

---

# Оптимальные методы оптимизации первого порядка с относительным шумом

---

Рубцов Денис  
rubtsov.dn@phystech.edu

Корнилов Никита  
kornilov.nm@phystech.edu

## Abstract

Работа посвящена ускоренным методам гладкой выпуклой оптимизации первого порядка с градиентами, известными лишь с некоторой относительной погрешностью. Проведен обзор полученных ранее теоретических результатов об оценках максимально допустимой погрешности, сохраняющей линейную сходимость методов. С помощью анализа численного решения эквивалентной задачи полуопределенного программирования (техника PEP) показана достижимость этих оценок.

Ключевые слова методы оптимизации первого порядка, ускоренные методы, неточный градиент, относительный шум, Performance Estimation Problem, сходимость, машинное обучение

## 1 Введение

В данной статье изучаются методы гладкой выпуклой оптимизации первого порядка. Их изучение актуально в связи с высоким успехом их применения во многих приложениях, в том числе в машинном обучении (см., например, в Bottou and Bousquet [2007]). При этом во многих ситуациях алгоритмы не имеют доступа к точной информации о градиенте. Так, например, бывает, когда для того, чтобы получить значение градиента, требуется решить другую сложную задачу (например, решить дифференциальное уравнение, см. в Matyukhin et al. [2021]). В данной статье мы сосредоточимся на ситуации, когда градиенты известны с некоторой относительной погрешностью  $\varepsilon \in [0, 1]$

$$\|\tilde{\nabla} f(x) - \nabla f(x)\|_2 \leq \varepsilon \|\nabla f(x)\|_2 \quad 1$$

### 1.1 Определения и обозначения

$\mathcal{F}$	некоторый класс функций
$\mathcal{F}_{\mu,L}$	класс $\mu$ -сильно выпуклых $L$ -гладких функций
$f$	исследуемая функция
$x_*$	точка минимума
$x_0$	начальная точка
$k$	номер текущей итерации
$N$	полное число итераций
$\mathcal{O}^{(f)}$	ответ оракула
$\mathcal{A}$	алгоритм
$(x_k)_{k \leq N}$	последовательность точек
$P(f, (x_k)_{k \leq N})$	метрика точности

Определение 1.1 Скалярное произведение элементов  $x, y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^n x_k y_k$ .

Определение 1.2  $\ell_2$ -норма элемента  $x \in \mathbb{R}^n$ :  $\|x\|_2 := \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2}$ .

Определение 1.3 Функция  $f$  выпукла, если

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Определение 1.4 Функция  $f$  -  $\mu$ -сильно выпукла, если существует константа  $\mu > 0$  такая, что:

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{\mu}{2} \|y - x\|_2^2, \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Определение 1.5 Функция  $f$  —  $L$ -гладкая, если существует константа  $L > 0$  такая, что:

$$f(y) \leq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{L}{2} \|y - x\|_2^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

или (эквивалентно)

$$\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2 \leq L \|y - x\|_2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (4)$$

Определение 1.6 Будем говорить, что мы имеем доступ к градиенту функции  $f$  с некоторой относительной погрешностью  $\varepsilon \in [0, 1]$ , если

$$\|\tilde{\nabla} f(x) - \nabla f(x)\|_2 \leq \varepsilon \|\nabla f(x)\|_2. \quad (5)$$

Здесь  $\nabla f(x)$  — точное значение градиента функции  $f$  в точке  $x$ , а  $\tilde{\nabla} f(x)$  — доступное нам зашумленное значение градиента.

## 1.2 Жадный метод оптимизации первого порядка GFOM

Классические методы оптимизации первого порядка включают в себя градиентный спуск (GD, Cauchy et al. [1847]), метод тяжелого шарика Б.Т.Поляка (HB, Polyak [1963]) и ускоренный метод Ю.Е.Нестерова (NAG, Nesterov [1983]). Так, итерация метода градиентного спуска записывается в следующем виде:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k) \quad (\text{GD})$$

Итерация метода тяжелого шарика:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k) + \beta(x_k - x_{k-1}) \quad (\text{HB})$$

В каждом из этих методов результат  $k$ -ой итерации  $x_k$  линейно выражается через результаты предыдущих итераций  $(x_s)_{s < k}$  и предыдущие ответы оракула  $(\mathcal{O}^{(f)}(x_s))_{s < k}$  (в случае методов оптимизации первого порядка ответы оракула — это градиенты  $\mathcal{O}^{(f)}(x) = \nabla f(x)$  или неточные градиенты  $\mathcal{O}^{(f)}(x) = \tilde{\nabla} f(x)$ ).

