Ускоренные методы нулевого порядка в гладкой выпуклой стохастической оптимизации

Фанис Адикович Хафизов

Московский физико-технический институт

Курс: Автоматизация научных исследований (практика, В. В. Стрижов)/Группа 105

Эксперт: к.ф.-м.н А. Н. Безносиков

Консультант: А. И. Богданов

2024

Цель исследования

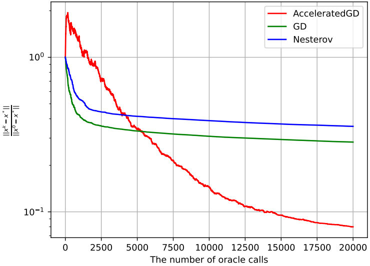
Цель:

- Создать ускоренный безградиентный метод решения задачи безусловной гладкой стохастической оптимизации
- Доказать сходимость в случае детерминированного шума
- Поставить численный эксперимент и сравнить с методом Нестерова и градиентным спуском в случаях детерминированного и стохастического шума

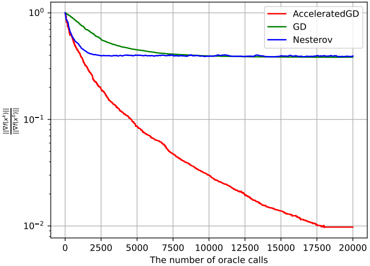
Доклад с одним слайдом

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) \qquad\qquad f_\delta(x) = f(x) + \delta(x)$$

$$\widetilde{\nabla} f_\delta(x) := d\,\frac{f_\delta(x+\tau e_i) - f_\delta(x-\tau e_i)}{2\tau} e_i,\; i \sim U\{1, d\}$$



Зависимость $\frac{\|x^k - x^*\|}{\|x^0 - x^*\|}$ от числа итераций, квадратичная задача минимизации



Зависимость $\|\nabla f(x^k)\|$ от числа итераций, задача логистической регрессии

Литература

- Aleksandr Beznosikov, Sergey Samsonov, Marina Sheshukova, Alexander Gasnikov, Alexey Naumov, Eric Moulines. First Order Methods with Markovian Noise: from Acceleration to Variational Inequalities. 2023.
- Andrey Veprikov, Alexander Bogdanov, Vladislav Minashkin, Aleksandr Beznosikov, Alexander Gasnikov. New Aspects of Black Box Conditional Gradient: Variance Reduction and One Point Feedback. 2024.
- Eduard Gorbunov, Pavel Dvurechensky, Alexander Gasnikov. An Accelerated Method for Derivative-Free Smooth Stochastic Convex Optimization. 2020.

Постановка задачи. Детерминированный случай

Дано

$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ — μ-сильно выпуклая, L-гладкая функция. Доступ к оракулу нулевого порядка $f_\delta(x) = f(x) + \delta(x)$: $|\delta(x)| \leqslant \Delta$.

Требуется

Построить алгоритм, решающий задачу

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x), \tag{1}$$

обращаясь к оракулу f_δ.

Постановка задачи. Стохастический случай

Дано

$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ — μ-сильно выпуклая, L-гладкая функция. Доступ к оракулу нулевого порядка $f_\delta(x) = f(x) + \delta(x, \xi)$:
$\mathbb{E}[|\delta(x, \xi)|^2] \leqslant \Delta^2$.

Требуется

Построить алгоритм, решающий задачу

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) := \mathbb{E}_{\xi \sim \pi}[f(x, \xi)],$$

обращаясь к оракулу f_δ.

Algorithm Accelerated Gradient Descent

Require: stepsize $\gamma > 0$, momentums θ, η, β, p, number of iterations N, approximation parameter $\tau > 0$.

