INTRONIC

Método de Laplace

www.intronic.com.ar

Introducción

El objetivo de este video es dar una breve reseña acerca de la transformada de Laplace orientada a la teoría de control.

Figura 1, izquierda: Pierre Simon Laplace, Derecha: Oliver Heaviside

Antecedentes históricos

Oriundo de una humilde familia de Francia, Laplace, a principios del siglo XIX, desarrolló la transformada que sirve para resolver ecuaciones diferenciales, así como también para entender y tratar la teoría de control. Años más tarde, el ingeniero eléctrico Heaviside retomó esos estudios a fin de determinar ***"el método de Laplace"*** para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. Además, realizó un aporte con la función ***"salto unidad"***, ***"salto unitario"*** o ***"escalón"*** que hoy en día también lleva su nombre en algunos software de matemática aplicada.

Aplicaciones

- Resolución de ecuaciones diferenciales
- Resolución de ecuaciones integrales
- Resolución de ecuaciones integro-diferenciales
- Aplicación en la teoría de control
- Resolución de ecuaciones diferenciales de sistemas periódicos

Definición

La transformada de Laplace de una función *f(t)* se define matemáticamente como:

$$\boxed{\mathcal{L}\big(f(t)\big) = \int_0^\infty e^{-s\,t} f(t)\, dt = F(s)}$$

Lejos está este video de hacer análisis matemáticos profundos acerca de la definición anterior. No obstante, es posible mencionar algunas cuestiones simples que se desprenden de observar la integral:

- La integral es impropia debido a que un límite de la integral tiende a infinito
- La variable de entrada "t" representa el tiempo
- La variable de salida "s" representa la frecuencia
- No siempre es posible encontrar una transformada de una función

Para resolver dicha integral se debe aplicar límite y estudiar su convergencia para la función ***"f"*** dada. Pero en esta oportunidad, interesa, además, estudiar otras cosas.

La transformada de Laplace es un proceso por el cual el resultado obtenido es una nueva función, definida en la variable ***"s"*** que representa la frecuencia. ¿Qué significa esto? significa que ***"transformar"*** es cambiar de dominio, es decir, pasar del dominio temporal al dominio frecuencial.

Ejemplo de cálculo

Sea f una función definida para $t \geq 0$ y cuando la integral converge, su resultado es una función de la variable s. Calcular la transformada de Laplace de la función $f(t) = 1$.

$$\mathcal{L}\big(f(t)\big) = \int_0^\infty e^{-s\,t}\,1\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-s\,t}\,1\,dt = \lim_{b\to\infty}\frac{e^{-s\,t}}{-s}\,|_0^b$$

Aplicamos la regla de Barrow para finalmente evaluar el límite:

$$\frac{1}{-s}\lim_{b\to\infty}\left(e^{-s\,b} - \underbrace{e^{-s\,(0)}}_{=1}\right) = \frac{1}{s}\quad (si\ s > 0)$$

$$\boxed{\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}}$$

Condiciones para la existencia de la transformada

Aquí veremos las condiciones que debe cumplir *f*, para poder hallar la transformada de Laplace.

1. Función continua por partes
2. Función de orden exponencial

Una función *f* es continua por partes en *[0, +∞)* si en cualquier intervalo *[a, b]* hay a lo sumo un número finito de puntos t_k donde la función tiene discontinuidades finitas.

Analizar si la siguiente función es continua por partes.

$$f(t) = \begin{cases} t^3 & si \;\; 0 < t < 1 \\ 2 & si \;\; 1 < t < 1.5 \\ t+1 & si \;\; 1.5 < t < 2 \\ 1 & si \qquad t > 2 \end{cases}$$

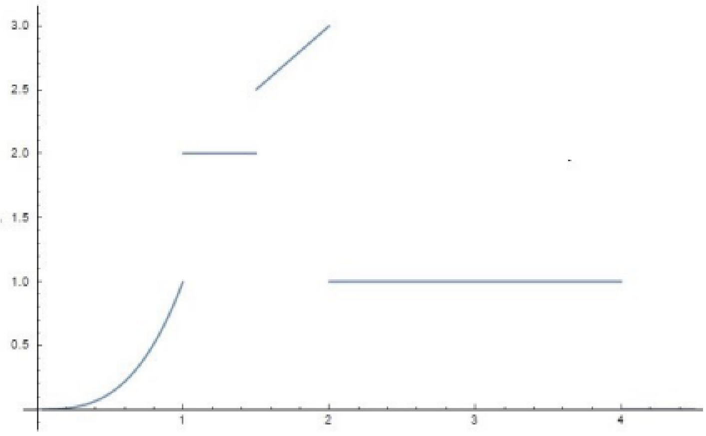


Figura 2: Representación de f(t)

Existen 3 puntos de discontinuidad: *t=1, t=1.5 y t=2*, es decir un numero finito; analizaremos los limites laterales en cada punto

En t=1: $\lim_{t \to 1^-} f(t) = 1$ y $\lim_{t \to 1^+} f(t) = 2$

En t=1.5: $\lim_{t \to 1.5^-} f(t) = 2$ y $\lim_{t \to 1.5^+} f(t) = 2.5$

En t=2: $\lim_{t \to 2^-} f(t) = 3$ y $\lim_{t \to 2^+} f(t) = 1$

Como vemos existen los limites laterales, es decir los saltos son finitos. Luego f(t) **es continua por partes.**

Analizar si la siguiente función es continua por partes.

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-t} & si \quad 0 < t < 1 \\ 1.5 & si \quad 1 < t < 2 \\ t & si \quad 2 < t < 3 \\ 4 & si \quad 3 < t < 4 \end{cases}$$

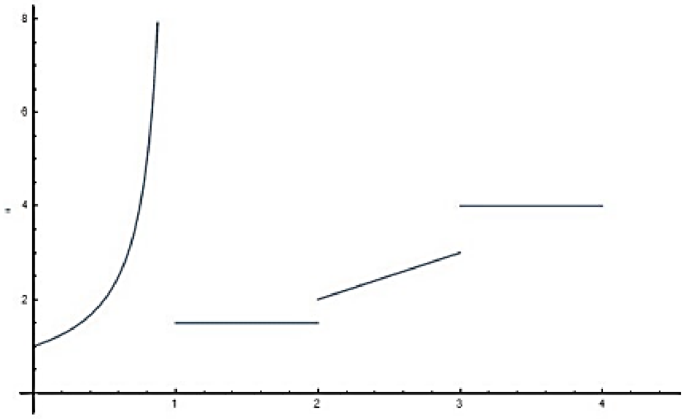


Figura 3: Representación de g(t)

Como se observa, *g(t)* NO es continua por partes.

Función de orden exponencial

Se dice que una función es de orden exponencial c, si existen constantes c, M, T positivas tal que $|f(t)| \leq M\, e^{c\,t}$ para todo t > T

Es decir que en el intervalo (T,+∞) la gráfica de f no crece más rápido que la gráfica de la exponencial $M\, e^{c\,t}$.

