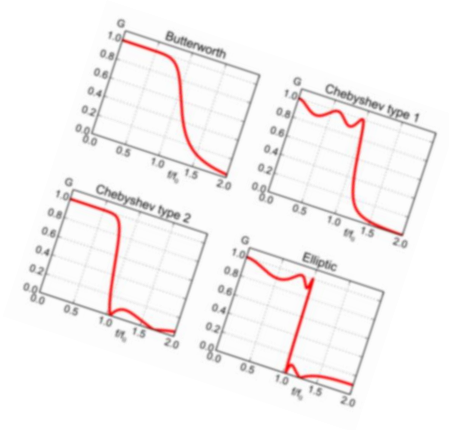
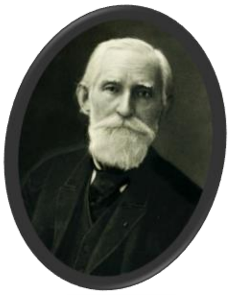
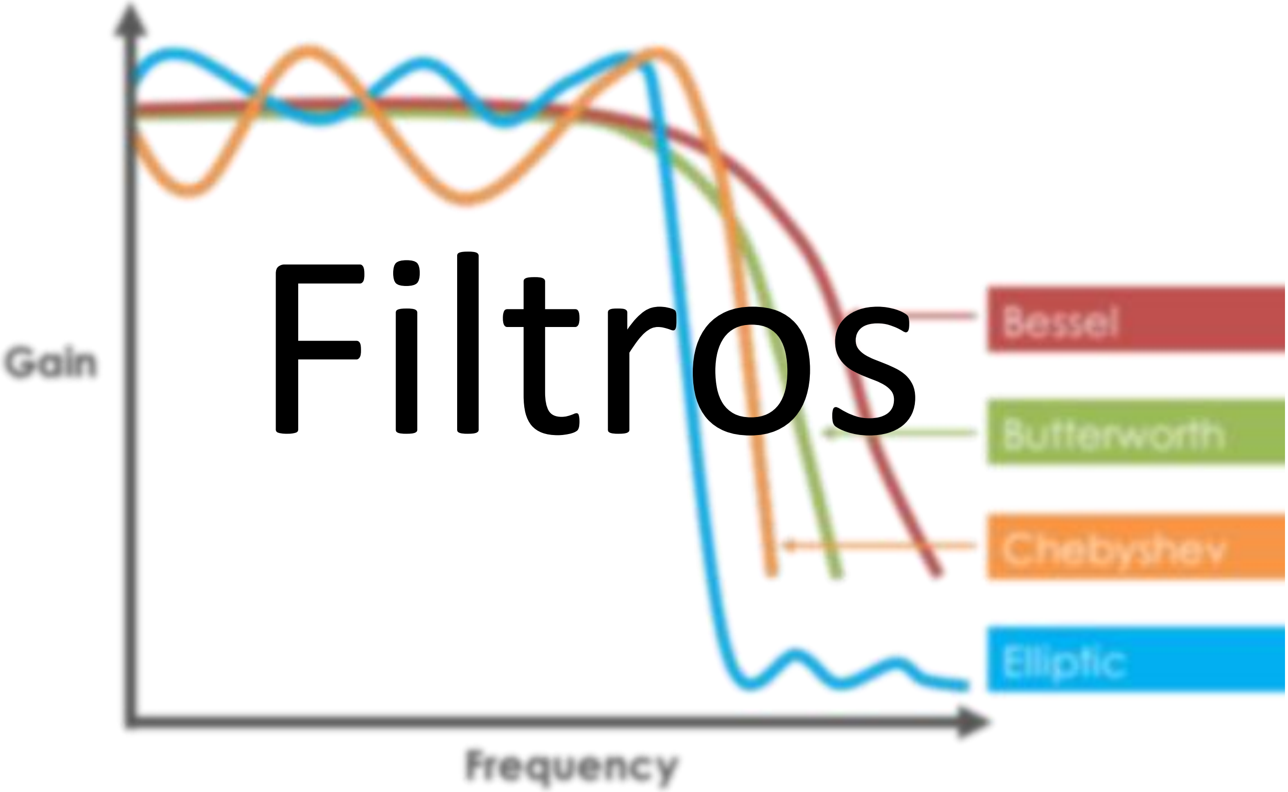




Filtros



www.intronic.com.ar

Introducción

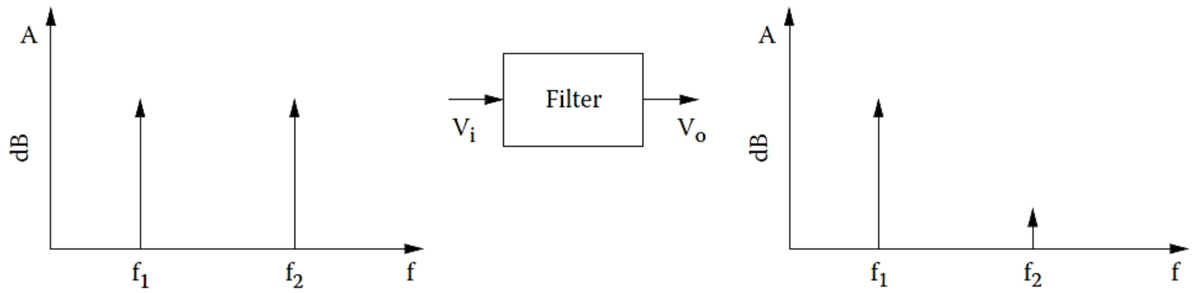
Un filtro es un circuito que está diseñado para pasar una banda específica de frecuencias mientras atenuando todas las señales fuera de esta banda. Las redes de filtrado pueden ser activos o pasivos. Los filtros pasivos contienen solo resistencias, inductores y capacitores. Los filtros activos emplean amplificadores operacionales, así como resistencias y capacitores.

La señal de salida de la mayoría de los sistemas de medición es generalmente, separable en señal y ruido. La señal es aquella parte de los datos que interesa al observador, el resto puede ser considerado ruido. Este ruido incluye datos no deseados, interferencia captada o generada en el equipo de medición. Idealmente, lo que haríamos es eliminarlo conservando la señal y esto es posible mediante una filtración adecuada.

Como los filtros se definen por sus efectos de dominio de frecuencia en las señales, hace sentido que las descripciones analíticas y gráficas más útiles de los filtros también caen bajo el dominio de la frecuencia. Así, las curvas de ganancia frente a frecuencia y fase frente a frecuencia se utilizan comúnmente para ilustrar las características del filtro, y las herramientas matemáticas utilizadas se basan en el dominio de la frecuencia.

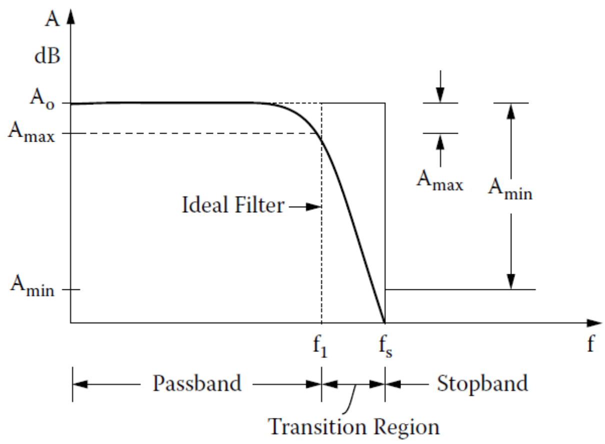
El comportamiento en el dominio de la frecuencia de un filtro se describe matemáticamente en términos de su función de transferencia. Esta es la razón de la transformada de Laplace de sus señales de entrada y salida. La función de transferencia de un filtro puede escribirse como:

$$\boxed{H(s) = \frac{V_{out(s)}}{V_{in}(s)}}$$



Tipos de filtros

El primer tipo es el filtro de paso bajo (LPF). Como era de esperar, un LPF pasa señales de baja frecuencia y rechaza señales a frecuencias por encima de la frecuencia de corte del filtro.



Orden de filtro: El orden de un filtro tiene varios efectos, está directamente relacionado al número de componentes del filtro. Por lo tanto, los filtros de orden superior ocupan más espacio y son más difíciles de diseñar. La principal ventaja de los filtros de orden superior es que tendrán pendientes de caída más pronunciadas que filtros similares de orden inferior.

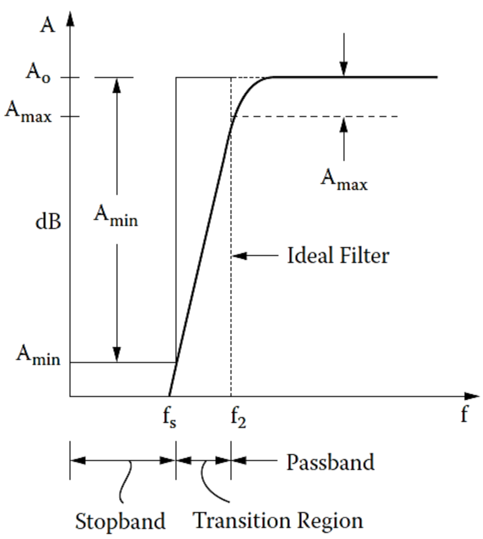
Tasa de atenuación (Rolloff rate): generalmente expresada como la cantidad de atenuación en dB para una proporción dada de frecuencias. Las unidades más comunes son “dB/década” o “dB/octava.”

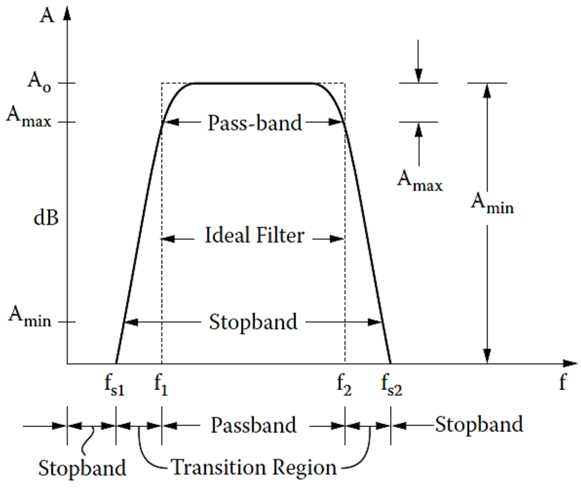
A_{max}: es el cambio máximo permitido en la ganancia dentro de la banda de paso.