Initialization: choose $x^0 = x_f^0$

for $k = 0, 1, \dots, N-1$ **do**

$x_g^k = \theta x_f^k + (1-\theta)x^k$

Sample $i \sim U\{1, d\}$

$g^k = d\frac{f_\delta(x_g^k + \tau e_i) - f_\delta(x_g^k - \tau e_i)}{2\tau} e_i$

$x_f^{k+1} = x_g^k - p\gamma g^k$

$x^{k+1} = \eta x_f^{k+1} + (p-\eta)x_f^k + (1-p)(1-\beta)x^k + (1-p)\beta x_g^k$

end for

Скорость сходимости

Theorem

Ускоренный градиентный спуск (Algorithm 1) имеет скорость сходимости на задаче (1):

$$\mathbb{E}\left[\|x^N - x^*\|^2 + \frac{6}{\mu}(f(x_f^N) - f(x^*))\right] \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left(-N\sqrt{\frac{p^2\mu\gamma}{3}}\right)\left(\|x^0 - x^*\|^2 + \frac{6}{\mu}(f(x_f^0) - f(x^*))\right) + \tag{2}$$
$$+\frac{3\sqrt{3\gamma}}{\mu^{3/2}} \cdot d\left(\frac{L\tau}{2} + \frac{\Delta}{\tau}\right)^2\left(2 + \sqrt{\frac{3}{\gamma\mu}}\right),$$

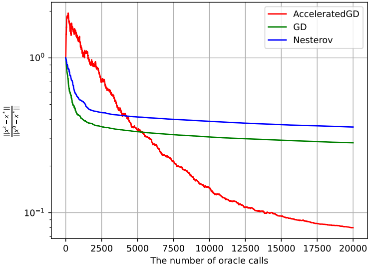
где $\gamma \in (0, \frac{3}{4L}], \beta, \theta, \eta, p$ такие, что:

$$p \simeq (2(1+\gamma L))^{-1}, \beta \simeq \sqrt{p^2\mu\gamma}, \eta \simeq \sqrt{\frac{1}{\mu\gamma}}, \theta \simeq \frac{p\eta^{-1} - 1}{\beta p\eta^{-1} - 1.} \tag{3}$$

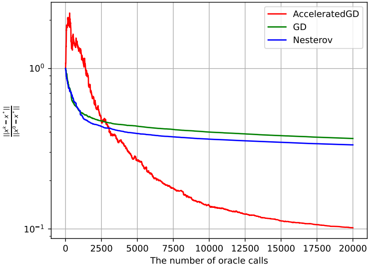
Вычислительный эксперимент. Квадратичная задача

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = x^T A x + b^T x + c$$

$$A \in \mathbb{S}_d : \mu \preceq A \preceq L, \mu = 1, L = 1000, d = 100$$



Детерминированный шум, $\Delta = 10^{-6}$, $\tau = 10^{-4}$

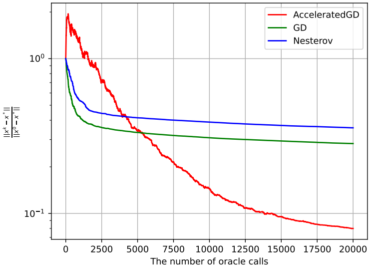


Стохастический шум, $\Delta = 10^{-6}$, $\tau = 10^{-4}$

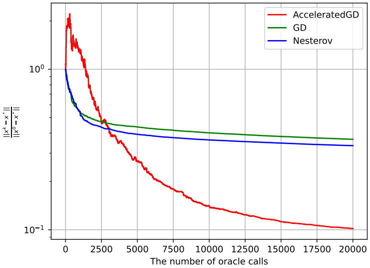
Вычислительный эксперимент. Задача логистической регрессии

Датасет mushrooms, $d = 112$, $m = 8124$, $y_i \in \{0, 1\}$, $\lambda = 0,1$.

$$\min_{w \in R^d} f(w) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \log(1 + \exp(-y_k \cdot (Xw)_k)) + \lambda \|w\|_2^2$$



Детерминированный шум, $\Delta = 10^{-6}$, $\tau = 10^{-4}$



Стохастический шум, $\Delta = 10^{-6}$, $\tau = 10^{-4}$

Результаты

- Предложен метод нулевого порядка, решающий поставленную задачу
- Получена скорость сходимости на описанном классе функций в случае детерминированного шума
- Показано превосходство предложенного метода над методом Нестерова и градиентным спуском

Будущая работа

Развить теорию на стохастический случай.