Исследование распространения эпидемий в графовой модели SIR и влияния локдауна на динамику заболеваемости популяции

Сёмкин Кирилл
Консультант: Антон Бишук

Цели

- Построить математическую модель распространения эпидемии типа SIR на графе
- Исследовать динамику заболеваемости при введении локдауна и без него
- Проиллюстрировать полученные теоретические/эмпирические оценки на численных экспериментах

Литература

Основная работа

Бишук, “*Применение активного обучения к графовым моделям на примере оценки рисков распространения эпидемии*”

Связанные работы с моделированием эпидемии в среднем (mean field)

Moreno, Pastor-Satorras и Vespignani, “*Epidemic outbreaks in complex heterogeneous networks*”

Gómez и др., “*Discrete-time Markov chain approach to contact-based disease spreading in complex networks*”

Pastor-Satorras и др., “*Epidemic processes in complex networks*”

Постановка задачи

Граф контактов $G(V,E)$.
Каждая вершина может быть в одном из трёх состояний: *Susceptable (S)*, *Infected (I)*, *Recovered (R)* — по сути раскраска графа.

Cur step = -1, epidemic type = Common

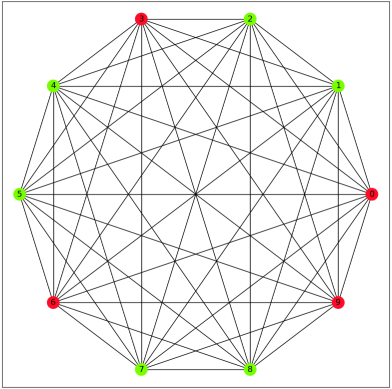
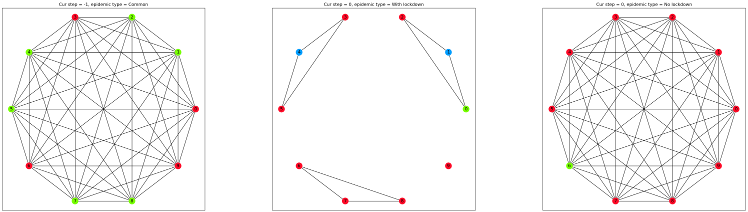


Рис. 1: Пример графа контактов с некоторым начальным распределением для вершин

Постановка задачи

Рис. 2: Эволюция графа контактов во времени



(a) Начало (b) Введение карантина (c) Снятие карантина

Постановка задачи

Параметры эпидемии:

- $\gamma = \mathbb{P}(I \to R)$ — вероятность "выздороветь"
- $\sigma = \mathbb{P}(R \to S)$ — вероятность стать снова подверженным заболеванию.
- $\beta \sim \mathbb{P}(S \to I)$ — "заразность"болезни.

$\mathbb{P}(S \to I)$ зависит от β и от «больных» соседей данной вершины. Остальные переходы состояний вершин определяются только данными параметрами.

Задача: выяснить, как ведут себя вероятности $\mathbb{P}(S \in S/I/R)$ для всех вершин и как меняется их эволюция при введении локдауна?

Теоретическая часть

Вероятность заразиться на след. шаге для здоровой вершины:

$$\mathcal{P}(u \in I_{t+1} | u \in S_{t+1}) = 1 - \prod_{v \in N(v)} (1 - \mathbb{P}(v \in I_t) \cdot \beta \cdot w_{uv})$$

Имеем $3^{|V|}$ состояний в цепи.

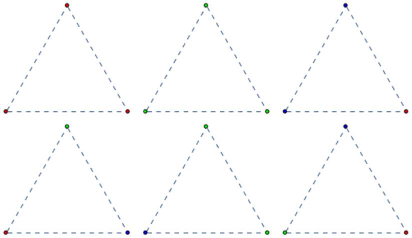


Рис. 3: Часть множества состояний

Теоретическая часть

В каждой вершине u живёт распределение $(p_S^u, p_I^u, p_R^u)^T$, с которым удобно работать. Уравнения на их динамику:

$$\mathbb{P}(v \in S_{t+1}) = \gamma\mathbb{P}(v \in R_t) + \mathbb{P}(v \in S_t) \cdot \underbrace{\prod_{u \in N(v)} (1 - \mathbb{P}(u \in I_t)\beta w_{uv})}_{A_v}$$

$$\mathbb{P}(v \in I_{t+1}) = (1-\sigma)\mathbb{P}(v \in I_t) + \mathbb{P}(v \in S_t) \cdot (1 - A_v)$$

$$\mathbb{P}(v \in R_{t+1}) = \sigma\mathbb{P}(v \in I_t) + (1-\gamma)\mathbb{P}(v \in R_t)$$

