

Универсальные методы для стохастических вариационных неравенств

Климза Антон Алексеевич

Московский физико-технический институт

Курс: Моя первая научная статья

Эксперт: д.ф.-м.н. А. В. Гасников

26 марта 2024

Постановка задачи

Вариационное неравенство

Пусть дано выпуклое множество $Z \in \mathbb{R}^n$ и оператор $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Тогда хотим найти $z^* \in Z$, такую что:

$$\langle F(z^*), z - z^* \rangle \geq 0, \quad \forall z \in Z$$

Стохастический случай

$$F(z) = \mathbb{E}_{\xi} F(z, \xi)$$

$$\mathbb{E}_{\xi} \|F(z) - F(z, \xi)\|^2 \leq \sigma^2$$

Algorithm 1 Универсальный проксимальный зеркальный метод 1

- 1: Set $z_0 = \arg \min_{u \in Q} d(u)$, $L_0 = \|g(z_0)\|$
 - 2: **for** $k = 0, 1, \dots$ **do**
 - 3: $w_k = \arg \min_{x \in Q} (\langle g(z_k), x \rangle + L_k V[z_k](x))$
 - 4: $z_{k+1} = \arg \min_{x \in Q} (\langle g(w_k), x \rangle + L_k V[z_k](x))$
 - 5: $\xi_k[z_k](w_k) = \langle g(z_k), w_k - z_k \rangle + L_k \frac{1}{2} \|z_k - w_k\|^2$
 - 6: $\xi_k[w_k](z_{k+1}) = \langle g(w_k), z_{k+1} - w_k \rangle + L_k \frac{1}{2} \|w_k - z_{k+1}\|^2$
 - 7: $L_{k+1} = L_k + \frac{2}{D^2} \max(0, -\xi_k[z_k](w_k) - \xi_k[w_k](z_{k+1}))$
 - 8: **end for**
-

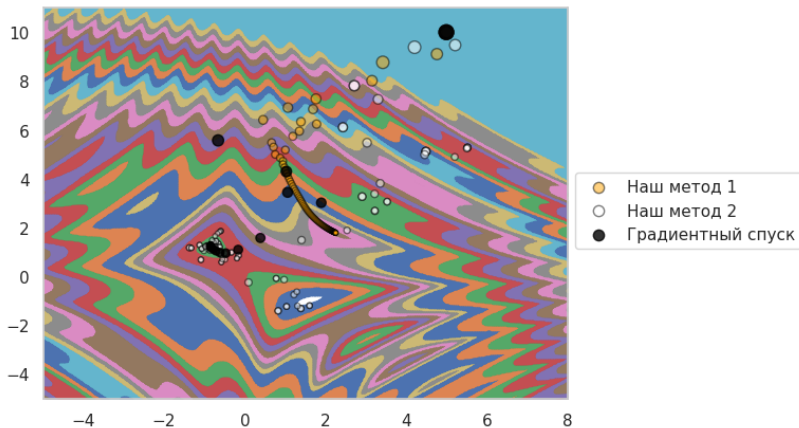
Algorithm 2 Универсальный проксимальный зеркальный метод 2

- 1: Set $z_0 = \arg \min_{u \in Q} d(u)$, $L_0 = \|g(z_0)\|$
 - 2: **for** $k = 0, 1, \dots$ **do**
 - 3: $w_k = \arg \min_{x \in Q} (\langle g(z_k), x \rangle + L_k V[z_k](x))$
 - 4: $z_{k+1} = \arg \min_{x \in Q} (\langle g(w_k), x \rangle + L_k V[z_k](x))$
 - 5: $L_{k+1} = \frac{1}{2} L_k + \frac{2}{D^2} \max(0, -\langle g(w_k), z_{k+1} - w_k \rangle - L_k \frac{1}{2} \|w_k - z_{k+1}\|^2)$
 - 6: **end for**
-

Сравнение методов

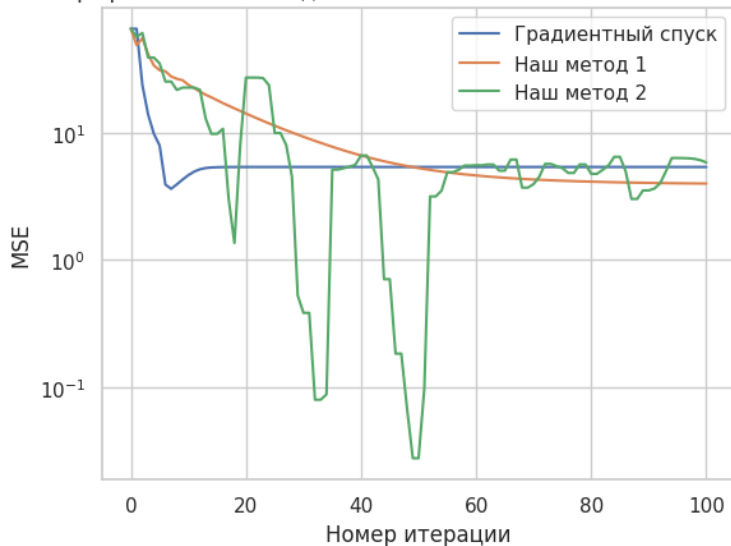
$$f(x, y) = x^2 + y^2 + x(y - 2) + 4 \sin(xy)$$

$$f(x, y) \rightarrow \min$$



Сравнение методов

График ошибки методов относительно глобального минимума



[1] Anton Rodomanov Ali Kavis Yongtao Wu Kimon Antonakopoulos Volkan Cevher Universal Gradient Methods for Stochastic Convex Optimization. 2024.

[2] А. В. Гасников Современные численные методы оптимизации 2021

[3] Fedor Stonyakin Alexander Gasnikov Pavel Dvurechensky Alexander Titov Mohammad Alkousa Generalized Mirror Prox Algorithm for Monotone Variational Inequalities: Universality and Inexact Oracle 2022