

---

# Multiply learning in recommendation systems

---

A Preprint

David S. Hippocampus\*  
Department of Computer Science  
Cranberry-Lemon University  
Pittsburgh, PA 15213  
hippo@cs.cranberry-lemon.edu

Elias D. Striatum  
Department of Electrical Engineering  
Mount-Sheikh University  
Santa Narimana, Levand  
stariate@ee.mount-sheikh.edu

## Abstract

This paper addresses the issue of evaluating the quality of recommender systems in the long term, taking into account the evolution of consumers and product assortments. We consider the dynamical system of changes in consumers and products over time. The main purpose of the study is to identify the conditions under which degeneracies in audience, assortment, or transaction distribution occur in a given repeated machine learning system, and how such phenomena depend on the learning algorithms and recommendation models. Using the obtained results, we can present a model that is able to increase the metrics in the recommendation systems without degenerating the distributions on products and customers. We conduct a series of computational experiments on the synthetic datasets, the results of the experiments correspond to the theoretical predictions derived from the dynamical model

Keywords Repeated Machine Learning · Feedback loop

## 1 Introduction

Recommender systems are an important component of many online services, such as search engines, e-commerce platforms, news services, and social networks. They are very convenient tools because their main task is to offer users the most relevant items based on the available information. Modern recommender system models are adaptable to users, but it is also true that recommender systems influence user behavior. This work explores the problem of multiple training in recommender systems. Multiple training refers to a machine learning method in which data becomes available sequentially and is used to improve predictions for subsequent data.

The importance of recommender systems is supported by numerous studies[2, 3]. In multiple training models, unexpected effects can arise, leading to suboptimal results. For example, excessive personalization can trap users in so-called "filter bubbles," increasing user bias[1]. Also, in multiple training, "feedback loops" can occur, calling into question the quality of recommendations[4]. Another effect that arises in multiple training is the degeneration of the distribution of original items[5]. We specifically address this issue in the recommender system model and aim to propose an algorithm to prevent it.

Existing literature explores various methods for solving similar problems, emphasizing the complexity of optimizing recommendation metrics while ensuring stability in distribution patterns over time. One of the main focuses of our research is feedback loops resulting from user interaction with the recommender system. Previously, the problem was approached from a different angle, describing how to overcome input data bias to improve the algorithm[8]. Some sufficient conditions have also been identified for when a dynamic system with multiple training leads to distribution degeneration[9].

---

\*Use footnote for providing further information about author (webpage, alternative address)—not for acknowledging funding agencies.

In this article, we propose a new mathematical model for the process of multiply learning in recommender systems not previously discussed in the literature. Our goal is to propose an algorithm that improves known metrics for recommender algorithms, such as nDCG, RMM, map@K [6,7], while preventing the degeneration of user and item distributions.

## 2 Problem statement

Рассмотрим модель динамической рекомендательной системы. Пусть  $C$  - множество покупателей,  $W$  - множество товаров,  $|C|, |W| < \infty$ . Покупатели  $c$  и товары  $w$  описываются конечным числом признаков, то есть  $c \in C \subset \mathbb{R}^d, w \in W \subset \mathbb{R}^l$ . На каждом шаге  $t$  имеется распределения с плотностями  $f_c^t$  и  $f_w^t$  на множествах  $C$  и  $W$  соответственно, при  $t = 0$  оба распределения известны. Данные функции отражают распределения признаков среди покупателей и товаров в системе. В последствии эти распределения будут меняться в процессе работы системы. Эти изменения отражает оператор эволюции  $D_t : R_d \times R_l \rightarrow R_d \times R_l$ , где  $R_k$  - множество всех функций плотности на  $\mathbb{R}^k$ . Таким образом,  $(f_c^{t+1}, f_w^{t+1}) = D_t(f_c^t, f_w^t)$ .

