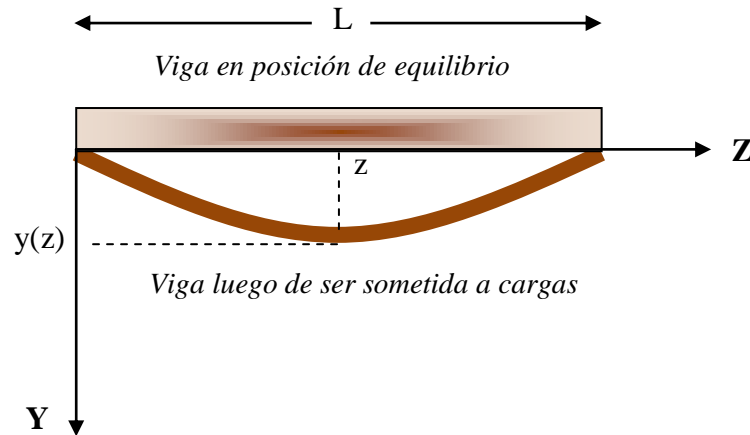


Figura 8: Forma que adopta una viga antes y después de ser sometida a una o más cargas.

Se puede demostrar (véase en Bibliografía, [2]) que $y(z)$ verifica la siguiente ecuación diferencial, llamada “la ecuación diferencial de la elástica”:

$$\frac{\frac{d^2 y}{dz^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]^3}} = -\frac{M}{E \cdot J_{zz}} \quad [1]$$

Donde:

E = Módulo de elasticidad o módulo de Young.

J_{zz} = Momento de inercia de segundo orden.

M = Momento flexor.

La explicación y significado de cada uno de estos valores se encuentran detallados en el Apéndice.

El módulo del miembro izquierdo de la ecuación [1] es precisamente la curvatura, en el punto “ z ”, de la curva elástica. Es común considerar que, cuando la expresión $\left(\frac{dy}{dz}\right)^2$ es pequeña comparada con la unidad, se desprecia para obtener:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = -\frac{M}{E \cdot J_{zz}} \quad [2]$$

Pero cuando nos enfrentamos a elementos elásticos o las piezas en estudio son muy esbeltas, en las que las flechas pueden tomar valores grandes, no podemos despreciar

ningún término. Por esta razón trabajaremos con la expresión exacta [1], ya que obtendremos resultados más coherentes con la realidad. Conociendo en cada caso la función “ M ” que define la variación del momento flexor, y resolviendo [1], se podrá hallar la función “ y ” que permitirá establecer el corrimiento máximo o flecha máxima, el cual será de suma importancia en numerosos problemas de aplicación.

Sistema de fuerzas

Debido a que la ecuación diferencial de la elástica sólo contempla esfuerzos que se generan a través del eje baricéntrico longitudinal de la viga, las fuerzas estarán dispuestas como se observa en la figura siguiente:

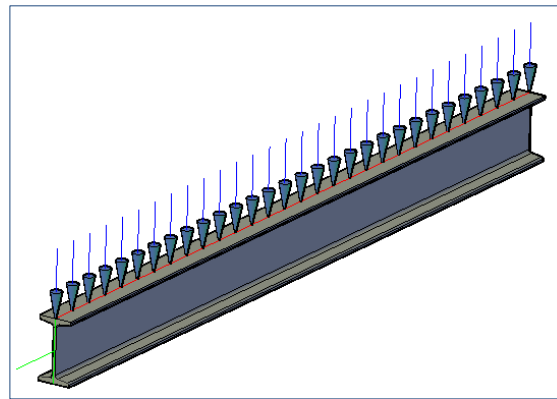


Figura 9: Viga con una carga distribuida

En la próxima sección mostraremos detalladamente cómo obtener la función “ y ” para una viga simplemente apoyada o empotrada.

Caso de una viga simplemente apoyada

Consideremos una viga que consta de un apoyo fijo y otro móvil, como se muestra en la figura siguiente:

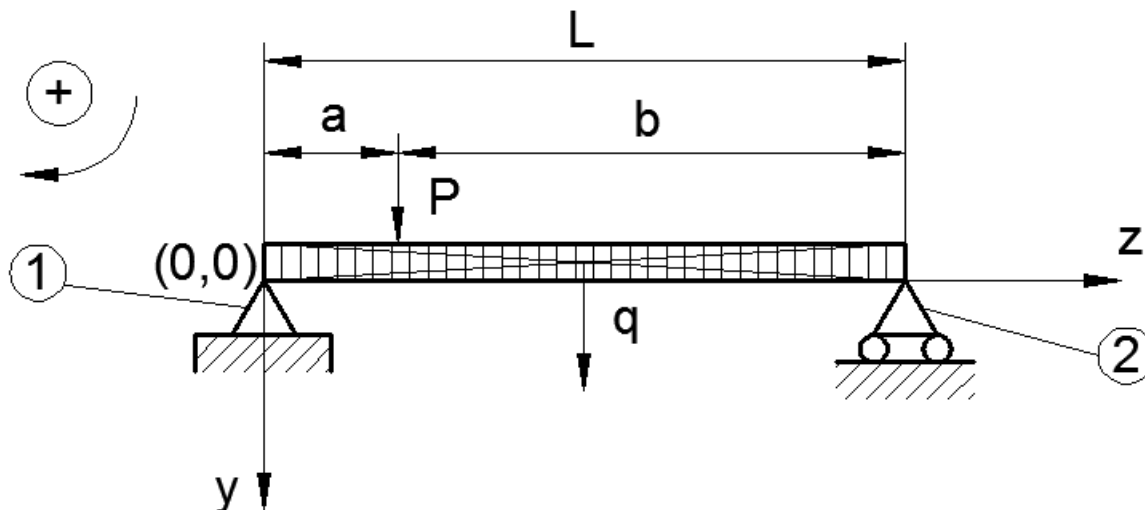


Figura 10: Viga con una carga distribuida y una carga puntual móvil.

Referencias:

1 = Apoyo fijo.

2 = Apoyo móvil.

(0,0) = Origen de coordenadas.

P = Carga puntual móvil.

q = Carga distribuida.

L = Longitud total de la viga.

a = Distancia desde el origen de coordenadas hasta " P ".

b = Distancia desde el " P " hasta el final de la viga.

Si la viga tiene una carga distribuida y una carga puntual a una distancia " a ", el diagrama de momentos tendrá una inflexión debido a la acción de la fuerza " P ".

En este tipo de situaciones, cuando se trabaja con dos o más fuerzas, es conveniente considerarlas descompuestas en dos sistemas de cargas y suponer que cada sistema parcial origina tensiones y deformaciones de manera independiente, como si fuera un único sistema de cargas aplicado al cuerpo. De este modo, el efecto real es el resultado de la suma de los efectos producidos por los dos sistemas parciales de cargas. Este método, que consiste en obtener el efecto resultante mediante adición o combinación de efectos parciales independientes, recibe el nombre de **Método de Superposición**. En este trabajo aplicaremos frecuentemente este método, el cual es generalmente utilizado cuando existe una relación de proporcionalidad entre las cargas y los efectos que ellas producen.

Como se mencionó anteriormente, y debido a la acción de la fuerza “P”, el diagrama presenta una inflexión en “a”. Por esta razón, para resolver la ecuación diferencial [1], plantearemos tres funciones de momento flexor.

La primera de ellas será para la fuerza “P”, considerando los siguientes tramos: el tramo $0 < z \leq a$ y el tramo $a < z \leq L$. Llamaremos M_1 al momento flexor del primer tramo y M_2 al del segundo.

La tercera función de momento será para la carga distribuida, en el intervalo $0 < z \leq L$. Para analizar esta situación consideraremos los siguientes casos:

Primer Caso:

Se tiene una sola fuerza actuante: la carga puntual “P”. Su diagrama correspondiente es el siguiente:

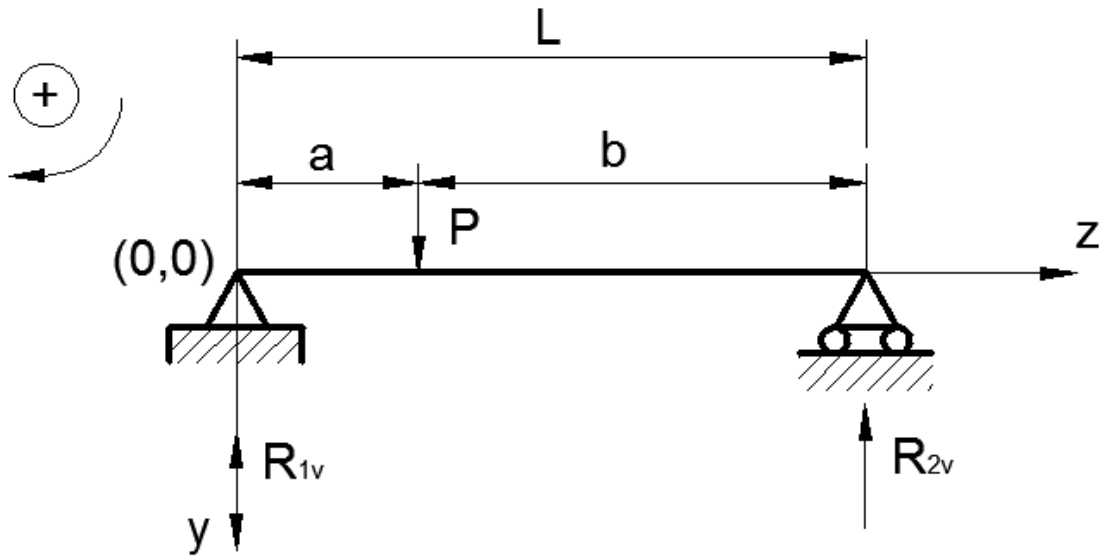


Figura 11: Viga con las reacciones en sus apoyos.

Como debemos hallar la expresión de función que forma la curva del momento, calcularemos primeramente las resultantes de cada uno de los apoyos. Para ello plantearemos las tres ecuaciones de la estática a partir de las resultantes de la figura 11:

De este modo,

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{zi} = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{yi} = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_{fi} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^1 F_{zi} = R_{1h} = 0 \\ \sum_{i=1}^3 F_{yi} = P - R_{1v} - R_{2v} = 0 \rightarrow R_{1v} = P - R_{2v} \\ \sum_{i=1}^3 M_{fi(0,0)} = P \cdot a - R_{2v} \cdot L = 0 \rightarrow R_{2v} = \frac{P \cdot a}{L} \end{cases}$$

En consecuencia

$$\begin{cases} R_{1h} = 0 \\ R_{1v} = P - \frac{P \cdot a}{L} \\ R_{2v} = \frac{P \cdot a}{L} \end{cases}$$

La figura siguiente muestra la viga con las fuerzas resultantes en sus apoyos.

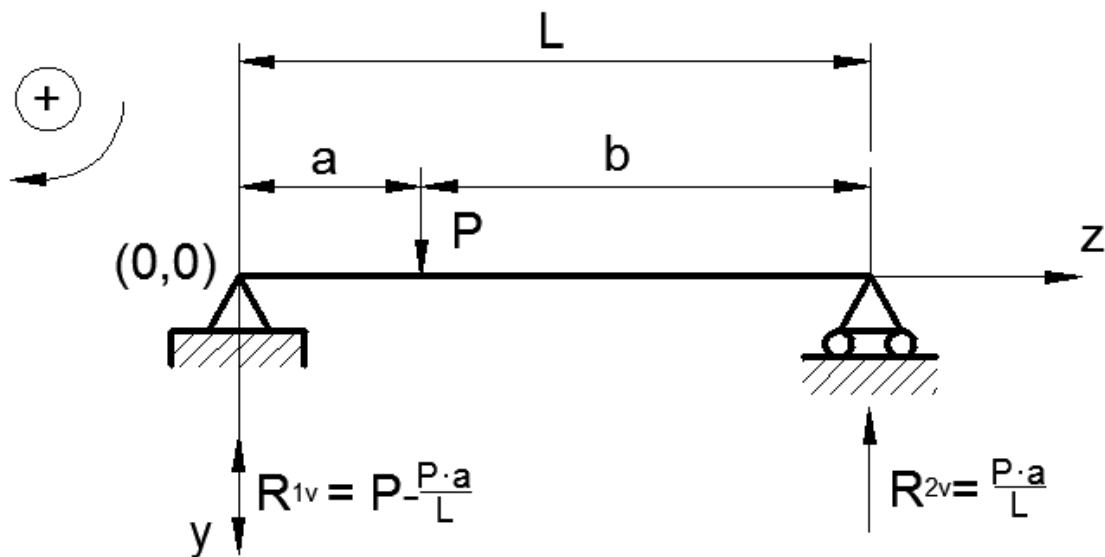


Figura 12: Viga con las resultantes en sus apoyos.

