

Выбор прогностических моделей в римановых фазовых пространствах

Алтай Эйнуллаев Эльшан оглы

Московский физико-технический институт

Научный руководитель: д.ф-м.н. Стрижов Вадим Викторович

2024

Выбор прогностических моделей в римановых фазовых пространствах

Мотивация

Матрицы ковариации многомерных временных рядов лежат в римановом пространстве SPD матриц. Переходя в это пространство, решают¹ задачу классификации многомерных временных рядов.

Проблема

В отличие от задачи классификации, задачу прогнозирования нельзя решить в пространстве матриц ковариации, т.к. требуется прогнозировать исходные временные ряды.

Предлагаемый подход

Рассматривать векторное представление матриц ковариации как описание взаимосвязи фазовых траекторий многомерных временных рядов и использовать эту информацию для улучшения качества прогноза.

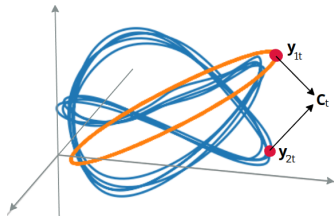
¹Classification of covariance matrices using a Riemannian-based kernel for BCI applications, Alexandre Barachant et al., *Neurocomputing*, 2013

Матрица ковариации в фазовых пространствах

Ставится задача прогнозирования многомерного временного ряда $\mathbf{x}_t = [x_{1t}, \dots, x_{nt}]^T$. Каждому временному ряду ставится в соответствие фазовое пространство Y векторов задержек $\mathbf{y}_t = [x_{t-L+1}, \dots, x_t]^T$ размерности L . Матрица ковариации в каждый момент времени:

$$\mathbf{C}_t = \frac{1}{L-1} \mathbf{X}_t \mathbf{X}_t^T,$$

где $\mathbf{X}_t = [\mathbf{y}_{1t} \dots \mathbf{y}_{nt}]^T$.



Точкам фазовых траекторий $\mathbf{y}_{1t}, \mathbf{y}_{2t}$ ставится в соответствие матрица ковариации \mathbf{C}_t .

Пространство SPD матриц

Пусть

$$S(n) = \{\mathbf{S} \in M(n), \mathbf{S}^T = \mathbf{S}\}$$

– пространство всех $n \times n$ симметричных матриц в пространстве квадратных вещественных матриц $M(n)$ и

$$P(n) = \{\mathbf{C} \in S(n), \mathbf{u}^T \mathbf{C} \mathbf{u} > 0, \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}\}.$$

Пространство SPD матриц $P(n)$ – гладкое многообразие \mathcal{M} .

Касательное пространство к $P(n)$ в \mathbf{C} – векторное пространство $T_{\mathbf{C}} \subset S(n)$.

Метрика и среднее в пр-ве $P(n)$

Скалярное произведение в касательном пространстве:

$$\langle \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2 \rangle_{\mathbf{C}} = \text{tr}(\mathbf{S}_1 \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S}_2 \mathbf{C}^{-1}).$$

Кратчайшая линия $\Gamma(t) : [0, 1] \rightarrow P(n)$, соединяющая две точки многообразия называется геодезической линией и расстояние между ними равно ее длине $l(\Gamma(t))$. Таким образом, геодезическое расстояние:

$$\delta(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2) = \|\log(\mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{C}_2)\|_F = \left(\sum_{i=1}^n \log^2 \lambda_i \right)^{1/2},$$

где $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ – собственные числа матрицы $\mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{C}_2$.
Среднее SPD матриц, соответствующее δ :

$$G(\mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_I) = \arg \min_{\mathbf{C} \in P(n)} \sum_{i=1}^I \delta(\mathbf{C}_i, \mathbf{C}).$$

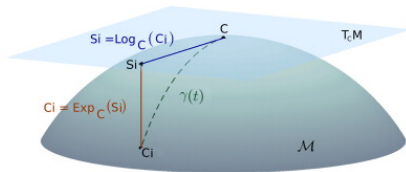
Переход в касательное пространство T_C

Для точки $C \in P(n)$, определим касательное пространство T_C .
Каждый касательный вектор S_i является производной в $t = 0$ геодезической линии $\Gamma_i(t)$ между C и экспоненциальным отображением $C_i = \text{Exp}_C(S_i)$, определенным следующим образом:

$$C_i = \text{Exp}_C(S_i) = C^{\frac{1}{2}} \exp(C^{-\frac{1}{2}} S_i C^{-\frac{1}{2}}) C^{\frac{1}{2}}.$$

Обратное отображение:

$$S_i = \text{Log}_C(C_i) = C^{\frac{1}{2}} \log(C^{-\frac{1}{2}} C_i C^{-\frac{1}{2}}) C^{\frac{1}{2}}.$$



Касательное пространство в точке C , S_i – касательный вектор в C , $\gamma_i(t)$ – геодезическая линия, соединяющая C , C_i в $P(n)$.

Построение прогностической модели

Требуется выбрать две модели f , h :

$$\mathbf{x}_t \xrightarrow{f} \hat{\mathbf{x}}_{t+1},$$

$$\mathbf{x}_t \xrightarrow{g} \mathbf{S}_t \xrightarrow{h} \hat{\mathbf{S}}_{t+1},$$

где f – модель прогнозирования временного ряда в фазовом пространстве, g – отображение, ставящее в соответствие временному ряду представление матрицы ковариации в касательном пространстве \mathbf{S}_t , h – модель прогнозирования $\hat{\mathbf{S}}_{t+1}$ в касательном пространстве. Для улучшения прогноза f строится мультимодель:

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+1} = F(\hat{\mathbf{x}}_{t+1}, \hat{\mathbf{S}}_{t+1}) = F(f(\mathbf{x}_t), h(g(\mathbf{x}_t))).$$

План вычислительного эксперимента

В силу того, что \mathbf{S}_t описывает взаимосвязь точек фазовых траекторий временных рядов, в качестве f рассматриваются прогностические модели в фазовых пространствах:

- Локальные модели прогнозирования,
- SSA, tSSA, mSSA.

В качестве h можно рассматривать произвольные модели прогнозирования, например:

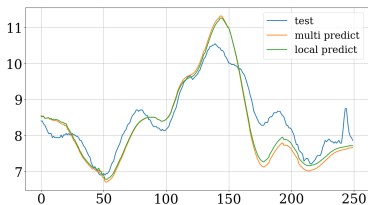
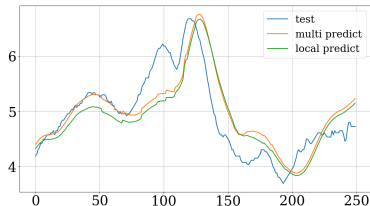
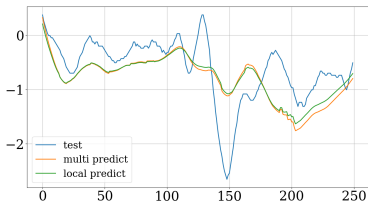
- LSTM,
- SSA, tSSA, mSSA.

В качестве F рассматриваются:

- Линейная модель,
- Двухслойная нейронная сеть.

Результаты

- f – локальная модель, усреднение $k = 20$ соседей
- h – I , тождественное преобразование
- F – линейная регрессия



Трехмерный ряд акселерометра. $MAPE_{local} = 0.683$, $MAPE_{multi} = 0.67$

Дальнейшие исследования

- Полностью реализовать план эксперимента
- Получить условия применимости метода
- Попробовать другие способы подсчета матрицы \mathbf{C}_t .