Цель работы - предложить алгоритм, который улучшает стандартные метрики для рекомендательных алгоритмов (p@K, map@K, nDCG, MRR) при условии, что в пределе не возникает вырождения распределения товаров и пользователей. Под вырождением распределения покупателей имеется в виду, что  $f_c^t \rightarrow f_c$ , где носитель  $f_c$  - подпространство  $\mathbb{R}^d$  меньшей размерности. Аналогично определяем вырождение для распределения товаров. Для объяснения того, что подразумевается под улучшением метрик, введем понятие "невязок". Пусть на шаге  $t$  модель по данным  $X$  предсказывает рекомендации  $y_{pred} = H(X, t)$ ,  $y_{true}$  - предпочтения пользователей в действительности, тогда вектором невязок будем называть  $y_{pred} - y_{true}$ . Есть следующие свойства:

- 1)  $\|y_{pred} - y_{true}\|$  - маленькое число  $\Leftrightarrow$  метрики большие.
- 2) невязка может иметь отрицательные компоненты.

Таким образом, условие улучшения стандартных метрик сводится к минимизации норм векторов невязок. Достаточным условием для этого в пределе будет являться выполнение следующего условия:  $y_{pred} - y_{true} \rightarrow \infty \delta$ , где  $\delta$  - дельта-функция Дирака.

Теперь рассмотрим конкретный пример динамической системы. Пусть имеется функция  $\mu_t : C \times W \rightarrow [0, 1]$  - агрегированный фидбек для каждой пары из товара и пользователя за время работы системы,  $\mu_0(c, w) = 0 \forall c, w$ . Теперь опишем одну итерацию в модели работы динамической системы:

1. Происходит сэмплирование выборок произвольного размера покупателей и товаров из распределений  $f_c^t$  и  $f_w^t$ :  $c_1^t, \dots, c_n^t \sim f_c^t, w_1^t, \dots, w_k^t \sim f_w^t$ .
2. Рекомендательная система подбирает для каждого покупателя из выборки подмножество товаров из  $w_1^t, \dots, w_k^t$ .
3. Покупатели совершают покупку с вероятностью  $u(c, w)$ , где  $u : C \times W \rightarrow [0, 1]$  - фиксированная функция полезности товара для данного пользователя. Далее рекомендательная система дообучается на полученном фидбеке, используя базовый алгоритм рекомендательной системы.
4. Шаги 2-3 повторяются произвольное количество раз.
5. Обозначим за  $M_{t+1}$  - набор фидбеков, полученных за все повторения шага 3 на данной итерации, то есть мультимножество из троек вида  $(c, w, m)$ , где  $c \in c_1^t, \dots, c_n^t, w \in w_1^t, \dots, w_k^t, m \in \{0, 1\}$ , где 1 обозначает совершение покупки, 0 - её отсутствие. Далее обновляется функция  $\mu_t$ . Пусть сначала  $\mu_{t+1} = \mu_t$ . Далее для каждой тройки  $(c, w, m)$  из  $M_{t+1}$  функцию  $\mu_{t+1}$  изменяется так:  $\mu_{t+1}(c, w) = \lambda m + (1 - \lambda)\mu_t(c, w)$ , где  $\lambda \in [0, 1]$  - некоторая константа, отражающее скорость забывания старого фидбека.
6. Далее происходит обновление распределений товаров и пользователей в соответствии с новой функцией  $\mu_{t+1}$ . Будем это делать при помощи сглаживания Лапласа:  $f_w^{t+1}(w_i) = \frac{\sum_{c \in C} (\mu_{t+1}(c, w_i) + \delta)}{\sum_{w \in W, c \in C} (\mu_{t+1}(c, w) + \delta)}$ , где  $\delta > 0$  - небольшая константная поправка. Поправка используется для того, чтобы ещё ни разу не показанные товары всё ещё попасть в систему с ненулевой вероятностью. Аналогично обновляется  $f_c^{t+1}$ .

### 2.1 Headings: second level

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere,

turpis lacus congrue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

$$\xi_{ij}(t) = P(x_t = i, x_{t+1} = j | y, v, w; \theta) = \frac{\alpha_i(t) a_{ij}^{w_t} \beta_j(t+1) b_j^{v_{t+1}}(y_{t+1})}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i(t) a_{ij}^{w_t} \beta_j(t+1) b_j^{v_{t+1}}(y_{t+1})} \quad (1)$$

### 2.1.1 Headings: third level

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Paragraph Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congrue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

## 3 Examples of citations, figures, tables, references

### 3.1 Citations

Citations use **natbib**. The documentation may be found at

<http://mirrors.ctan.org/macros/latex/contrib/natbib/natnotes.pdf>

Here is an example usage of the two main commands (**citet** and **citep**): Some people thought a thing (??) but other people thought something else (?). Many people have speculated that if we knew exactly why ? thought this...