En este caso la fuerza actuante es una fuerza puntual “P” de valor $P(z) = 0$. El esfuerzo cortante será:

$$Q(z) = - \int P(z) \cdot dz = - \int 0 \cdot dz = -C_1 \quad [3]$$

Como podemos comprobar, en la función que define al esfuerzo cortante aparece la constante C_1 . Para hallarla, necesitaremos una condición inicial que podrá obtenerse a partir del gráfico de la figura 13. Veamos cómo hacerlo.

En la siguiente figura se observa que tanto la función que define al esfuerzo cortante como la que define al momento flexor están expresadas en dos tramos, por lo que debemos considerar dos situaciones: la primera para $0 < z \leq a$ y la segunda para $a < z \leq L$.

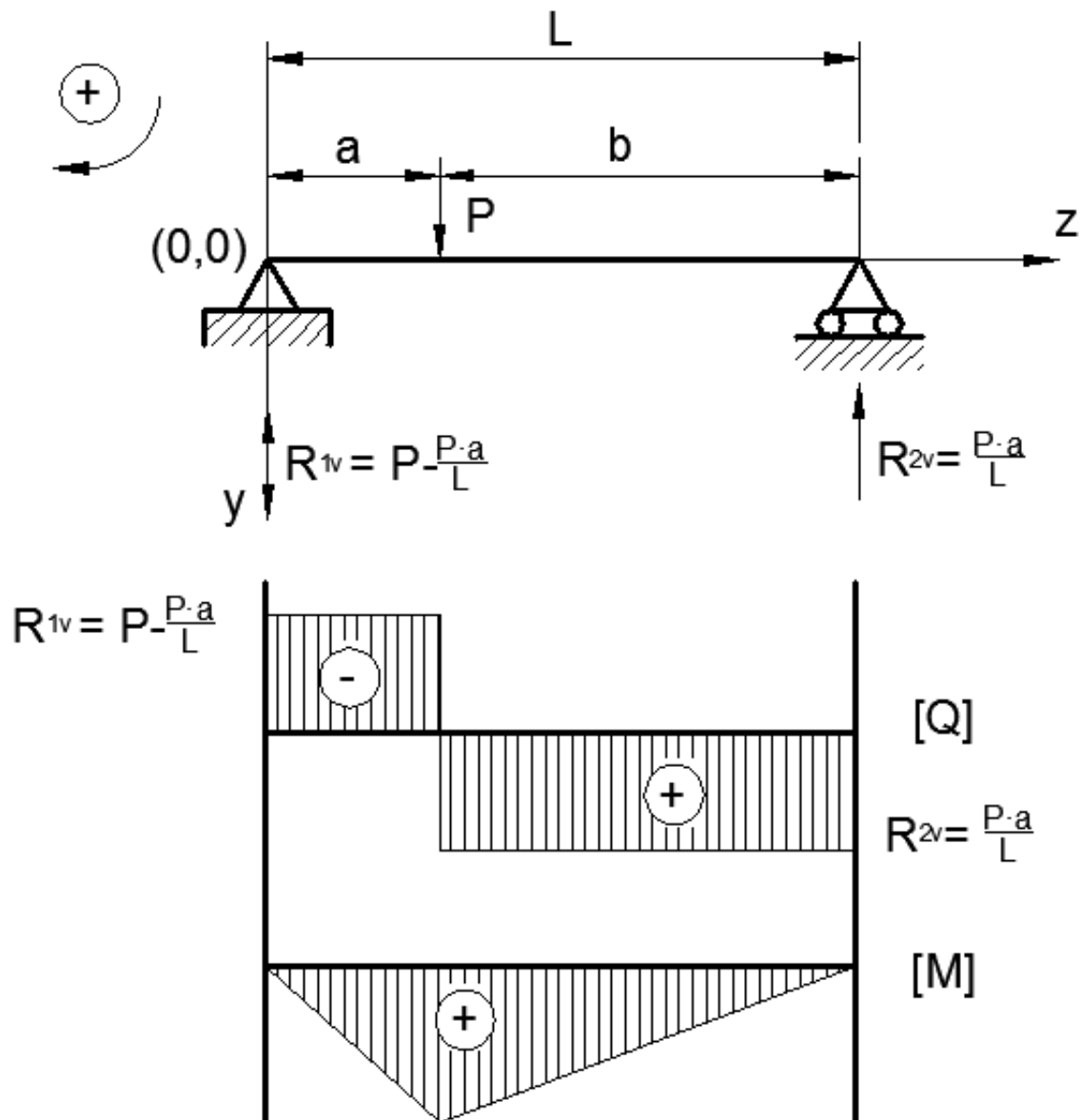


Figura 13: Viga con sus respectivos diagramas.

■ Si $0 < z \leq a$

$$Q(z) = - \int P(z) \cdot dz = - \int 0 \cdot dz = -C_1 \quad [3]$$

De la figura 13 se deduce que para $z = 0$, $Q(0) = -\left(P - \frac{P \cdot a}{L}\right)$

Por lo tanto,

$$Q(0) = -C_1 = \frac{P \cdot a}{L} - P$$

De este modo,

$$Q(z) = P - \frac{P \cdot a}{L} \quad [4]$$

Para calcular la función que define al momento flexor integraremos la función [4]. Entonces

$$M(z) = \int Q(z) \cdot dz = \int P - \frac{P \cdot a}{L} dz$$

De donde resulta

$$M(z) = P \cdot z - \frac{P \cdot a}{L} \cdot z + C_2 \quad [5]$$

Para calcular la constante C_2 necesitaremos también una condición inicial. De la figura 13 se deduce que para $z = 0$, $M(z) = 0$.

En consecuencia

$$M(0) = P \cdot 0 - \frac{P \cdot a}{L} \cdot 0 + C_2 = 0$$

Luego

$$C_2 = 0$$

Por lo tanto,

$$M(z) = P \cdot z - \frac{P \cdot a}{L} \cdot z \quad \text{Si } 0 < z \leq a \quad [6]$$

■ Si $a < z \leq L$

$$Q(z) = - \int P(z) \cdot dz = - \int 0 \cdot dz = -C_3 \quad [7]$$

Para determinar la constante C_3 recurrimos nuevamente a la figura 13. De ella se deduce que para $z = L$, $Q(L) = \frac{P \cdot a}{L}$

En consecuencia:

$$Q(L) = -C_3 = \frac{P \cdot a}{L}$$

De este modo,

$$Q(z) = -\frac{P \cdot a}{L} \quad [8]$$

Ahora bien, para determinar la función que defina al momento integraremos la función [8], pero necesitaremos además una condición inicial. Nuevamente, de la figura 13 se deduce que para $z = L$, $M(L) = 0$.

Por lo tanto

$$M(z) = \int Q(z) \cdot dz = \int -\frac{P \cdot a}{L} dz$$

De aquí resulta

$$M(z) = -\frac{P \cdot a}{L} \cdot z + C_4$$

En consecuencia

$$M(L) = -\frac{P \cdot a}{L} \cdot L + C_4 = 0$$

Luego

$$C_4 = P \cdot a$$

Así,

$$M(z) = P \cdot a - \frac{P \cdot a}{L} \cdot z \quad \text{Si } a < z \leq L \quad [9]$$

Segundo Caso:

Se tiene una sola fuerza actuante: la carga distribuida, para $0 < z \leq L$.

El siguiente gráfico ilustra esta situación:

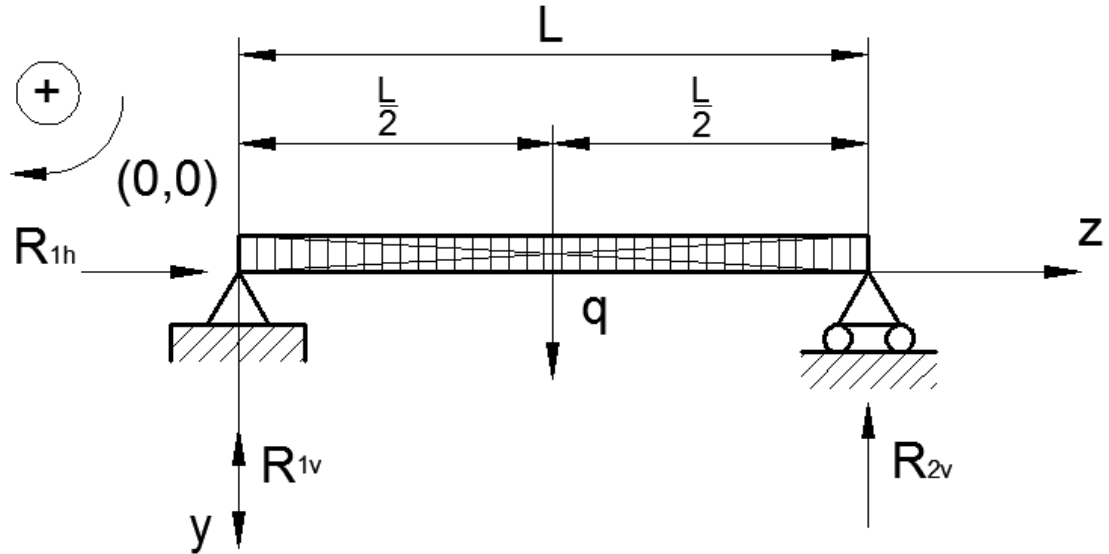


Figura 14: Viga con las reacciones en sus apoyos.

Siguiendo la misma metodología que para el primer caso, para hallar la expresión de la función que determina la curva del momento, calcularemos primeramente las resultantes de cada uno de los apoyos. Para ello plantearemos las tres ecuaciones de la estática a partir de las resultantes de la figura 14:

De este modo,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n F_{zi} = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{yi} = 0 \\ \sum_{i=1}^n Mf_i = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^1 F_{zi} = R_{1h} = 0 \\ \sum_{i=1}^4 F_{yi} = q \cdot L - R_{1v} - R_{2v} = 0 \\ \sum_{i=1}^3 Mf_{i(0,0)} = q \cdot L \cdot \frac{L}{2} - R_{2v} \cdot L = 0 \rightarrow R_{2v} = \frac{q \cdot \frac{L^2}{2}}{L} \end{array} \right.$$

En consecuencia:

$$\begin{cases} R_{1h} = 0 \\ R_{1v} = q \cdot \frac{L}{2} \\ R_{2v} = q \cdot \frac{L}{2} \end{cases}$$

La siguiente figura muestra la viga con las resultantes en sus apoyos.

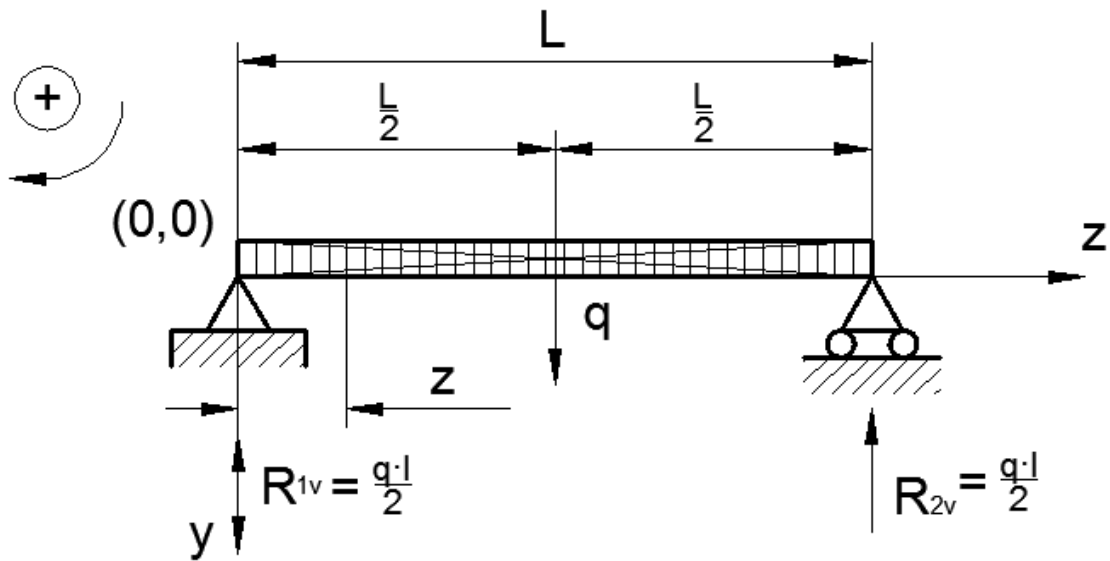


Figura 15: Viga con las resultantes en sus apoyos.

En este caso la fuerza actuante es una carga constante “ q ” de valor $P(z) = q \cdot L$.

El esfuerzo cortante será:

$$Q(z) = - \int P(z) \cdot dz = - \int q \cdot dz = -q \cdot z - C_5 \quad [10]$$

Nuevamente, para hallar las funciones que definen al esfuerzo cortante y al momento flexor, necesitaremos condiciones iniciales. Éstas las obtendremos a partir del gráfico de la figura 16.