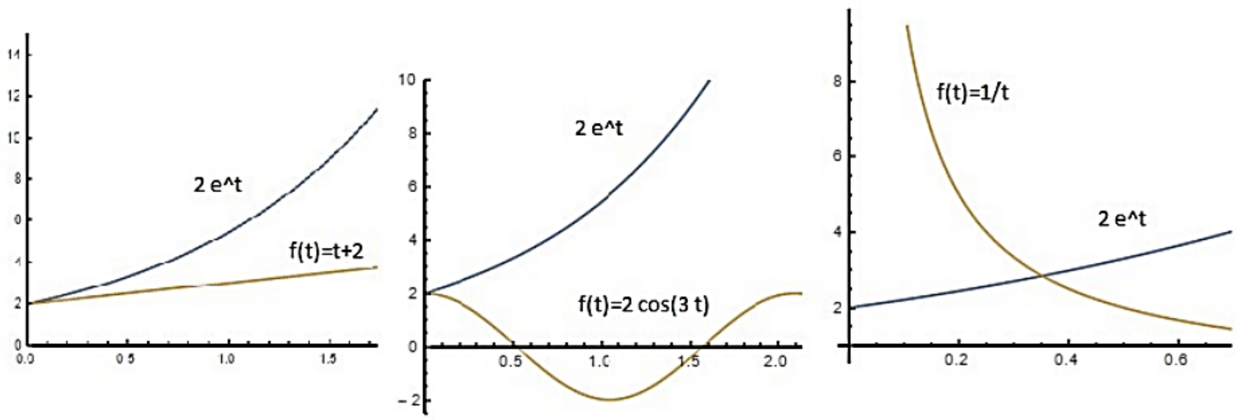


Figura 4: Representación de funciones

Para *f(t) = t + 2* la función 2e t se mantiene por encima de *f(t)*, por lo tanto, *f(t) = t + 2* es de orden exponencial con M=2 y c=1

Para *f(t) = 2 cos(3t)* la función 2e t se mantiene por encima de *f(t)*, por lo tanto, *f(t) = 2 cos(3t)* es de orden exponencial con M=2 y c=1

Para *f(t) = 1/t* no existe una función exponencial que pueda estar por encima, por lo tanto, *f(t) = 1/t* No es de orden exponencial

Propiedades

Para una combinación lineal de funciones se puede escribir:

$$\int_0^{\infty} e^{-s\,t}\left(\alpha\, f(t) + \beta\, g(t)\right) dt = \alpha \int_0^{\infty} e^{-s\,t} f(t)\, dt + \beta \int_0^{\infty} e^{-s\,t} g(t) dt$$

Siempre que ambas integrales converjan. Por consiguiente, resulta:

$$\mathcal{L}\left(\alpha\, f(t) + \beta\, g(t)\right) = \alpha\, \mathcal{L}\left(f(t)\right) + \beta\, \mathcal{L}\left(g(t)\right) = \alpha\, F(s) + \beta\, G(s)$$

A dicha propiedad la denominaremos Linealidad.

Convolución

No es cierto que la integral de un producto de funciones sea el producto de las integrales. Sin embargo, es cierto que la transformada de Laplace del producto (bajo ciertas condiciones), es el producto de las transformadas. Esto significa que la transformada de Laplace de la convolución de dos funciones, dando nacimiento al siguiente teorema:

Si *f(t)* y *g(t)* son funciones continuas por partes en *[0, ∞)* y de orden exponencial, entonces:

$$\mathcal{L}\left(f(t) * g(t)\right) = \mathcal{L}\left(f(t)\right)\, \mathcal{L}\left(g(t)\right) = F(s)\, G(s)$$

Demostración

Sea:

$$F(s) = \mathcal{L}\big(f(t)\big) = \int_0^{\infty} e^{-s\,\tau}\, f(\tau)\, d\tau$$

$$G(s) = \mathcal{L}\big(g(t)\big) = \int_0^{\infty} e^{-s\,\beta}\, g(\beta)\, d\beta$$

Procediendo

$$F(s) * G(s) = \left(\int_0^{\infty} e^{-s\,\tau}\, f(\tau)\, d\tau\right)\left(\int_0^{\infty} e^{-s\,\beta}\, g(\beta)\, d\beta\right)$$

$$F(s) * \; G(s) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-s\,\tau}\, f(\tau)\, e^{-s\,\beta}\, g(\beta)\, d\tau\, d\beta$$

$$F(s) * G(s) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-s\,(\tau+\beta)}\, f(\tau)\, g(\beta)\, d\tau\, d\beta$$

$$F(s) * \; G(s) = \int_0^{\infty} f(\tau)\, d\tau \int_0^{\infty} e^{-s\,(\tau+\beta)}\, g(\beta)\, d\beta$$

Si realizamos un cambio dado que: $t = \tau + \beta$ y $dt = d\beta$

$$\boxed{F(s)\, G(s) = \int_0^{\infty} f(\tau)\, d\tau \int_{\tau}^{\infty} e^{-s\,t}\, g(t-\tau)\, dt = \mathcal{L}\big(f(t) * g(t)\big)}$$

Función escalón unitario o Heaviside

En ingeniería es común encontrar funciones que se "activan" o se "desactivan". Por ejemplo, una fuerza que actúa en un sistema mecánico, o una tensión que proviene de un temporizador, se puede desactivar luego de cierto tiempo. Así, es conveniente definir una función especial que active o desactive durante cierto tiempo a la función. La función se llama ***escalón unitario*** o ***función de Heaviside*** y se define:

$$\mathfrak{A}(t-a) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \le t < a \\ 1 & si \quad t \ge a \end{cases}$$

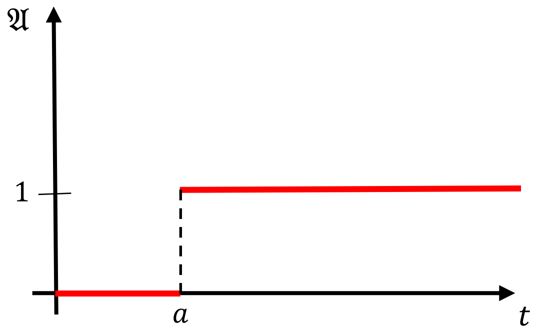


Figura 5: Representación de función escalón en *"a"*

Demostración

$$\mathcal{L}\big(u(t-a)\big) = \underbrace{\int_0^a e^{-s\,t}\,0\,dt}_{=0} + \int_a^\infty e^{-s\,t}\,1\,dt$$

$$\mathcal{L}\big(u(t-a)\big) \underbrace{=}_{u=t-a} \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-s\,(u+a)}\,du$$

$$\mathcal{L}\big(u(t-a)\big) = e^{-s\,a} \underbrace{\lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-s\,u}\,1\,du}_{\mathcal{L}(1)=\frac{1}{s}} \quad (si\ a > 0)$$

$$\boxed{\mathcal{L}\big(u(t-a)\big) = \frac{e^{-s\,a}}{s}}$$

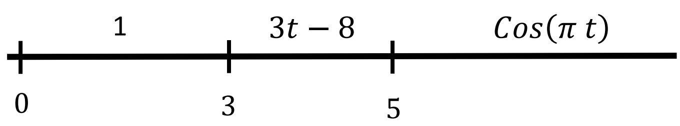
En particular si *"a = 0"*

$$\boxed{\mathcal{L}\big(u(t)\big) = \frac{1}{s}}$$

La función salto unidad solo se define para valores de *"t"* positivos dado que también representa al tiempo. Cuando una función f definida para $t \geq 0$ se multiplica por $\mathfrak{U}(t-a)$, la función escalón unitario "desactiva" una parte de la gráfica de esa función. Veamos un ejemplo:

Escribir la siguiente función por partes en términos de la función salto unidad:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 < t < 3 \\ 3t - 8 & si \quad 3 < t < 5 \\ Cos(\pi\, t) & si \quad t > 5 \end{cases}$$



$$f(t) = 1\,[u(t-0) - u(t-3)] + (3t-8)\,[u(t-3) - u(t-5)] +$$
$$+ Cos(\pi\, t)\; u(t-5)$$

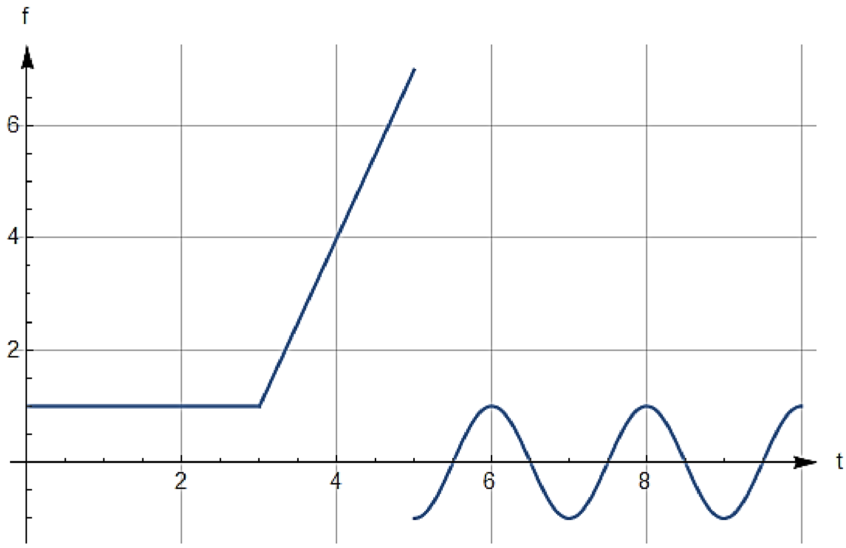


Figura 6: Representación gráfica de *f(t)*

Función delta de Dirac

Los sistemas mecánicos suelen ser afectados por una fuerza externa (o fuerza electromotriz para un circuito eléctrico) de gran magnitud pero que actúa en un periodo muy corto. Por ejemplo, podría caer un rayo en el ala de un avión, un martillo podría golpear un sistema de masa resorte y amortiguador.

