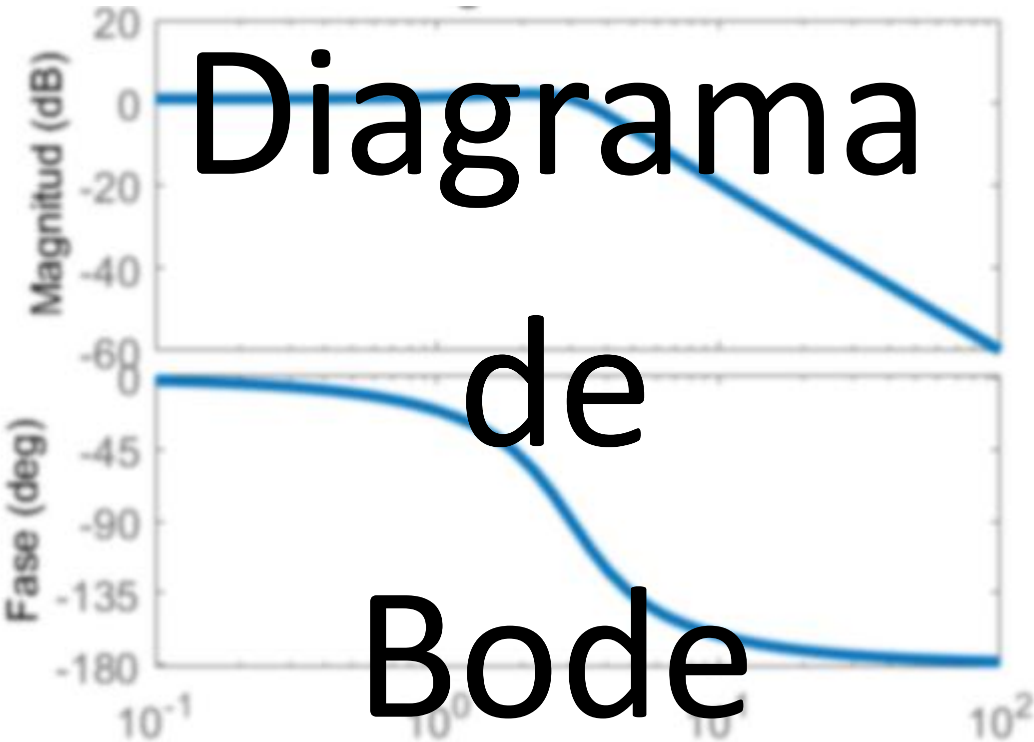
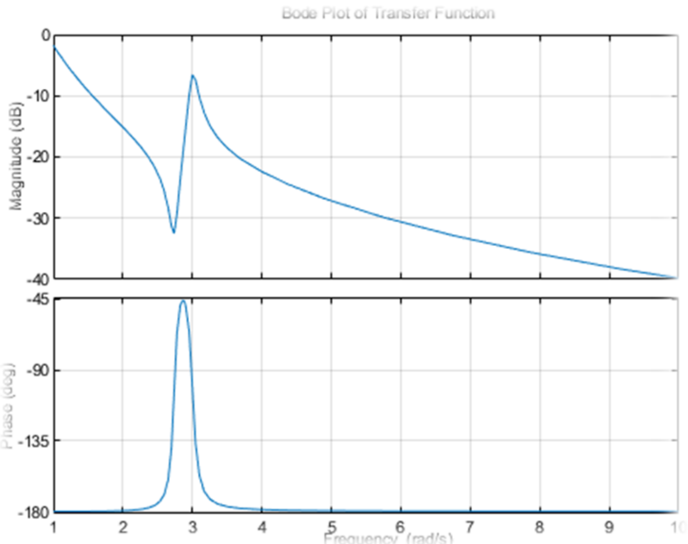