La siguiente figura muestra, además, la viga con su correspondiente diagrama de momento flector.

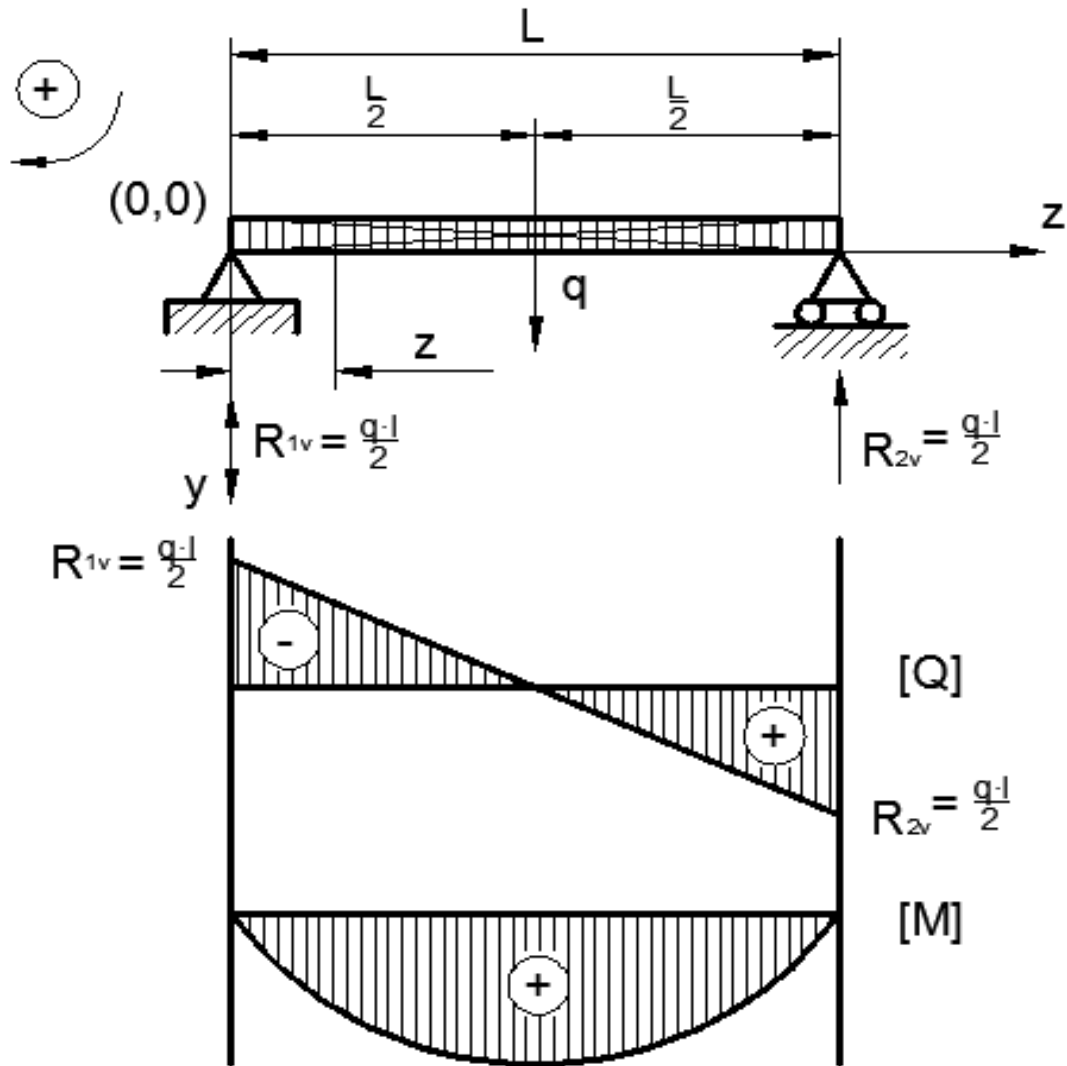


Figura 16: Viga con sus respectivos diagramas.

Observando la figura 16, se deduce que para: $z = 0$, $Q(z) = -\frac{q \cdot L}{2}$

En consecuencia:

$$Q(0) = -q \cdot 0 - C_5 = -\frac{q \cdot L}{2} \rightarrow C_5 = \frac{q \cdot L}{2}$$

De este modo,

$$Q(z) = -q \cdot z + \frac{q \cdot L}{2} \quad [11]$$

Al integrar esta última ecuación resulta

$$M(z) = \int Q(z) \cdot dz = \int -q \cdot z + \frac{q \cdot L}{2} dz$$

Entonces,

$$M(z) = -\frac{q \cdot z^2}{2} + \frac{q \cdot L}{2} \cdot z + C_6 \quad [12]$$

Para calcular la constante C_6 observamos, de la figura 16, que para $z = 0$, $M(z) = 0$

En consecuencia

$$M(0) = -\frac{q \cdot 0^2}{2} + \frac{q \cdot L}{2} \cdot 0 + C_6 = 0$$

Por lo tanto,

$$C_6 = 0$$

Luego,

$$M(z) = -\frac{q \cdot z^2}{2} + \frac{q \cdot L}{2} \cdot z \quad [13]$$

Esta ecuación, como dijimos, es válida para $0 < z \leq L$ debido a su continuidad. A partir de la figura 16 se obtuvo que la función que define al momento flexor está definida por:

$$M(z) = -\frac{q \cdot z^2}{2} + \frac{q \cdot L}{2} \cdot z \quad \forall z$$

De la figura 12 se obtuvo que la función que define al momento flexor está definida por:

$$\begin{cases} M(z) = P \cdot z - \frac{P \cdot a}{L} \cdot z & \text{Si } 0 < z \leq a \\ M(z) = P \cdot a - \frac{P \cdot a}{L} \cdot z & \text{Si } a < z \leq L \end{cases}$$

Luego, aplicando el Método de Superposición, es decir, sumando [6] con [13] para el primer tramo y [9] con [13] para el segundo tramo se obtiene:

$$\begin{cases} M_1(z) = P \cdot z - \frac{P \cdot a}{L} \cdot z + \frac{q \cdot L}{2} \cdot z - \frac{q \cdot z^2}{2} & \text{Si } 0 < z \leq a \\ M_2(z) = P \cdot a - \frac{P \cdot a}{L} \cdot z + \frac{q \cdot L}{2} \cdot z - \frac{q \cdot z^2}{2} & \text{Si } a < z \leq L \end{cases}$$

Por otro lado, de la ecuación diferencial de la elástica para una viga simplemente apoyada se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\frac{d^2 y_1}{dz^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy_1}{dz}\right)^2\right]^3}} = -\frac{M_1}{E \cdot J_{zz}} \quad \text{si } 0 < z \leq a \quad [14] \\ \frac{\frac{d^2 y_2}{dz^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy_2}{dz}\right)^2\right]^3}} = -\frac{M_2}{E \cdot J_{zz}} \quad \text{si } a < z < L \quad [15] \end{array} \right.$$

Al reemplazar en [14] y [15] por las funciones de los momentos flexores correspondientes a cada tramo, resulta el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\frac{d^2 y_1}{dz^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy_1}{dz}\right)^2\right]^3}} = -\left[\frac{P \cdot z - \frac{P \cdot a}{L} \cdot z + \frac{q \cdot L}{2} \cdot z - \frac{q \cdot z^2}{2}}{E \cdot J_{zz}} \right] \quad \text{si } 0 < z \leq a \\ \frac{\frac{d^2 y_2}{dz^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy_2}{dz}\right)^2\right]^3}} = -\left[\frac{P \cdot a - \frac{P \cdot a}{L} \cdot z + \frac{q \cdot L}{2} \cdot z - \frac{q \cdot z^2}{2}}{E \cdot J_{zz}} \right] \quad \text{si } a < z \leq L \end{array} \right. \quad [16]$$

Determinación de las condiciones iniciales para el sistema de ecuaciones diferenciales.

El sistema [16] es de orden dos y por esta razón necesitamos, para cada ecuación, dos condiciones iniciales. Veamos cómo hallarlas. Por un lado, la función de momento flector presenta una inflexión en el lugar exacto donde se aplica la carga “P”. Como precisamos obtener continuidad en ambos tramos de la elástica, ambas expresiones de “y” deben ser iguales, ocurriendo lo mismo con sus derivadas en “a”. Es decir,

$$\begin{cases} y_1[a] = y_2[a] \\ y_1'[a] = y_2'[a] \end{cases}$$

Por otro lado, se hace evidente que para una viga simplemente apoyada, dadas las condiciones de sustentación, para $z = 0$ y para $z = L$, la flecha es nula. Este hecho se

plantea matemáticamente así:

$$\begin{cases} y_1[0] = 0 \\ y_2[L] = 0 \end{cases}$$

Al no existir solución analítica para el sistema [16], buscaremos una solución numérica. Para ello utilizaremos el software Mathematica, el cual dispone de un comando que aplica el método de resolución numérica de Runge – Kutta de orden 4.

Los resultados teóricos obtenidos de las ecuaciones [16] serán verificados experimentalmente empleando una viga cuyos detalles se mencionan a continuación.

Ensayo de una viga

El ensayo se realizó para una viga con las siguientes características: viga simplemente apoyada sometida a una fuerza puntual, ubicada a la mitad de su longitud. Se utilizó un perfil doble “T” del 8 de un metro de longitud. El estudio se llevó a cabo en el Laboratorio de Ensayos de la Facultad de Ingeniería, empleando para ello la máquina de ensayo universal.



Figura 17: Máquina de ensayo universal

Esta máquina posee una impresora que registra las tensiones y deformaciones obtenidas punto a punto.



Figura 18: Impresora

Para representar a la fuerza puntual se utilizó un punzón de plegado como el que se ilustra a continuación, con el fin de transmitir una fuerza puntual hacia el centro de la viga:



Figura 19: Máquina de ensayo universal con punzón

La viga descansa sobre dos apoyos, de manera tal que represente la condición de sustentación de una viga simplemente apoyada. Los dos apoyos a su vez están afirmados sobre la base inferior de la máquina de ensayo universal y la fuerza es transmitida desde el cabezal superior hacia la viga a través del punzón, como se ilustra en la figura siguiente. El largo final de la viga es de $90,5\text{ cm}$, debido a que su luz disminuye a causa de los apoyos.



Figura 20: Viga sobre sobre sus dos apoyos.

Hipótesis previas al ensayo

La ecuación diferencial de la curva elástica sólo contempla deformaciones elásticas, es decir, aquellas en las que, luego de retirar las solicitaciones externas, la viga recupera su dimensión y forma inicial. En relación a lo dicho previamente, se aplicará una fuerza que generará este tipo de deformaciones, razón por la cual se empleará una fuerza máxima de 200 Kgf.

En la figura siguiente se puede observar los efectos de deformación permanente que se produce sobre el alma y ala de un perfil doble “T” y “C” respectivamente, cuando se logró una deformación permanente por sobrecargas.



Figura 21: Deformaciones permanentes en vigas.

Instrumento de medición

Para llevar a cabo la medición de la deformación elástica, se utilizó un comparador marca: Baty con una apreciación de 0,001 mm.



Figura 22: Comparador milesimal.

A fin de medir la flecha de la viga, se ha sujetado el comparador debajo de la misma como se ilustra en la siguiente figura:

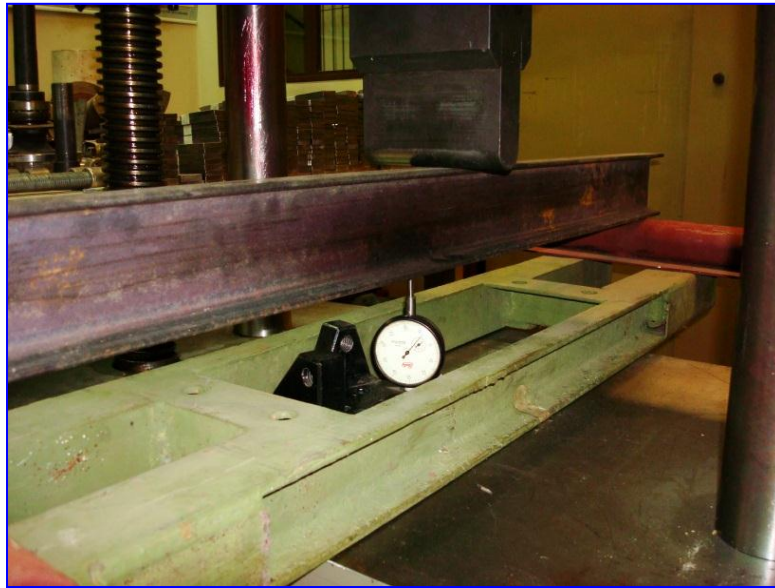


Figura 23: Comparador de medición de la flecha.