Так и жадный метод оптимизации первого порядка (Greedy first-order method GFOM, см. в Drori and Taylor [2020]) результат  $k$ -ой итерации  $x_k$  выражает через начальную точку  $x_0$  и через градиенты на предыдущих шагах  $(\mathcal{O}^{(f)}(x_s))_{s < k}$

$$x_k = \arg \min_{x \in \mathbf{R}} \{f(x) : x \in x_0 + \text{span}\{\nabla f(x_0), \dots, \nabla f(x_{k-1})\}\} \quad (\text{GFOM})$$

Таким образом, на каждой итерации GFOM жадно находит оптимальную линейную комбинацию градиентов функции в точках, полученных на предыдущих итерациях.

В данной работе будет исследоваться метод GFOM, в котором мы имеем доступ к градиентам лишь с относительной погрешностью.

$$x_k = \arg \min_{x \in \mathbf{R}} \{f(x) : x \in x_0 + \text{span}\{\tilde{\nabla} f(x_0), \dots, \tilde{\nabla} f(x_{k-1})\}\} \quad (\text{NoisyGFOM})$$

## 1.3 Performance Estimation Problem (PEP)

Часто доказательства сходимости методов оптимизации носят неинтуитивный, технический характер. Они представляют собой цепочку длинных нетривиальных неравенств, оценивающих наихудший случай. Если сразу задаться поиском этого наихудшего случая, то мы придем к бесконечномерной задаче оптимизации на некотором классе функций (например, на  $\mathcal{F}_{\mu, L}$ ). Оказывается, однако, что с помощью плодотворных идей интерполяции (Taylor et al. [2017]), такую задачу можно свести к конечномерной задаче полуопределенного программирования (semidefinite programming, далее — SDP). Эта техника называется Performance Estimation Problem (далее — PEP, см. в Goujaud et al. [2022], Taylor et al. [2017], Taylor [2017]). Используемые солверы — PEPit (Goujaud et al. [2022]) и Mosek(ApS [2019]).

## 2 Постановка задачи

Мы решаем задачу безусловной оптимизации

$$x_* = \arg \min_{x \in \mathbf{R}^n} f(x) \quad (6)$$

Функция  $f(x) \in \mathcal{F}_{\mu, L}$ . Мы имеем доступ к оракулу первого порядка, предоставляющему информацию о приближенном значении градиента  $\mathcal{O}^{(f)}(x) = \tilde{\nabla} f(x)$ .

Данную задачу мы будем решать жадным методом NoiseGFOM. Интерес представляет скорость сходимости данного метода. Исследование сходимости мы будем проводить с помощью анализа наихудшего случая, то есть решая следующую задачу:

$$\begin{aligned} & \max_{f \in \mathcal{F}_{\mu, L}, (x_k)_{k \leq N} \in (\mathbf{R}^n)^{N+1}} \|f(x_N) - f_*\| \\ \text{s.t. } & \begin{cases} x_0 \in U_R(x_*) = \{x : \|x - x_*\|_2^2 < R^2\} \\ (x_t)_{t \leq T} = x_0 + \text{span}\{(\mathcal{O}_k^{(f)})_{k \leq N}\} \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

Эту бесконечномерную задачу оптимизации на пространстве функций можно решить, используя технику РЕР.

## 3 Вычислительный эксперимент

Материалы по вычислительному эксперименту можно найти по этой ссылке: <https://github.com/intsystems/2024-Project-156>

### 3.1 Проверяемая гипотеза

<sup>4</sup>

Обычный GFOM (как и многие другие ускоренные методы оптимизации) имеет следующую сходимость (Hildebrand et al. [2021]):

$$\|f(x_N) - f_*\| = O\left(\left(\frac{\sqrt{L} - \sqrt{\mu}}{\sqrt{L} + \sqrt{\mu}}\right)^N\right) \quad (8)$$

При наличии шума логично предположение, что сходимость будет ухудшаться. Возможно, при большой относительной погрешности  $\varepsilon$  градиентов, сходимость ухудшится до сходимости обычного градиентного спуска (GD):

$$\|f(x_N) - f_*\| = O\left(\left(\frac{L - \mu}{L + \mu}\right)^N\right) \quad (9)$$

Сформулируем гипотезу о сходимости метода NoisyGFOM: скорость сходимости метода зависит от соотношения  $(\frac{\mu}{L})^{\alpha(\varepsilon)}$ , где  $\alpha(\varepsilon)$  - некоторая монотонно возрастающая функция, причем  $\alpha|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{2}$ , а  $\alpha|_{\varepsilon \rightarrow 1} \rightarrow 1$ .

$$\|f(x_N) - f_*\| = O\left(\left(\frac{1 - (\frac{\mu}{L})^{\alpha(\varepsilon)}}{1 + (\frac{\mu}{L})^{\alpha(\varepsilon)}}\right)^N\right) \quad (10)$$

То есть при возрастании относительного шума  $\varepsilon$  от 0 до 1 сходимость метода ухудшается от сходимости ускоренных методов до сходимости обычного градиентного спуска.