A_{min}: es la atenuación mínima permitida (referida a la máxima ganancia de banda de paso) dentro de la banda suprimida.

f_1: es la frecuencia de corte o límite de banda de paso.

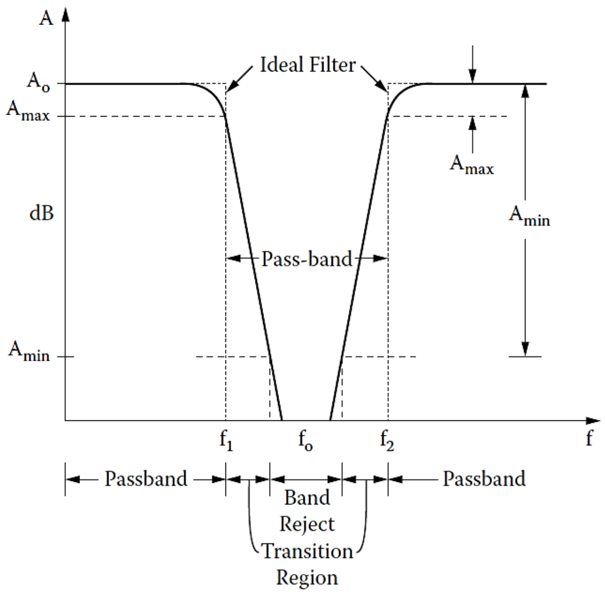
f_s: es la frecuencia en la que comienza la banda de parada.





La frecuencia central de un filtro pasa banda puede ser calculada por:

$$f_0 = \sqrt{f_1 \, f_2}$$



Factor de selectividad Q (selectivity): es la relación de la frecuencia central y el ancho de banda.

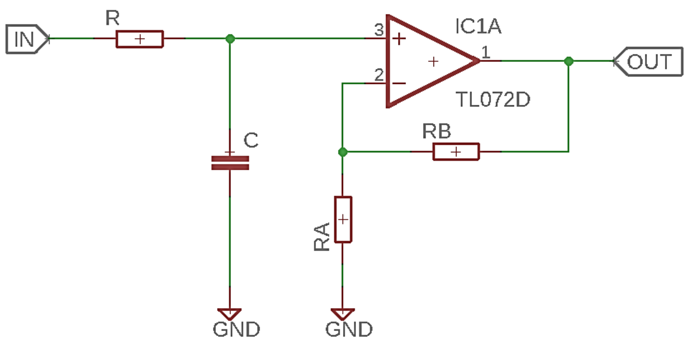
$$\boxed{Q = \frac{f_0}{BW} = \frac{f_0}{f_2 - f_1}}$$

Filtros Sallen – Key

Hay muchas formas de construir filtros activos. Un circuito de propósito general que ampliamente utilizado es el de Sallen y Key. Nos referimos al circuito de Sallen y Key porque utiliza un amplificador operacional y dos resistencias conectadas para constituir una fuente de tensión controlada. Tal configuración ofrece buena estabilidad, requiere un número mínimo de elementos, y tiene baja impedancia, lo cual es importante para filtros en cascada.

Filtro pasa bajos de primer orden

La figura siguiente muestro un filtro pasa bajos de primer orden, junto con un amplificador operacional no inversor de ganancia K.



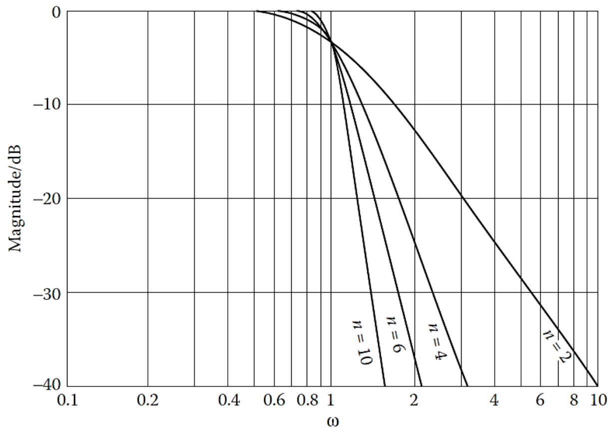
$$\boxed{H(s) = \frac{K\,\frac{1}{R\,C}}{s + \frac{1}{R\,C}}}$$

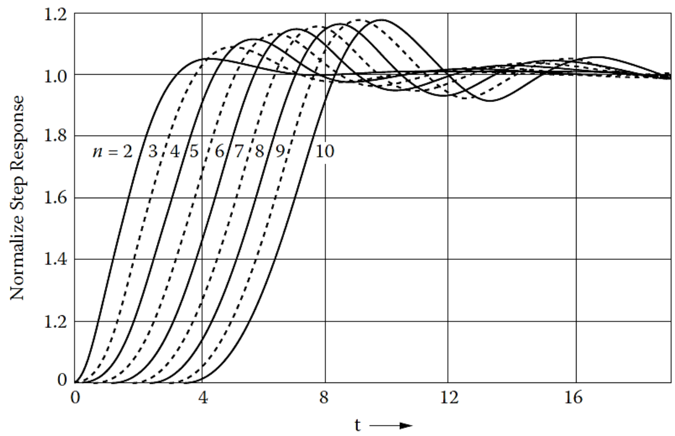
En donde:

$$K = 1 + \frac{R_B}{R_A}$$

Filtros Butterworth

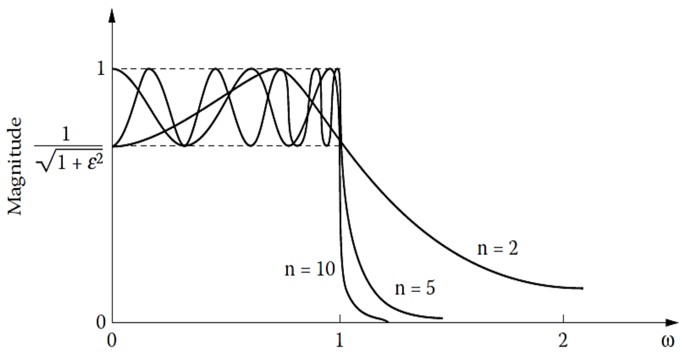
El primer filtro, y probablemente el más conocido. Presenta una banda de paso casi plana. El rolloff es de 20 dB/década o 6 dB/octava.

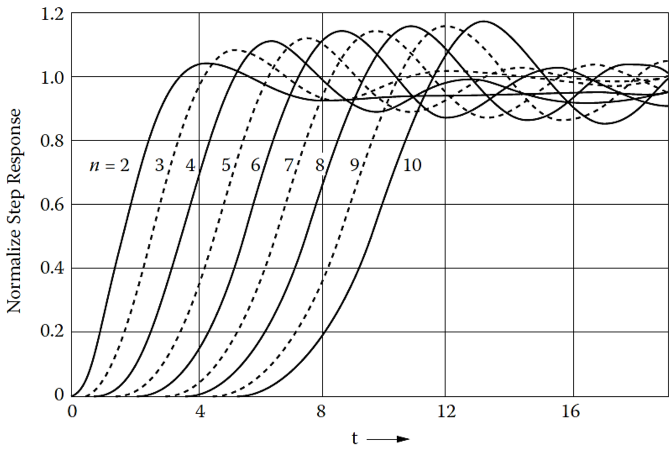




Filtros Chebyshev

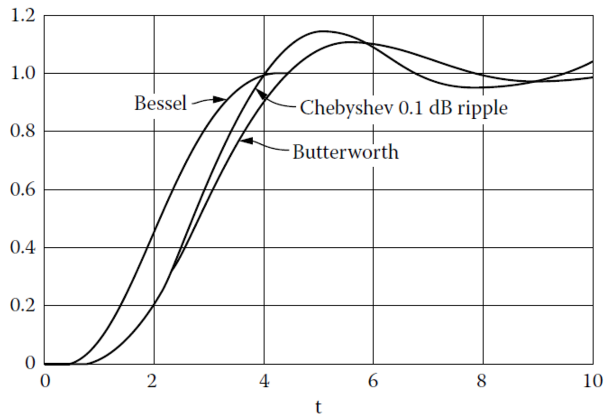
Otra aproximación importante al filtro ideal es el Chebyshev. Este tipo de filtro tendrá una oscilación en la respuesta de amplitud de banda de paso. La "cantidad de ondulación" de banda de paso es uno de los parámetros se utiliza para especificar un filtro Chebyshev. Tienen una pendiente más pronunciada en comparación con el Butterworth, pero en el a expensas de una menor "planitud" en la banda de paso y una respuesta transitoria más pobre.

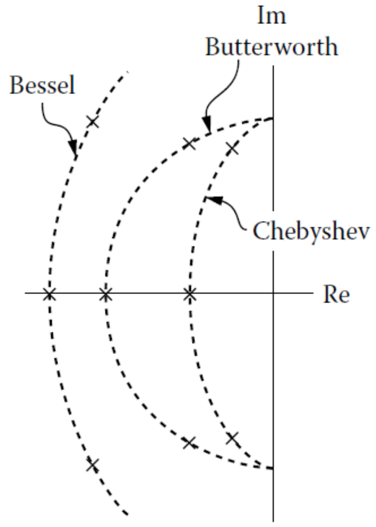




Filtros Bessel – Thomson

Hasta ahora, los filtros se han discutido principalmente en términos de sus respuestas de amplitud, que son gráficas de ganancia versus frecuencia. Todos estos filtros exhiben un cambio de fase que varía con la frecuencia. Esta es una característica esperada y normal de los filtros, pero en ciertos casos puede presentar problemas. Cuando se hace pasar un pulso rectangular un filtro Butterworth o Chebyshev, un sobre impulso (overshoot) o ring aparecerán en el pulso en la salida. Si esto no es deseable, se puede utilizar el filtro Bessel-Thomson.