Desarrollo del ensayo

Una vez finalizada la puesta a punto de la máquina de ensayo universal se realizaron dos mediciones:

- 1) Se aplicaron dos cargas en forma consecutiva y se obtuvieron los siguientes resultados:

Carga aplicada [Kgf]	Lectura del comparador [mm]
100 Kgf	0,3 mm
200 Kgf	0,55 mm

De la impresora de la máquina de ensayo universal, se obtuvo el siguiente gráfico:

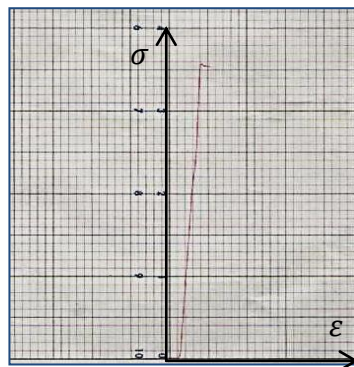


Figura 24: Gráfico tensión - deformación

Del grafico anterior con una escala de 0,6 Tf se observa que, cumpliendo con la Ley de Hooke, las deformaciones son proporcionales a las tensiones aplicadas.

- 2) Se aplicó una sola carga en forma consecutiva y se observó el siguiente resultado:

Carga aplicada [Kgf]	Lectura del comparador [mm]
200 Kgf	0,6 mm

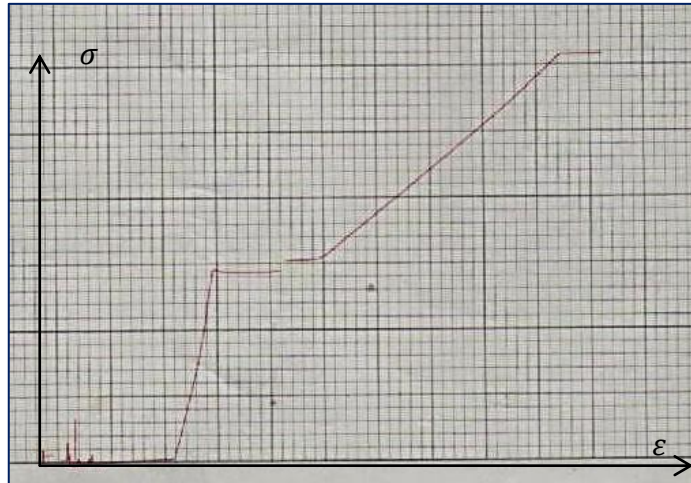


Figura 25: Gráfico tensión - deformación

En comparación con el gráfico anterior, también se observa que las tensiones son proporcionales a las deformaciones. Es importante destacar que las pendientes de ambos gráficos son diferentes, esto se debe a que el único parámetro que se ha diferido el ensayo es la velocidad de aplicación de la fuerza.

Comparación contra un modelo simplificado

Del estudio de la ecuación diferencial de la elástica simplificada para una viga simplemente apoyada y con una carga puntual en el medio de su luz, se obtiene que la flecha máxima es:

$$f_{\text{máx}} = \frac{P \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot J_{zz}} = \frac{200 \text{ Kgf} \cdot (90,5 \text{ cm})^3}{48 \cdot 2100000 \frac{\text{Kgf}}{\text{cm}^2} \cdot 77,8 \text{ cm}^4} = 0,0189 \text{ cm} = 0,189 \text{ mm}$$

Del presente estudio realizado, se grafica dicha situación mediante una simulación:

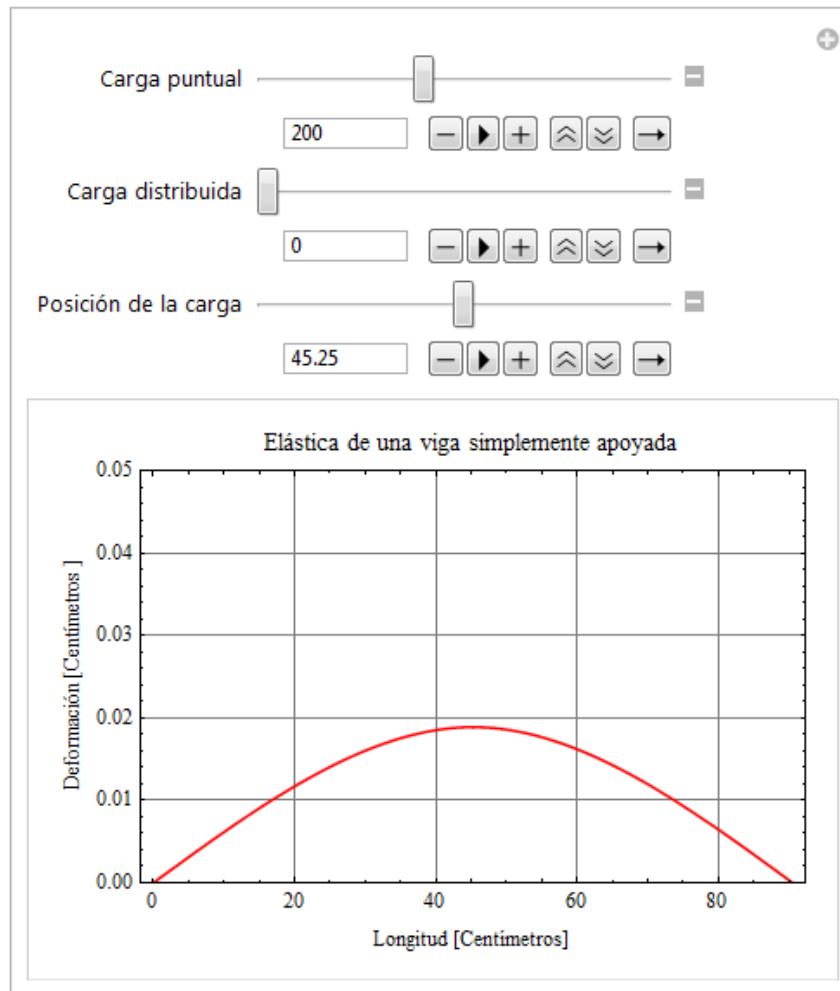


Figura 26: Simulación en el plano de la elástica de una viga

De la figura 26 se observa que la flecha máxima se produce en la mitad de la luz de la viga y que su valor exacto es de $0,018903\text{cm} = 0,18903\text{mm}$. También se deduce que para flechas muy pequeñas como la del presente caso, el estudio de la ecuación diferencial de la elástica coincide con el de la ecuación simplificada de la elástica. Debido a las imperfecciones del instrumento de medición, se registró una diferencia de 3 décimas de milímetro entre el estudio teórico y la correspondiente simulación.

Simulación

La simulación fue elaborada con el Software Wolfram Mathematica 8.0.4 para un perfil doble “T”, a igualdad de condiciones que las del laboratorio. Se utilizaron los siguientes controladores:

Carga puntual: con valores entre 0 y 500 Kgf.

Carga distribuida: con valores entre 0 y 500 Kgf.

Posición de la carga: entre 0.001 y 89.9 cm.

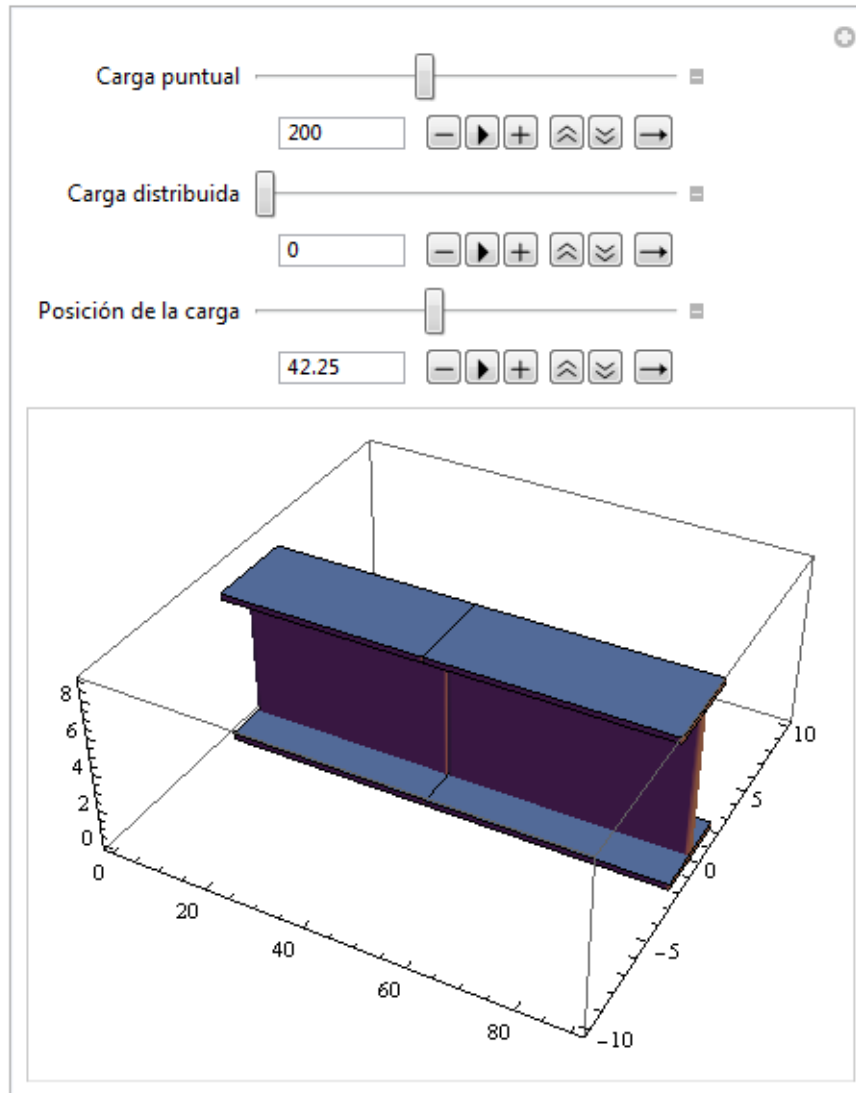


Figura 27: Simulación en el espacio del perfil

Caso de una viga empotrada

Consideremos una viga que consta de un empotramiento, tal como se muestra en la siguiente figura:

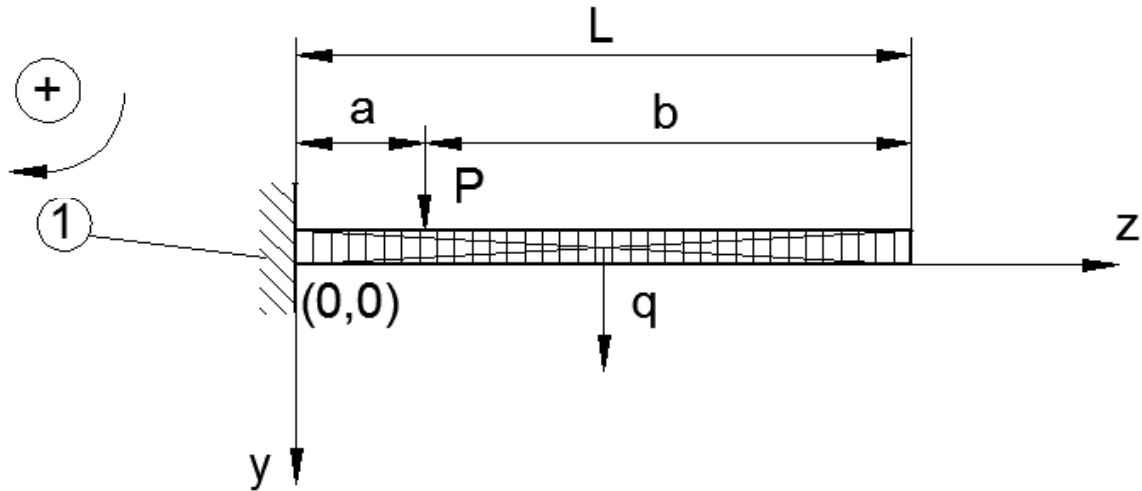


Figura 28: Viga con una carga distribuida y una carga puntual móvil.

Referencias:

1 = Empotramiento.

(0,0) = Origen de coordenadas.

P = Carga puntual móvil.

q = Carga distribuida.

L = Longitud total de la viga.

a = Distancia desde el origen de coordenadas hasta " P ".

b = Distancia desde el " P " hasta el final de la viga.

Al producirse una inflexión a una distancia " a ", debido a que allí se aplica la fuerza " P ", el momento flexor estará formado por dos funciones. Por esta razón resolveremos la ecuación diferencial [1] planteando tres funciones de momento flexor.

La primera de ellas será para la fuerza " P ", considerando los tramos $0 < z \leq a$ y $a < z \leq L$. Llamaremos M_3 al momento flexor del primer tramo y M_4 al del segundo. La tercera función de momento flexor será para la carga distribuida, considerando $0 < z \leq L$. Posteriormente aplicaremos el Método de Superposición.

Nuevamente, para analizar esta situación, consideraremos los siguientes casos:

Primer Caso:

Se considera una sola fuerza actuante: la fuerza puntual “P”, para $0 < z \leq a$.

