Классификация траекторий динамических систем с помощью физически-информированных нейросетей

Терентьев Александр Андреевич

Московский физико-технический институт

Эксперт: В. В. Стрижов

Консультант: С. К. Панченко

2023

Цель исследования

Задача

Определить вид активности по координатам физической траектории

Требуется

Построить простой, устойчивый, точный алгоритм многоклассовой классификации физических систем

Предлагается

Применить известные алгоритмы классификации к лагранжианам физических систем

Метод

Использование Лагранжевых нейронных сетей для сжатия временных рядов, представленных траекториями для уменьшения количества параметров

Литература

- Северилов П. А. Выбор оптимальной модели в задаче моделирования динамики физической системы // URL: https://github.com/severilov/master-thesis/blob/main/doc/Severilov2022MasterThesis$_{r}us.pdf$.
- M. Cranmer, S. Greydanus, S. Hoyer et al. Lagrangian neural networks // ArXiv preprint., 2020. Vol. abs/2003.04630.

Постановка задачи

Дано:

$$\{\mathcal{D}_j, z_j\}_{j=1}^{n}$$

где:

$\mathcal{D}_j = \{\mathbf{x}_i^{(j)}, \mathbf{y}_i^{(j)}\}_{i=1}^{m_j}$ – j-ая траектория,

$\mathbf{x}_i^{(j)} = (\mathbf{q}_i^{(j)}, \dot{\mathbf{q}}_i^{(j)})$ – i-ые координаты и скорости j-ой траектории,

$\mathbf{y}_i^{(j)} = \dot{\mathbf{x}}_i^{(j)} = (\dot{\mathbf{q}}_i^{(j)}, \ddot{\mathbf{q}}_i^{(j)})$ – i-ые скорости и ускорения j-ой траектории,

$\mathbf{q}_i^{(j)} \in \mathbb{R}^r$ – вектор обобщенных координат,

r – количество координат,

m_j – длина j-ой траектории,

$z_j \in \overline{1, K}$ – метка j-ой траектории.

Проблема задачи классификации траекторий

Требуется

Построить алгоритм $\mathbf{a} : \mathbf{x} \to \{1, ..., K\}$

Модель

Модель имеет вид

$$a = b \circ f$$

- b - алгоритм многоклассовой классификации
- f - алгоритм получения параметрически заданного лагранжиана по временнному ряду

Проблема задачи классификации траекторий

- Огромное кол-во признаков, которыми они задаются
- Необходимо сильно сжимать данные, но с минимальной потерей
- Подвержены временной и пространственной трансляции
- Траектории даже самых простых физических систем, таких как двойной маятник, подвержены сильной изменчивости во времени

Лагранжиан системы

- Позволяет сильно сжать данные
- Устойчив к любой симметрии
- Отвечает только за динамику систему
- Подвержен только физически значимым изменениям

Лагранжева динамика

Лагранжев формализм моделирует физическую систему с координатами траектории $\mathbf{x_t} = (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. Определяется функционал, называющийся действием:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt,$$

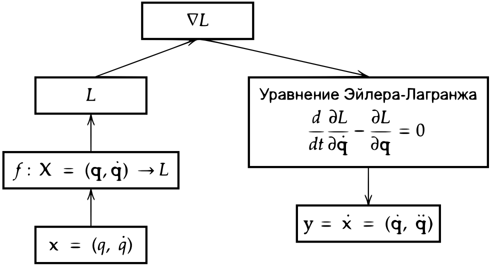
показывающий путь, по которому координаты $\mathbf{x}_t$ пройдут из $\mathbf{x}_0$ в $\mathbf{x}_1$ в промежуток времени от t_0 до t_1. Путь минимизирует действие S, что приводит к уравнению Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}$$

Ускорение каждой компоненты системы $\ddot{\mathbf{q}}$:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \left(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}}^T L\right)^{-1} \left[\nabla_{\mathbf{q}} L - \left(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \nabla_{\mathbf{q}}^T L\right) \dot{\mathbf{q}}\right]$$

Лагранжева нейросеть



Постановка задачи

$$\{\mathbf{f}_k : (\mathbf{w}, \mathbf{X}) \to \hat{\mathbf{y}} \mid k \in \mathcal{K}\},$$

где $\mathbf{w} \in \mathbb{W}$ – параметры модели, $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, \mathbf{w}) \in \mathbb{R}^{2\times r\times n}$, $\mathbf{X} = \bigcup_{i=1}^{m} \mathbf{x}_i$
$\mathbf{x}_i = (\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$, $\mathbf{y}_i = \dot{\mathbf{x}}_i = (\dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i)$

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{w}) = \|\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\|_2^2 .$$

Подготовка данных

Проблемы с данными

- Пропуски во временных рядах
- Временные ряды состоят только из ускорений, либо скоростей

Пропуски во временных рядах

Датчики иногда могут пропускать один или два такта. Для востановления ряда используется сплайн-интерполяция, ктoрая позволяет получить квадратичную точность от размеров сетки.

Получения небходимых данных о траекториях

Для восстановления ускорения, скорости и координат применется численное дифференцирования и интергрирования, соответсвенно методы направленной разности и Рунге-Кутты второго порядка

Использованные численные методы

Дифференцирование

$$f'(x) \;=\; \frac{f(x_{k+1}) \;-\; f(x_{k-1})}{2h}$$

$$|E(f)| \;\leq \frac{h^2}{6} f^{(3)}$$

Интегрирование

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \sum_{k\;=\;1}^{N\;-\;1} f(x_{k-1}) + 4f(x_k) + f(x_{k+1})$$

,

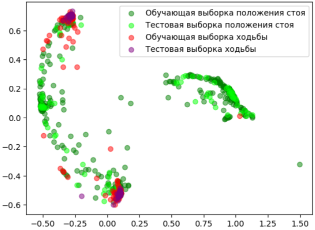
$$|E(f)| \;\leq\; \frac{(b-a)}{2880} h^4 max \left| f^{(4)}(x) \right|$$

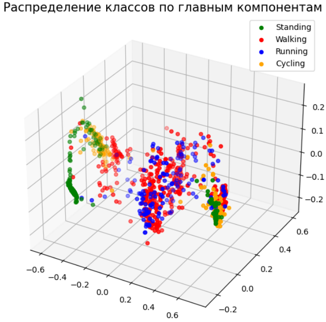
Вычислительный эксперимент

Цель эксперимента

- Проверить способность Лагранжевой нейросети моделировать физические системы
- Подтвердить гипотезу о том, что в линейном пространстве лагранжианов пересечение классов мало по мере по сравнению с размерами самих классов
- Подобрать подходящий под данное распределение алгоритм классификации

Вычислительный эксперимент





- Логистическая регр. – 76%
- Гаусовский проц. – 88%
- Случайный лес – 84%

Заключение

- Предложен метод классификации тракторий, не зависящий от физически не значимых изменений системы
- Экспериментально показано, что классы траекторий отделимы в пространстве параметров Лагранжиана
- Проведена классификация реальных траеторий движения частей тела людей при различных активностях
- Подтверждена гипотеза компактности для рассматриваемых классов движений