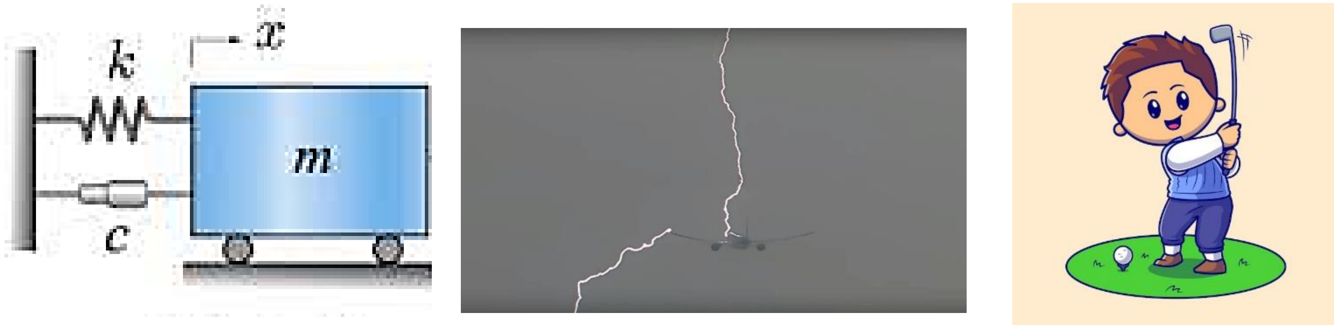


Figura 7: Modelos físicos

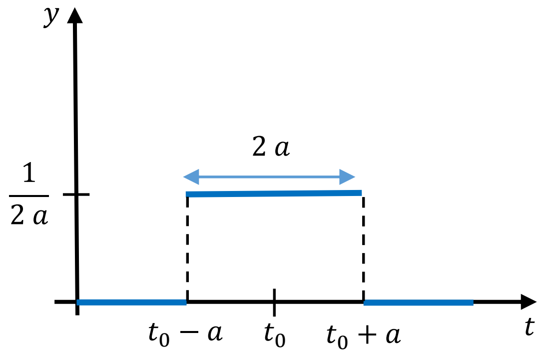


Figura 8: Modelo de función Delta de Dirac

La función $\delta(t - t_0)$ se llama impulso unitario y posee la propiedad de integración:

$$\int_0^{\infty} \delta(t - t_0)\, dt = 1$$

La función delta de Dirac en la práctica es conveniente trabajarla con otro tipo de impulso unitario, una función que aproxime a $\delta(t - t_0)$ y se define mediante el siguiente límite:

$$\boxed{\delta(t - t_0) = \lim_{a \to 0} \delta_a(t - t_0)}$$

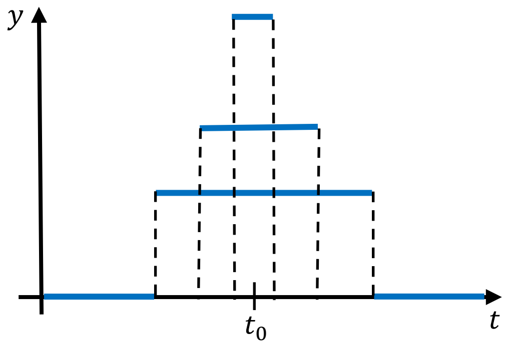


Figura 9: Delta de Dirac

Esta expresión, que no es una función, se puede caracterizar mediante las dos propiedades:

$$\boxed{\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty & si \quad t=t_0\\ 0 & si \quad t\neq t_0\end{cases} \quad , \quad \int_0^{\infty}\delta(t-t_0)\,dt=1}$$

$$\delta(t-t_0)=\frac{1}{2\,a}\left[u\big(t-(t_0-a)\big)-u\big(t-(t_0+a)\big)\right]$$

$$\mathcal{L}\big(\delta(t-t_0)\big)=\frac{1}{2\,a}\left[\frac{e^{-s\,(t_0-a)}}{s}-\frac{e^{-s\,(t_0+a)}}{s}\right]$$

$$\boxed{\mathcal{L}\big(\delta(t-t_0)\big)=e^{-s\,t_0}\left(\frac{e^{s\,a}-e^{-s\,a}}{2\,s\,a}\right)}$$

¿Qué sucede cuando $a\to 0$? (aplicar regla de L´Hôpital)

$$e^{-s\,t_0}\lim_{a\to 0}\left(\frac{e^{s\,a}-e^{-s\,a}}{2\,s\,a}\right)=e^{-s\,t_0}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\big(\delta(t-t_0)\big)=e^{-s\,t_0}}$$

Ahora cuando $t_0 = 0$ se concluye que:

$$\boxed{\mathcal{L}\big(\delta(t)\big) = 1}$$

Transformada de una integral

Muchas veces la incógnita aparece en forma de derivada formando una ecuación diferencial. Otra veces puede aparecer en forma de integral formando una ecuación integral o integro-diferencial según sea el caso. La única forma de resolver esta situación es aplicar la transformada de Laplace.

Demostración

$$\mathcal{L}\big(f(t)\big) = \int_0^\infty e^{-s\,t} \int_0^t f(u)\,du\,dt$$

$$\mathcal{L}\big(f(t)\big) = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-s\,t} \int_0^t f(u)\,du\,dt$$

Aplicamos el método de integración por partes:

$$u = \int_0^t f(u)\,du \Rightarrow du = f(t)$$

$$dv = e^{-s\,t}\,dt \Rightarrow$$

$$v = \int e^{-s\,t}\,dt = \frac{e^{-s\,t}}{-s}$$

$$\lim_{b\to\infty} \left[\frac{e^{-s\,t}}{-s} \int_0^t f(u)\,du - \int_0^b \frac{e^{-s\,t}}{-s}\; f(t)\,dt\right]_0^b \Rightarrow$$

$$\lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-s\,t}}{-s}\int_0^t f(u)\,du+\frac{1}{s}\int_0^b e^{-s\,t}\;f(t)\,dt\right]_0^b\;\Rightarrow$$

Aplicamos la regla de Barrow:

$$\lim_{b\to\infty}\left[\underbrace{\frac{e^{-s\,b}}{-s}\int_0^b f(u)\,du-\frac{e^{-s\,(0)}}{-s}\int_0^0 f(u)\,du}_{=0}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{s}\int_0^b e^{-s\,t}\;f(t)\,dt\underbrace{-\frac{1}{s}\int_0^0 e^{-s\,t}\;f(t)\,dt}_{=0}\right]\;\Rightarrow$$

$$\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{s}\underbrace{\int_0^b e^{-s\,t}\;f(t)\,dt}_{\mathcal{L}(f(t))}\right]\;\Rightarrow$$

$$\boxed{\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)\,du\right)=\frac{1}{s}\,\mathcal{L}\big(f(t)\big)}$$

Ejemplos de ecuaciones:

1. $y''(t)+\int_0^t y(u)\,du=Cos(t)$
2. $y(t)+\int_0^t y(u)\,du=0$

Tabla de transformadas de Laplace

	$f(t)$	$F(s)$
1	1	$\frac{1}{s}$
2	t	$\frac{1}{s^2}$
3	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4	$\mathscr{U}(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
5	$\cos(kt)$	$\frac{s}{s^2+k^2}$
6	$\sin(kt)$	$\frac{k}{s^2+k^2}$
7	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
8	$\int_0^t f(u)du$	$\frac{1}{s}\mathscr{L}f(t)$

Tabla 1: Desarrollos de transformadas de Laplace

Transformada de una derivada

Si $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ son continuas y de orden exponencial en $[0,\infty)$ y si $f^{(n)}(t)$ es continua por partes en $[0,\infty)$ entonces:

$$\boxed{\mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right) = s^n\,\mathcal{L}\big(f(t)\big) - s^{n-1}\,f(0) - s^{n-2}\,f'(0) - \cdots - s^0\,f^{(n-1)}(0)}$$

Ejemplo:

Calcular $\mathcal{L}\left(y'''(t)\right)$ con $y(0)=1,\ y'(0)=3,\ y''(0)=-1$

$$\mathcal{L}\left(y'''(t)\right)=s^3\,\mathcal{L}\left(y(t)\right)-s^2\,y(0)-s\,y'(0)-s^0\,y''(0)$$

$$\mathcal{L}\left(y'''(t)\right)=s^3\,Y(s)-s^2\,1-s\,3-s^0\,(-1)$$

$$\mathcal{L}\left(y'''(t)\right)=s^3\,Y(s)-s^2-3\,s-1$$

Transformada inversa de Laplace

Es necesario, como veremos, que para resolver una ecuación diferencial con el método de Laplace calcular la antitransformada de una función:

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left(F(s)\right)=f(t)=\frac{1}{2\,\pi\,i}\int_{c-i\,\infty}^{c+i\,\infty}F(s)\,e^{s\,t}\,ds\ ,\quad con\ c\in\mathbb{C}}$$

Dado que se trata de una integral compleja, utilizaremos la tabla de transformas de Laplace.

Traslación en el eje *"s"*

Primer teorema de traslación

$$\boxed{\mathcal{L}\left(e^{a\,t}\,f(t)\right)=\mathcal{L}\left(f(t)\right)|_{s\to s-a}}$$

Ejemplo:

$$\mathcal{L}\left(e^{3\,t}\,Sin(t)\right)=\mathcal{L}\left(Sin(t)\right)|_{s\to s-3}=\left(\frac{1}{s^2+1}\right)_{|s\to s-3}=\frac{1}{(s-3)^2+1}$$

Inversa del primer teorema

Para calcular la inversa de $F(s-a)$, se debe reconocer a $F(s)$, determinar $f(t)$ al obtener la transformada inversa de $F(s)$, multiplicar a $f(t)$ por la función exponencial $e^{a\,t}$.

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\big(F(s-a)\big) = e^{a\,t}\,\mathcal{L}^{-1}\big(F(s)\big) = e^{a\,t}\,f(t)}$$

Ejemplo:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-2}{\underbrace{(s-2)^2+1}_{a=2}}\right) = e^{2\,t}\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) = e^{2\,t}\,Cos(t)$$

Traslación en el eje *"t"*

Segundo teorema de traslación

Si $F(s) = \mathcal{L}\big(f(t)\big)\ y\ a > 0$ entonces:

$$\boxed{\mathcal{L}\big(u(t-a)\,f(t)\big) = e^{-a\,s}\,f(t+a)}$$

Ejemplo:

$$\mathcal{L}\left(\underbrace{u(t-\pi)}_{a=\pi}\ Sin(t)\right) = e^{-\pi\,s}\,\mathcal{L}\big(Sin(t+\pi)\big) \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}\big(u(t-\pi)\,Sin(t)\big) = e^{-\pi\,s}\,\mathcal{L}\left(Sin(t)\ \underbrace{Cos(\pi)}_{=-1} + \underbrace{Sin(\pi)}_{=0}\ Cos(t)\right)$$

$$\boxed{\mathcal{L}\big(u(t-\pi)\,Sin(t)\big) = e^{-\pi\,s}\,\mathcal{L}\big(-Sin(t)\big) = -e^{-\pi\,s}\,\frac{1}{s^2+1}}$$

Inversa del segundo teorema de traslación

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-a\,s}\,F(s)\right) = u(t-a)\,\mathcal{L}^{-1}\left(F(s)\right)|_{t\to t-a}}$$

Ejemplo:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\underbrace{e^{-2\,s}}_{a=2}\,\frac{1}{s^3}\right) = \frac{u(t-2)}{(2)}\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1\,(2)}{\underbrace{s^3}_{\substack{n+1=3\\ n=2}}}\right)_{|t\to t-2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-2\,s}\,\frac{1}{s^3}\right) = \frac{u(t-2)}{2}\,(t^2)_{|t\to t-2}$$

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-2\,s}\,\frac{1}{s^3}\right) = \frac{u(t-2)}{2}\,(t-2)^2}$$

Método de la Laplace para hallar
la solución de una EDO

La transformada de Laplace es adecuada para resolver problemas lineales donde conocemos los valores iniciales. Este tipo de ecuaciones diferenciales es una combinación lineal de $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$, es decir:

$$\boxed{a_n\,y^{(n)}(t) + a_{n-1}\,y^{(n-1)}(t) + a_{n-2}\,y^{(n-2)}(t) + \cdots + a_0\,y(t) = f(t)}$$

Donde a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_0 son coeficientes constantes.

Esta EDO se puede resolver por los métodos ya estudiados si f(t) es una función continua en [0,∞). Si f(t) es continua por partes y de orden exponencial en [0; ∞) solo es posible utilizar el método de Laplace para su resolución. El siguiente esquema resume el método:

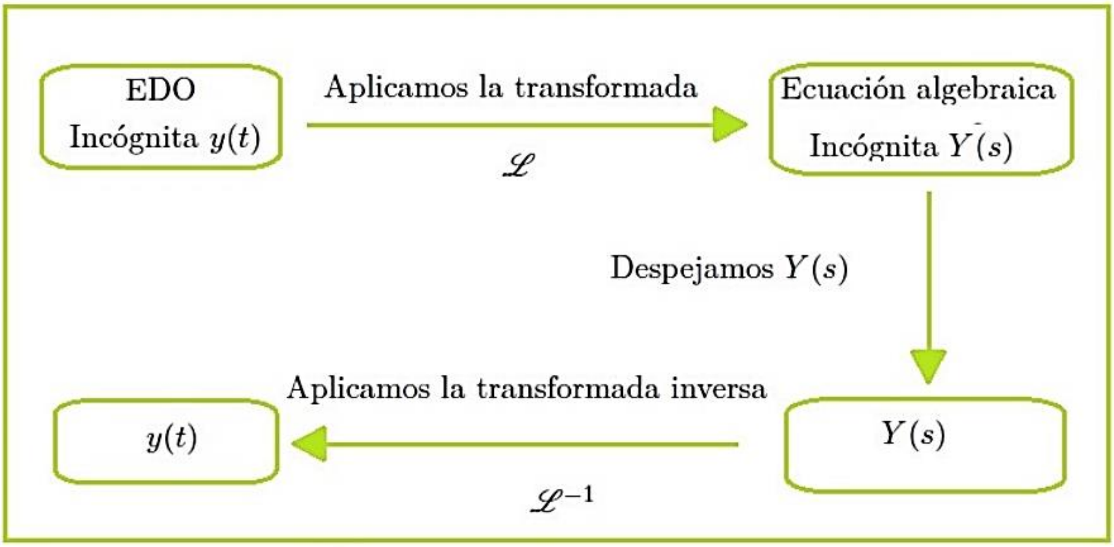


Figura 10: Esquema para resolver una EDO

Resolver: $y'(t) + 3\,y(t) = 13\,Sin(2\,t)\,,\; y(0) = 6$

Aplicar transformada de Laplace miembro a miembro.