Primeramente calcularemos las resultantes de cada uno de los apoyos, planteando las tres ecuaciones de la estática, según se muestra en el siguiente diagrama:

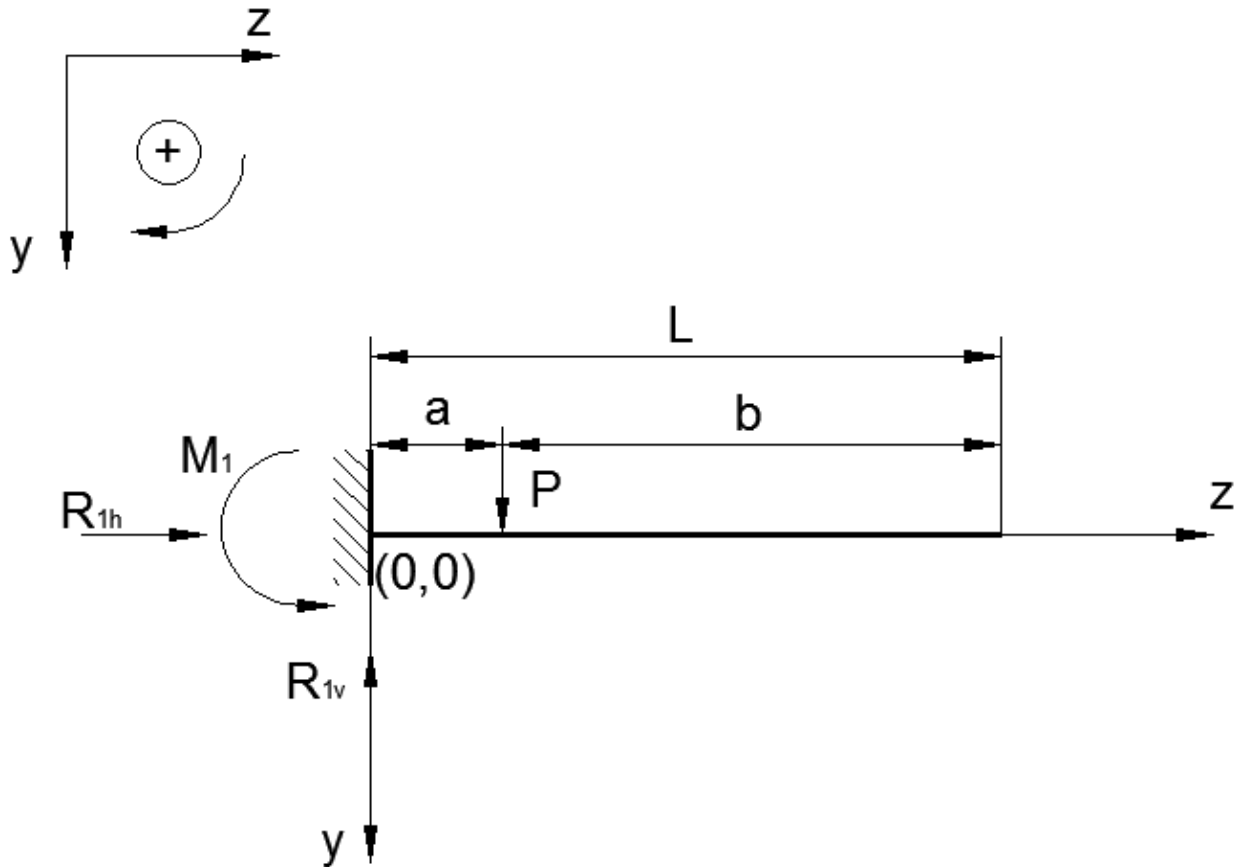


Figura 29: Viga con las reacciones en su empotramiento.

De este modo,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n F_{z_i} = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{y_i} = 0 \\ \sum_{i=1}^n M f_i = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^1 F_{z_i} = R_{1h} = 0 \\ \sum_{i=1}^4 F_{y_i} = P - R_{1v} = 0 \\ \sum_{i=1}^3 M f_{i(0,0)} = P \cdot a - M_1 = 0 \end{array} \right.$$

En consecuencia:

$$\begin{cases} R_{1h} = 0 \\ R_{1v} = P \\ M_1 = P \cdot a \end{cases}$$

La siguiente figura ilustra la viga con las resultantes de sus apoyos:

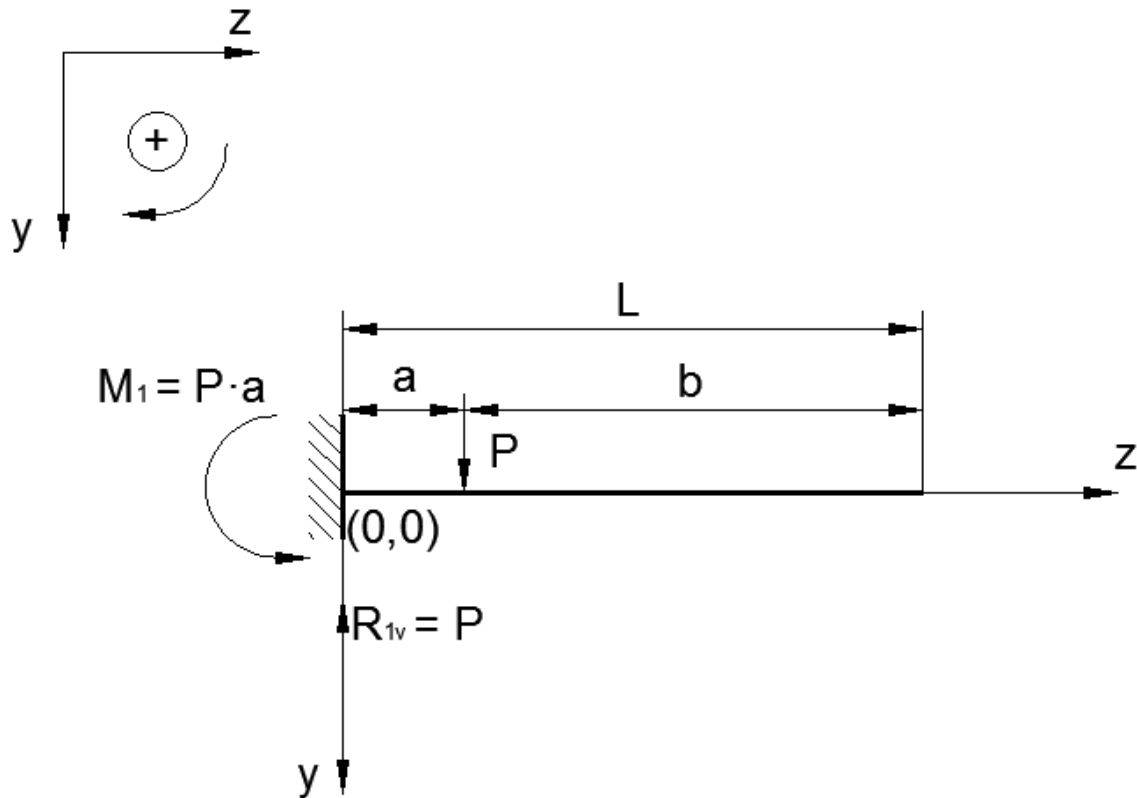


Figura 30: Viga con las resultantes de sus apoyos.

En este caso la fuerza actuante es una fuerza puntual “ P ” de valor $P(z) = 0$. El esfuerzo cortante será:

$$Q(z) = - \int P(z) \cdot dz = - \int 0 \cdot dz = -C_7 \quad [16]$$

Para hallar la constante C_7 necesitaremos una condición inicial que podrá obtenerse a partir del gráfico de la figura 31.

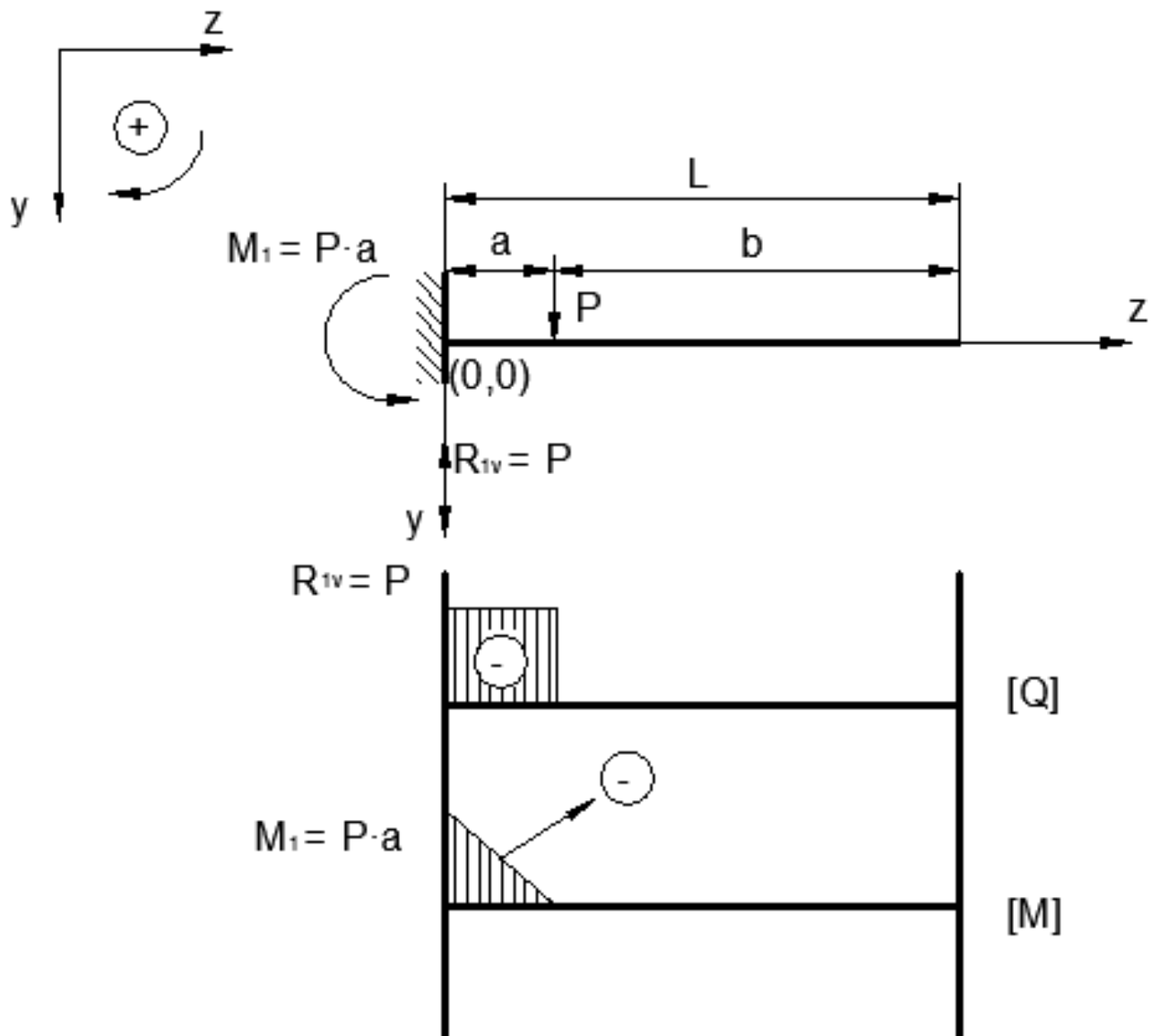


Figura 31: Viga con sus respectivos diagramas.

Observando la figura 31, se deduce que para: $z = 0$, $Q(z) = -P$.

En consecuencia:

$$Q(0) = -C_7 = -P \rightarrow C_7 = P \quad [16]$$

De este modo,

$$Q(z) = P$$

Por otro lado,

$$M(z) = \int Q(z) \cdot dz = \int P \, dz$$

Con lo cual

$$M(z) = P \cdot z + C_8 \quad [17]$$

Para hallar la constante C_8 recurrimos nuevamente a la figura 31. Se deduce que para $z = 0$, $M(z) = -P \cdot a$. Luego,

$$M(0) = P \cdot 0 + C_8 = -P \cdot a$$

Entonces,

$$C_8 = -P \cdot a$$

$M(z) = P \cdot z - P \cdot a$

 [18]

Segundo Caso:

Se considera una sola fuerza actuante: la carga distribuida, para $0 < z \leq L$.