Теоретическая часть

Аналогично можно написать и для матожиданий:

$$\mathbb{E}(\#S_{t+1}) = \gamma\mathbb{E}(\#R_t) + \sum_{v\in V}\mathbb{P}(v \in S_t)A_v$$

$$\mathbb{E}(\#I_{t+1}) = (1-\sigma)\mathbb{E}(\#I_t) + \mathbb{E}(\#S_t) - \sum_{v\in V}\mathbb{P}(v \in S_t)A_v$$

$$\mathbb{E}(\#R_{t+1}) = \sigma\mathbb{E}(\#I_t) + (1-\gamma)\mathbb{E}(\#R_t)$$

Отсюда следует простое *условие на локальное увеличения ожидаемого числа больных*:

$$\mathbb{E}(\#I_t) \leq \frac{1}{\sigma}\mathbb{E}(\#S_t) \Rightarrow \mathbb{E}(\#I_{t+1}) \geq \mathbb{E}(\#I_t)$$

Теоретическая часть

Из нелинейной системы получим линейную:

$$A_v = \prod_{u \in N(v)} (1 - \mathbb{P}(u \in I_t)\beta w_{uv})$$

$$\begin{cases} \mathbb{P}(v \in S_{t+1}) & = \gamma(1 - \mathbb{P}(u \in I_t) - \mathbb{P}(u \in S_t)) + \mathbb{P}(v \in S_t) \cdot A_v \\ \mathbb{P}(v \in I_{t+1}) & = (1 - \sigma)\mathbb{P}(v \in I_t) + \mathbb{P}(v \in S_t) \cdot (1 - A_v) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \mathbb{P}(v \in S_{t+1}) & \leq \gamma(1 - \mathbb{P}(u \in I_t) - \mathbb{P}(u \in S_t)) + (1 - \beta \sum\limits_{u \in N(v)} w_{uv}\mathbb{P}(u \in I_t)) \\ \mathbb{P}(v \in I_{t+1}) & \leq (1 - \sigma)\mathbb{P}(v \in I_t) + \mathbb{P}(v \in S_t) \cdot \beta \sum\limits_{u \in N(v)} w_{uv}\mathbb{P}(u \in I_t) \end{cases}$$

Теоретическая часть

Работаем только с этой рекуррентой:

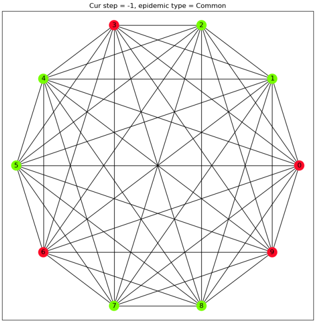
$$\mathbb{P}(v \in I_{t+1}) = (1-\sigma)\mathbb{P}(v \in I_t) + \beta \sum_{u \in N(v)} w_{uv}\mathbb{P}(u \in I_t)$$

Ищем решение в виде: $\mathrm{P} = \mathrm{e} \cdot q^n$, где e — некоторый вектор. В итоге всё сведётся к решению СЛАУ:

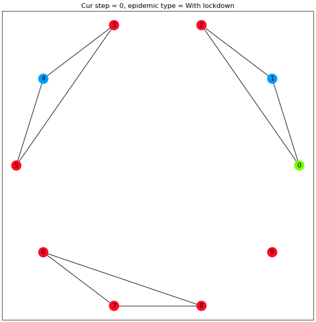
$$e_k q^{n+1} = (1-\sigma)e_k q^n \sum_{j \neq k} \beta \omega_{jk} e_j q^n$$

$$\sum_{j \neq k} \omega_{jk} e_j - \frac{q + \sigma - 1}{\beta} e_k = 0, \ \forall k \in \overrightarrow{1, |V|}$$