Diagrama de Bode



Función de transferencia

Cuando se habla de la función de transferencia de una planta se está haciendo referencia a la ***ganancia***. La misma indica que tan grande es la señal de salida respecto de la señal de entrada. Se puede demostrar cuando una señal está en el dominio del tiempo, es decir en función del tiempo, al escribirla como *f(t)*. De esta forma, para una entrada *y(t)* y una salida *x(t)* se define a la ganancia como:

$$Ganancia = \frac{salida}{entrada} = \frac{x(t)}{y(t)}$$

Sin embargo, para muchos sistemas, la relación entre la salida y la entrada adopta la forma de ecuación diferencial, por lo que no es posible expresar la función sólo con un número y decir, por ejemplo, que tiene una ganancia de 10. ***<u>No</u>*** es posible dividir la salida y la entrada porque la relación es una ecuación diferencial y no una ecuación algebraica. Para trabajar con Matlab diremos que:

$$j\,\omega = s$$

Al sustituir $j\,\omega$ por s se obtiene la misma ecuación. Ocurre que siempre se puede hacer esto para pasar del dominio del dominio de s al de la frecuencia y viceversa. Este resultado lleva a la definición de **función de transferencia en frecuencia.**

$$G(j\,\omega) = \frac{fasor\ de\ salida}{fasor\ de\ entrada}$$

Diagrama de Bode

La respuesta en frecuencia de un sistema es el conjunto de valores de la magnitud (tensión) y ángulo de fase ϕ que se presentan cuando una señal de entrada varia en un intervalo de frecuencias. Esto se puede expresar como dos gráficas, una de magnitud trazada contra la frecuencia angular ω y la otra de la fase ϕ contra ω. La magnitud y la frecuencia angular se grafican en escalas logarítmicas. A estas dos gráficas se las llama ***diagrama de Bode***.

La magnitud se expresa en unidades de decibeles (dB):

$$|G(j\omega)| = 20\log|G(j\omega)|$$

Desarrollando la expresión, podemos reescribirla como:

$$|G(j\omega)| = 20\log\left(\frac{V_{out}}{V_{in}}\right)$$

En un principio, es poco cómodo expresar las magnitudes en dB, pero esta forma de escribirlas, resulta más cómodo que la expresión común. Veamos que sucede cuando hablamos de una magnitud de -3 dB. Para ello debemos despejar la relación $\frac{V_{out}}{V_{in}}$:

$$-3 = 20\log\left(\frac{V_{out}}{V_{in}}\right) \Rightarrow$$

$$-\frac{3}{20} = \log\left(\frac{V_{out}}{V_{in}}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = 10^{\frac{-3}{20}} = \frac{1}{10^{\frac{3}{20}}} = \frac{1}{\sqrt[20]{10^3}} = 0{,}7079\ldots$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = 0{,}7079$$

ó

$$V_{out} = V_{in}\,0{,}7079$$

Análisis para 0 dB:

$$0 = 20\log\left(\frac{V_{out}}{V_{in}}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = 10^0 = 1$$

$$\therefore\ V_{out} = V_{in}$$

Finalmente, análisis para 3 dB:

$$3 = 20 \log \left(\frac{V_{out}}{V_{in}} \right) \quad \Rightarrow$$

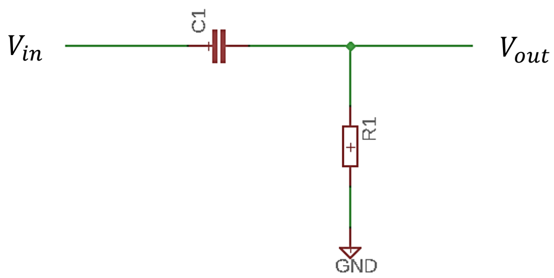
$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = 10^{\frac{3}{20}} = \sqrt[20]{10^3} = 1{,}412 \ldots$$

$$V_{out} = V_{in}\ 1{,}412$$

El ángulo de fase viene dado por:

$$\phi = ArcTan\big(G(j\ \omega)\big)$$

Ejemplo de análisis un filtro pasa alto



Para estudiar el circuito, haremos una analogía con un divisor de tensión:

$$V_{out} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} V_{in} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

En donde:

$$Z_1 = X_c = \frac{1}{j\ \omega\ C} \quad y \quad Z_2 = R$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\,\omega\,C}}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{j\,\omega\,R\,C}{1 + j\,\omega\,R\,C}$$

Remplazamos:

$$j\,\omega = s$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{s\,R\,C}{s\,R\,C + 1}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{s\,R\,C}{R\,C\,\left(s + \frac{1}{R\,C}\right)} = \frac{s}{s + \frac{1}{R\,C}}$$

$$\boxed{\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{s}{s + \frac{1}{R\,C}}}$$

Le damos valor a los componentes a fin de analizar su respuesta en frecuencia:

R = 1000 Ω

C = 0.1 µF

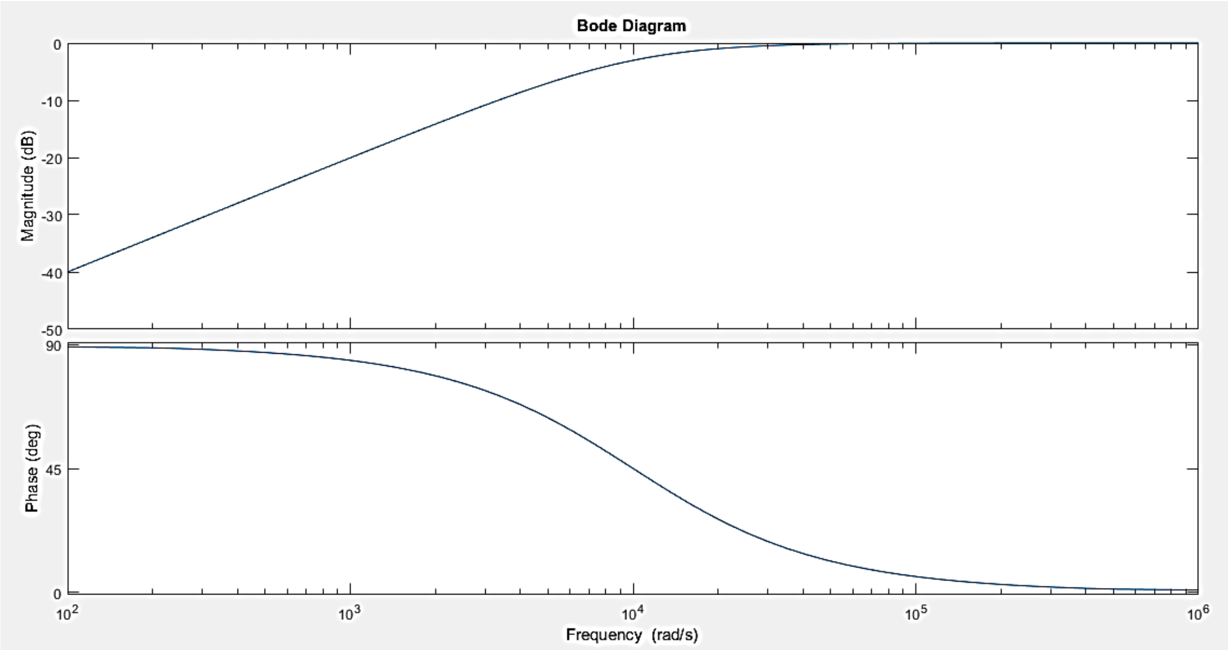
$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{s}{s + \frac{1}{1000\ 0.1\ 10^{-6}}}$$

$$\boxed{\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{s}{s + 10000}}$$

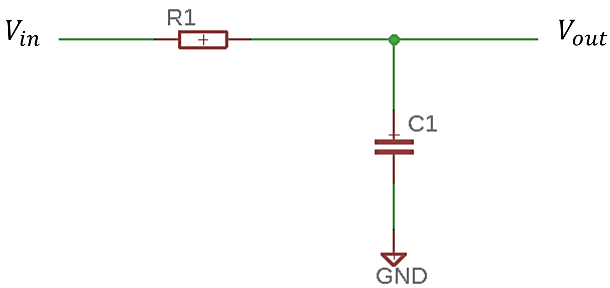
Coeficientes del polinomio del numerador: [1 0]

Coeficientes del polinomio del denominador: [1 10000]

Analizando con MatLab se obtiene:



Análisis para un filtro pasa bajos



$$V_{out} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} V_{in} \Rightarrow$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

En donde:

$$Z_1 = R \;\; y \;\; Z_2 = X_c = \frac{1}{j\,\omega\,C}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{\frac{1}{j\,\omega\,C}}{R + \frac{1}{j\,\omega\,C}} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{\frac{1}{j\,\omega\,C}}{\frac{j\,\omega\,R\,C + 1}{j\,\omega\,C}} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{j\,\omega\,C}{j\,\omega\,C\,(j\,\omega\,R\,C + 1)} = \frac{1}{j\,\omega\,R\,C + 1}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{\frac{1}{R\,C}}{j\,\omega + \frac{1}{R\,C}}$$

Remplazamos:

$$j\,\omega = s$$

$$\boxed{\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{\frac{1}{R\,C}}{s + \frac{1}{R\,C}}}$$