El diagrama correspondiente se muestra a continuación:

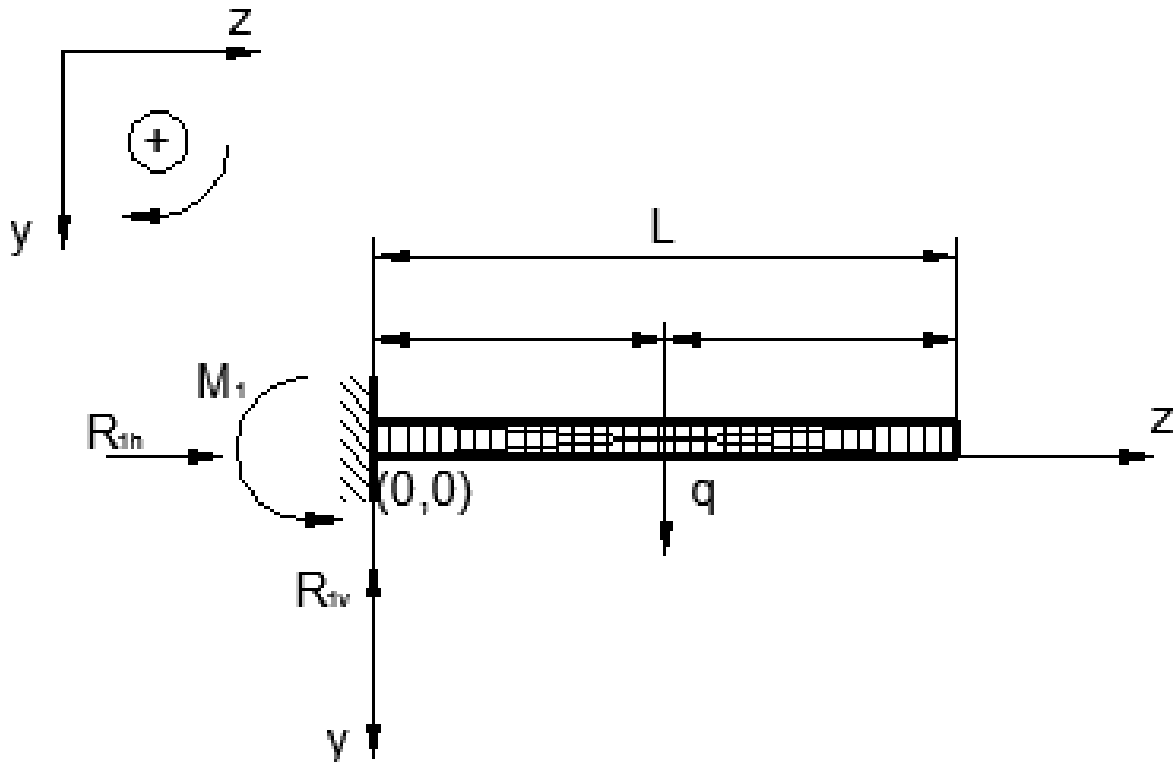


Figura 32: Viga con las reacciones en sus apoyos.

Para hallar la expresión de función que forma la curva del momento, calcularemos primeramente las resultantes del empotramiento. Para ello plantearemos las tres ecuaciones de la estática a partir de las resultantes de la figura 32. De este modo,

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{z_i} = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{y_i} = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_{f_i} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^1 F_{z_i} = R_{1h} = 0 \\ \sum_{i=1}^2 F_{y_i} = q \cdot L - R_{1v} = 0 \\ \sum_{i=1}^2 M_{f_{i(0,0)}} = -M_1 + q \cdot L \cdot \frac{L}{2} = 0 \end{cases}$$

En consecuencia:

$$\begin{cases} R_{1h} = 0 \\ R_{1v} = q \cdot L \\ R_{2v} = M_1 = q \cdot \frac{L^2}{2} \end{cases}$$

La siguiente figura muestra la viga con las resultantes en sus apoyos:

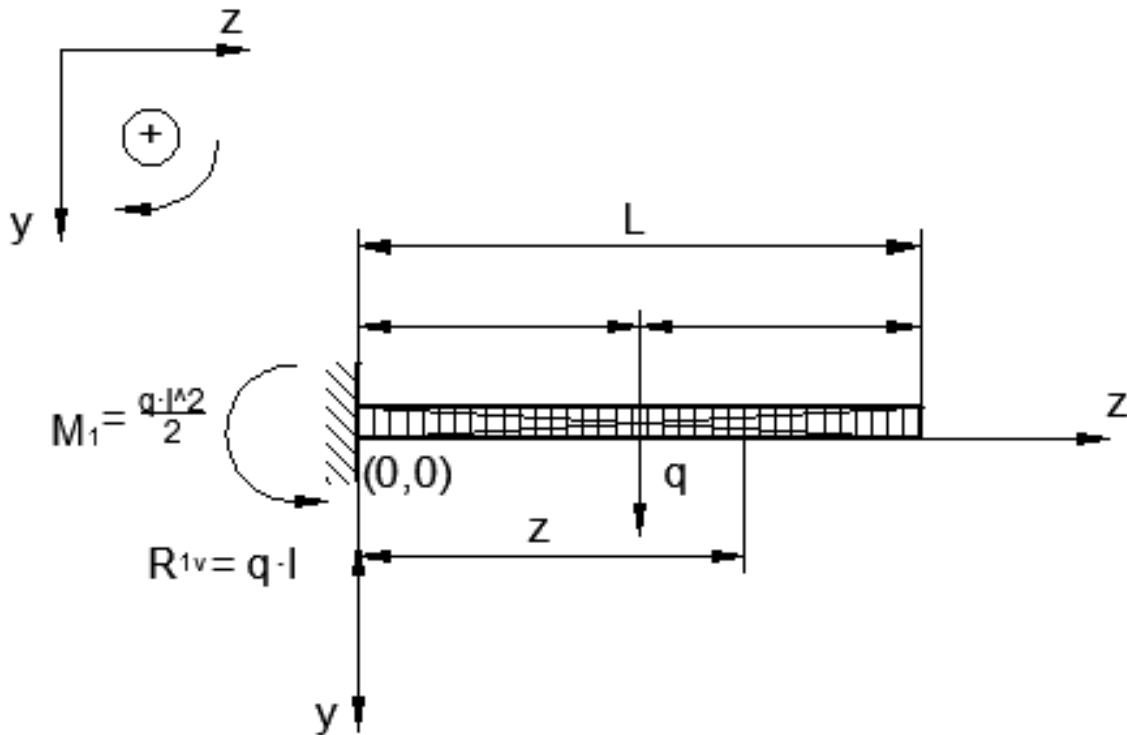


Figura 33: Viga con las resultantes en sus apoyos.

En este caso la fuerza actuante es una carga constante “ q ” de valor $P(z) = q$. El esfuerzo cortante será:

$$Q(z) = - \int P(z) \cdot dz = - \int q \cdot dz = -q \cdot z - C_9 \quad [19]$$

Para hallar la constante C_9 , observamos el gráfico teórico de la figura 34. Se deduce que para $z = 0$, $Q(z) = -q \cdot L$

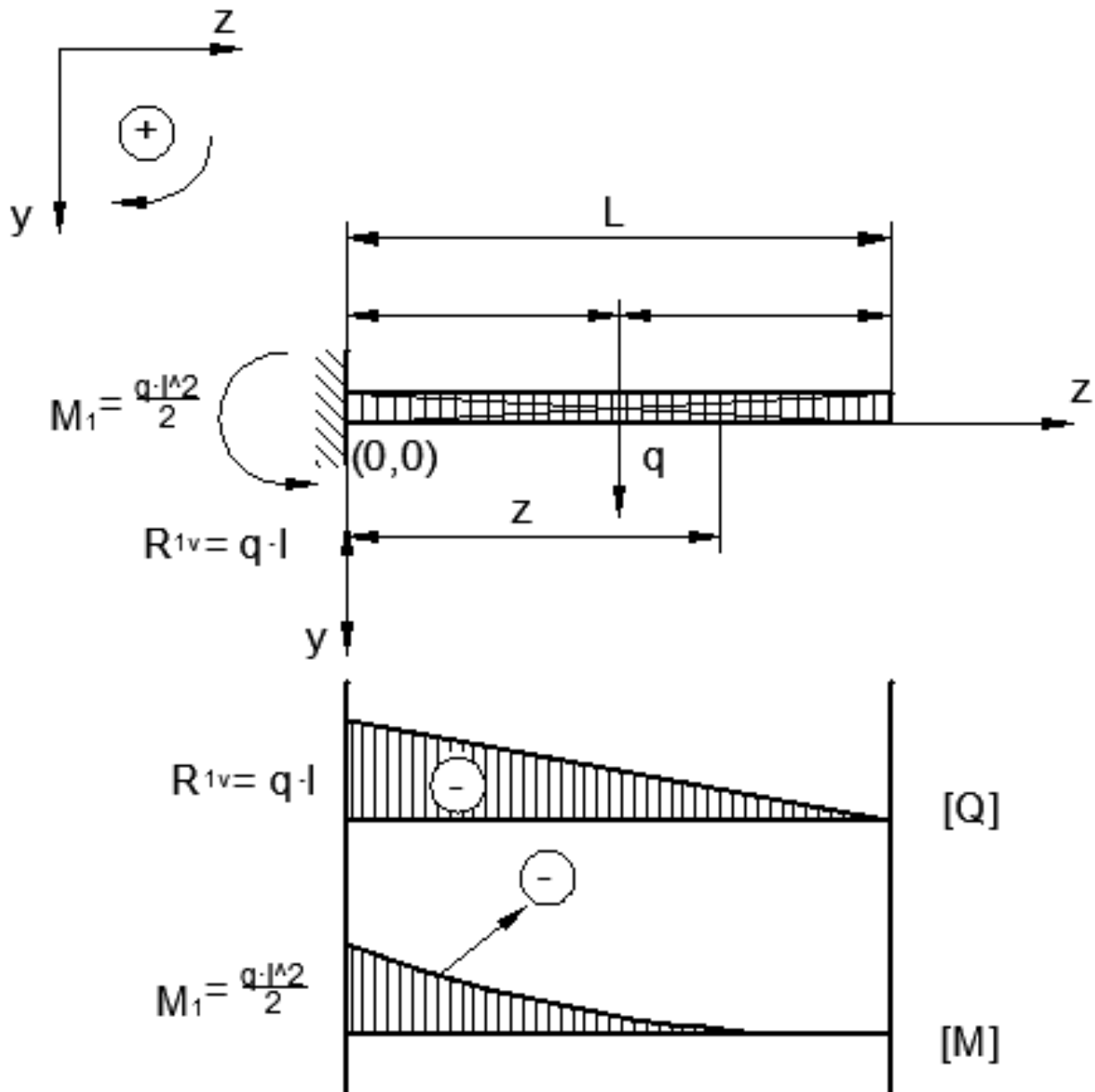


Figura 34: Viga con sus respectivos diagramas.

En consecuencia:

$$Q(0) = -q \cdot 0 - C_9 = -q \cdot L \rightarrow C_9 = q \cdot L$$

De este modo,

$$Q(z) = -q \cdot z - q \cdot L \quad [20]$$

Al integrar esta última ecuación resulta

$$M(z) = \int Q(z) \cdot dz = \int -q \cdot z - q \cdot L \, dz$$

Por lo tanto,

$$M(z) = -\frac{q \cdot z^2}{2} + q \cdot L \cdot z + C_{10} \quad [21]$$

El valor de la constante C_{10} se obtiene observando la figura 34, ya que para $z = L$, $M(z) = 0$. Luego,

$$M(0) = -\frac{q \cdot L^2}{2} + q \cdot L \cdot L + C_{10} = 0$$

En consecuencia,

$$C_{10} = \frac{q \cdot L^2}{2} - q \cdot L^2 = -\frac{q \cdot L^2}{2}$$

De donde resulta

$$M(z) = -\frac{q \cdot z^2}{2} + q \cdot L \cdot z - \frac{q \cdot L^2}{2} \quad [22]$$

Esta ecuación, como ya se mencionó, es válida para $0 < z \leq L$, debido a su continuidad.

