

Исследование нестационарных и неоднородных динамических систем

Ильин Иван Владимирович

Московский физико-технический институт

Курс: Автоматизация научных исследований

Эксперт: В. В. Стрижов

Консультант: К. И. Сёмкин

2025

Исследование нестационарных и неоднородных динамических систем

Цель:

Восстановить динамику скрытого состояния динамической системы на основе наблюдаемого временного ряда с шумом. По ней проанализировать поведение временного ряда

Задача:

Предполагая, что производная скрытого состояния динамической системы параметризована, найти параметр динамики скрытого состояния методом NeuralODE. По найденной динамике найти точки разладки временного ряда

Оценка параметра динамической системы

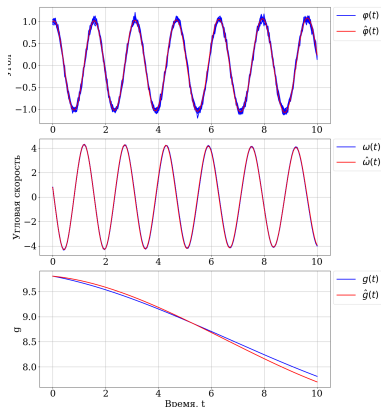
Динамическая система:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{X}(t) \\ \mathbf{w}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\mathbf{X}(t), \mathbf{w}(t)) \\ v_{\theta}(t) \end{pmatrix}$$

Частный случай (маятник):

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \omega(t) \\ g(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega(t) \\ -\frac{g(t)}{L} \sin \varphi(t) \\ at^3 + bt^2 + ct + d \end{pmatrix}$$

Метод: NeuralODE. Архитектура нейросети, в которой изменение состояния моделируется как решение дифференциального уравнения



Оптимизационная задача оценки параметра

Пусть задан $\mathcal{D} = \left(\tilde{\mathbf{X}}_t \mid t \in \{t_i\}_{i=1}^N \right)$ — временной ряд.

$$\tilde{\mathbf{X}}_t = \mathbf{X}_t + \varepsilon_t, \text{ где } \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

где \mathbf{X}_t порожден динамической системой (1)

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{X}(t) \\ \mathbf{w}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\mathbf{X}(t), \mathbf{w}(t)) \\ v_\theta(t) \end{pmatrix} \quad (1)$$

где $v_\theta(t)$ — параметризованная динамика.

Пусть задан лосс

$$\mathcal{L}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|\mathbf{X}_i - \hat{\mathbf{X}}_i\|_2^2 \quad (2)$$

Необходимо найти параметр $\hat{\theta}$, такой что

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \mathcal{L}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}) \quad (3)$$

Алгоритм оптимизации параметра динамической системы

Algorithm Оптимизация параметра θ

- 1: **Вход:** временной ряд \mathcal{D} , динамическая система $f(\mathbf{X}, \mathbf{w})$, производная параметра $v_\theta(t)$ начальные условия $\mathbf{X}_0, \mathbf{w}_0$
 - 2: **Выход:** $\hat{\theta}$
 - 3: Инициализировать $h(t) = (f(\mathbf{X}(t), \mathbf{w}(t)), v_\theta(t))$, $\hat{\theta}$
 - 4: **for** epoch = 1 до max_epochs **do**
 - 5: **for** batch в batches **do**
 - 6: $(\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{w}}) \leftarrow \text{NeuralODE}(h, (\mathbf{X}_0, \mathbf{w}_0), \{t_i\}_{i=1}^N)$
 - 7: Вычислить ошибку $\mathcal{L}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}})$
 - 8: Обновить параметр $\hat{\theta}$
 - 9: **end for**
 - 10: **end for**
 - 11: **return** $\hat{\theta}$
-

Математический маятник

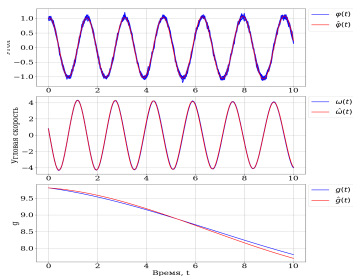


Рис.: Решение ДС: обученное и исходное

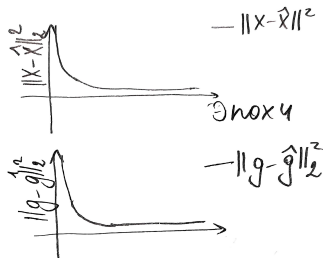


Рис.: Скорость сходимости

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \omega(t) \\ g(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega(t) \\ -\frac{g(t)}{L} \sin \varphi(t) \\ at^3 + bt^2 + ct + d \end{pmatrix}$$

L — длина маятника, $g(t)$ — ускорение свободного падения, зависящее от времени, $\theta = (a, b, c, d)^T$ — скрытый обучаемый параметр

Результаты:

- ▶ предложен метод нахождения параметра производной скрытого состояния динамической по порожденному временному ряду
- ▶ проведен вычислительный эксперимент на данных математического маятника с изменяющимся ускорением свободного падения