Исследование нестационарных и неоднородных динамических систем

Ильин Иван Владимирович

Московский физико-технический институт

Курс: Автоматизация научных исследований

Эксперт: В. В. Стрижов

Консультант: К. И. Сёмкин

2025

Исследование нестационарных и неоднородных динамических систем

Цель:

Восстановить динамику скрытого состояния динамической системы на основе наблюдаемого временного ряда с шумом. По ней проанализировать поведение временного ряда

Задача:

Предполагая, что производная скрытого состояния динамической системы параметризована, найти параметр динамики скрытого состояния методом NeuralODE. По найденной динамике найти точки разладки временного ряда

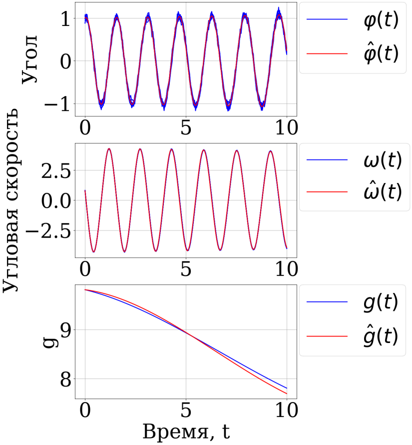
Динамическая система

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\mathbf{X}(t)\\ \mathbf{w}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\mathbf{X}(t), \mathbf{w}(t)) \\ v_\theta(t)\end{pmatrix}$$

Маятник

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\varphi(t)\\ \omega(t)\\ g(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega(t) \\ -\frac{g(t)}{L}\sin\varphi(t) \\ at^3 + bt^2 + ct + d\end{pmatrix}$$

Метод: NeuralODE. Архитектура нейросети, в которой изменение состояния моделируется как решение дифференциального уравнения



Оптимизационная задача оценки параметра

Пусть задан $\mathcal{D} = \left(\widetilde{\mathbf{X}}_t \mid t \in \{t_i\}_{i=1}^N\right)$ — временной ряд.

$$\widetilde{\mathbf{X}}_t = \mathbf{X}_t + \varepsilon_t, \text{ где } \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

где $\mathbf{X}_t$ порожден динамической системой

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\mathbf{X}(t)\\ \mathbf{w}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\mathbf{X}(t), \mathbf{w}(t))\\ v_\theta(t)\end{pmatrix},$$

где $v_\theta(t)$ — параметризованная динамика.
Пусть задан лосс

$$\mathcal{L}(\mathbf{X}, \widehat{\mathbf{X}}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \|\mathbf{X}_i - \widehat{\mathbf{X}}_i\|_2^2.$$

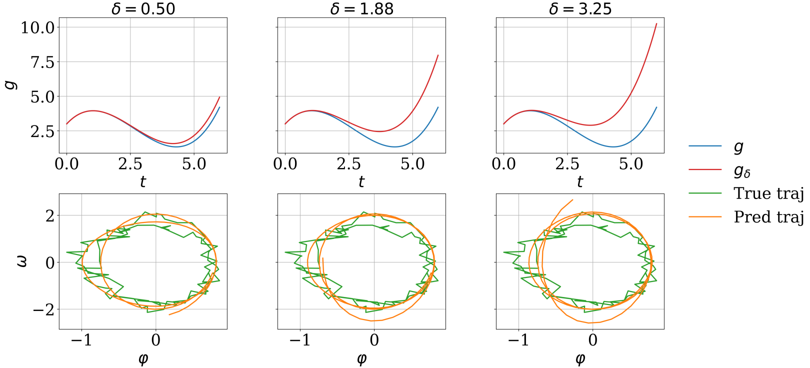
Необходимо найти параметр $\widehat{\theta}$, такой что

$$\widehat{\theta} = \arg\min_\theta \mathcal{L}(\mathbf{X}, \widehat{\mathbf{X}}).$$

Алгоритм оптимизации параметра динамической системы

1: **Вход** временной ряд $\mathcal{D}$, динамическая система $f(\mathbf{X}, \mathbf{w})$, параметризованная производная $v_\theta(t)$, начальные условия $(\mathbf{X_0}, \mathbf{w_0})$
2: Инициализировать расширенную динамическую систему $h(t) = (f(\mathbf{X}(t), \mathbf{w}(t)), v_\theta(t))$
3: Инициализировать $\widehat{\theta}$
4: $(\widehat{\mathbf{X}}, \widehat{\mathbf{w}}) \leftarrow \mathrm{NeuralODE}(h, (\mathbf{X_0}, \mathbf{w_0}), \{t_i\}_{i=1}^N)$
5: Вычислить ошибку $\mathcal{L}(\mathbf{X}, \widehat{\mathbf{X}})$
6: Обновить параметр $\widehat{\theta}$

Математический маятник



Влияние δ на $g(t)$ и фазовые траектории

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\varphi(t)\\ \omega(t)\\ g(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\omega(t)\\ -\frac{g(t)}{L}\sin\varphi(t)\\ at^3+bt^2+ct+d\end{pmatrix}; \quad g'_\delta(t) = at^3+bt^2+ct+d+\delta\cdot\frac{t^3}{t_N^3}$$

$g'_\delta(t)$ используется для инициализации параметров $g(t)$. Далее $g(t)$ обучается методом NeuralODE

Заключение

Результаты

1) предложен метод нахождения параметра производной скрытого состояния динамической по порожденному временному ряду
2) проведен вычислительный эксперимент на данных математического маятника с изменяющимся ускорением свободного падения, а также сходимость при изменении параметров инициализации весов параметра производной ускорения свободного падения