Ahora bien, a partir de la figura 29, se obtuvo que la función que define al momento flexor está definida por:

$$\begin{cases} M(z) = P \cdot z - P \cdot a & \text{Si } 0 < z \leq a \\ M(z) = 0 & \text{Si } a < z \leq L \end{cases}$$

Luego, aplicando el Método de Superposición, es decir, sumando [18] con [22] para el primer tramo y [22] para el segundo tramo se obtiene:

$$\begin{cases} M_3(z) = P \cdot z - P \cdot a - \frac{q \cdot z^2}{2} + q \cdot L \cdot z - \frac{q \cdot L^2}{2} \\ M_4(z) = -\frac{q \cdot z^2}{2} + q \cdot L \cdot z - \frac{q \cdot L^2}{2} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Si } 0 < z \leq a \\ \text{Si } a < z \leq L \end{array}$$

Por otro lado, la ecuación diferencial de la elástica para una viga empotrada es la siguiente:

$$\begin{cases} \frac{\frac{d^2 y_3}{dz^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy_3}{dz}\right)^2\right]^3}} = -\frac{M_3}{E \cdot J_{zz}} & \text{si } 0 < z \leq a \quad [23] \\ \frac{\frac{d^2 y_4}{dz^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy_4}{dz}\right)^2\right]^3}} = -\frac{M_4}{E \cdot J_{zz}} & \text{si } a < z < L \quad [24] \end{cases}$$

Reemplazando las funciones de los momentos flexores correspondientes a cada tramo en [23] y [24], resulta el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{\frac{d^2 y_3}{dz^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy_3}{dz}\right)^2\right]^3}} = -\left[\frac{P \cdot z - P \cdot a - \frac{q \cdot z^2}{2} + q \cdot L \cdot z - \frac{q \cdot L^2}{2}}{E \cdot J_{zz}}\right] & \text{si } 0 < z \leq a \\ \frac{\frac{d^2 y_4}{dz^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy_4}{dz}\right)^2\right]^3}} = -\left[\frac{-\frac{q \cdot z^2}{2} + q \cdot L \cdot z - \frac{q \cdot L^2}{2}}{E \cdot J_{zz}}\right] & \text{si } a < z \leq L \end{cases}$$

Determinación de las condiciones iniciales para el sistema de ecuaciones diferenciales:

El sistema anterior es de orden dos y por esta razón necesitamos, para cada ecuación, dos condiciones iniciales. Para hallarlas, observemos que la función de momento flector presenta una inflexión en el lugar exacto donde se aplica la carga “P”. Como precisamos obtener continuidad en ambos tramos de la elástica, ambas expresiones de “y” deben ser iguales, ocurriendo lo mismo con sus derivadas en “a”. De ello se deduce

$$\begin{cases} y_3[a] = y_4[a] \\ y_3'[a] = y_4'[a] \end{cases}$$

Por otro lado, resulta evidente que para una viga empotrada, dadas las condiciones de sustentación, para $z = 0$ la flecha es nula, es decir:

$$\begin{cases} y_3[0] = 0 \\ y_3'[0] = 0 \end{cases}$$

Nuevamente, como no existe solución analítica de dicha ecuación diferencial, se hallará una solución numérica utilizando el software Mathematica.

Simulación:

La simulación fue llevada a cabo mediante el Software Wolfram Mathematica 8.0.4 para un perfil doble “T”, con la sustentación de empotramiento. Con la simulación en el plano, es posible medir la longitud de la flecha.

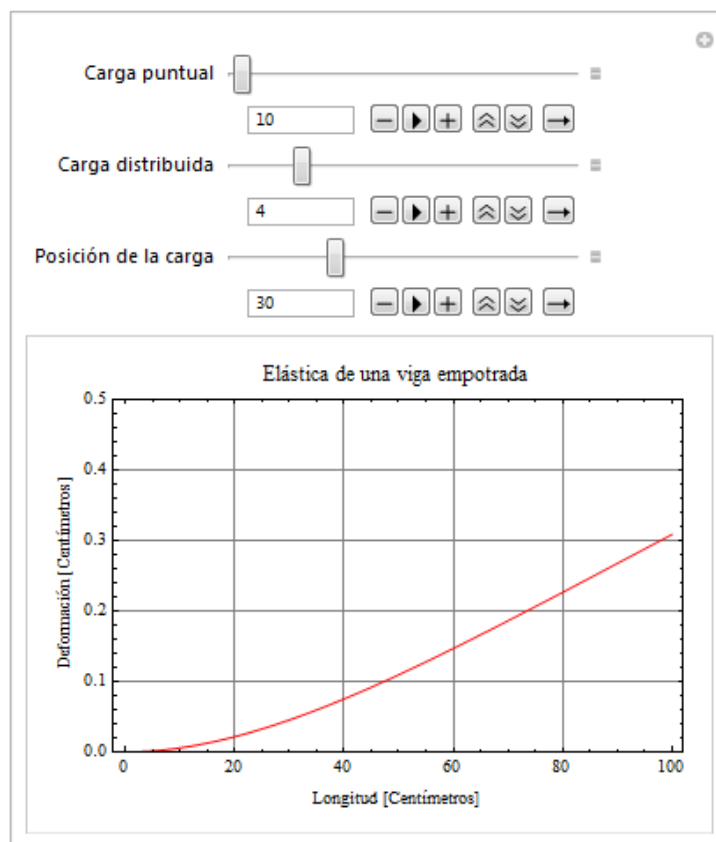


Figura 35: Simulación en el plano de la elástica de una viga empotrada

Se utilizaron los siguientes controladores:

Carga puntual: con valores entre 0 y 500 Kgf.

Carga distribuida: con valores entre 0 y 20 Kgf.

Posición de la carga: entre 0.001 y 99.9 cm.

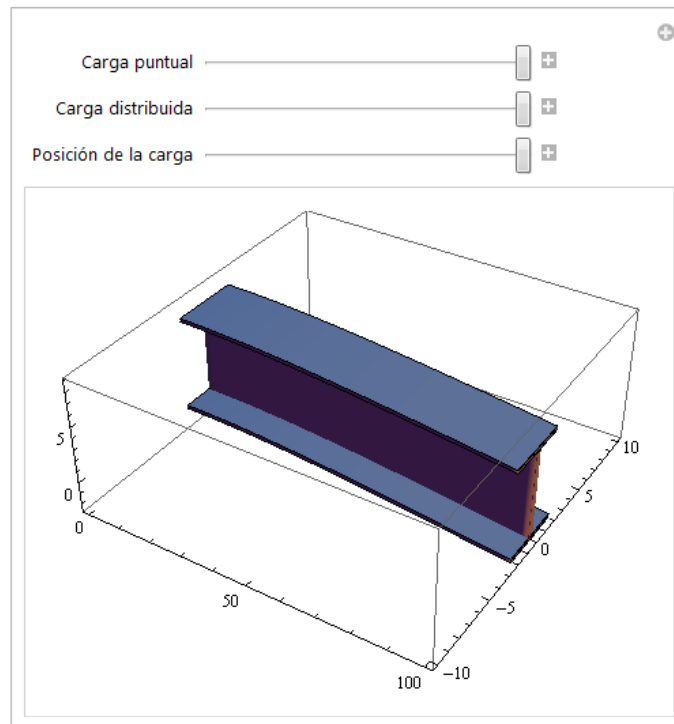


Figura 36: Simulación en el espacio del perfil

Tabla de propiedades de un perfil doble “T” del 8:

De la siguiente tabla, obtenida de la página web del Inti, se extrajeron los datos necesarios de un perfil doble “T” del 80 para obtener la simulación:

Designación	Dimensiones			$J_x = J_{zz}$
	d	b_f	t_w	
	[mm]			$[\text{cm}^4]$
80	80	42	5,9	77,8

Tabla 1: Propiedades de un perfil

Conclusiones

Se concluye que una viga simplemente apoyada se ve favorecida por la sustentación, logrando que la longitud de la flecha no sea de gran tamaño. También se concluye que, para una viga empotrada, la flecha en el extremo opuesto resulta desfavorecida en comparación con la sustentación de simple apoyo.

Para estudiar estos dos casos de vigas, se aplicaron los conocimientos de las siguientes asignaturas: Materiales de Ingeniería I y II, Estabilidad I y II y para sus soluciones la asignatura Análisis Matemático III. Debido a que las ecuaciones diferenciales no poseen solución exacta, fue necesario investigar sobre soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales como es el método “*Runge – Kutta*”, el cual posee una amplia aplicación en ecuaciones que se presentan en diversas situaciones de la ingeniería. Para llevar a cabo la simulación, se realizó un minucioso análisis de la situación y un estudio del software correspondiente. En este campo se destacan las siguientes conclusiones:

- A través de un estudio de simulación, se puede estudiar el efecto de cambios internos y externos del sistema, al hacer alteraciones en el modelo del sistema y observando los efectos de esas alteraciones en el comportamiento del mismo.
- Una observación detallada del fenómeno que se está simulando puede conducir a un mejor entendimiento del sistema asociado y, por consiguiente, a sugerir estrategias que mejoren la operación y eficiencia del mismo.
- La técnica de simulación puede ser utilizada para experimentar nuevas situaciones, sobre las cuales tiene poca o ninguna información. A través de esta experimentación se puede anticipar mejor a posibles resultados no previstos.

Apéndice

En esta sección introducimos algunos conceptos básicos que pueden resultar útiles para recordar y comprender mejor el contenido de este trabajo.

Fuerza: Podemos definir una fuerza como una influencia externa o acción que tiende a modificar el estado de reposo de un cuerpo. La fuerza es una magnitud vectorial.

Elasticidad: Suponemos que un cuerpo está formado por partículas pequeñas o moléculas entre las cuales actúan fuerzas. Estas fuerzas moleculares se oponen a cambios de forma del cuerpo cuando sobre él actúan fuerzas exteriores.

Si un sistema exterior de fuerzas se aplica al cuerpo, sus partículas se desplazan y estos desplazamientos mutuos continúan hasta que se establece el equilibrio entre el sistema exterior de fuerzas y las fuerzas interiores. Si las fuerzas causantes de la deformación disminuyen gradualmente y el cuerpo vuelve a su forma primitiva, diremos que tiene la propiedad de “elasticidad”.

Módulo de elasticidad o módulo de Young: Es un parámetro que caracteriza el comportamiento previamente descripto (elasticidad) para los diversos materiales. Para un material elástico e isótropo (es decir, que posee las mismas características en todas sus direcciones), el módulo de Young posee el mismo valor independientemente del esfuerzo aplicado, siempre que no exceda un valor máximo denominado límite elástico. Este comportamiento fue observado y estudiado por el científico inglés Thomas Young. El módulo de elasticidad lo denotaremos con la letra “*E*”. La siguiente tabla nos indicará los valores del módulo de elasticidad para distintos materiales:

Material	$E \left[\frac{Kgf}{Cm^2} \right]$
Aceros al Carbono, de 0,15 a 0,25 por ciento de Carbono	$2 \cdot 10^6$
Aluminio	$7 \cdot 10^5$
Cobre	$1,1 \cdot 10^6$
Madera	$1 \cdot 10^5$

Ley de Hooke: Consideremos una barra cargada en uno de sus extremos, tal como lo muestra la siguiente figura. Bajo la acción de esta carga la barra se estira con cierta longitud. Cuando la carga disminuye, el alargamiento de la barra disminuye también y el extremo cargado se desplaza hacia arriba.

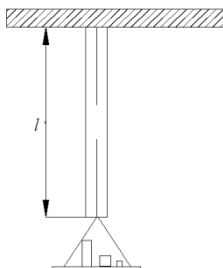


Figura 1: Barra sometida a un esfuerzo de tracción

Experimentos realizados sobre barras sometidas a solicitaciones de tracción han hecho ver que, entre ciertos límites, el alargamiento es proporcional a la solicitación externa. Esta sencilla relación lineal entre fuerza y deformación fue enunciada por primera vez por el investigador inglés Robert Hooke en 1678 y lleva su nombre.

La ley de Hooke nos dice que el alargamiento de una barra es proporcional a la solicitación a la cual es sometida, e inversamente proporcional a la sección de la barra y al módulo de elasticidad. Es decir,

$$\delta = \frac{P \cdot l}{A \cdot E}$$

Donde:

P = Fuerza $[Kg]$

l = Longitud de la barra $[Cm]$

A = Sección de la barra $[Cm^2]$

δ = Alargamiento total de la barra $[Cm]$

E = Constante elástica del material. $\left[\frac{Kgf}{Cm^2} \right]$

La fuerza por unidad de sección la podemos escribir de la siguiente forma:

$$\sigma = \frac{P}{A} \left[\frac{Kg}{Cm^2} \right] \quad [1]$$

El alargamiento de la barra por unidad de longitud se determinará por:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{l} \quad [2]$$

Usando las relaciones [1] y [2], la Ley de Hooke se puede escribir de la siguiente manera:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

Esta última ecuación es muy importante, ya que permite calcular el alargamiento de un modo sencillo, en función del sigma y del módulo de elasticidad. La Ley de Hooke es muy común escribirla de esa forma. La demostración anterior se realizó para entender de forma más clara el concepto de módulo de elasticidad, en el cual:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Cuerpo rígido: Un cuerpo rígido se puede definir como aquél que no sufre deformaciones por efecto de fuerzas externas, es decir, es un sistema de partículas cuyas posiciones relativas no cambian.

Momento estático de una fuerza: Sea una fuerza P aplicada a un cuerpo rígido y un punto cualquiera O , coplanar con P y perteneciente al mismo cuerpo rígido. Definiremos como momento estático, o momento de la fuerza P respecto al punto O , al producto de la intensidad P por la distancia normal d , entre la recta de acción de P y el punto O , momento que designaremos con M . Es decir,

$$M = P \cdot D \cdot \sin[\theta] \quad [Kgm] \Rightarrow$$

$$M = P \cdot D \quad [Kgm]$$

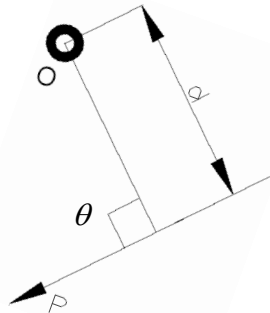


Figura 2: Momento de una fuerza

Como siempre, tomaremos un ángulo de 90° entre la recta de acción de “ P ” y la distancia “ d ”, el “ $\sin(\theta)$ ” siempre valdrá 1.