$$\mathcal{L}\big(y'(t)\big) + \mathcal{L}\big(3\,y(t)\big) = \mathcal{L}\big(13\,Sin(2\,t)\big) \quad [1]$$

$$\mathcal{L}\big(y'(t)\big) = s^1\,\mathcal{L}\big(y(t)\big) - s^0\,y(0) = s\,Y(s) - 6$$

$$3\,\mathcal{L}\big(y(t)\big) = 3\,Y(s)$$

$$13\,\mathcal{L}\left(\underbrace{Sin(2\,t)}_{k\,=\,2}\right) = \frac{13\,(2)}{s^2+4}$$

Reemplazamos las transformadas en [1]:

$$s\,Y(s) - 6 + 3\,Y(s) = \frac{26}{s^2+4} \quad [2]$$

De [2] despejamos Y(s):

$$Y(s)(s+3) = \frac{26}{s^2+4} + 6 \quad \Longrightarrow$$

$$\boxed{Y(s) = \frac{26}{(s+3)(s^2+4)} + \frac{6}{(s+3)} \quad [3]}$$

La ecuación [3] se denomina ***Función de transferencia.*** La misma será de interés en el estudio de la teoría de control. Pero como queremos trabajar en el dominio temporal, debemos calcular y(t). Para ello, aplicamos antitransformada de Laplace miembro a miembro en [3]:

$$\mathcal{L}^{-1}\big(Y(s)\big) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{26}{(s+3)(s^2+4)}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6}{(s+3)}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\big(Y(s)\big) = y(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{26}{(s+3)(s^2+4)}\right)$$

Cálculo auxiliar:

$$\frac{26}{(s+3)(s^2+4)} = \frac{A}{(s+3)} + \frac{B\,s+c}{(s^2+4)} \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{26}{(s+3)(s^2+4)} = \frac{A\,(s^2+4) + (B\,s+c)\,(s+3)}{(s+3)(s^2+4)} \quad \Longrightarrow$$

$$26 = A\,(s^2+4) + (B\,s+c)\,(s+3) \quad \Longrightarrow$$

$$26 = A\,s^2 + 4\,A + B\,s^2 + 3\,B\,s + C\,s + 3\,C \quad \Longrightarrow$$

$$26 = s^2\,(A+B) + s(3\,B+C) + (4\,A+3\,C) \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 3\,B + C = 0 \\ 4\,A + 3\,C = 26 \end{cases}$$

$B = -A$

$3\,(-A) + C = 0 \quad \Longrightarrow C = 3\,A$

$4\,A + 3\,(3\,A) = 26 \quad \Longrightarrow A = \dfrac{26}{13} = 2$

$C = 6$

$B = -2$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{26}{(s+3)(s^2+4)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A}{(s+3)} + \frac{B\,s + c}{(s^2+4)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s+3)} + \frac{-2\,s+6}{(s^2+4)}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s+3)} - \frac{2\,(s-3)}{(s^2+4)}\right)$$

$$2\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+3)}\right) - 2\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(s-3)}{(s^2+4)}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+3)}\right) = e^{-3\,t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(s-3)}{(s^2+4)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+4)}\right) - \frac{3}{(2)}\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1\,(2)}{(s^2+4)}\right) = Cos(2\,t) - \frac{3}{2}\,Sin(2\,t)$$

$$2\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+3)} - \frac{(s-3)}{(s^2+4)}\right) = 2\,e^{-3\,t} - 2\,Cos(2\,t) + 3\,Sin(2\,t)$$

$$6\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+3)}\right) = 6\,e^{-3\,t}$$

$$\boxed{y(t) = 8\,e^{-3\,t} - 2\,Cos(2\,t) + 3\,Sin(2\,t)}$$

Ejemplo de aplicación

Se desea estudia la carga y descarga de un capacitor. Para ello se dispone de un circuito automatizado que durante los primeros 60 segundo aplica 5V a través de la posición 1. Luego en la posición 2, se descarga el capacitor durante 60 segundos también.

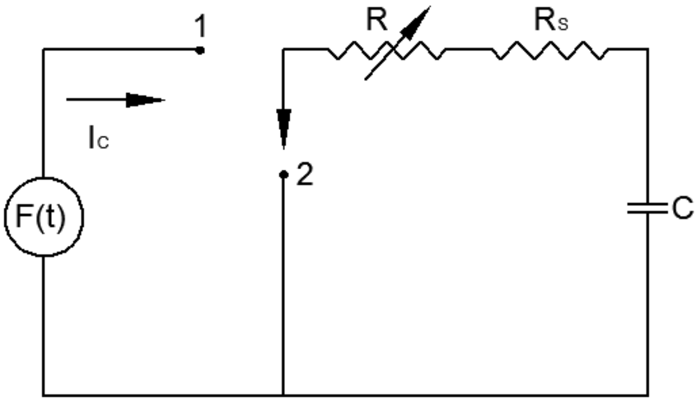


Figura 11: Circuito en estudio

1. Resolver mediante MatLab
2. Graficar $V_C(t)$
3. Deducir y hallar $I_C(t)$
4. Graficar la corriente del capacitor.
5. Tomar datos en el laboratorio

Datos:

$C = 2200\ \mu F$

$R^* = 5000\ \Omega$

$r = 9.9\ \Omega$

$v = 5\ V$

$$f(t) - V_R(t) - V_{r(t)} - V_c(t) = 0$$

$$f(t) = V_R(t) + V_r(t) + V_c(t)$$

$$f(t) = I_C(t)\, R + I_C(t)\, r + V_c(t)$$

$$\boxed{f(t) = I_C(t)\,(R + r) + V_c(t) \quad [1]}$$

Analizamos el capacitor:

$$V_C(t) = \frac{Q(t)}{C} \quad \Longrightarrow \quad V_C{}'(t) = \frac{Q'(t)}{C} = \frac{1}{C}\, I_C(t)$$

$$\boxed{I_C(t) = C\, V_C'(t) \quad [2]}$$

Reemplazo [2] en [1]:

$$\boxed{f(t) = C\, V_C'(t)\,(R + r) + V_c(t) \quad [3]}$$

La ecuación [3] es una ecuación diferencial dado que la incógnita se encuentra en forma de derivada.

De [2], se puede reescribir [1] de la siguiente manera:

$$\boxed{V_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t I_C(u)\, du \quad [4]}$$

Reemplazamos [4] en [1]:

$$\boxed{f(t) = I_C(t)\,(R + r) + \frac{1}{C} \int_0^t I_C(u)\, du \quad [5]}$$

La ecuación [5] la llamaremos ecuación integral, dado que la incógnita se encuentra adentro de una integral.

$$C\, V_C'(t)\,(R + r) + V_c(t) = f(t)$$

$$V_C(0) = 0$$

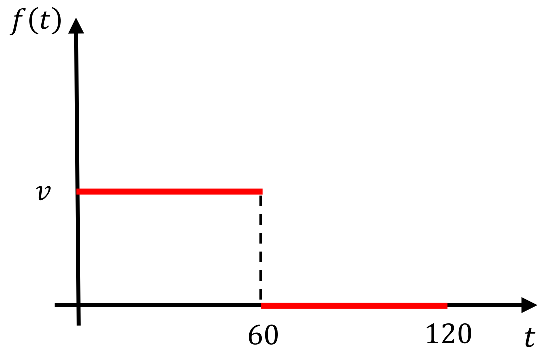


Figura 12: Comportamiento de la alimentación

$$f(t) = v\,[u(t-0) - u(t-60)]$$

$$\begin{cases} C\,V_C'(t)\,(R+r) + V_c(t) = v\,[u(t) - u(t-60)] \\ V_C(0) = 0 \end{cases}$$

Para hallar la corriente utilizaremos la siguiente igualdad:

$$V_C'(t) = \frac{1}{C}\,I_C(t) \quad \Longrightarrow$$

$$\boxed{I_C(t) = C\,V_C'(t)}$$

Función delta de Dirac

Resolver:

