Восстановление прогноза, сделанного в метрическом вероятностном пространстве, в исходное пространство (временных рядов)

Максим Михайлович Дивильковский

Московский физико-технический институт

Курс: Автоматизация научных исследований (практика, В. В. Стрижов)/Группа 125

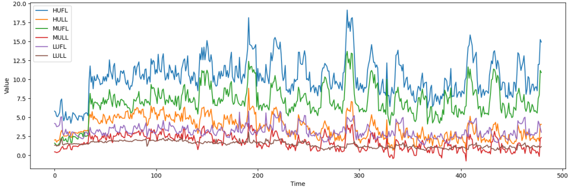
Эксперт: В. В. Стрижов

Консультант: К. Д. Яковлев

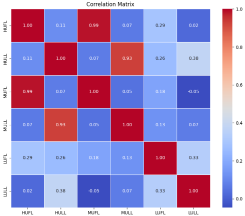
2024

Цель исследования

Решается задача прогнозирования набора высококоррелированных рядов.

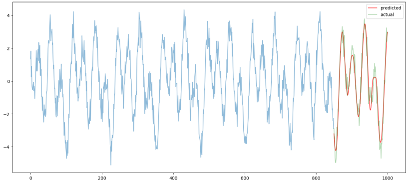


Набор данных ETTh1

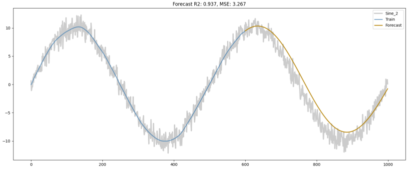


Попарная корреляция между рядами

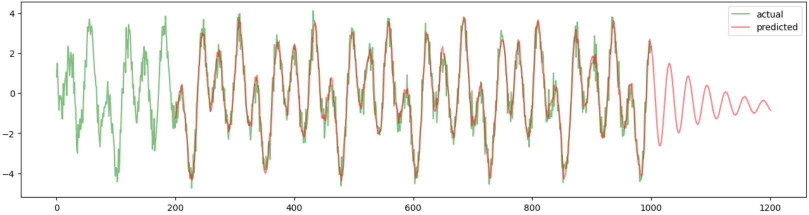
Цель исследования



Предсказание методом LSTM



Предсказание методом MSSA



Предсказание методом SARIMA

Источники

- James B. Elsner and Anastasios A. Tsonis. Singular spectrum analysis: A new tool in time series analysis. 1996.
- Sima Siami-Namini and Akbar Siami Namin. Forecasting economics and financial time series: Arima vs. lstm, 2018.
- Haoyi Zhou, Shanghang Zhang, Jieqi Peng, Shuai Zhang, Jianxin Li, Hui Xiong, and Wancai Zhang. Informer: Beyond efficient transformer for long sequence time-series forecasting, 2021.
- Ailing Zeng, Muxi Chen, Lei Zhang, and Qiang Xu. Are transformers effective for time series forecasting?, 2022.

Постановка задачи

- X — линейное пространство временных рядов. $X \cong \mathbb{R}^T$
- $\rho(x, y), x, y \in X$ — расстояния в X
- $X \to \Sigma_T$ — матрица попарных расстояний
- $\Sigma_T \to \Sigma_{T+1}$ — прогноз в следующий момент времени
- $\Sigma_{T+1} \to \hat{X}$ — восстановление прогноза

Постановка задачи восстановления прогноза

$$\Sigma_{t+1} = \begin{pmatrix} d(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(1)}) & d(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}) & \dots & d(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(n)}) \\ d(\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(1)}) & d(\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(2)}) & \dots & d(\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(n)}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(1)}) & d(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(2)}) & \dots & d(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(n)}) \end{pmatrix}$$

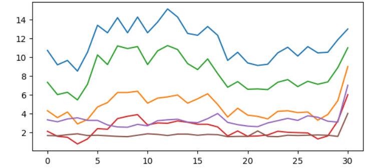
Функция d — некоторая функция расстояния между рядами (корреляция, евклидово расстояние и т.д.).

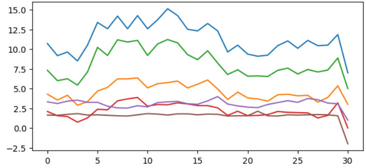
Решается задача $\underset{y}{\operatorname{argmin}} \left\| \Sigma_{t+1} - \hat{\Sigma}_{t+1} \right\|_2^2$

Примеры метрик

Евклидово расстояние

$$d(p, q) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (p_k - q_k)^2}$$

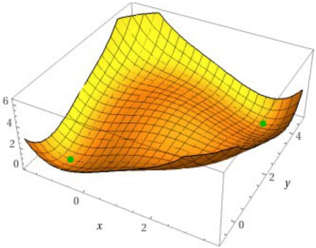




Корреляция

$$\hat{\Sigma}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (x_t - \mu_T)(x_t - \mu_T)^T$$

$$\mu_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} x_t$$



Решения задачи для рядов (1 3) и (2 4) — точки (3; 4) и **(-1, 0)**

Теорема 1. *Для любой метрики, введённой в пространстве временных рядов $\mathbb{R}^t$, существует более одного способа восстановить исходные временные ряды по построенной матрице попарных расстояний.*

Доказательство.

