Исследование нестационарных и неоднородных динамических систем

Ivan Ilyin, Kirill Semkin, Alexander Terentyev, Vadim Strijov

24 апреля 2025 г.

1 Abstract

В работе исследуется задача восстановления скрытой динамической системы по временному ряду. Предполагается, что динамическая система параметризована. Для нахождения параметра системы используется метод Neural ODE. Строятся фазовые траектории в зависимости от начальных условий и параметра, восстанавливается параметр в случае зависимости его от времени. Проводится анализ точек разладки временного ряда по полученному параметру системы. Эксперимент проведён на синтетических данных и датасетах Run or Walk, The Weather Dataset.

Keywords : Machine Learning, Time Series, Neural ODE.

2 Introduction

Одним из способов исследования временных рядов является анализ скрытых состояний динамической системы, порождающей этот ряд. Временной ряд — последовательно измеренные через некоторые (зачастую равные) промежутки времени данные. Динамическая система — это математическая модель, заданная дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}(t) = f(\mathbf{X}(t), t, \mathbf{w}) \tag{1}$$

Если правая часть уравнения явно зависит от t, то динамическую систему называют нестационарной. А если правая часть уравнения представляется в виде

$$f(\mathbf{X}, t, \mathbf{w}) = A(t)\mathbf{X}(t) + B(t, \mathbf{w}), \quad B(t, \mathbf{w}) \not\equiv 0 \tag{2}$$

то динамическую систему называют неоднородной.

На текущий момент существует несколько подходов к восстановлению состояния системы.

Одним из методов является использование RNN [1], однако основным недостатком подхода является дискретное представление изменения состояния скрытой системы, а также неустойчивость к нерегулярно наблюдаемым данным [2]. Также скрытые состояния RNN трудно интерпретируемы [3] [4].

В [5] вводятся нейронные обыкновенные дифференциальные уравнения, которые представляют скрытые состояния в виде динамической системы, данный подход позволяет исследовать нерегулярно наблюдаемые данные [6], а также восстановить параметр динамической системы, однако не исследуются динамические системы с параметром, меняющимся во времени.

В теории оптимальных процессов [7] вводится управляемый процесс

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}(t) = f(\mathbf{X}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{X}(t_0) = x_0 \tag{3}$$

и задача минимизации функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{X}(t), \mathbf{u}(t))\, dt, \tag{4}$$

где $\mathbf{X}(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы в момент времени t, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^r$ — вектор управления в момент времени t, $f(\mathbf{X}(t), \mathbf{u}(t))$ — функция, задающая динамику системы. Однако не рассматривается случай, когда $\mathbf{X}(t)$ имеет шум.

В работе предлагается метод восстановления параметра динамической системы, меняющегося во времени, путем параметризации его производной. Восстанавливается временной ряд по параметру производной динамической системы, исследуются точки разладки с помощью полученного изменения параметра системы во времени.

3 Problem statement

Пусть задан $\mathcal{D} = \left(\widetilde{\mathbf{X}}_t \mid t \in \{t_i\}_{i=1}^N\right)$ — временной ряд.

$$\widetilde{\mathbf{X}}_t = \mathbf{X}_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(0,1),$$

где $\mathbf{X}_t$ порожден динамической системой (1)

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\mathbf{X}(t)\\ \mathbf{w}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\mathbf{X}(t), \mathbf{w}(t)) \\ v_\theta(t)\end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $v_\theta(t)$ — параметризованная динамика.
Пусть задан лосс

$$\mathcal{L}(\mathbf{X}, \widehat{\mathbf{X}}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \|\mathbf{X}_i - \widehat{\mathbf{X}}_i\|_2^2 \tag{6}$$

Необходимо найти параметр $\widehat{\theta}$, такой что

$$\widehat{\theta} = \arg\min_\theta \mathcal{L}(\mathbf{X}, \widehat{\mathbf{X}}) \tag{7}$$

