Исследование распространения эпидемий в графовой модели SIR и влияния локдауна на динамику заболеваемости популяции

Сёмкин Кирилл
Консультант: Антон Бишук

Цели

- Построить математическую модель распространения эпидемии типа SIR на графе
- Исследовать динамику заболеваемости при введении локдауна и без него
- Проиллюстрировать полученные теоретические/эмпирические оценки на численных экспериментах

Литература

Основная работа

Бишук, “*Применение активного обучения к графовым моделям на примере оценки рисков распространения эпидемии*”

Связанные работы с моделированием эпидемии в среднем (mean field)

Moreno, Pastor-Satorras и Vespignani, “*Epidemic outbreaks in complex heterogeneous networks*”
Gómez и др., “*Discrete-time Markov chain approach to contact-based disease spreading in complex networks*”
Pastor-Satorras и др., “*Epidemic processes in complex networks*”

Постановка задачи

Дан граф контактов $G(V,E)$ — взвешенный граф, где вес ребра (i,j) есть $w_{ij} \in [0,1]$ и интерпретируется как доля времени, проведёная вместе. Каждая вершина может быть в одном из трёх состояний: *Susceptable (S)*, *Infected (I)*, *Recovered (R)* — по сути раскраска графа.

Постановка задачи

Дан граф контактов $G(V,E)$ — взвешенный граф, где вес ребра (i,j) есть $w_{ij} \in [0,1]$ и интерпретируется как доля времени, проведёная вместе. Каждая вершина может быть в одном из трёх состояний: *Susceptable (S), Infected (I), Recovered (R)* — по сути раскраска графа.

Далее, в дискретном времени происходит развитие болезни из некого начального состояния. Параметры эпидемии: $\gamma = \mathbb{P}(I \to R)$, $\sigma = \mathbb{P}(R \to S)$ — константы. Вероятность заразиться для некоторой S-вершины зависит от структуры графа — от её I-соседей. Предположение модели — I-соседи вершины заражают её независимо, тогда имеем

$$\mathbb{P}(S \to I) = 1 - \prod_{\substack{j \in v(i) \\ j \text{ is } I}} (1 - \beta w_{ij})$$

Здесь β также параметр эпидемии, интерпретируемый как “заразность болезни”.

Постановка задачи

Локдаун моделируется как смена графа контактов на некий G_{lock} с «переносом» состояний вершин в некоторый момент t_{start}, после чего в t_{end} всё переносится обратно в исходный граф.

Постановка задачи

Локдаун моделируется как смена графа контактов на некий G_{lock} с «переносом» состояний вершин в некоторый момент t_{start}, после чего в t_{end} всё переносится обратно в исходный граф.

Соответственно возможна математическая формулировка возникающих вопросов: при каких условиях на структуру G, G_{lock} и параметров эпидемии

- $\mathbb{E}(\#v \in V(G) : v\ is\ I) < \mathbb{E}(\#v \in V(G_{lock}) : v\ is\ I)$ - повышение кол-ва больных во время/после карантина
- $n_v = \inf_{n > t_{end}} \mathbb{P}(\{\text{v in } I \text{ on step n}\} < 0.01) > n_v^{lock}$ (определяется аналогично на G_{lock}) — индивидуальные риски после карантина возрастают
- $$\inf_{n > t_{end}} \{\mathbb{E}(\#\text{v in } I \text{ on step n}) < \mathbb{E}(\#\text{v in } I \text{ during lockdown})\} \gg t_{end}$$

  — неэффективность локдауна

Теоретическая часть

Развитие эпидемии на графе в дискретном времени можно представить в виде конечной *цепи маркова*. Если рассматривать каждую вершину как цепь из трёх состояний (S, I, R), то она будет неоднородной. Поэтому берём за состояния все возможные конфигурации графа, которых $3^{|V(G)|}$, тогда полученная цепь будет являться *стационарной*.

Теоретическая часть

Развитие эпидемии на графе в дискретном времени можно представить в виде конечной *цепи маркова*. Если рассматривать каждую вершину как цепь из трёх состояний (S, I, R), то она будет неоднородной. Поэтому берём за состояния все возможные конфигурации графа, которых $3^{|V(G)|}$, тогда полученная цепь будет являться *стационарной*.

Следующее наблюдение: разные компоненты связанности исходного G никак не влияют друг на друга, поэтому НУО можно считать G — связанным графом.

Теоретическая часть

Развитие эпидемии на графе в дискретном времени можно представить в виде конечной *цепи маркова*. Если рассматривать каждую вершину как цепь из трёх состояний (S, I, R), то она будет неоднородной. Поэтому берём за состояния все возможные конфигурации графа, которых $3^{|V(G)|}$, тогда полученная цепь будет являться *стационарной*.

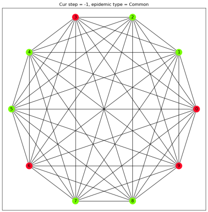
Следующее наблюдение: разные компоненты связанности исходного G никак не влияют друг на друга, поэтому НУО можно считать G — связанным графом.

Далее, несложно разбить нашу *конечную* цепь на неразложимые и классифицировать состояния в каждом классе. Как результат получим единственное существенное состояние, в котором все вершины $= S$, остальные являются несущественными. Уже отсюда, применяя аппарат теории марковских цепей, делаем вывод, что за достаточное время весь граф "станет здоровым".

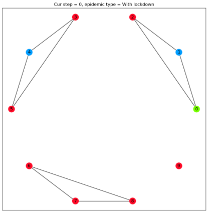
Эксперимент

Цель эксперимента — наглядно проиллюстрировать «эффект локдауна» на графах простой структуры и поведение распределения вероятностей вершин быть в том или ином состоянии в течение времени (т.е. динамика вектора распределения вероятностей марковской цепи в течении времени).

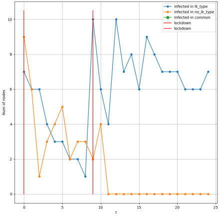
Эксперимент



Начальная конфигурация



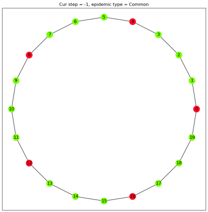
Вид «домашнего» графа

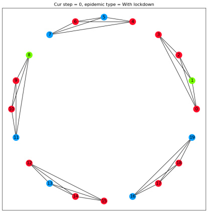


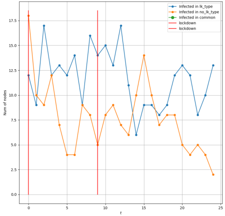
Сравнительные треки эпидемии с локдауном и без него

Полный граф

Эксперимент







Начальная конфигурация

Вид «домашнего» графа

Сравнительные треки эпидемии с локдауном и без него

Граф-цикл

Анализ ошибки

Заключение