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = 4\,\delta(t - 2\,\pi) \\ y(0) = 0, \;\; y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{y(t) = 4\,u(t - 2\,\pi)\,Sin(t)}$$

$$y(t) = \begin{cases} 0 \quad si \quad 0 \leq t < 2\,\pi \\ 4\,Sin(t) \quad si\; t \geq 2\,\pi \end{cases}$$

Gráficamente

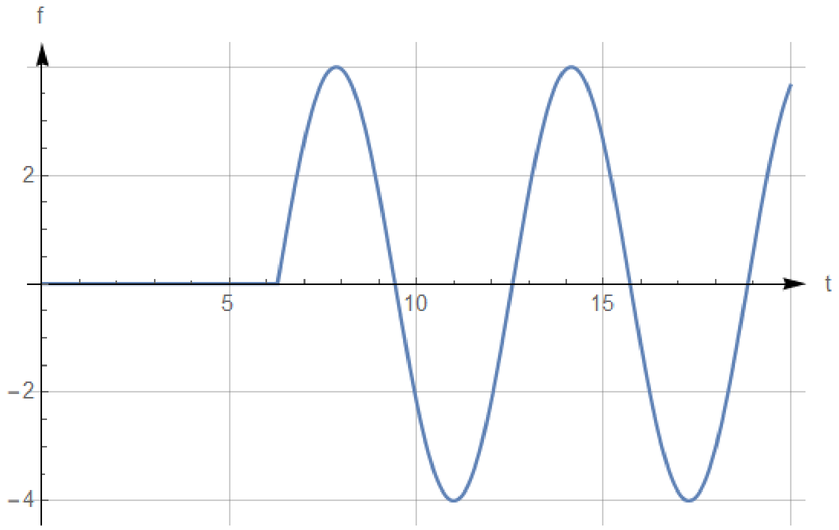


Figura 13: Resultado gráfico de la solución de la EDO

Transformada de Laplace de funciones periódicas

Si una función periódica tiene periodo *T*, *T>0*, entonces $f(t+T) = f(t)$. El siguiente teorema muestra que la transformada de Laplace de una función se obtiene mediante integración sobre un periodo.

Si *f(t)* es continua por partes en *[0, ∞),* de orden exponencial y con periodo *T*, entonces:

$$\boxed{\mathcal{L}\big(f(t)\big) = \frac{1}{1 - e^{-s\,T}} \int_0^T e^{-s\,t}\, f(t)\, dt}$$

Ejemplo:

Hallar la transformada de Laplace de la siguiente función periódica.

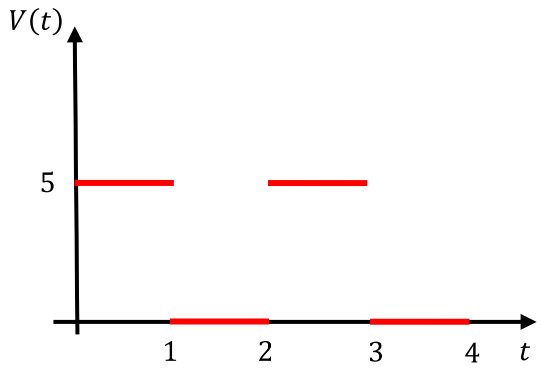


Figura 14: Señal de onda cuadrada

La función *V(t)* se llama onda cuadrada y tiene periodo *T=2*. En el intervalo *0 < t < 2, V(t)* se puede definir mediante:

$$V(t) = \begin{cases} 5 & si \quad 0 < t < 1 \\ 0 & si \quad 1 < t < 2 \end{cases}$$

Y fuera del intervalo $f(t+2) = f(t)$, aplicamos la transformada de una función periódica:

$$\mathcal{L}\big(V(t)\big) = \frac{1}{1 - e^{-s\,T}} \int_0^T e^{-s\,t}\, V(t)\, dt = \frac{1}{1 - e^{-2\,s}} \left[\int_0^1 e^{-s\,t}\, 5\, dt + \underbrace{\int_1^2 e^{-s\,t}\, 0\, dt}_{=0} \right]$$

$$\mathcal{L}\big(V(t)\big) = \frac{1}{1 - e^{-2\,s}}\, 5 \int_0^1 e^{-s\,t}\, dt = \frac{5}{1 - e^{-2\,s}} \left[\frac{e^{-s\,t}}{-s} \right]_0^1$$

$$\mathcal{L}\big(V(t)\big) = \frac{5}{(1 - e^{-2\,s})} \left(\frac{1}{-s} \right) \left(e^{-s} - e^{(0)} \right)$$

$$\mathcal{L}(V(t)) = \frac{5}{\underbrace{(1-e^{-2\,s})}_{(1-e^{-s})(1+e^{-s})}} \frac{1-e^{-s}}{s}$$

$$\boxed{\mathcal{L}(V(t)) = \frac{5}{s\,(1+e^{-s})}}$$

Se desea estudiar el circuito de la figura 14 el cual es sometido a una señal cuadrada como la estudiada previamente. Inicialmente no circula corriente.

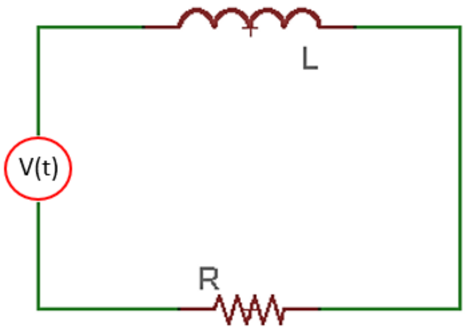


Figura 15: Señal de onda cuadrada

$$\begin{cases} L\,\dfrac{di}{dt} + R\,i(t) = V(t) \\ i(0) = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\left(L\,\frac{di}{dt}\right) + \mathcal{L}(R\,i(t)) = \mathcal{L}(V(t))$$

$$L\,\mathcal{L}\left(\frac{di}{dt}\right) = L\left(s\,\mathcal{L}(i(t)) - i(0)\right) = L\,s\,I(s)$$

$$\mathcal{L}(R\,i(t)) = R\,I(s)$$

$$\mathcal{L}(V(t)) = \frac{5}{s\,(1+e^{-s})}$$

Reemplazando:

$$L\,s\,I(s) + R\,I(s) = \frac{5}{s\,(1 + e^{-s})} \quad \Longrightarrow$$

$$I(s)\,(L\,s + R) = \frac{5}{s\,(1 + e^{-s})} \quad \Longrightarrow$$

$$I(s) = \frac{5}{s\,(1 + e^{-s})}\,\frac{1}{(L\,s + R)} \quad \Longrightarrow$$

$$\boxed{I(s) = \frac{5\,\frac{1}{L}}{s\,\left(s + \frac{R}{L}\right)}\,\frac{1}{(1 + e^{-s})}}$$

Desarrollo en serie de Taylor o Mc Laurin

$$\boxed{\frac{1}{1 + x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\,x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots}$$

Para hallar la transformada inversa de la última función de transferencia, primero debemos hacer uso de la serie geométrica. Si tomamos $x = e^{-s}, s > 0$

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \Longrightarrow \frac{1}{(1 + e^{-s})} = 1 - e^{-s} + e^{-2\,s} - e^{-3\,s} + \cdots$$

$$I(s) = \left(\frac{5}{R\,s} - \frac{5\,L}{R\,(L\,s + R)}\right)\frac{1}{(1 + e^{-s})}$$

$$I(s) = \frac{5}{R}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{\left(s + \frac{R}{L}\right)}\right)(1 - e^{-s} + e^{-2\,s} - e^{-3\,s} + \cdots) \quad \Longrightarrow$$

$$I(s) = \frac{5}{R}\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2\,s}}{s} - \frac{e^{-3\,s}}{s} + \cdots\right) -$$

$$-\frac{5}{R}\left(\frac{1}{s+\frac{R}{L}} - \frac{e^{-s}}{s+\frac{R}{L}} + \frac{e^{-2\,s}}{s+\frac{R}{L}} - \frac{e^{-3\,s}}{s+\frac{R}{L}} + \cdots\right)$$