Ejemplo 1:

Se desea diseñar un filtro pasa bajos Butterworth con una ganancia de 5 y una frecuencia de corte de 1 KHz

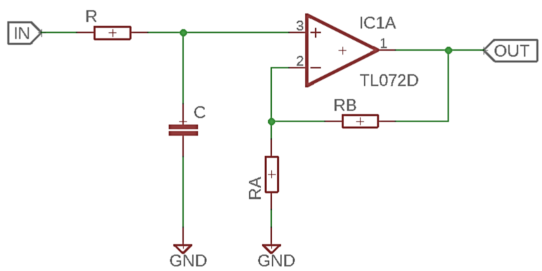
De la tabla de coeficientes de Butterworth, se obtiene:

Butterworth

n	
1	$(s+1)$
2	$(s^2+1.414s+1)$
3	$(s+1)(s^2+s+1)$
4	$(s^2+1.848s+1)(s^2+0.765s+1)$
5	$(s+1)(s^2+1.618s+1)(s^2+0.765s+1)$
6	$(s^2+1.932s+1)(s^2+1.414s+1)(s^2+0.518s+1)$
7	$(s+1)(s^2+1.802s+1)(s^2+1.247s+1)(s^2+0.445s+1)$
8	$(s^2+1.962s+1)(s^2+1.663s+1)(s^2+1.111s+1)(s^2+0.390s+1)$

Para un filtro de orden 1 (n=1): se obtiene que b=1.

$$C_n = \frac{1}{b} = 1\ F$$



$$R_{an} = 1\Omega$$

$$R_{bn} = K - 1\Omega = 5 - 1 = 4\Omega$$

Renormalización:

$$ISF = 10^4 \ \ (Factor\ de\ escala\ de\ impedancia)$$

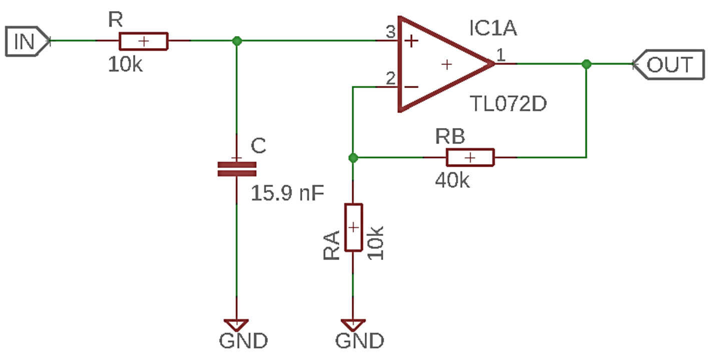
$$FSF = \frac{\omega_1}{\omega_n} = \frac{2\,\pi\,f_1}{1} = 2\,\pi\,10^3 \ \ (Factor\ de\ escala\ de\ frecuencia)$$

$$C = \frac{C_n}{ISF\ FSF} = \frac{1\ F}{2\,\pi\,10^3\,10^4} = 15.9\ nF$$

$$R = ISF\ R_n = 10^4\ 1\Omega = 10\ \text{k}\Omega$$

$$R_a = ISF\ R_{an} = 10^4\ 1\Omega = 10\ \text{k}\Omega$$

$$R_b = ISF\ R_{bn} = 10^4\ 4\Omega = 40\ \text{k}\Omega$$



Ejemplo 2:

Para el filtro del ejemplo anterior, rediseñarlo utilizando los coeficientes de Chebyshev de 1 Db. Comparar resultados.

Chebyshev 1 dB

n	
1	$(s+1.965)$
2	$(s^2+1.098s+1.103)$
3	$(s+0.494)(s^2+0.494s+0.994)$
4	$(s^2+0.674s+0.279)(s^2+0.279s+0.987)$
5	$(s+0.289)(s^2+0.468s+0.429)(s^2+0.179s+0.988)$
6	$(s^2+0.464s+0.125)(s^2+0.340s+0.558)(s^2+0.124s+0.991)$
7	$(s+0.205)(s^2+0.370s+0.230)(s^2+0.256s+0.653)(s^2+0.091s+0.993)$
8	$(s^2+0.352s+0.070)(s^2+0.298s+0.341)(s^2+0.199s+0.724)(s^2+0.070s+0.994)$

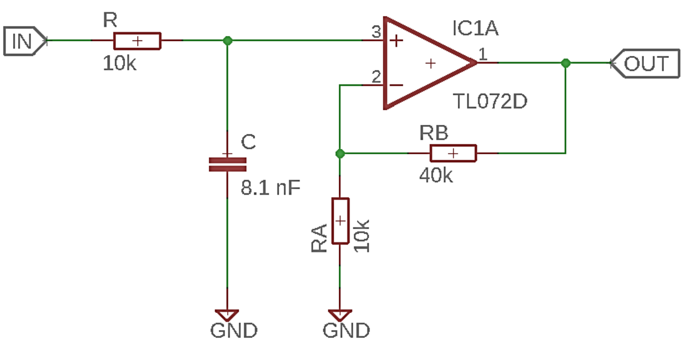
Para un filtro de orden 1 (n=1): se obtiene que b=1.965

$$C_n = \frac{1}{b} = \frac{1}{1.965} = 0.508\ F$$

$$ISF = 10^4$$

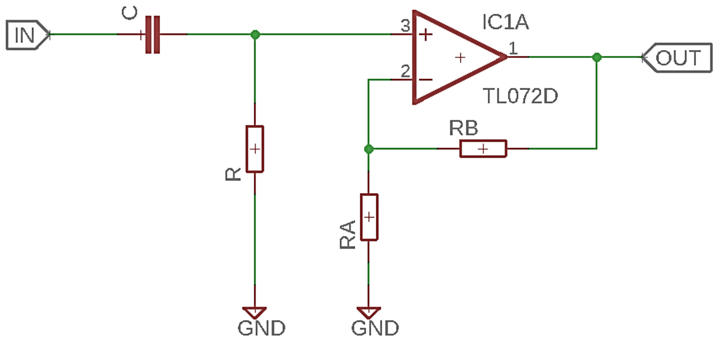
$$FSF = \frac{\omega_1}{\omega_n} = \frac{2\ \pi\ f_1}{1} = 2\ \pi\ 10^3$$

$$C = \frac{C_n}{ISF\ FSF} = \frac{0.508\ F}{2\ \pi\ 10^3\ 10^4} = 8.1\ nF$$



Filtro pasa altos de primer orden

La figura siguiente muestro un filtro pasa altos de primer orden, junto con un amplificador operacional no inversor de ganancia K.



$$\boxed{H(s) = \frac{K\ s\ R\ C}{1 + s\ R\ C}}$$

En donde:

$$K = 1 + \frac{R_B}{R_A}$$

Ejemplo 3:

Se desea diseñar un filtro pasa altos Butterworth con una ganancia de 5 a una frecuencia de corte de 100 Hz

Para un filtro de orden 1 (n=1): se obtiene que b=1.

$$C_n = \frac{1}{b} = 1\ F$$

$$R_{an} = 1\Omega$$

$$R_{bn} = K - 1\Omega = 5 - 1 = 4\Omega$$

Renormalización:

$$ISF = 10^4$$

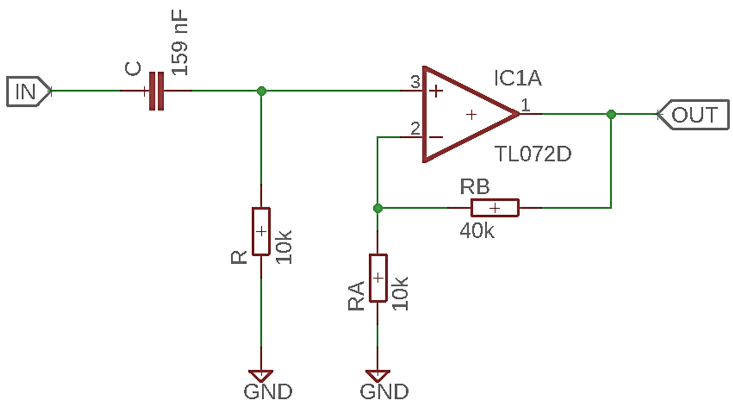
$$FSF = \frac{\omega_1}{\omega_n} = \frac{2\,\pi\,f_1}{1} = 2\,\pi\,10^2 = 200\,\pi$$

$$C = \frac{C_n}{ISF\ FSF} = \frac{1\ F}{200\,\pi\,10^4} = 159.1\ nF$$

$$R = ISF\ R_n = 10^4\ 1\Omega = 10\ \mathrm{k}\Omega$$

$$R_a = ISF\ R_{an} = 10^4\ 1\Omega = 10\ \mathrm{k}\Omega$$

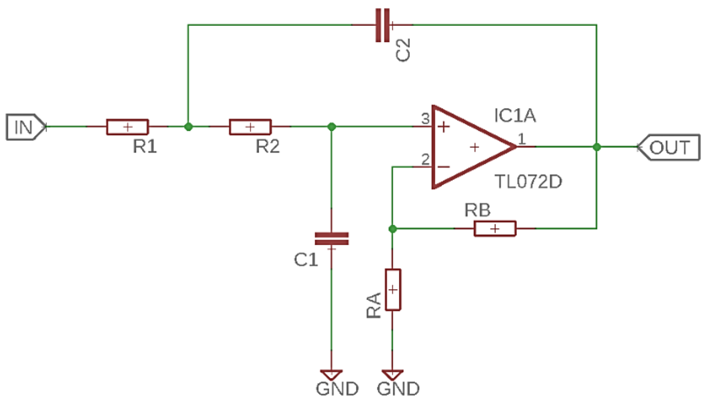
$$R_b = ISF\ R_{bn} = 10^4\ 4\Omega = 40\ \mathrm{k}\Omega$$



Filtros de segundo orden

La figura siguiente muestra la configuración para un filtro activo de segundo orden. Para hallar la función de transferencia, se consideró que el amplificador operacional es ideal: ganancia de valor “k”, cero ángulo de desfase, impedancia de entrada infinita. Existen varias formas de configurar el amplificador, usaremos la configuración de la figura.