4 Method

Algorithm 1 Обучение параметра θ

Вход: временной ряд $\mathcal{D}$, динамическая система $f(\mathbf{X}, \mathbf{w})$, производная скрытого состояния $v_\theta(t)$, начальные условия $\mathbf{X_0}, \mathbf{w_0}$
Выход: $\widehat{\theta}$
Инициализировать $h(t) = (f(\mathbf{X}(t), \mathbf{w}(t)), v_\theta(t))$
Инициализировать $\widehat{\theta}$
for epoch $= 1$ до `max_epochs` **do**
  for batch в `batches` **do**
    $(\widehat{\mathbf{X}}, \widehat{\mathbf{w}}) \leftarrow \text{NeuralODE}(h, (\mathbf{X_0}, \mathbf{w_0}), \{t_i\}_{i=1}^N)$
    Вычислить ошибку $\mathcal{L}(\mathbf{X}, \widehat{\mathbf{X}})$
    Обновить $\widehat{\theta}$
  end for
end for
return $\widehat{\theta}$

5 Computational experiment

Рассмотрим модель математического маятника с изменяющимся ускорением свободного падения и постоянной длиной, заданную дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\varphi(t)\\ \omega(t)\\ g(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\omega(t)\\ -\frac{g(t)}{l}sin(\varphi(t))\\ 3at^2+2bt+c\end{pmatrix} \tag{8}$$

С начальными условиями

$$\begin{pmatrix}\varphi(0)\\ \omega(0)\\ g(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\pi}{4}\\ 1\\ 9{,}81\end{pmatrix} \tag{9}$$

где $\varphi(t)$ — угол отклонения маятника в момент t, $\omega(t)$ — угловая скорость маятника в момент t, l — постоянная длина маятника в момент, $g(t)$ — меняющееся во времени ускорение свободного падения, $\theta = \begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ - обучаемый параметр динамической системы.

Для проведения эксперимента сгенерируем 100 векторов $\begin{pmatrix}\varphi(t)\\ \omega(t)\end{pmatrix}$ при $\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0.01\\ 0.1\\ 0.5\end{pmatrix}$ равномерно на временном интервале $t \in [0, 10]$, решая дифференциальное уравнение (3)-(4) методом Рунге-Кутты четвертого порядка.

При помощи Neural ODE обучим систему (3)-(4) на сгенерированных данных и проанализируем θ, изменение $g(t)$ во времени, а также лосс полученной системы.

Список литературы

[1] Hendrik Strobelt, Sebastian Gehrmann, Hanspeter Pfister, and Alexander M Rush. Lstmvis: A tool for visual analysis of hidden state dynamics in recurrent neural networks. *IEEE transactions on visualization and computer graphics*, 24(1):667–676, 2017.

[2] Yulia Rubanova, Ricky T. Q. Chen, and David Duvenaud. Latent odes for irregularly-sampled time series, 2019.

[3] Yao Ming, Shaozu Cao, Ruixiang Zhang, Zhen Li, Yuanzhe Chen, Yangqiu Song, and Huamin Qu. Understanding hidden memories of recurrent neural networks. In *2017 IEEE conference on visual analytics science and technology (VAST)*, pages 13–24. IEEE, 2017.

[4] Rafael Garcia, Tanja Munz, and Daniel Weiskopf. Visual analytics tool for the interpretation of hidden states in recurrent neural networks. *Visual Computing for Industry, Biomedicine, and Art*, 4(1):24, 2021.

[5] Ricky T. Q. Chen, Yulia Rubanova, Jesse Bettencourt, and David K Duvenaud. Neural ordinary differential equations. In S. Bengio, H. Wallach, H. Larochelle, K. Grauman, N. Cesa-Bianchi, and R. Garnett, editors, *Advances in Neural Information Processing Systems*, volume 31. Curran Associates, Inc., 2018.

[6] Yulia Rubanova, Ricky T. Q. Chen, and David K Duvenaud. Latent ordinary differential equations for irregularly-sampled time series. In H. Wallach, H. Larochelle, A. Beygelzimer, F. d'Alché-Buc, E. Fox, and R. Garnett, editors, *Advances in Neural Information Processing Systems*, volume 32. Curran Associates, Inc., 2019.

[7] НС Понтрягин, ВГ Болтянский, МВ Гамкрелидзе, and ЕФ Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. 1983.