Aplicando transformada inversa de Laplace m. a m.:

$$i(t) = \frac{5}{R}\,[1 - u(t-1) + u(t-2) - u(t-3) + \cdots] -$$

$$-\frac{5}{R}\left[e^{-\frac{R\,t}{L}} - u(t-1)\,e^{-\frac{R\,(t-1)}{L}} + u(t-2)\,e^{-\frac{R\,(t-2)}{L}} - u(t-3)\,e^{-\frac{R\,(t-3)}{L}} + \cdots\right]$$

Reagrupando y escribiendo todo en términos de una sumatoria:

$$\boxed{i(t) = \frac{5}{R}\left(1 - e^{-\frac{R\,t}{L}}\right) + \frac{5}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\left(1 - e^{-\frac{R\,(t-n)}{L}}\right)u(t-n)\right]}$$

$R = 5\,\Omega$

$L = 300\ mHy$

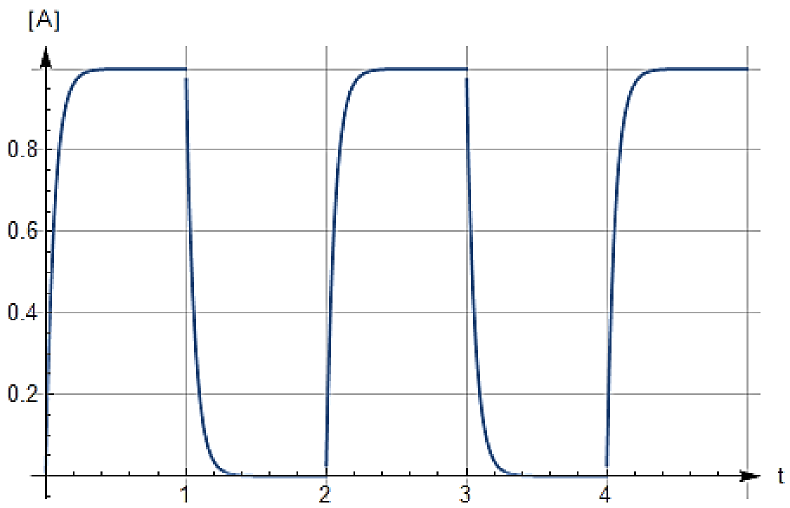


Figura 16: Gráfica de i(t)

Lugar de raíz

Dada una función de transferencia, llamaremos ceros a aquellos valores de “s” que anulen el numerador (es decir las raíces del polinomio) y llamaremos polos a aquellas raíces que anulen el denominador.

$$función\ de\ transferencia = \frac{\mathcal{L}(x(t))}{\mathcal{L}(y(t))} = G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)}$$

Se puede definir a un sistema como **estable** cuando dada una entrada ésta tiene un transitorio que se **desvanece** con el tiempo y deja al sistema en su condición de estado estable. Por el contrario, se dice que un sistema es **inestable** cuando los transitorios no se **desvanecen** con el tiempo, pero aumentan en tamaño y por tal motivo la condición de estado estable ***nunca*** se alcanza.

Ejemplo 1:

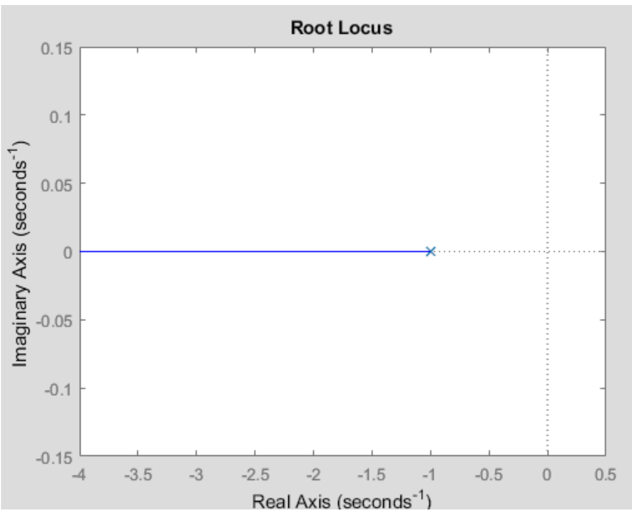
Analizar la siguiente función de transferencia, dibujar el lugar de raíz, antitransformar y graficar la solución temporal.

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

La raíz del denominador es: $s + 1 = 0 \implies s = -1$

Por otro lado, si anti transformamos:

$$x(t) = e^{-t}$$



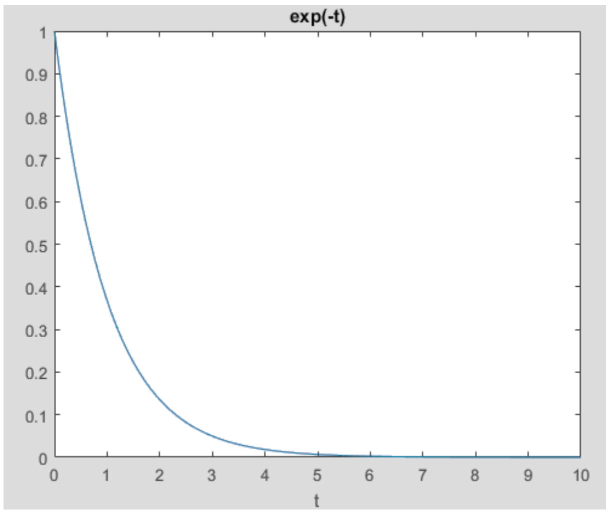


Figura 17, izquierda: lugar de raíz, derecha: gráfica de *x(t)*

Ejemplo 2:

Analizar la siguiente función de transferencia, dibujar el lugar de raíz, transformar y graficar la solución temporal.

$$H(s) = \frac{1}{s-1}$$

La raíz del denominador es: $s - 1 = 0 \implies s = 1$

Por otro lado, si anti transformamos:

$$x(t) = e^t$$

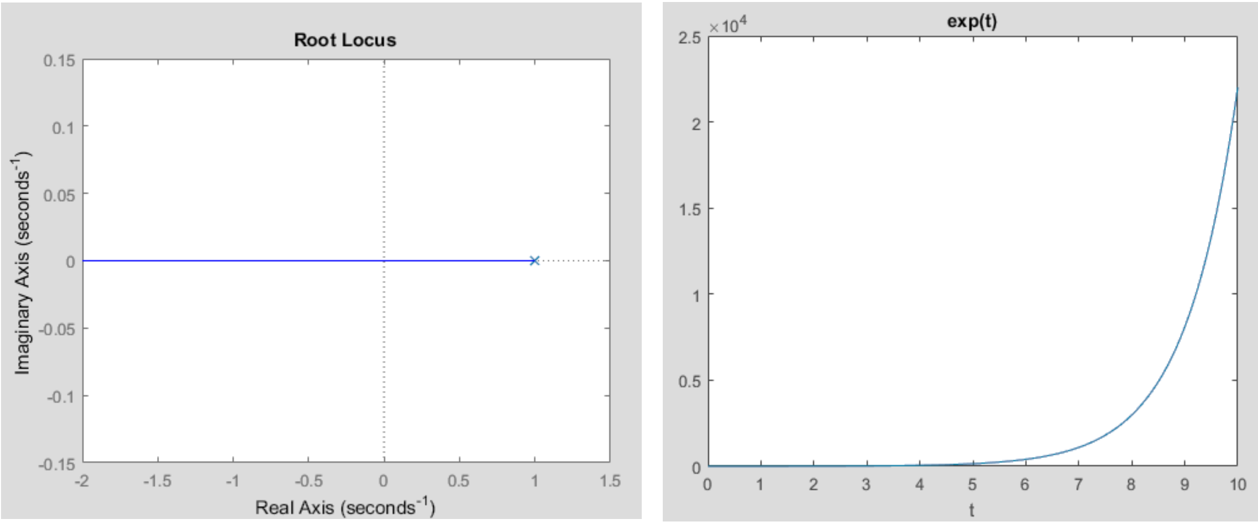


Figura 18, izquierda: lugar de raíz, derecha: gráfica de *x(t)*

Ejemplo 3:

Analizar la siguiente función de transferencia, dibujar el lugar de raíz, transformar y graficar la solución temporal.

$$F(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

Queda a cargo del lector la resolución.