En caso de haber más de una fuerza actuando sobre un mismo cuerpo, el momento resultante será la sumatoria de momentos que produce cada una de las fuerzas actuantes:

$$M = \sum_{i=1}^n P_i \cdot D_i \quad [Kgm]$$

Momento de inercia de segundo orden: Es una propiedad geométrica de la sección transversal de elementos estructurales. Físicamente, el segundo momento de inercia está relacionado con las tensiones y deformaciones máximas que aparecen por flexión en un elemento estructural y, por tanto, junto con las propiedades del material determina la resistencia máxima de un elemento estructural bajo flexión. Se define momento de inercia de segundo orden como el producto entre cada diferencia de área y el cuadrado de la distancia al eje.

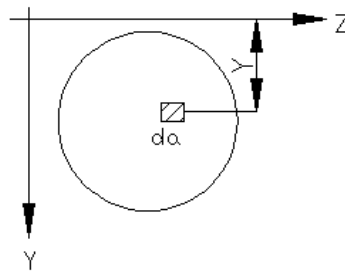


Figura 3: Área en estudio

Se lo denomina con la letra “j” y está dado por la siguiente fórmula:

$$J_z = \int_A y^2 \cdot da \quad [Cm^4]$$

Flecha de una viga: Es la distancia de deformación que experimenta la viga desde su estado normal, es decir sin carga, hasta la posición deformada por acción de una fuerza.

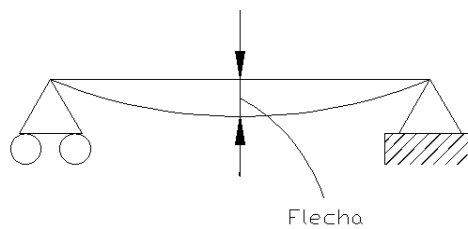


Figura 4: Flecha de una viga

Grados de libertad: Un cuerpo rígido en el plano tiene 3 grados de libertad:

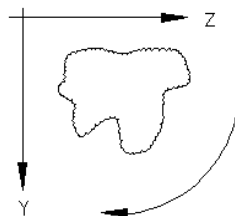


Figura 5: Cuerpo rígido en el plano

Es decir, se puede desplazar en el sentido de las abscisas (eje z), en el sentido de las ordenadas (eje y) y además puede girar.

Para garantizar la isostaticidad de un cuerpo rígido, es necesario eliminar todos sus grados de libertad. Para ello introduciremos el concepto de vínculo.

Vínculo: Es todo elemento de una estructura que restringe uno o más grados de libertad. Los hay de primer, segundo y tercer grado. La cantidad de grados del vínculo es igual a la cantidad de grados de libertad restringidos por el mismo. Sólo mencionaremos de primer, segundo y tercer grado.

Vínculo de primer grado: Como su nombre lo indica, solo restringe un grado de libertad.

Por ejemplo, el vínculo de la siguiente figura sólo permite el desplazamiento horizontal y el giro. Como restringe el movimiento vertical, **generará** una fuerza vertical (fuerza de reacción).

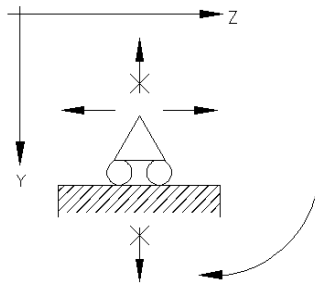


Figura 6: Vínculo de primer grado

Vínculo de segundo grado: En este caso restringe dos grados de libertad.

El vínculo de la figura siguiente sólo permite el giro. Como restringe el movimiento vertical y horizontal, **generará** dos fuerzas: una horizontal y otra vertical (fuerzas de reacción).

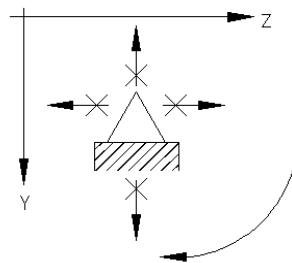


Figura 7: Vínculo de segundo grado

Vínculo de tercer grado o empotramiento: Restringe tres grados de libertad.

El vínculo de la siguiente figura restringe todos los movimientos posibles en el plano, por lo tanto **generará** tres fuerzas: una horizontal, otra vertical y un momento (fuerzas de reacción).

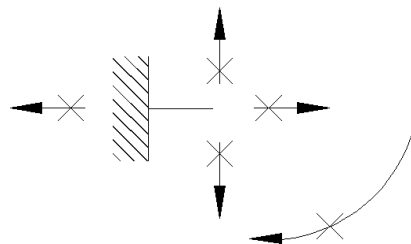


Figura 8: Vínculo de tercer grado

Tipos de carga: Sólo mencionaremos dos tipos de carga:

Carga puntual: Es la carga que se aplica en un punto y su valor es constante en el tiempo. La denotaremos con una flecha y su módulo con la letra “P”.

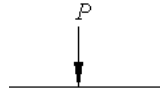


Figura 9: Carga puntual

Carga distribuida: Es la carga que se distribuye a lo largo de una sección. Generalmente se utiliza para representar pesos sobre una determinada sección, por ejemplo una carga distribuida podría representar el peso de las baldosas de un piso o también podría representar el peso propio de un determinado cuerpo. Se la denota con la letra “q” y su valor se suele expresar en kilogramos o toneladas por unidad de longitud.

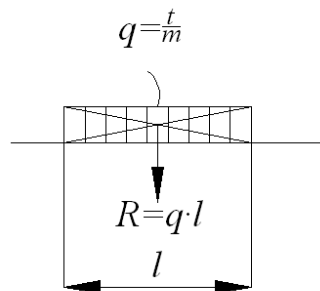


Figura 10: Carga distribuida

Su resultante siempre pasará por el centro de gravedad de la sección y su módulo será igual a la longitud de la carga distribuida por la carga unitaria.

Cálculo de reacciones: Nos será sumamente útil calcular las reacciones generadas por lo vínculos, ya que sabiendo el valor de las mismas nos permitirá calcular el valor de la flecha. El cálculo de reacciones lo explicaremos con un ejemplo.

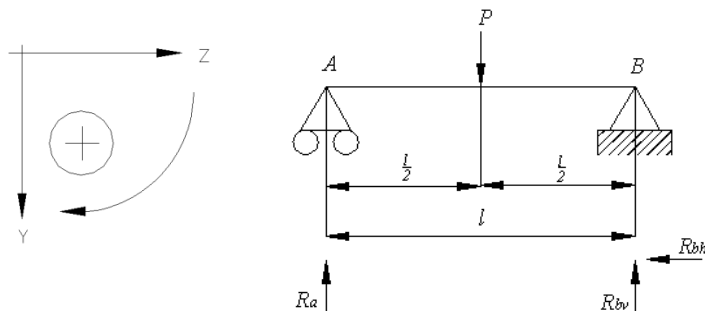


Figura 11: Viga con sus resultantes

Supongamos que deseamos calcular la resultante de las tres reacciones. A priori no sabemos ni su módulo ni su sentido de cada reacción pero conocemos su dirección, ya que previamente estudiamos las propiedades de cada vínculo. Para resolver este problema, plantearemos tres ecuaciones: dos de sumatorias de fuerzas y una de momento, las tres igualadas a cero ya que queremos asegurar sus isostaticidad.

$$\begin{cases} \sum F_z = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases}$$

El sistema se lee de la siguiente manera: sumatoria de fuerzas respecto del eje “Z” igual a cero, sumatoria de fuerzas respecto del eje “Y” igual a cero y sumatoria de momentos de cada una de las fuerzas respecto del punto “A” igual a cero.

No olvidemos nuestra convención de signos. De este modo,

$$\begin{cases} \sum F_z = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_z = -R_{bh} = 0 \\ \sum F_y = -R_a - R_{bv} + P = 0 \\ \sum M_A = P \cdot \frac{l}{2} - R_{bv} \cdot l = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_{bh} = 0 \\ R_a = -R_{bv} + P = -\frac{P}{2} + P = \frac{P}{2} \\ R_{bv} = \frac{P}{2} \end{cases}$$

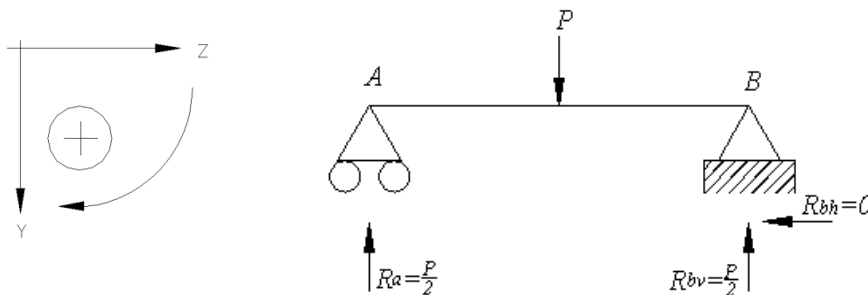


Figura 12: Viga con la reacción en sus apoyos

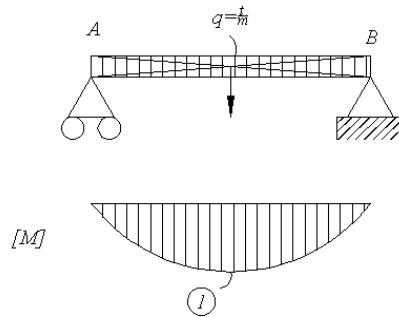
Resulta lógico que la componente de reacción horizontal sea cero, ya que no actúan fuerzas en dicho sentido. Como la fuerza “P” se encuentra a la misma distancia entre ambos vínculos, también es lógico que las reacciones tengan el mismo módulo y sentido.

Diagrama de momento flector: El diagrama de momento flector es un diagrama que indica a qué estado de flexión está sometida cada sección de la viga en estudio. El mismo puede estar representado por un polinomio, una recta o suma de ambas. Si el diagrama está representado por una sola función, sólo será necesaria una ecuación diferencial. En cambio, si el diagrama está representado por dos polinomios, serán necesarias dos ecuaciones diferenciales. Es decir, habrá tantas ecuaciones diferenciales como funciones que describan el diagrama de momento. Cada ecuación será válida a lo largo de cada función.

Los siguientes ejemplos ilustrarán los conceptos mencionados anteriormente.

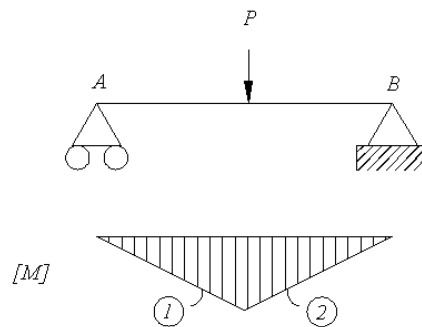
Ejemplo 1

En la figura siguiente se observa que la gráfica del diagrama de momentos está formado por la función “1”, Por lo tanto será necesaria una sola ecuación diferencial para hallar la flecha.



Ejemplo 2

En este caso se observa que el diagrama de momentos está representado por la función “1” y “2”, por lo tanto serán necesarias dos ecuaciones diferenciales para representar la flecha.



Bibliografía

- [1] Samira Abdel Masih, “*Aplicaciones del Mathematica a ecuaciones diferenciales, series y transformadas de Laplace*”. Universidad Nacional de Lomas de Zamora, 2007.
- [2] Stephen Timoshenko, “*Resistencia de materiales (tomo I)*”. Espasa – Calpe, 1954.
- [3] H. Dubbel, “*Manual del constructor de máquinas (tomo I)*”. Labor S.A, 1965.
- [4] Enrique D. Fliess, “*Estabilidad (tomos I y II)*”. Kapelusz, 1974.
- [5] Seely Fred B. M., Smith James O. A. M. “*Curso superior de resistencia de materiales*”. Nigar S.R.L., 1967.
- [6] Paul Tipler , Gene Mosca. “*Física para la ciencia y la tecnología (volumen I)*”. Reverté, 2010.
- [7] <http://www.inti.gov.ar/cirsoc/pdf/publicom/tablas.pdf>
- [8] <http://www.wikipedia.org/>
- [9] <http://scholar.google.es/>
- [10] <http://books.google.es/>

Dedicatoria:

A Dios, por regalarnos la oportunidad de disfrutar de estos hermosos momentos. A la memoria de aquellas personas que ya no están con nosotros. A nuestros padres, por ayudarnos a realizar nuestros sueños. A la Doctora Samira Abdel Masih, por su infinita paciencia, sabiduría y ayuda para que esto sea posible. Y a todos aquellos quienes se sientan felices por la conclusión de este objetivo.

.....
Fernando Lagomarsino