

Универсальные методы для стохастических вариационных неравенств

Климза Антон Алексеевич

Московский физико-технический институт

Курс: Моя первая научная статья

Эксперт: д.ф.-м.н. А. В. Гасников

16 мая 2024

Постановка задачи

Вариационное неравенство

Пусть дано выпуклое множество $Z \in \mathbb{R}^n$ и оператор $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Тогда хотим найти $z^* \in Z$, такую что:

$$\langle g(z^*), z - z^* \rangle \geq 0, \quad \forall z \in Z.$$

Стохастический случай

$$\begin{aligned} g(z) &= \mathbb{E}_{\xi} g(z, \xi), \\ \mathbb{E}_{\xi} \|g(z) - g(z, \xi)\|^2 &\leq \sigma^2. \end{aligned}$$

Условие Гёльдера

$$\exists \nu \in [0, 1], L_{\nu} \geq 0 : \quad \|g(x) - g(y)\|_* \leq L_{\nu} \|x - y\|^{\nu} \quad \forall x, y \in Z.$$

Проксимальный зеркальный метод

$$w_k = \arg \min_{x \in Q} \left(\langle g(z_k), x - z_k \rangle + L_k \frac{1}{2} \|z_k - x\|^2 \right),$$

$$z_{k+1} = \arg \min_{x \in Q} \left(\langle g(w_k), x - w_k \rangle + L_k \frac{1}{2} \|z_k - x\|^2 \right).$$

Где L_k – константа Липшица.

Идея – изменять L_k на каждом шаге, подстраиваясь под гладкость задачи.

Формула пересчёта L_{k+1}

$$(L_{k+1} - L_k) \frac{D^2}{2} = \left| -\langle g(w_k), z_{k+1} - w_k \rangle - L_{k+1} \frac{1}{2} \|z_k - z_{k+1}\|^2 \right|_+.$$

Оценка сходимости

$$-\frac{1}{k} \sum_{i=0}^k \langle g(w_k), z^* - w_k \rangle \leq \frac{2D^2 L_{k+1}}{k},$$

$$L_{k+1} \leq \frac{3-\nu}{2} \left(\frac{k}{D^2} \right)^{\frac{1-\nu}{2}} L_\nu.$$

Где L_ν – константа Гёльдера, D – диаметр рассматриваемого множества решений Z .

Algorithm 1 Универсальный проксимальный зеркальный метод (UMP)

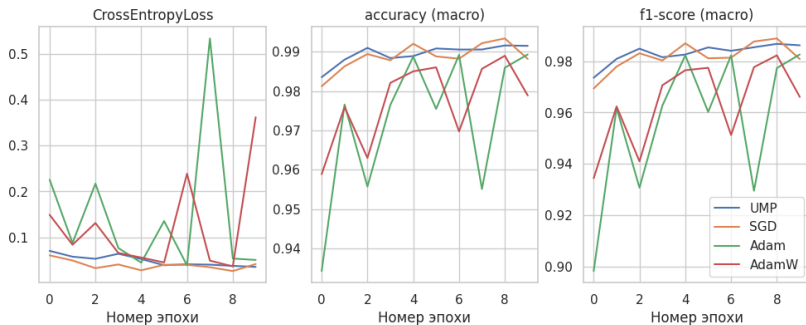
- 1: Set $z_0 = \arg \min_{u \in Q} d(u)$, $L_0 = \|g(z_0)\|$.
 - 2: **for** $k = 0, 1, \dots$ **do**
 - 3: $w_k = \arg \min_{x \in Q} (\langle g(z_k), x \rangle + L_k \frac{1}{2} \|z_k - x\|^2)$.
 - 4: $z_{k+1} = \arg \min_{x \in Q} (\langle g(w_k), x \rangle + L_k \frac{1}{2} \|z_k - x\|^2)$.
 - 5: $L_{k+1} = L_k + \max \left(0, \frac{-2\langle g(w_k), z_{k+1} - w_k \rangle - L_k \|w_k - z_{k+1}\|^2}{D^2 + \|w_k - z_{k+1}\|^2} \right)$.
 - 6: **end for**
-

Оценка скорости сходимости метода

$$O \left(\inf_{\nu \in (0,1)} \left(\frac{(3-\nu)L_\nu}{\varepsilon} \right)^{\frac{2}{1+\nu}} D^2 \right).$$

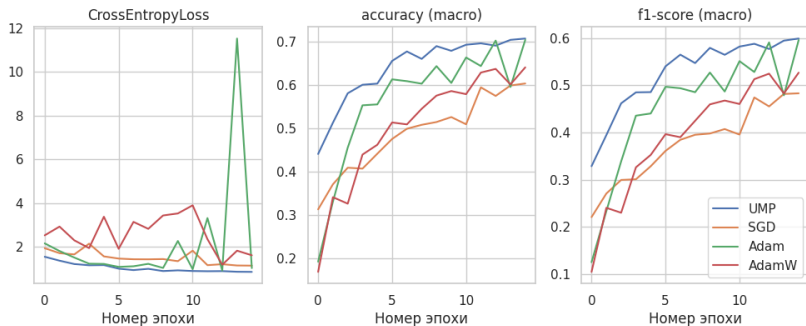
Сравнение методов

Сравнение метрик оптимизаторов на валидации при обучении resnet50 датасете MNIST



Сравнение методов

Сравнение метрик оптимизаторов на валидации при обучении resnet50 датасете CIFAR10



Результат

- ▶ Получен универсальный проксимальный зеркальный метод и доказана оценка его скорости сходимости.
- ▶ Проведён эксперимент, который показывает, что метод может быть применён для задачи минимизации функции наравне с популярными оптимизаторами.

План на будущее

- ▶ Сравнение нашего метода с другими методами на задаче обучения генеративно-состязательных сетей.

[1] Anton Rodomanov Ali Kavis Yongtao Wu Kimon Antonakopoulos Volkan Cevher Universal Gradient Methods for Stochastic Convex Optimization. 2024.

[2] А. В. Гасников Современные численные методы оптимизации 2021

[3] Fedor Stonyakin Alexander Gasnikov Pavel Dvurechensky Alexander Titov Mohammad Alkousa Generalized Mirror Prox Algorithm for Monotone Variational Inequalities: Universality and Inexact Oracle 2022