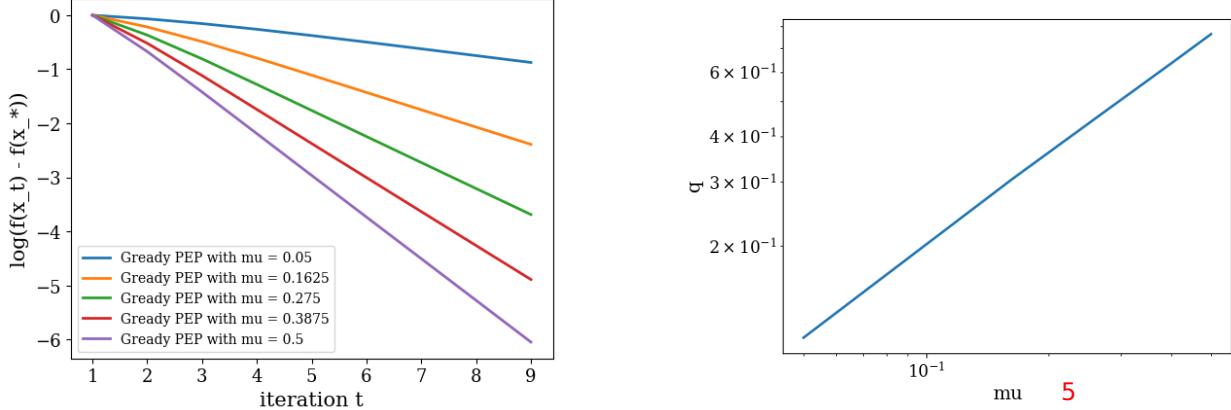
### 3.2 Ход эксперимента

При небольших  $\frac{\mu}{L}$  гипотеза принимает следующий вид:

$$\|f(x_N) - f_*\| = O\left(\left(1 - 2\left(\frac{\mu}{L}\right)^{\alpha(\varepsilon)}\right)^N\right) \quad (11)$$

Проверим линейную сходимость алгоритма. Для этого построим график (??)  $\|f(x_N) - f_\star\|(N)$  при фиксированном  $\varepsilon$  и различных  $\mu$ . Видно, что при всех  $\mu$  при больших номерах итераций графики являются прямыми, т.е. сходимость линейная.

При фиксированном  $\varepsilon$  и  $\frac{\mu}{L} \log \|f(x_N) - f_\star\| \sim N \cdot k(\varepsilon, \mu)$ , где  $k(\varepsilon, \mu) = \log \left(1 - 2 \left(\frac{\mu}{L}\right)^{\alpha(\varepsilon)}\right) \sim \left(\frac{\mu}{L}\right)^{\alpha(\varepsilon)}$ . Тогда  $\log k(\varepsilon, \mu) = \alpha(\varepsilon) \log \left(\frac{\mu}{L}\right)$ . Из предыдущего графика найдем угловые коэффициенты прямых  $k(\varepsilon, \mu)$  для различных  $\mu$  (с помощью линейной регрессии). Построим график  $k(\mu)$  в лог-лог-масштабе. Убедимся в его линейности. С помощью линейной регрессии определим коэффициент  $\alpha(\varepsilon)$ .



(a) График зависимости невязки  $\|f(x_N) - f_\star\|$  от номера итерации  $N$  при  $\varepsilon = 0.5$ . Доказывает линейную сходимость.

(b) График зависимости  $k(\mu)$  при  $\varepsilon = 0.5$ . Доказывает гипотезу о зависимости скорости сходимости только лишь от  $\left(\frac{\mu}{L}\right)^{\alpha(\varepsilon)}$

Рис. 1: Вычислительные эксперименты

Повторим эксперимент для различных  $\varepsilon$  и построим график  $\alpha(\varepsilon)$ .