Le damos valor a los componentes a fin de analizar su respuesta en frecuencia:

R = 1000 Ω

C = 0.1 µF

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{\frac{1}{1000\;0.1\;10^{-6}}}{s + \frac{1}{1000\;0.1\;10^{-6}}}$$

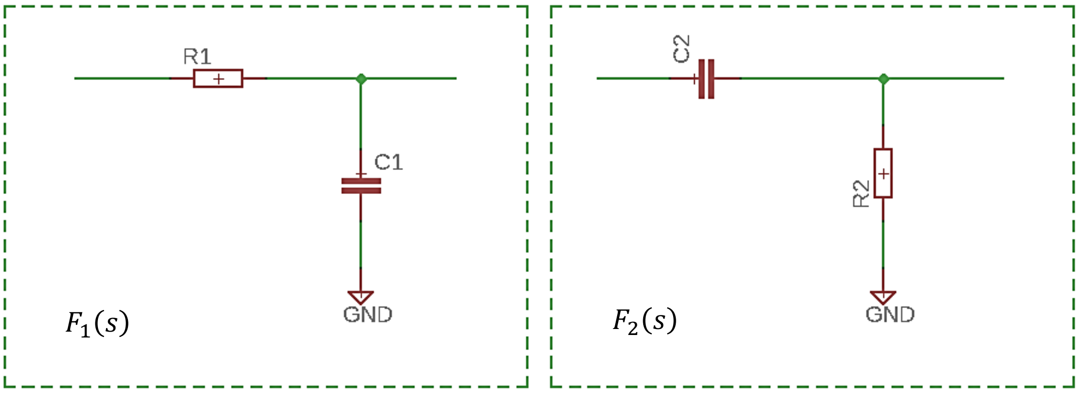
$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{10000}{s + 10000}$$

Coeficientes del polinomio del numerador: [10000]

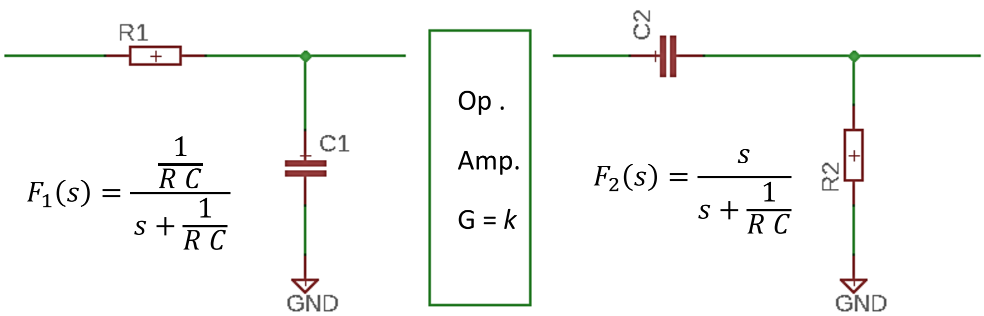
Coeficientes del polinomio del denominador: [1 10000]

Funciones de transferencia de elementos en cascada sin carga

Consideremos el siguiente filtro pasa banda:



La función de transferencia de un sistema formado por elementos en cascada sin carga se obtiene eliminando la entrada y salida intermedia (como se observa en la figura anterior). Dicho en otras palabras, si la impedancia de entrada del segundo elemento es infinita, la salida del primer elemento no se modifica si se conecta al segundo. En este caso, la función de transferencia del sistema es igual al producto de ambas.



$$F_1 * F_2 = \frac{\frac{1}{R\,C}}{s + \frac{1}{R\,C}} (k) \frac{s}{s + \frac{1}{R\,C}}$$

Si consideramos que todos los componentes son iguales:

$$F_1 * F_2 = \frac{\frac{k\,s}{R\,C}}{\left(s + \frac{1}{R\,C}\right)^2}$$

$$F_1 * F_2 = \frac{\frac{k\,s}{R\,C}}{s^2 + \frac{2\,s}{R\,C} + \left(\frac{1}{R\,C}\right)^2}$$

Le damos valor a los componentes a fin de analizar su respuesta en frecuencia:

R = 1000 Ω

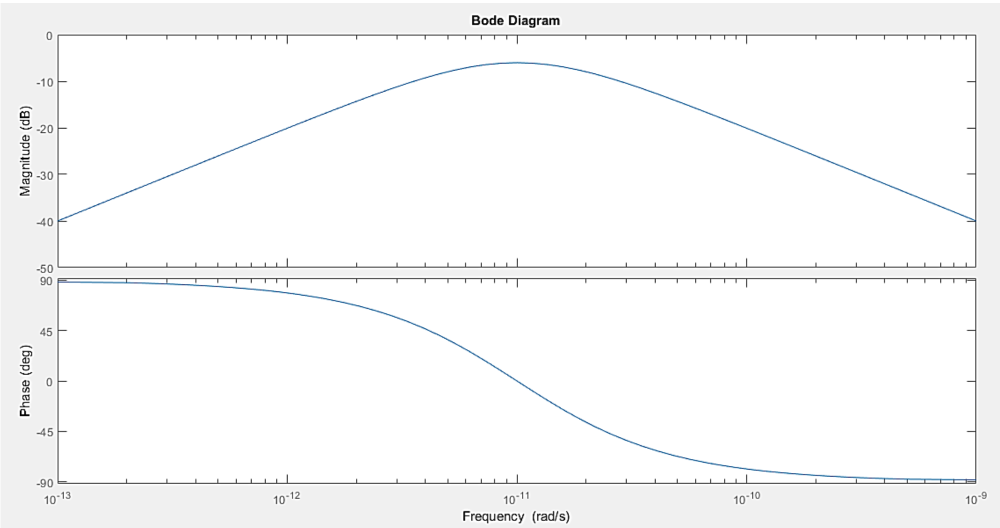
C = 0.1 µF

K = 1

$$F_1 * F_2 = \frac{10000\,s}{s^2 + 20000\,s + 100\;10^6}$$

Coeficientes del polinomio del numerador: [10000 0]

Coeficientes del polinomio del denominador: [1 20000 100*10^6]



Ahora consideramos nuevamente la función de transferencia considerando que los componentes son de distintos valores:

$$F_1 * F_2 = \frac{\frac{1}{R_1\,C_1}}{s + \frac{1}{R_1\,C_1}}\,(k)\,\frac{s}{s + \frac{1}{R_2\,C_2}}$$

$$F_1 * F_2 = \frac{\frac{k\,s}{R_1\,C_1}}{\left(s + \frac{1}{R_1\,C_1}\right)\left(s + \frac{1}{R_2\,C_2}\right)}$$

$$F_1 * F_2 = \frac{\frac{k\,s}{R_1\,C_1}}{s^2 + \frac{s}{R_2\,C_2} + \frac{s}{R_1\,C_1} + \frac{1}{R_1\,C_1}\frac{1}{R_2\,C_2}}$$

$$F_1 * F_2 = \frac{\frac{k\,s}{R_1\,C_1}}{s^2 + s\left(\frac{1}{R_2\,C_2} + \frac{1}{R_1\,C_1}\right) + \frac{1}{R_1\,C_1\,R_2\,C_2}}$$

$$\boxed{F_1 * F_2 = \frac{\frac{k\,s}{R_1\,C_1}}{s^2 + s\left(\frac{R_1\,C_1 + R_2\,C_2}{R_2\,C_2\,R_1\,C_1}\right) + \frac{1}{R_1\,C_1\,R_2\,C_2}}}$$

Le damos valor a los componentes a fin de analizar su respuesta en frecuencia:

R_1 = 1000 Ω

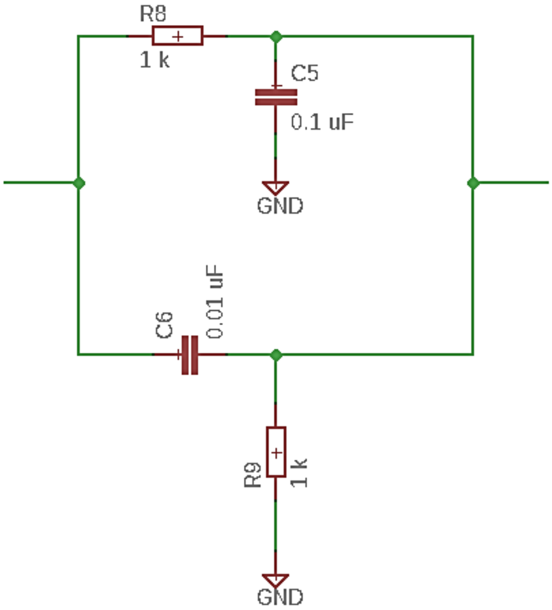
C_1 = 0.1 μF

R_2 = 1000 Ω

C_2 = 0.001 μF

K = 100

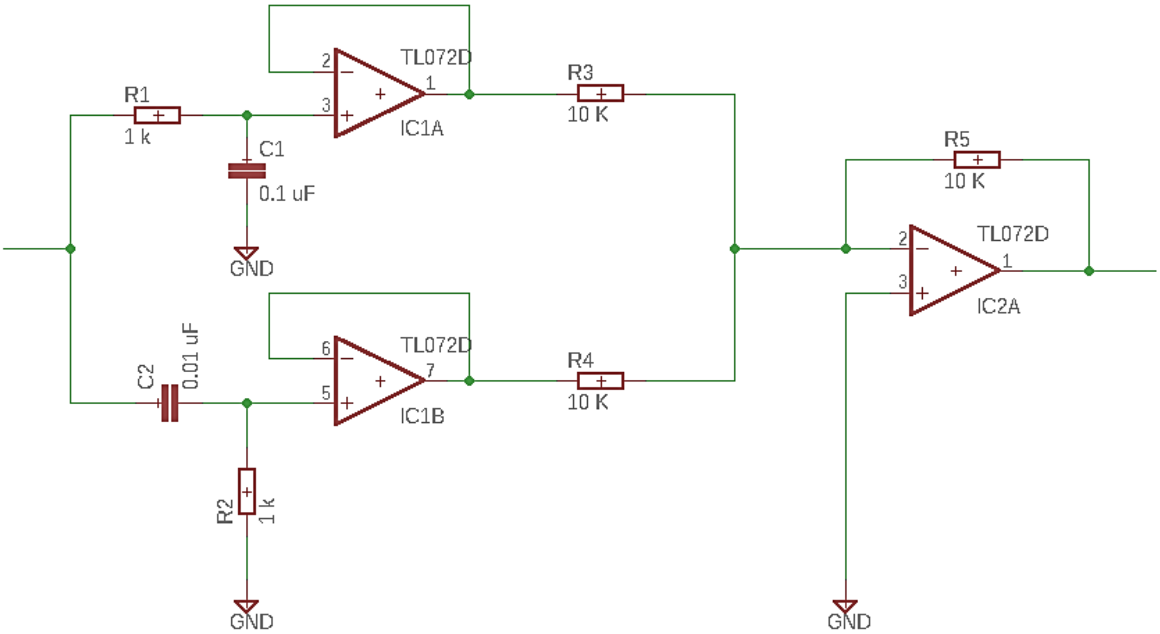
Análisis de un filtro rechaza banda (notch):



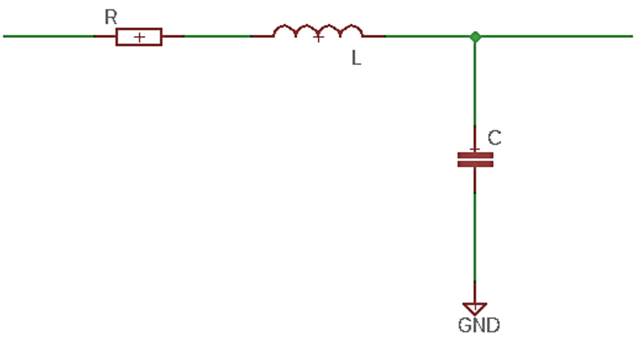
$$F_1 + F_2 = \frac{\frac{1}{R_1\,C_1}}{s + \frac{1}{R_1\,C_1}} + \frac{s}{s + \frac{1}{R_2\,C_2}}$$

$$F_1 + F_2 = \frac{\frac{1}{R_1\,C_1}\left(s + \frac{1}{R_2\,C_2}\right) + s\left(s + \frac{1}{R_1\,C_1}\right)}{\left(s + \frac{1}{R_1\,C_1}\right)\left(s + \frac{1}{R_2\,C_2}\right)}$$

$$\boxed{F_1 + F_2 = \frac{s^2\,C_1\,C_2\,R_1\,R_2 + 2\,s\,C_2\,R_2 + 1}{s^2\,C_1\,C_2\,R_1\,R_2 + s\,(C_1\,R_1 + C_2\,R_2) + 1}}$$



Análisis para un filtro R-L-C



$$V_{out} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} V_{in} \;\; \Rightarrow$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