A continuación, estudiaremos su función de transferencia a fin de poder diseñar filtros.



$$\boxed{H(s) = \frac{K}{s^2\, R_1\, R_2\, C_1\, C_2 + s[C_2\,(R_1 + R_2) + R_1\, C_1\,(1-k)\,] + 1}}$$

$$H(s) = \frac{K}{a\, s^2 + b\, s + 1}$$

Donde:

$$a = R_1\, R_2\, C_1\, C_2$$

$$b = C_2\,(R_1 + R_2) + R_1\, C_1\,(1-k)$$

Procedimiento de diseño

$$C_{1n} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 8\,b\,(k-1)}}{4\,b}$$

$$C_{2n} = \frac{1}{b\,C_1}$$

Dado que la ecuación anterior posee dos resultados, para que satisfaga a C_2 tomaremos solamente el resultado positivo. El radical debe ser positivo cumpliendo que:

$$k \geq 1 - \frac{a^2}{4\,b}$$

Para "k=1" (ganancia unitaria) se tiene que:

$$C_{1n} = \frac{a}{2\,b}$$

$$C_{2n} = \frac{2}{a}$$

Ejemplo 4:

Diseñar un filtro pasa bajos de segundo orden Butterworth con una ganancia de 10 y una frecuencia de corte de 1 KHz.

Butterworth

n	
1	$(s+1)$
2	$(s^2+1.414s+1)$
3	$(s+1)(s^2+s+1)$
4	$(s^2+1.848s+1)(s^2+0.765s+1)$
5	$(s+1)(s^2+1.618s+1)(s^2+0.765s+1)$
6	$(s^2+1.932s+1)(s^2+1.414s+1)(s^2+0.518s+1)$
7	$(s+1)(s^2+1.802s+1)(s^2+1.247s+1)(s^2+0.445s+1)$
8	$(s^2+1.962s+1)(s^2+1.663s+1)(s^2+1.111s+1)(s^2+0.390s+1)$

Para n=2, se obtiene que: a = 1.414 y b = 1.

$$C_{1n} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 8\,b\,(k-1)}}{4\,b} = \frac{1.414 + \sqrt{(1.414)^2 + 8\,(10-1)}}{4\,(1)} = 2.5\,F$$

$$C_{2n} = \frac{1}{b\,C_1} = \frac{1}{(1)\,2.5} = 0.4\,F$$

Renormalización:

$$ISF = 10^4$$

$$FSF = \frac{\omega_1}{\omega_n} = \frac{2\,\pi\,f_1}{1} = 2\,\pi\,10^3 = 2000\,\pi$$

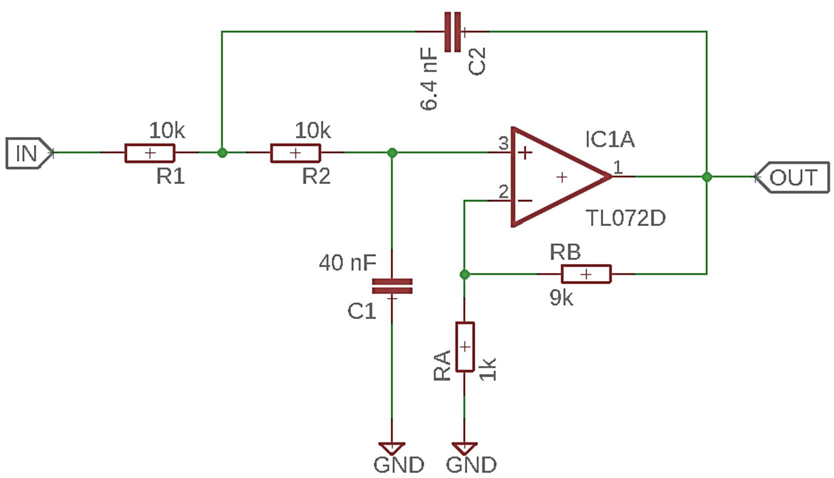
$$R = ISF\,R_n = 10^4\,1\Omega = 10\text{ k}\Omega$$

$$C_1 = \frac{C_{1n}}{ISF\,FSF} = \frac{2.5\,F}{2000\,\pi\,10^4} = 39.8\,nF$$

$$C_2 = \frac{C_{1n}}{ISF\,FSF} = \frac{0.4\,F}{2000\,\pi\,10^4} = 6.4\,nF$$

$$R_b = (k-1)\,R_a$$

Elegimos un valor de R_a = 1k y calculamos R_b = 9k



Ejemplo 5:

Diseñar un filtro pasa bajos de Chebyshev segundo orden, con una ganancia de 5, 3 Db de ripple y una frecuencia de corte de 300 Hz.

Chebyshev 3 dB

n	
1	$(s+1.002)$
2	$(s^2+0.645s+0.708)$
3	$(s+0.299)(s^2+0.299s+0.839)$
4	$(s^2+0.411s+0.196)(s^2+0.170s+0.903)$
5	$(s+0.178)(s^2+0.287s+0.377)(s^2+0.110s+0.936)$
6	$(s^2+0.285s+0.089)(s^2+0.209s+0.522)(s^2+0.07s+0.955)$
7	$(s+0.126)(s^2+0.228s+0.204)(s^2+0.158s+0.627)(s^2+0.056s+0.966)$
8	$(s^2+0.217s+0.050)(s^2+0.184s+0.321)(s^2+0.123s+0.704)(s^2+0.043s+0.974)$

Para n=2, se obtiene que: a = 0.645 y b = 0.708

$$C_{1n} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 8\,b\,(k-1)}}{4\,b} = \frac{0.645 + \sqrt{(0.645)^2 + 8\,(0.708)(5-1)}}{4\,(0.708)} = 1.92\,F$$

$$C_{2n} = \frac{1}{b\,C_1} = \frac{1}{(0.708)\,1.92} = 0.73\,F$$

Renormalización:

$$ISF = 10^4$$

$$FSF = \frac{\omega_1}{\omega_n} = \frac{2\,\pi\,f_1}{1} = 2\,\pi\,300 = 600\,\pi$$

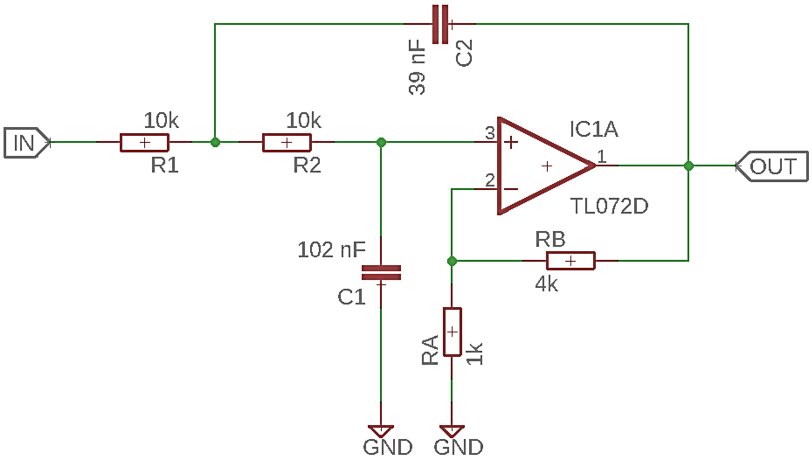
$$R = ISF\,R_n = 10^4\,1\Omega = 10\text{ k}\Omega$$

$$C_1 = \frac{C_{1n}}{ISF\;FSF} = \frac{1.92\,F}{600\,\pi\,10^4} = 102\,nF$$

$$C_2 = \frac{C_{1n}}{ISF\;FSF} = \frac{0.73\,F}{2000\,\pi\,10^4} = 38.7\,nF$$

$$R_b = (k-1)\,R_a$$

Elegimos un valor de R_a = 1k y calculamos R_b = 4k



Ejemplo 6:

Diseñar un filtro con las mismas características del filtro del ejemplo 5), pero utilizando los coeficientes de Bessel. Comparar ambos resultados.

Bessel

n	
1	$(s+1.000)$
2	$(s^2+3.000s+3.000)$
3	$(s+2.322)(s^2+3.678s+6.459)$
4	$(s^2+4.208s+11.488)(s^2+5.792s+9.140)$
5	$(s+3.647)(s^2+4.649s+18.156)(s^2+6.704s+14.272)$
6	$(s^2+5.032s+26.514)(s^2+7.471s+20.853)(s^2+8.497s+18.801)$
7	$(s+4.972)(s^2+5.371s+36.597)(s^2+8.140s+28.937)(s^2+9.517s+25.666)$
8	$(s^2+5.678s+48.432)(s^2+8.737s+38.569)(s^2+10.410s+33.935)(s^2+11.176s+31.977)$