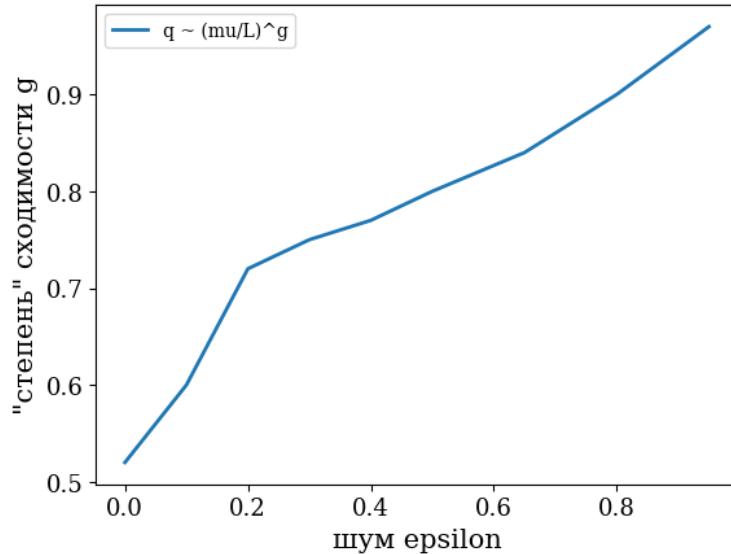


Рис. 2: График зависимости  $g(\varepsilon)$ . При нулевом шуме, сходимость как у ускоренных методов (NAG, HB). При больших шумах сходимость как у GD

### 3.3 Результаты и их обсуждение

Вычислительные эксперименты подтвердили гипотезу. Скорость сходимости метода NoisyGFOM зависит от шума  $\varepsilon$ . При увеличении шума скорость сходимости падает от быстрой 8 до свойственной обычному градиентному спуску 9. Итак,

$$\|f(x_N) - f_\star\| = O \left( \left( \frac{1 - (\frac{\mu}{L})^{\alpha(\varepsilon)}}{1 + (\frac{\mu}{L})^{\alpha(\varepsilon)}} \right)^N \right), \quad \alpha|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{2}, \quad \alpha|_{\varepsilon \rightarrow 1} \rightarrow 1 \quad (12)$$

## 4 Заключение

В данной работе было исследовано влияние зашумленного градиента 1.6 на жадный метод оптимизации первого порядка NoisyGFOM. Так, при появлении шума в градиентах метод сохраняет свою линейную сходимость при  $\varepsilon \in [0, 1]$ , уменьшая скорость сходимости с увеличением шума. При шуме  $\varepsilon \approx 1$  скорость сходимости NoisyGFOM совпадает со скоростью сходимости градиентного спуска 9. В наши дальнейшие планы входит теоретическое обоснование полученных экспериментально результатов.

## Список литературы

- Léon Bottou and Olivier Bousquet. The tradeoffs of large scale learning. *Advances in neural information processing systems*, 20, 2007.
- Vladislav Matyukhin, Sergey Kabanikhin, Maxim Shishlenin, Nikita Novikov, Artem Vasin, and Alexander Gasnikov. Convex optimization with inexact gradients in hilbert space and applications to elliptic inverse problems. In *International Conference on Mathematical Optimization Theory and Operations Research*, pages 159–175. Springer, 2021.
- Augustin Cauchy et al. Méthode générale pour la résolution des systemes d'équations simultanées. *Comp. Rend. Sci. Paris*, 25(1847):536–538, 1847.
- Boris T Polyak. Gradient methods for the minimisation of functionals. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 3(4):864–878, 1963.
- Yurii Nesterov. A method of solving a convex programming problem with convergence rate  $O(1/k^{** 2})$ . *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 269(3):543, 1983.
- Yoel Drori and Adrien B Taylor. Efficient first-order methods for convex minimization: a constructive approach. *Mathematical Programming*, 184(1):183–220, 2020.
- Adrien B Taylor, Julien M Hendrickx, and François Glineur. Smooth strongly convex interpolation and exact worst-case performance of first-order methods. *Mathematical Programming*, 161:307–345, 2017.
- Baptiste Goujaud, Céline Moucer, François Glineur, Julien Hendrickx, Adrien Taylor, and Aymeric Dieuleveut. Pepit: computer-assisted worst-case analyses of first-order optimization methods in python. *arXiv preprint arXiv:2201.04040*, 2022.
- Adrien B Taylor. Convex interpolation and performance estimation of first-order methods for convex optimization. PhD thesis, Catholic University of Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium, 2017.
- Mosek ApS. Mosek optimization toolbox for matlab. User's Guide and Reference Manual, Version, 4(1), 2019.
- Roland Hildebrand, Eugenia Vorontsova, Alexander Gasnikov, and Fyodor Stonyakin. Выпуклая оптимизация. 2021.

1. после  $\backslash\text{eps} \backslash\in [0,1]$  идет запятая. После формулы идет точка, проверьте по всему тексту: формула --- это часть предложения, после нее ставятся знаки препинания

2. Лучше  $\text{mathbb}\{R\}$

3. Эту ссылку в полноценной статье можно и нужно оставить, возможно переместить в footnote. А здесь нужен мотивационный текст - что проверяется и как проверяется. Текст нужен, чтобы читатель понял, нужно ли ему читать эту секцию

4. Обсудите с руководителем, возможно эта секция должна быть сразу после постановки

5. В `matplotlib` есть возможность писать латеховые буквы типа `\mu` и `\epsilon`