### 3.2 Figures

Suspendisse vitae elit. Aliquam arcu neque, ornare in, ullamcorper quis, commodo eu, libero. Fusce sagittis erat at erat tristique mollis. Maecenas sapien libero, molestie et, lobortis in, sodales eget, dui. Morbi ultrices rutrum lorem. Nam elementum ullamcorper leo. Morbi dui. Aliquam sagittis. Nunc placerat. Pellentesque tristique sodales est. Maecenas imperdiet lacinia velit. Cras non urna. Morbi eros pede, suscipit ac, varius vel, egestas non, eros. Praesent malesuada, diam id pretium elementum, eros sem dictum tortor, vel consectetur odio sem sed wisi. See Figure 1. Here is how you add footnotes. <sup>2</sup> Sed feugiat. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Ut pellentesque augue sed urna. Vestibulum diam eros, fringilla et, consectetur eu, nonummy id, sapien. Nullam at lectus. In sagittis ultrices mauris. Curabitur malesuada erat sit amet massa. Fusce blandit. Aliquam erat volutpat. Aliquam euismod. Aenean vel lectus. Nunc imperdiet justo nec dolor.

### 3.3 Tables

See awesome Table 1.

The documentation for **booktabs** ('Publication quality tables in LaTeX') is available from:

<https://www.ctan.org/pkg/booktabs>

---

<sup>2</sup>Sample of the first footnote.



Рис. 1: Sample figure caption.

Таблица 1: Sample table title

Part		
Name	Description	Size ( $\mu\text{m}$ )
Dendrite	Input terminal	$\sim 100$
Axon	Output terminal	$\sim 10$
Soma	Cell body	up to $10^6$

### 3.4 Lists

- Lorem ipsum dolor sit amet
- consectetur adipiscing elit.
- Aliquam dignissim blandit est, in dictum tortor gravida eget. In ac rutrum magna.

- [1] Dominic Spohr. Fake news and ideological polarization: Filter bubbles and selective exposure on social media.
- [2] Billsus, Daniel Pazzani, Michael. (2003). User Modeling for Adaptive News Access. User Modelling and User-Adapted Interaction. 10. 10.1023/A:1026501525781.
- [3] Pedreschi, D. and Miliou, I. and European Parliament. Directorate-General for Internal Policies of the Union Artificial Intelligence (AI): new developments and innovations applied to e-commerce European Parliament, 2020.
- [4] Krauth K., Wang Y., Jordan M. I. Breaking feedback loops in recommender systems with causal inference //arXiv preprint arXiv:2207.01616. – 2022.
- [5] Khritankov, Anton. 2023. “Positive Feedback Loops Lead to Concept Drift in Machine Learning Systems.” Applied Intelligence 53 (19): 22648–66. <https://doi.org/10.1007/s10489-023-04615-3>.
- [6] Yongfeng Zhang, Xu Chen, Qingyao Ai, Liu Yang, and W. Bruce Croft. 2018. Towards Conversational Search and Recommendation: System Ask, User Respond. In Proceedings of the 27th ACM International Conference on Information and Knowledge Management (CIKM '18). Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, 177–186. <https://doi.org/10.1145/3269206.3271776>
- [7] Wang, Y., Wang, L., Li, Y., He, D. amp; Liu, T.. (2013). A Theoretical Analysis of NDCG Type Ranking Measures. <i>Proceedings of the 26th Annual Conference on Learning Theory</i>, in <i>Proceedings of Machine Learning Research</i> 30:25-54 Available from <https://proceedings.mlr.press/v30/Wang13.html>.

[8] Krueger, D., Maharaj, T., Leike, J. (2020). Hidden incentives for auto-induced distributional shift. arXiv preprint arXiv:2009.09153.