Para n=2, se obtiene que: a = 3 y b = 3

$$C_{1n} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 8\,b\,(k-1)}}{4\,b} = \frac{3 + \sqrt{(3)^2 + 8\,(3)(5-1)}}{4\,(3)} = 1.1\,F$$

$$C_{2n} = \frac{1}{b\,C_1} = \frac{1}{(3)\,1.1} = 0.3\,F$$

Renormalización:

$$ISF = 10^4$$

$$FSF = \frac{\omega_1}{\omega_n} = \frac{2\,\pi\,f_1}{1} = 2\,\pi\,300 = 600\,\pi$$

$$R = ISF\,R_n = 10^4\,1\Omega = 10\text{ k}\Omega$$

$$C_1 = \frac{C_{1n}}{ISF\,FSF} = \frac{1.1\,F}{600\,\pi\,10^4} = 58.3\,nF$$

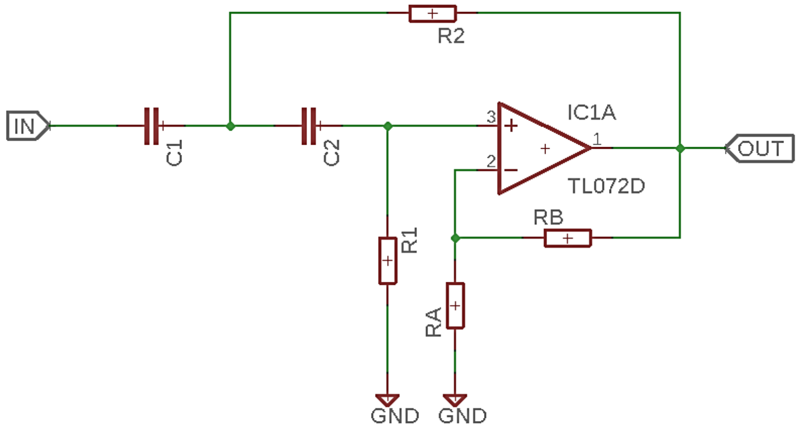
$$C_2 = \frac{C_{1n}}{ISF\,FSF} = \frac{0.3\,F}{2000\,\pi\,10^4} = 16\,nF$$

$$R_b = (k-1)\,R_a$$

Elegimos un valor de R_a = 1k y calculamos R_b = 4k

Filtros pasa altos

Los filtros pasa altos pueden ser calculados de manera muy similar al procedimiento visto previamente. Para realizar el cálculo, se debe reemplazar cada resistor por un capacitor obteniendo el valor reciproco y viceversa, como se muestra a continuación:



$$C_{HP} = \frac{1}{R_{LP}}$$

$$R_{HP} = \frac{1}{C_{LP}}$$

Veamos un ejemplo para entender mejor el cálculo.

Ejemplo 7:

Diseñar un filtro pasa altos de Butterworth, segundo orden, con una frecuencia de corte de 100 Hz con una ganancia de 10. Comparar con ejemplo 3).

Butterworth

n	
1	$(s+1)$
2	$\boxed{(s^2+1.414s+1)}$
3	$(s+1)(s^2+s+1)$
4	$(s^2+1.848s+1)(s^2+0.765s+1)$
5	$(s+1)(s^2+1.618s+1)(s^2+0.765s+1)$
6	$(s^2+1.932s+1)(s^2+1.414s+1)(s^2+0.518s+1)$
7	$(s+1)(s^2+1.802s+1)(s^2+1.247s+1)(s^2+0.445s+1)$
8	$(s^2+1.962s+1)(s^2+1.663s+1)(s^2+1.111s+1)(s^2+0.390s+1)$

Para n=2, se obtiene que: a = 1.414 y b = 1

$$C_{1n} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 8\,b\,(k-1)}}{4\,b} = \frac{1.414 + \sqrt{(1.414)^2 + 8\,(1)(10-1)}}{4\,(1)} = 2.5\,F$$

$$C_{2n} = \frac{1}{b\,C_1} = \frac{1}{2.5} = 0.4\,F$$

Cálculo de R:

$$R_{1n} = \frac{1}{C_{1n}} = \frac{1}{2.5} = 0.4\,\Omega$$

$$R_{2n} = \frac{1}{C_{2n}} = \frac{1}{0.4} = 2.5\,\Omega$$

$$C_{1n} = C_{2n} = 1\,F$$

Renormalización:

$$ISF = 10^4$$

$$FSF = \frac{\omega_1}{\omega_n} = \frac{2\,\pi\, f_1}{1} = 2\,\pi\,100 = 200\,\pi$$

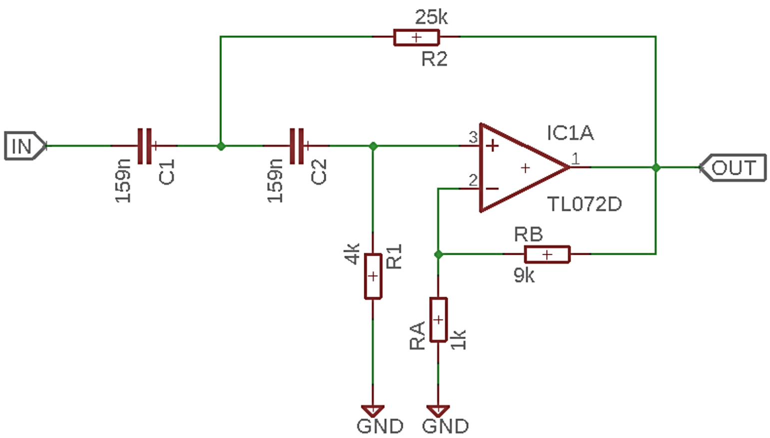
$$C_1 = C_2 = \frac{C_n}{ISF\ FSF} = \frac{1}{200\,\pi\,10^4} = 159.2\ nF$$

$$R_1 = ISF\ R_{1n} = 10^4\ 0.4 = 4\ k\Omega$$

$$R_2 = ISF\ R_{2n} = 10^4\ 2.5 = 25\ k\Omega$$

$$R_b = (k-1)\,R_a$$

Elegimos un valor de R_a = 1k y calculamos R_b = 9k



Filtros de orden superior

Hasta el momento hemos estudiado filtros con topología Sallen – Key. Muchos filtros requieren un orden mayor a dos, ya sea para proporcionar una mayor atenuación y mejor pendiente o para proveer una banda de paso ancha con alguna característica de transmisión especial. Una simple aproximación para la realización de filtros de orden superior, es factorizar la función de transferencia en factores cuadráticos de manera tal que cada etapa de filtrado obtenga un orden no superior a dos.

En el caso del filtro de *enésimo* orden, la función de transferencia general es:

$$\boxed{H(s) = \frac{V_{out(s)}}{V_{in}(s)} = \frac{K}{s^n + b_{n-1}\,s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}}$$

Ejemplo 8:

Diseñar un filtro pasa bajos de Butterworth, quinto orden, con frecuencia de corte de 3 KHz y k = 9

Butterworth

n	
1	$(s+1)$
2	$(s^2+1.414s+1)$
3	$(s+1)(s^2+s+1)$
4	$(s^2+1.848s+1)(s^2+0.765s+1)$
5	$(s+1)(s^2+1.618s+1)(s^2+0.765s+1)$
6	$(s^2+1.932s+1)(s^2+1.414s+1)(s^2+0.518s+1)$
7	$(s+1)(s^2+1.802s+1)(s^2+1.247s+1)(s^2+0.445s+1)$
8	$(s^2+1.962s+1)(s^2+1.663s+1)(s^2+1.111s+1)(s^2+0.390s+1)$

Primer etapa (primer orden):

De la tabla obtenemos que: b = 1

$$C_{1n} = \frac{1}{b} = 1\ F$$

$$R_{1n} = 1\ \Omega$$

Segunda etapa (segundo orden):

De la tabla obtenemos que: a = 1.618, b = 1, $k_1 = \sqrt{k} = \sqrt{9} = 3$

$$C_{1n} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 8\,b\,(k-1)}}{4\,b} = \frac{1.618 + \sqrt{(1.618)^2 + 8\,(1)(3-1)}}{4\,(1)} = 1.48\ F$$

$$C_{2n} = \frac{1}{b\,C_1} = \frac{1}{1.48} = 0.67\ F$$

$$R_{1n} = R_{2n} = 1\ \Omega$$

Tercera etapa (segundo orden):

De la tabla obtenemos que: a = 0.765, b = 1, $k_1 = \sqrt{k} = \sqrt{9} = 3$

$$C_{1n} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 8\,b\,(k-1)}}{4\,b} = \frac{0.765 + \sqrt{(0.765)^2 + 8\,(1)(3-1)}}{4\,(1)} = 1.2\,F$$

$$C_{2n} = \frac{1}{1.2} = 0.83\,F$$

$$R_{1n} = R_{2n} = 1\,\Omega$$

Renormalización:

$$ISF = 10^4$$

$$FSF = \frac{\omega_1}{\omega_n} = \frac{2\,\pi\,f_1}{1} = 2\,\pi\,3000 = 6000\,\pi$$

Primer etapa

$$C = \frac{C_n}{ISF\ FSF} = \frac{1}{6000\,\pi\,10^4} = 5.3\,nF$$

$$R_1 = ISF\ R_{1n} = 10^4\,1 = 10\,k\Omega$$

Segunda etapa

$$R_1 = R_2 = ISF\ R_{1n} = 10^4\,1 = 10\,k\Omega$$

$$C_1 = \frac{C_{1n}}{ISF\ FSF} = \frac{1.48}{6000\,\pi\,10^4} = 7.8\,nF$$

$$C_2 = \frac{C_{2n}}{ISF\ FSF} = \frac{0.67}{6000\,\pi\,10^4} = 3.5\,nF$$

Tercera etapa

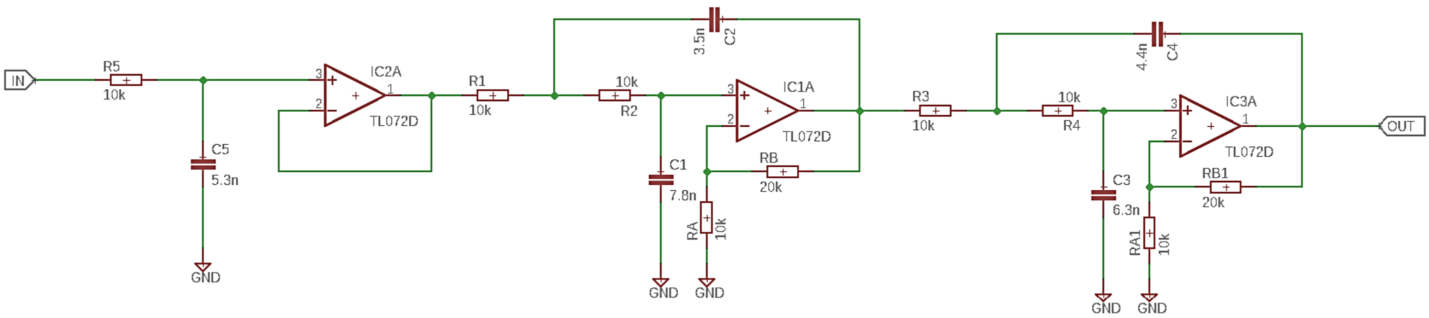
$$R_1 = R_2 = ISF\ R_{1n} = 10^4\ 1 = 10\ k\Omega$$

$$C_1 = \frac{C_{1n}}{ISF\ FSF} = \frac{1.2}{6000\ \pi\ 10^4} = 6.3\ nF$$

$$C_2 = \frac{C_{2n}}{ISF\ FSF} = \frac{0.83}{6000\ \pi\ 10^4} = 4.4\ nF$$

$$R_b = (k-1)\ R_a$$

Elegimos un valor de R_a = 10k y calculamos R_b = 20k



Ejemplo 9:

Diseñar un filtro con las mismas características del filtro del ejemplo 8), pero utilizando los coeficientes de Chebyshev (3 Db). Comparar ambos resultados.