Эксперимент



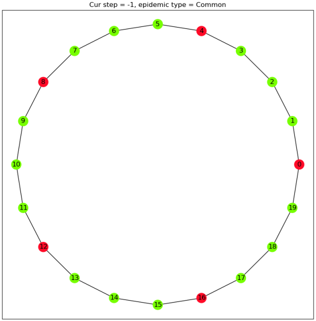
Стандартный граф



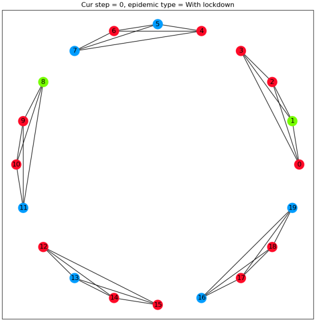
Граф локдауна

Полный граф

Эксперимент



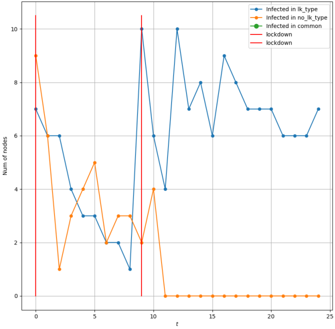
Стандартный граф



Граф локдауна

Граф-цикл

Эксперимент



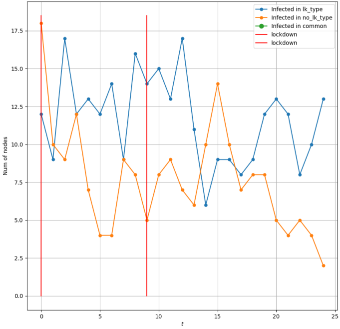


Рис. 4: Треки изменения кол-ва вершин в разных состояниях

Эксперимент

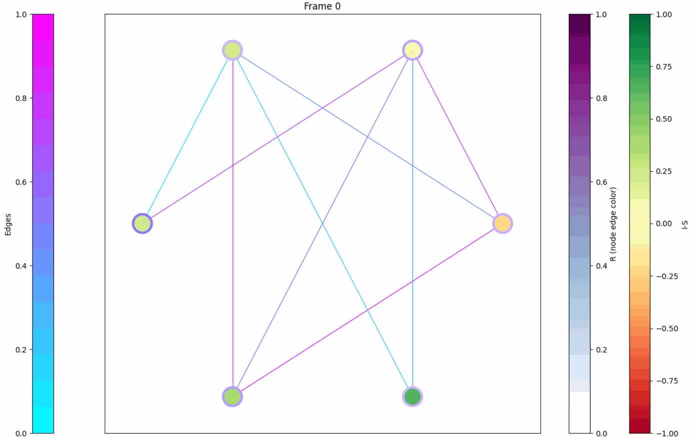


Рис. 5: Эволюция вероятностей в цепи Маркова

Эксперимент

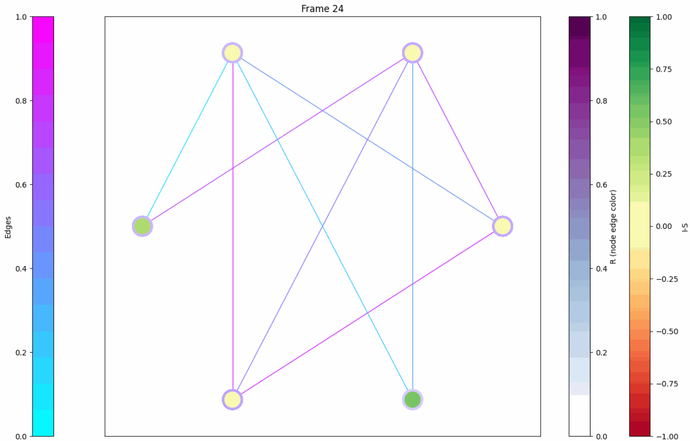


Рис. 6: Эволюция вероятностей в цепи Маркова

Заключение

- Задача распространения эпидемий формализована в виде марковских цепей
- Для любого графа и любого начального распределения больных, после достаточно большого времени эпидемия затухнет
- Возможно получить точные уравнения и оценки на скорость этого затухания
- Негативное влияние локдауна подтверждено эмпирически