- Метрика — непрерывная функция из $\mathbb{R}^t \times \mathbb{R}^t$ в $\mathbb{R}$.
  $d(x_n, y_n) \leqslant d(x_n, x) + d(x, y) + d(y_n, y) \to d(x, y)$
- Не существует гомеоморфизма между $\mathbb{R}^t \times \mathbb{R}^t$ и $\mathbb{R}$.
- Метрика — строго **сюръекция**.

Следствие из доказательства. *Данное утверждение выполняется для произвольной непрерывной функции, в том числе попарной корреляции.*

Попарная корреляция

$$\hat{\Sigma}_T = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \mu_T)(x_t - \mu_T)^T$$

$$\mu_T = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t$$

Теорема 2. *В случае, если мы точно спрогнозировали матрицу расстояний, функция* $||\hat{\Sigma}_{t+1} - \bar{\Sigma}_{t+1}||_2^2$ *будет иметь два минимума, задающихся следующим образом:*

$$\hat{y}_i = y_i$$

$$\hat{y}_i = \frac{2}{T-1}\sum_{k=1}^{T-1} a_{ik} - y_i,$$

где $\hat{y}_i$ *—* i*-я координата предсказываемого значения ряда в момент* $T+1$*,* $A = (a_{ik})$ *— исходный многомерных временной ряд,* y_i *— истинные значения ряда в момент* $T+1$.

Явный вид минимума

Теорема 3. *Минимум функции* $||\hat{\Sigma}_{t+1} - \bar{\Sigma}_{t+1}||_2^2$ *достигается на*

$$\pm\sqrt{\lambda_1}u_1 + \mu_T,$$

где λ_1*— первое сингулярное значение,* u_1*— первый левый сигнулярный вектор матрицы* $A = \left(\frac{T}{T+1} \cdot \Sigma_T - \Sigma_{T+1}\right) \cdot \frac{(T+1)^2}{T}$

Эта теорема позволяет находить оба минимума функции намного быстрее, чем при использовании стандартных методов оптимизации.

Алгоритм прогноза

Предлагается следующий алгоритм:
1. Зафиксируем T и T' : $T \neq T'$.
2. Для T и T' произведем полученный выше алгоритм и получим наборы ответов: $[ans_1, ans_2], [ans'_1, ans'_2]$.
3. Найдём тот ответ, который лежит в пересечении.

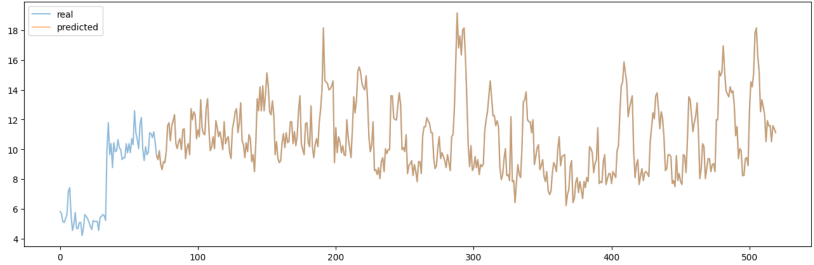


Рис.: Возвращение прогноза при идеальном прогнозе Sigma. $T = 20$, $T' = 10$

Алгоритм прогноза

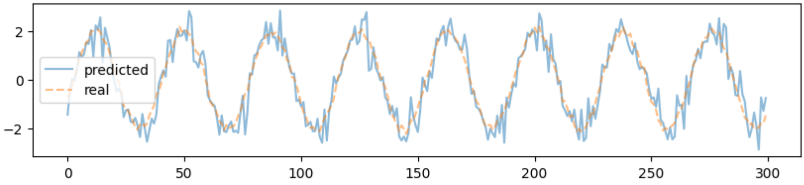


Рис.: Возвращение прогноза при неидеальном прогнозе Sigma $+N(0, 0.1)$ с использованием двух матриц. MAE: 0.3662

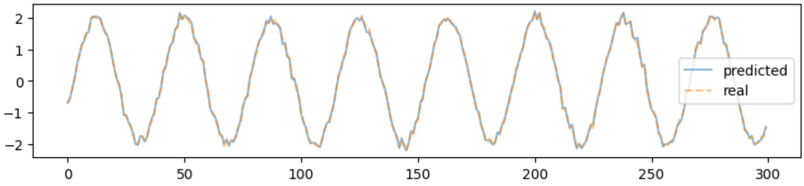


Рис.: Возвращение прогноза при неидеальном прогнозе Sigma $+N(0, 0.01)$ с использованием трёх матриц. MAE: 0.03

Заключение

Выводы

- Показана невозможность использования метрического метода прогноза временных рядов.
- Показан явный вид минимума функции, минимизирующий ошибку.
- Предложен алгоритм восстановления при точном и неточном прогнозе.

Возможные пути развития

- Оценка диаметра ошибки