A partir de las figuras 17 y 18, se pueden realizar varias interpretaciones. Por una parte, cuando se dibuja el lugar de raíz, se debe pensar en el plano complejo dado que pueden aparecer soluciones imaginarias en los polinomios. Los polos se grafican con una cruz "x" y los ceros con un cirulo "o". Por otro lado, se observa que en el ejemplo 1 hay un polo negativo que genera una respuesta estable, mientras que en el ejemplo 2, se aprecia que la respuesta temporal pertenece a un sistema inestable porque su polo se encuentra en la parte positiva del lugar de raíz.

Es posible concluir entonces que la posición de los polos en el lugar de raíz determina la estabilidad del sistema. A propósito, se ha realizado también el gráfico de la antritransformada de Laplace a fin de demostrar el comportamiento del lugar de raíz. Si se tiene conocimiento de esta cuestión, resulta poco práctico trabajar en el dominio temporal porque sólo basta con conocer el lugar de los polos para determinar la estabilidad del sistema.

El análisis de los ceros de la función de transferencia no será realizado en este video, pero como ya se darán cuenta, se dirá que se utiliza, entre otras cosas, para encontrar la estabilidad requerida a la planta en estudio.

La figura siguiente, se ilustran estas situaciones planteadas y otras:

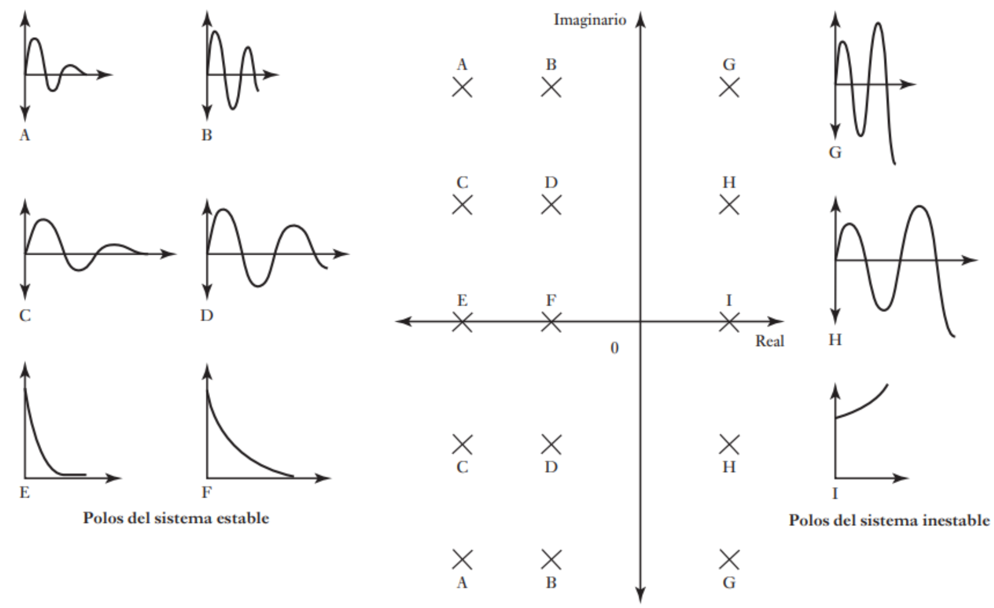


Figura 19: Gráfica de los polos y sus respuestas temporales

Teorema de valor inicial y final

Se efectuará el análisis de dos teoremas fundamentales en el estudio de la teoría de control: Teorema de valor inicial y teorema de valor final. Tanto el teorema de valor inicial y final son herramientas para el diseñador de sistemas de control que permiten, a través de una función de transferencia conocida, conocer su condición inicial o predecir su comportamiento en el ***"infinito"***.

Teorema de valor inicial:

Sea f derivable con f(t) y f'(t) de orden exponencial, si $F(s) = \mathcal{L}\big(f(t)\big)$ Entonces, el teorema de valor inicial nos dice que:

$$\lim_{s\to\infty} s\,F(s) = f(0)$$

Demostración:

$$\mathcal{L}\big(f'(t)\big) = s\,\mathcal{L}\big(f(t)\big) - f(0)$$

$$s\,\mathcal{L}\big(f(t)\big) = \mathcal{L}\big(f'(t)\big) + f(0)$$

$$\lim_{s\to\infty} s\,\mathcal{L}\big(f(t)\big) = \lim_{s\to\infty} \mathcal{L}\big(f'(t)\big) + f(0)$$

$$\lim_{s\to\infty} s\,\mathcal{L}\big(f(t)\big) = \lim_{s\to\infty} \int_0^\infty e^{-s\,t}\, f'(t)\,dt + f(0)$$

$$\boxed{\lim_{s\to\infty} s\,F(s) = f(0)}$$

Ejemplo 3:

Dada la EDO: $6\,y'(t) + 9\,y(t) = t\,Sin(t)$ con y(0) = 2

Se puede demostrar que la función de transferencia de la EDO, es:

$$F(s) = \frac{2(6 + s + 12s^2 + 6s^4)}{3(3+2s)(1+s^2)^2}$$

Luego aplicando el teorema:

$$\lim_{s\to\infty} s\,F(s) = \lim_{s\to\infty} s\,\frac{2(6+s+12s^2+6s^4)}{3(3+2s)(1+s^2)^2} = 2$$

Teorema de valor final

El presente teorema se utiliza para saber cómo se comporta en el infinito, el sistema en estudio dada una función de transferencia. Sea f derivable con f(t) y f'(t) de orden exponencial, si $F(s) = \mathcal{L}\big(f(t)\big)$ Entonces:

$$\lim_{s\to 0} s\,F(s) = \lim_{t\to\infty} f(t)$$

Demostración:

$$\mathcal{L}\big(f'(t)\big) = s\,\mathcal{L}\big(f(t)\big) - f(0)$$

$$s\,\mathcal{L}\big(f(t)\big) = \mathcal{L}\big(f'(t)\big) + f(0)$$

$$s\,F(s) = \int_0^\infty e^{-s\,t}\,f'(t)\,dt + f(0)$$

$$\lim_{s\to 0} s\,F(s) = \lim_{s\to 0}\int_0^\infty e^{-s\,t}\,f'(t)\,dt + f(0)$$

$$\lim_{s\to 0} s\,F(s) = \int_0^\infty \lim_{s\to 0} e^{-s\,t}\,f'(t)\,dt + f(0)$$

$$\lim_{s\to 0} s\,F(s) = \int_0^\infty f'(t)\,dt + f(0)$$

$$\lim_{s\to 0} s\,F(s) = \lim_{b\to\infty}\int_0^b f'(t)\,dt + f(0)$$

$$\lim_{s \to 0} s\, F(s) = \lim_{b \to \infty} f(t) \Big|_0^b + f(0)$$

$$\lim_{s \to 0} s\, F(s) = \lim_{b \to \infty} f(b) - f(0) + f(0)$$

$$\boxed{\lim_{s \to 0} s\, F(s) = \lim_{b \to \infty} f(b) = \lim_{t \to \infty} f(t)}$$

Ejemplo 5:

Dada la función de transferencia

$$G(s) = \frac{1 + 5s^2}{s^2(1 + 5s)}$$

Calcular, mediante el teorema de valor inicial, el valor de $\lim_{t \to \infty} g(t)$

$$\lim_{s \to 0} s\, G(s) = \lim_{s \to 0} s\, \frac{1 + 5s^2}{s^2(1 + 5s)} = \infty$$