Chebyshev 3 dB

n	
1	$(s+1.002)$
2	$(s^2+0.645s+0.708)$
3	$(s+0.299)(s^2+0.299s+0.839)$
4	$(s^2+0.411s+0.196)(s^2+0.170s+0.903)$
5	$(s+0.178)(s^2+0.287s+0.377)(s^2+0.110s+0.936)$
6	$(s^2+0.285s+0.089)(s^2+0.209s+0.522)(s^2+0.07s+0.955)$
7	$(s+0.126)(s^2+0.228s+0.204)(s^2+0.158s+0.627)(s^2+0.056s+0.966)$
8	$(s^2+0.217s+0.050)(s^2+0.184s+0.321)(s^2+0.123s+0.704)(s^2+0.043s+0.974)$

Primer etapa (primer orden):

De la tabla obtenemos que: a = 0.178

$$C_{1n} = \frac{1}{0.178} = 5.62\ F$$

$$R_{1n} = 1\ \Omega$$

Segunda etapa (segundo orden):

De la tabla obtenemos que: a = 0.287, b = 0.377, $k_1 = \sqrt{k} = \sqrt{9} = 3$

$$C_{1n} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 8\,b\,(k-1)}}{4\,b} = \frac{0.287 + \sqrt{(0.287)^2 + 8\,(0.377)(3-1)}}{4\,(0.377)} = 1.83\ F$$

$$C_{2n} = \frac{1}{1.83} = 0.55\ F$$

$$R_{1n} = R_{2n} = 1\ \Omega$$

Tercera etapa (segundo orden):

De la tabla obtenemos que: a = 0.11, b = 0.936, $k_1 = \sqrt{k} = \sqrt{9} = 3$

$$C_{1n} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 8\,b\,(k-1)}}{4\,b} = \frac{0.11 + \sqrt{(0.11)^2 + 8\,(0.936)(3-1)}}{4\,(0.936)} = 1.06\ F$$

$$C_{2n} = \frac{1}{1.06} = 0.94\ F$$

$$R_{1n} = R_{2n} = 1\ \Omega$$

Renormalización:

$$ISF = 10^4$$

$$FSF = \frac{\omega_1}{\omega_n} = \frac{2\,\pi\, f_1}{1} = 2\,\pi\, 3000 = 6000\,\pi$$

Primer etapa:

$$C = \frac{C_n}{ISF\; FSF} = \frac{5.62\,F}{6000\,\pi\, 10^4} = 29.8\, nF$$

$$R_1 = ISF\; R_{1n} = 10^4\, 1 = 10\, k\Omega$$

Segunda etapa:

$$R_1 = R_2 = ISF\; R_{1n} = 10^4\, 1 = 10\, k\Omega$$

$$C_1 = \frac{C_{1n}}{ISF\; FSF} = \frac{1.83}{6000\,\pi\, 10^4} = 9.7\, nF$$

$$C_2 = \frac{C_{2n}}{ISF\; FSF} = \frac{0.55}{6000\,\pi\, 10^4} = 2.9\, nF$$

Tercera etapa:

$$R_1 = R_2 = ISF\; R_{1n} = 10^4\, 1 = 10\, k\Omega$$

$$C_1 = \frac{C_{1n}}{ISF\; FSF} = \frac{1.06}{6000\,\pi\, 10^4} = 5{,}6\, nF$$

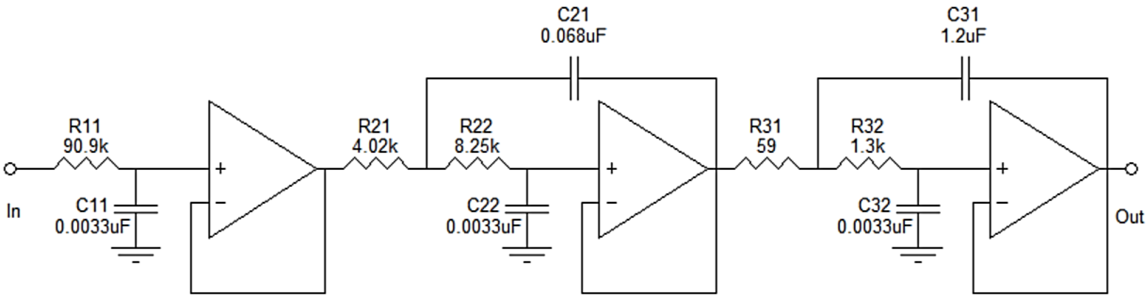
$$C_2 = \frac{C_{2n}}{ISF\; FSF} = \frac{0.94}{6000\,\pi\, 10^4} = 5\, nF$$

$$R_b = (k-1)\, R_a$$

Elegimos un valor de R_a = 10k y calculamos R_b = 20k

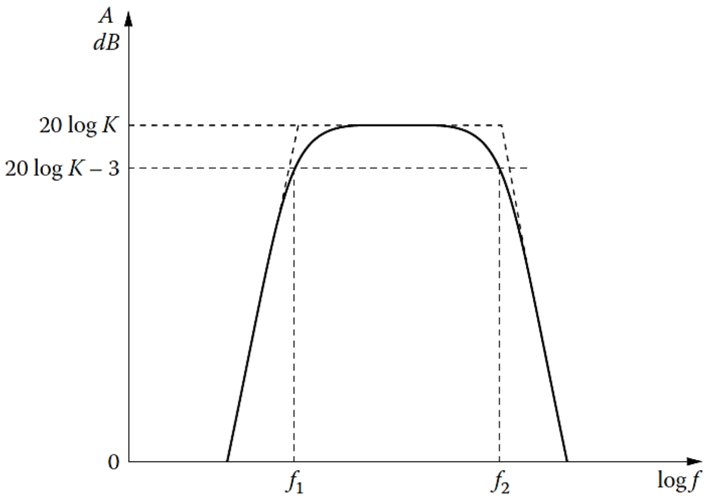
Ejemplo 10:

Diseñar un filtro con las mismas características del filtro del ejemplo 9), pero utilizando FilterLab. Simular en LTSpice y comparar ambos resultados.



Filtros de banda ancha (wide band) pasa banda

Frecuentemente en aplicaciones de audio, es necesario separar una banda de frecuencias con una ganancia relativamente constante.



Cuando la separación de la frecuencia de corte inferior y superior (f_1 y f_2) supera la relación de “2”, el filtro pasa banda es considerado de banda ancha. Las especificaciones serán separadas en filtros pasa bajos y pasa altos y luego formarán una cascada de filtros, pasa bajos con una frecuencia de corte f_1 y un filtro pasa altos con una frecuencia de corte f_2.

Ejemplo 11:

Diseñar un filtro pasa banda con f_1 = 100 Hz y f_2 = 1000 Hz, Butterworth, ganancia k = 9 y de cuarto orden.

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{1000}{100} = 10$$

Butterworth

n	
1	$(s+1)$
2	$(s^2+1.414s+1)$
3	$(s+1)(s^2+s+1)$
4	$\boxed{(s^2+1.848s+1)(s^2+0.765s+1)}$
5	$(s+1)(s^2+1.618s+1)(s^2+0.765s+1)$
6	$(s^2+1.932s+1)(s^2+1.414s+1)(s^2+0.518s+1)$
7	$(s+1)(s^2+1.802s+1)(s^2+1.247s+1)(s^2+0.445s+1)$
8	$(s^2+1.962s+1)(s^2+1.663s+1)(s^2+1.111s+1)(s^2+0.390s+1)$

Primer etapa (segundo orden pasa alto)

a = 1.848 y b = 1

$$k = \sqrt{9} = 3 \;\therefore k_1 = k_2 = \sqrt{3} = 1.732$$

$$C_{1n} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 8\,b\,(k-1)}}{4\,b} = \frac{1.848 + \sqrt{(1.848)^2 + 8\,(1)(1.732-1)}}{4\,(1)} = 1.22\,F$$

$$C_{2n} = \frac{1}{1.22} = 0.82\,F$$

$$R_{1n} = \frac{1}{C_{1n}} = \frac{1}{1.22} = 0.82\,\Omega$$

$$R_{2n} = \frac{1}{C_{2n}} = \frac{1}{0.82} = 1.22\,\Omega$$

Segunda etapa (segundo orden pasa alto)

a = 0.765 y b = 1

$$C_{1n} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 8\, b\, (k-1)}}{4\, b} = \frac{0.765 + \sqrt{(0.765)^2 + 8\,(1)(1.732 - 1)}}{4\,(1)} = 0.83\, F$$

$$C_{2n} = \frac{1}{0.83} = 1.21\, F$$

$$R_{1n} = \frac{1}{C_{1n}} = \frac{1}{0.83} = 1.21\, \Omega$$

$$R_{2n} = \frac{1}{C_{2n}} = \frac{1}{1.21} = 0.83\, \Omega$$

Renormalización:

$$ISF = 10^4$$

$$FSW = \frac{\omega_1}{\omega_n} = \frac{2\, \pi\, f_1}{1} = 2\, \pi\, 100 = 200\, \pi$$

