# Классификация траекторий динамических систем с помощью физически-информированных нейросетей

#### Терентьев Александр Андреевич

Московский физико-технический институт

Эксперт: В. В. Стрижов Консультант: С. К. Панченко

2023

## Цель исследования

## Задача

Определить вид активности по координатам физической траектории

#### Требуется

Построить простой, устойчивый, точный алгоритм многоклассовой классификации физических систем

### Предлагается

Применить известные алгоритмы классификации к лагранжианам физических систем

## Метод

Использование Лагранжевых нейронных сетей для сжатия временных рядов, представленных траекториями для уменьшения количества параметров

# Литература



M. Cranmer, S. Greydanus, S. Hoyer et al. Lagrangian neural networks // ArXiv preprint., 2020. Vol. abs/2003.04630.

## Постановка задачи

Дано:  $\{\mathcal{D}_j, z_j\}_{j=1}^n$ , где:  $\mathcal{D}_j = \{\mathbf{x}_i^{(j)}, \mathbf{y}_i^{(j)}\}_{i=1}^{m_j} - j$ -ая траектория,  $\mathbf{x}_i^{(j)} = (\mathbf{q}_i^{(j)}, \dot{\mathbf{q}}_i^{(j)}) - i$ -ые координаты и скорости j-ой траектории,  $\mathbf{y}_i^{(j)} = \dot{\mathbf{x}}_i^{(j)} = (\dot{\mathbf{q}}_i^{(j)}, \ddot{\mathbf{q}}_i^{(j)}) - i$ -ые скорости и ускорения j-ой траектории,  $\mathbf{q}_i^{(j)} \in \mathbb{R}^r$  — вектор обобщенных координат,  $m_j$  — длина j-ой траектории,  $z_i \in \overline{1,K}$  — метка j-ой траектории.

## Требуется

Построить алгоритм  $\mathbf{a}: \mathbf{x} \to \{1,...,K\}$ 

#### Модель

Модель имеет вид

$$a = b \circ f$$

- b алгоритм многоклассовой классификации
- f алгоритм получения параметрически заданного лагранжиана по временнному ряду

# Проблема задачи классификации траекторий

- Огромное кол-во признаков, которыми они задаются
- Необходимо сильно сжимать данные, но с минимальной потерей
- Подвержены временной и пространственной трансляции
- Траектории даже самых простых физических систем, таких как двойной маятник, подвержены сильной изменчивости во времени

## Лагранжиан системы

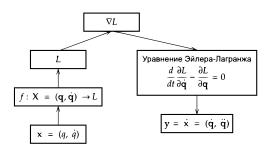
- Позволяет сильно сжать данные
- Устойчив к любой симметрии
- Отвечает только за динамику систему
- Подвержен только физически значимым изменениям

# Описание процедуры классификации

- Получаем физическую траекторию и формируем данные
- Устойчив к любой симметрии
- Отвечает только за динамику системы
- Подвержен только физически значимым изменениям

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = Q_x$$

# Лагранжева нейросеть



#### Постановка задачи

$$\{\mathbf{f}_k \colon (\mathbf{w}, \mathbf{X}) \to \hat{\mathbf{y}} \mid k \in \mathcal{K}\},\$$

где  $\mathbf{w} \in \mathbb{W}$  – параметры модели,  $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, \mathbf{w}) \in \mathbb{R}^{2 \times r \times n}, \ \mathbf{X} = \bigcup_{i=1}^m \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i = (\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i), \ \mathbf{y}_i = \dot{\mathbf{x}}_i = (\dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i)$ 

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{w}) = \|\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\|_2^2$$
.

## Подготовка данных

#### Проблемы с данными

- Пропуски во временных рядах
- Временные ряды состоят только из ускорений, либо скоростей

## Пропуски во временных рядах

Датчики иногда могут пропускать один или два такта. Для востановления ряда используется сплайн-интерполяция, кторая позволяет получить квадратичную точность от размеров сетки.

## Получения небходимых данных о траекториях

Для восстановления ускорения, скорости и координат применется численное дифференцирования и интергрирования, соответсвенно методы направленной разности и Рунге-Кутты второго порядка

## Использованные численные методы

## Дифференцирование

$$f'(x) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_{k-1})}{2h}$$
$$|E(f)| \le \frac{h^2}{6} f^{(3)}$$

#### Интегрирование

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \approx \frac{h}{3} \sum_{k=1}^{N-1} f(x_{k-1}) + 4f(x_{k}) + f(x_{k+1})$$

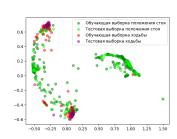
$$|E(f)| \leq \frac{(b-a)}{2880} h^{4} \max |f^{(4)}(x)|$$

## Вычислительный эксперимент

#### Цель эксперимента

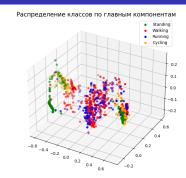
- Проверить способность Лагранжевой нейросети моделировать физические системы
- Подтвердить гипотезу о том, что в линейном пространстве лагранжианов пересечение классов мало по мере по сравнению с размерами самих классов
- Подобрать подходящий под данное распределение алгоритм классификации

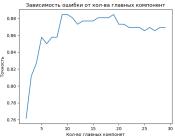
# Вычислительный эксперимент





- Гаусовский проц. 88%
- Случайный лес 84%





#### Заключение

- Предложен метод классификации тракторий, не зависящий от физически не значимых изменений системы
- Экспериментально показано, что классы траекторий отделимы в пространстве параметров Лагранжиана
- Проведена классификация реальных траеторий движения частей тела людей при различных активностях
- Подтверждена гипотеза компактности для рассматриваемых классов движений