

Исследование нестационарных и неоднородных динамических систем

Ильин Иван Владимирович

Московский физико-технический институт

Курс: Автоматизация научных исследований

Эксперт: В. В. Стрижов

Консультант: К. И. Сёмкин

2025

Исследование нестационарных и неоднородных динамических систем

Цель:

Восстановить динамику скрытого состояния динамической системы на основе наблюдаемого временного ряда с шумом. По ней проанализировать поведение временного ряда

Задача:

Предполагая, что производная скрытого состояния динамической системы параметризована, найти параметр динамики скрытого состояния методом NeuralODE

Оценка параметра динамической системы

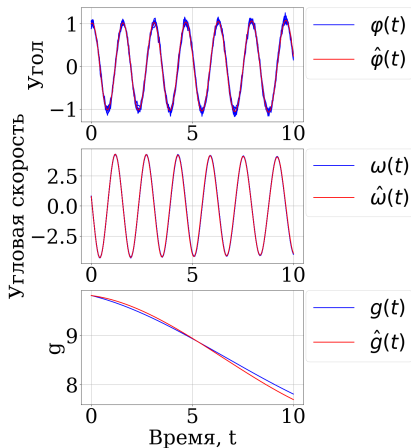
Динамическая система

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{X}(t) \\ \mathbf{w}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\mathbf{X}(t), \mathbf{w}(t)) \\ v_\theta(t) \end{pmatrix}$$

Маятник

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \omega(t) \\ g(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega(t) \\ -\frac{g(t)}{L} \sin \varphi(t) \\ at^3 + bt^2 + ct + d \end{pmatrix}$$

Метод: NeuralODE. Архитектура нейросети, в которой изменение состояния моделируется как решение дифференциального уравнения



Оптимизационная задача оценки параметра

Пусть задан $\mathcal{D} = \left(\tilde{\mathbf{X}}_t \mid t \in \{t_i\}_{i=1}^N \right)$ — временной ряд.

$$\tilde{\mathbf{X}}_t = \mathbf{X}_t + \varepsilon_t, \text{ где } \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

где \mathbf{X}_t порожден динамической системой

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{X}(t) \\ \mathbf{w}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\mathbf{X}(t), \mathbf{w}(t)) \\ v_\theta(t) \end{pmatrix},$$

где $v_\theta(t)$ — параметризованная динамика.

Пусть задан лосс

$$\mathcal{L}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|\mathbf{X}_i - \hat{\mathbf{X}}_i\|_2^2.$$

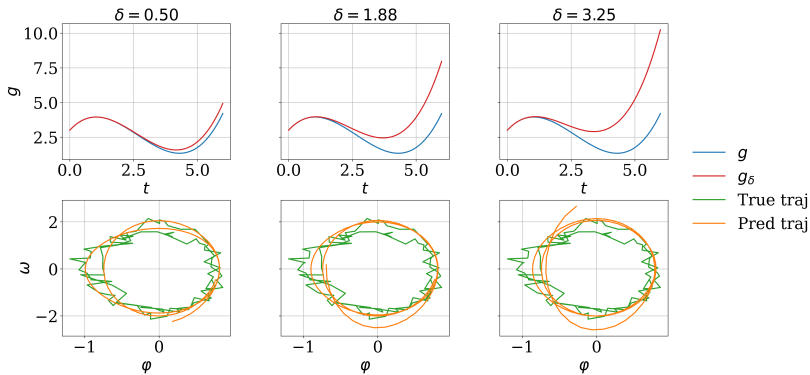
Необходимо найти параметр $\hat{\theta}$, такой что

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \mathcal{L}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}).$$

Алгоритм оптимизации параметра динамической системы

- 1: **Вход** временной ряд \mathcal{D} , динамическая система $f(\mathbf{X}, \mathbf{w})$, параметризованная производная $v_\theta(t)$, начальные условия $(\mathbf{X}_0, \mathbf{w}_0)$
- 2: Инициализировать расширенную динамическую систему $h(t) = (f(\mathbf{X}(t), \mathbf{w}(t)), v_\theta(t))$
- 3: Инициализировать θ
- 4: $(\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{w}}) \leftarrow \text{NeuralODE}(h, (\mathbf{X}_0, \mathbf{w}_0), \{t_i\}_{i=1}^N)$
- 5: Вычислить ошибку $\mathcal{L}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}})$
- 6: Обновить параметр $\hat{\theta}$

Математический маятник



Влияние δ на $g(t)$ и фазовые траектории

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \omega(t) \\ g(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega(t) \\ -\frac{g(t)}{L} \sin \varphi(t) \\ at^3 + bt^2 + ct + d \end{pmatrix}; \quad g'_\delta(t) = at^3 + bt^2 + ct + d + \delta \cdot \frac{t^3}{t_N^3}$$

$g'_\delta(t)$ используется для инициализации параметров $g(t)$. Далее $g(t)$ обучается методом NeuralODE

Результаты

- 1) предложен метод нахождения параметра производной скрытого состояния динамической по порожденному временному ряду
- 2) проведен вычислительный эксперимент на данных математического маятника с изменяющимся ускорением свободного падения, а также сходимость при изменении параметров инициализации весов параметра производной ускорения свободного падения