Primer etapa

$$R_1 = ISF\ R_{1n} = 10^4\ 0.82 = 8.2\ k\Omega$$

$$R_2 = ISF\ R_{2n} = 10^4\ 1.22 = 12.2\ k\Omega$$

$$C_1 = C_2 = \frac{C_n}{ISF\ FSF} = \frac{1}{200\, \pi\, 10^4} = 159.1\ nF$$

Elegimos un valor de R_a = 10k y calculamos R_b:

$$R_b = (1.732 - 1)\ 10k = 7.3\ k\Omega$$

Segunda etapa

$$R_1 = ISF\ R_{1n} = 10^4\ 1.21 = 12.1\ k\Omega$$

$$R_2 = ISF\ R_{2n} = 10^4\ 0.83 = 8.3\ k\Omega$$

$$C_1 = C_2 = \frac{C_n}{ISF\ FSF} = \frac{1}{200\ \pi\ 10^4} = 159.1\ nF$$

Elegimos un valor de R_a = 10k y calculamos R_b:

$$R_b = (1.732 - 1)\ 10k = 7.3\ k\Omega$$

Primer etapa (segundo orden pasa bajos)

a = 1.848 y b = 1

$$k = \sqrt{9} = 3\ \therefore k_1 = k_2 = \sqrt{3} = 1.732$$

$$C_{1n} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 8\ b\ (k-1)}}{4\ b} = \frac{1.848 + \sqrt{(1.848)^2 + 8\ (1)(1.732-1)}}{4\ (1)} = 1.22\ F$$

$$C_{2n} = \frac{1}{1.22} = 0.82\ F$$

$$R_{1n} = R_{2n} = 1\ \Omega$$

Segunda etapa (segundo orden pasa bajos)

a = 0.765 y b = 1

$$C_{1n} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 8\ b\ (k-1)}}{4\ b} = \frac{0.765 + \sqrt{(0.765)^2 + 8\ (1)(1.732-1)}}{4\ (1)} = 0.83\ F$$

$$C_{2n} = \frac{1}{0.83} = 1.21\ F$$

$$R_{1n} = R_{2n} = 1\ \Omega$$

Renormalización:

$$ISF = 10^4$$

$$FSF = \frac{\omega_1}{\omega_n} = \frac{2\ \pi\ f_2}{1} = 2\ \pi\ 1000 = 2000\ \pi$$

Primer etapa

$$R_1 = R_2 = ISF\ R_{1n} = 10^4\ 1 = 10\ k\Omega$$

$$C_1 = \frac{C_{1n}}{ISF\ FSF} = \frac{1.22}{2000\ \pi\ 10^4} = 19.4\ nF$$

$$C_2 = \frac{C_{2n}}{ISF\ FSF} = \frac{0.82}{2000\ \pi\ 10^4} = 13\ nF$$

Elegimos un valor de R_a = 10k y calculamos R_b:

$$R_b = (1.732 - 1)\ 10k = 7.3\ k\Omega$$

Segunda etapa

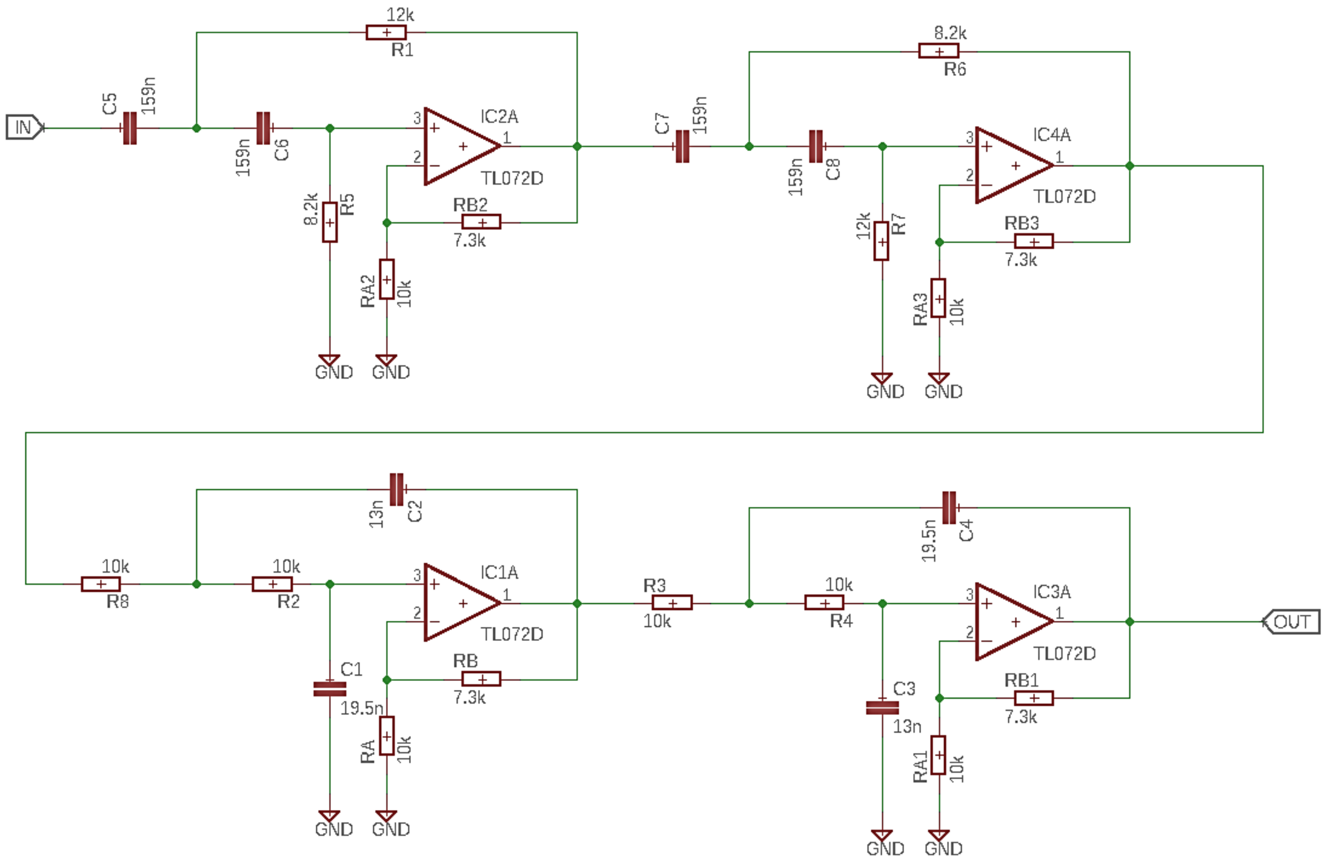
$$R_1 = R_2 = ISF\ R_{1n} = 10^4\ 1 = 10\ k\Omega$$

$$C_1 = \frac{C_{1n}}{ISF\ FSF} = \frac{0.83}{2000\ \pi\ 10^4} = 13\ nF$$

$$C_2 = \frac{C_{2n}}{ISF\ FSF} = \frac{1.21}{2000\ \pi\ 10^4} = 19.5\ nF$$

Elegimos un valor de R_a = 10k y calculamos R_b:

$$R_b = (1.732 - 1)\,10k = 7.3\,k\Omega$$



Filtros de banda ancha (wide band) rechaza banda (Notch, band reject)

Esta clase de filtros pueden ser diseñados separando sus especificaciones en dos simples filtros: un pasa bajos y un pasa altos. Éstos, son diseñados de manera independiente y, ingresando una señal de manera paralela y sumando ambas salidas se forma el filtro rechaza banda.

Ejemplo 12:

Diseñar un filtro rechaza banda con f_1 = 100 Hz y f_2 = 1000 Hz, Butterworth, ganancia k = 1 y de cuarto orden.

Butterworth

n	
1	$(s+1)$
2	$(s^2+1.414s+1)$
3	$(s+1)(s^2+s+1)$
4	$\boxed{(s^2+1.848s+1)(s^2+0.765s+1)}$
5	$(s+1)(s^2+1.618s+1)(s^2+0.765s+1)$
6	$(s^2+1.932s+1)(s^2+1.414s+1)(s^2+0.518s+1)$
7	$(s+1)(s^2+1.802s+1)(s^2+1.247s+1)(s^2+0.445s+1)$
8	$(s^2+1.962s+1)(s^2+1.663s+1)(s^2+1.111s+1)(s^2+0.390s+1)$

Primer etapa (segundo orden pasa bajos)

a = 1.848 y b = 1

$$C_{1n} = \frac{1.848}{2} = 0.92\ F$$

$$C_{2n} = \frac{2}{1.848} = 1.1\ F$$

$$R_{1n} = 1\ \Omega$$

Segunda etapa (segundo orden pasa bajos)

a = 0.765 y b = 1

$$C_{1n} = \frac{0.765}{2} = 0.4\ F$$

$$C_{2n} = \frac{2}{0.765} = 2.6\ F$$

$$R_{1n} = 1\ \Omega$$

Renormalización:

$$ISF = 10^4$$

$$FSF = \frac{\omega_1}{\omega_n} = \frac{2\,\pi\,f_1}{1} = 2\,\pi\,100 = 200\,\pi$$