En donde:

$$Z_1 = R + j\,\omega\,L \;\; y \;\; Z_2 = X_c = \frac{1}{j\,\omega\,C}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{\frac{1}{j\,\omega\,C}}{R + j\,\omega\,L + \frac{1}{j\,\omega\,C}}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{\frac{1}{j\,\omega\,C}}{R + j\,\omega\,L + \frac{1}{j\,\omega\,C}}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{\frac{1}{j\,\omega\,C}}{\frac{j\,\omega\,R\,C + j^2\,\omega^2\,L\,C + 1}{j\,\omega\,C}}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{j^2\,\omega^2\,L\,C + j\,\omega\,R\,C + 1}$$

Remplazamos:

$$j\,\omega = s$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{s^2\,L\,C + s\,R\,C + 1}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{L\,C\,\left(s^2 + s\,\frac{R}{L} + \frac{1}{L\,C}\right)}$$

$$\boxed{\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{\frac{1}{L\,C}}{s^2 + s\,\frac{R}{L} + \frac{1}{L\,C}}}$$

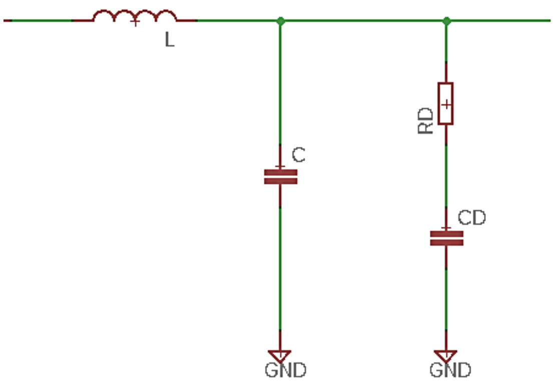
Consideremos:

R = 1,23 Ω

C = 0,1 µF

L = 1 mHy

Amortiguador para la resonancia



$$Z_1 = j\,\omega\,L = s\,L$$

$$Z_2 = X_c = \frac{1}{j\,\omega\,C} = \frac{1}{s\,C}$$

$$Z_3 = \frac{1}{s\,C_D} + R_D$$

$$Z_3 = \frac{1 + s\,R_D\,C_D}{s\,C_D}$$

Resolvemos el paralelo

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}$$

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{\frac{1}{s\,C}} + \frac{1}{\frac{1 + s\,R_D\,C_D}{s\,C_D}}$$

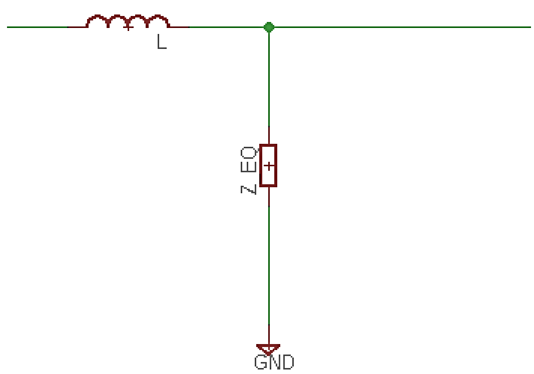
$$\frac{1}{Z_{eq}} = s\,C + \frac{s\,C_D}{1 + s\,R_D\,C_D}$$

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{s\,C\,(1 + s\,R_D\,C_D) + s\,C_D}{1 + s\,R_D\,C_D}$$

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{s\,C + s^2\,R_D\,C_D\,C + s\,C_D}{1 + s\,R_D\,C_D}$$

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{s^2\,R_D\,C_D\,C + s\,(C_D + C)}{1 + s\,R_D\,C_D}$$

$$\boxed{Z_{eq} = \frac{1 + s\,R_D\,C_D}{s^2\,R_D\,C_D\,C + s\,(C_D + C)}}$$



$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{\frac{1 + s\,R_D\,C_D}{s^2\,R_D\,C_D\,C + s\,(C_D + C)}}{s\,L + \frac{1 + s\,R_D\,C_D}{s^2\,R_D\,C_D\,C + s\,(C_D + C)}}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{s\, C_D\, R_D + 1}{s^3\, C\, C_D\, L\, R_D + s^2\, (C\, L + C_D\, L) + s\, C_D\, R_D + 1}$$

En donde:

$$R_D = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$C_D = 4\, C$$