Primer etapa (segundo orden pasa bajos)

$$R_1 = R_2 = ISF\ R_{1n} = 10^4\ 1 = 10\ k\Omega$$

$$C_1 = \frac{C_{1n}}{ISF\ FSF} = \frac{0.92}{200\,\pi\,10^4} = 146.4\ nF$$

$$C_2 = \frac{C_{2n}}{ISF\ FSF} = \frac{1.1}{200\,\pi\,10^4} = 175\ nF$$

Segunda etapa (segundo orden pasa bajos)

$$R_1 = R_2 = ISF\ R_{1n} = 10^4\ 1 = 10\ k\Omega$$

$$C_1 = \frac{C_{1n}}{ISF\ FSF} = \frac{0.4}{200\,\pi\,10^4} = 63.6\ nF$$

$$C_2 = \frac{C_{2n}}{ISF\ FSF} = \frac{2.6}{200\,\pi\,10^4} = 413.8\ nF$$

Primer etapa (segundo orden pasa altos)

a = 1.848 y b = 1

$$C_{1n} = \frac{1.848}{2} = 0.92\ F$$

$$C_{2n} = \frac{2}{1.848} = 1.1\ F$$

$$R_{1n} = \frac{1}{C_{1n}} = \frac{1}{0.92} = 1.1\ \Omega$$

$$R_{2n} = \frac{1}{C_{2n}} = \frac{1}{1.1} = 0.92\ \Omega$$

$$C_{1n} = 1\ F$$

Segunda etapa (segundo orden pasa altos)

a = 0.765 y b = 1

$$C_{1n} = \frac{0.765}{2} = 0.4\ F$$

$$C_{2n} = \frac{2}{0.765} = 2.6\ F$$

$$R_{1n} = \frac{1}{C_{1n}} = \frac{1}{0.4} = 2.6\ \Omega$$

$$R_{2n} = \frac{1}{C_{2n}} = \frac{1}{2.6} = 0.4\ \Omega$$

$$C_{1n} = 1\ F$$

Renormalización:

$$ISF = 10^4$$

$$FSF = \frac{\omega_1}{\omega_n} = \frac{2\,\pi\,f_1}{1} = 2\,\pi\,1000 = 2000\,\pi$$

$$C = \frac{C_{1n}}{ISF\ FSF} = \frac{1}{2000\ \pi\ 10^4} = 15.9\ nF$$

Primer etapa (segundo orden pasa altos)

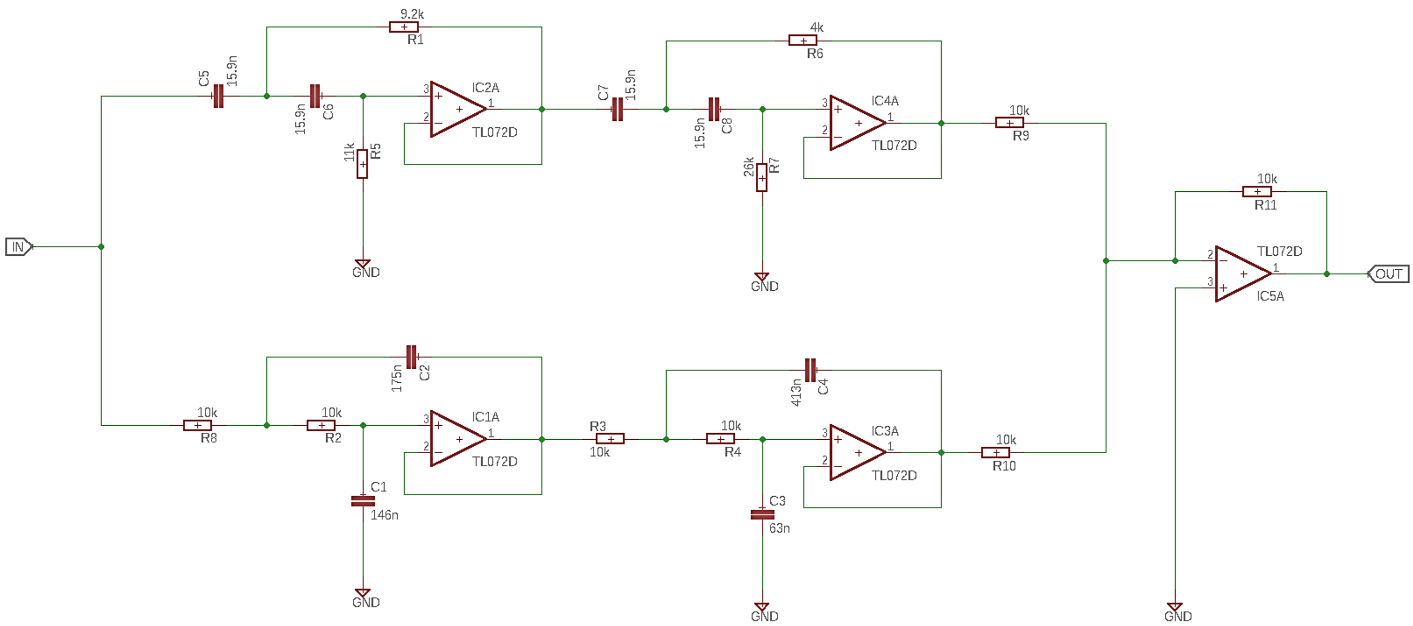
$$R_1 = ISF\ R_{1n} = 10^4\ 1.1 = 11\ k\Omega$$

$$R_2 = ISF\ R_{1n} = 10^4\ 0.92 = 9.2\ k\Omega$$

Segunda etapa (segundo orden pasa altos)

$$R_1 = ISF\ R_{1n} = 10^4\ 2.6 = 26\ k\Omega$$

$$R_2 = ISF\ R_{1n} = 10^4\ 0.4 = 4\ k\Omega$$



Apéndice

Butterworth

n	
1	$(s+1)$
2	$(s^2+1.414s+1)$
3	$(s+1)(s^2+s+1)$
4	$(s^2+1.848s+1)(s^2+0.765s+1)$
5	$(s+1)(s^2+1.618s+1)(s^2+0.765s+1)$
6	$(s^2+1.932s+1)(s^2+1.414s+1)(s^2+0.518s+1)$
7	$(s+1)(s^2+1.802s+1)(s^2+1.247s+1)(s^2+0.445s+1)$
8	$(s^2+1.962s+1)(s^2+1.663s+1)(s^2+1.111s+1)(s^2+0.390s+1)$

Chebyshev 0.1 dB

n	
1	$(s+6.552)$
2	$(s^2+2.372s+3.314)$
3	$(s+0.969)(s^2+0.969s+1.690)$
4	$(s^2+1.275s+0.623)(s^2+0.528s+1.330)$
5	$(s+0.539)(s^2+0.872s+0.636)(s^2+0.333s+1.195)$
6	$(s^2+0.856s+0.263)(s^2+0.626s+0.696)(s^2+0.229s+1.129)$
7	$(s+0.337)(s^2+0.679s+0.330)(s^2+0.470s+0.753)(s^2+0.168s+1.069)$
8	$(s^2+0.643s+0.146)(s^2+0.545s+0.416)(s^2+0.364s+0.779)(s^2+0.128s+1.069)$

Chebyshev 0.5 dB

n	
1	$(s+2.863)$
2	$(s^2+1.426s+1.516)$
3	$(s+0.626)(s^2+0.626s+1.142)$
4	$(s^2+0.847s+0.356)(s^2+0.351s+1.064)$
5	$(s+0.362)(s^2+0.586s+0.477)(s^2+0.224s+1.036)$
6	$(s^2+0.580s+0.157)(s^2+0.424s+0.590)(s^2+0.155s+1.023)$
7	$(s+0.256)(s^2+0.462s+0.254)(s^2+0.319s+0.677)(s^2+0.114s+1.016)$
8	$(s^2+0.439s+0.088)(s^2+0.372s+0.359)(s^2+0.248s+0.741)(s^2+0.087s+1.012)$

Chebyshev 1 dB

n	
1	$(s+1.965)$
2	$(s^2+1.098s+1.103)$
3	$(s+0.494)(s^2+0.494s+0.994)$
4	$(s^2+0.674s+0.279)(s^2+0.279s+0.987)$
5	$(s+0.289)(s^2+0.468s+0.429)(s^2+0.179s+0.988)$
6	$(s^2+0.464s+0.125)(s^2+0.340s+0.558)(s^2+0.124s+0.991)$
7	$(s+0.205)(s^2+0.370s+0.230)(s^2+0.256s+0.653)(s^2+0.091s+0.993)$
8	$(s^2+0.352s+0.070)(s^2+0.298s+0.341)(s^2+0.199s+0.724)(s^2+0.070s+0.994)$

Chebyshev 2 dB

n	
1	$(s+1.308)$
2	$(s^2+0.804s+0.823)$
3	$(s+0.369)(s^2+0.369s+0.886)$
4	$(s^2+0.506s+0.222)(s^2+0.210s+0.929)$
5	$(s+0.218)(s^2+0.353s+0.393)(s^2+0.135s+0.952)$
6	$(s^2+0.351s+0.100)(s^2+0.257s+0.533)(s^2+0.094s+0.966)$
7	$(s+0.155)(s^2+0.280s+0.212)(s^2+0.194s+0.635)(s^2+0.069s+0.975)$
8	$(s^2+0.266s+0.057)(s^2+0.226s+0.327)(s^2+0.151s+0.710)(s^2+0.053s+0.980)$

Chebyshev 3 dB

n	
1	$(s+1.002)$
2	$(s^2+0.645s+0.708)$
3	$(s+0.299)(s^2+0.299s+0.839)$
4	$(s^2+0.411s+0.196)(s^2+0.170s+0.903)$
5	$(s+0.178)(s^2+0.287s+0.377)(s^2+0.110s+0.936)$
6	$(s^2+0.285s+0.089)(s^2+0.209s+0.522)(s^2+0.07s+0.955)$
7	$(s+0.126)(s^2+0.228s+0.204)(s^2+0.158s+0.627)(s^2+0.056s+0.966)$
8	$(s^2+0.217s+0.050)(s^2+0.184s+0.321)(s^2+0.123s+0.704)(s^2+0.043s+0.974)$

Bessel

n	
1	$(s+1.000)$
2	$(s^2+3.000s+3.000)$
3	$(s+2.322)(s^2+3.678s+6.459)$
4	$(s^2+4.208s+11.488)(s^2+5.792s+9.140)$
5	$(s+3.647)(s^2+4.649s+18.156)(s^2+6.704s+14.272)$
6	$(s^2+5.032s+26.514)(s^2+7.471s+20.853)(s^2+8.497s+18.801)$
7	$(s+4.972)(s^2+5.371s+36.597)(s^2+8.140s+28.937)(s^2+9.517s+25.666)$
8	$(s^2+5.678s+48.432)(s^2+8.737s+38.569)(s^2+10.410s+33.935)(s^2+11.176s+31.977)$