

# Выбор прогностических моделей в римановых фазовых пространствах

Алтай Эйнуллаев Эльшан оглы

Московский физико-технический институт

*Научный руководитель:* д.ф-м.н. В.В.Стрижов

2025

# Выбор моделей в римановых фазовых пространствах

Матрицы ковариации набора временных рядов лежат в римановом пространстве SPD матриц. В этом пространстве решается задача классификации набора временных рядов.

## **Проблема**

В отличие от задачи классификации, задачу прогнозирования нельзя решить в пространстве матриц ковариации, т.к. требуется прогнозировать исходные временные ряды.

## **Предлагаемый подход**

Векторное представление матриц ковариации рассматривается как описание взаимосвязи фазовых траекторий набора временных рядов и используется для улучшения качества прогноза.

# Матрица ковариации в фазовых пространствах

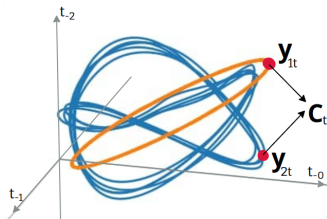
$\mathbf{x}_t = [x_{1t}, \dots, x_{nt}]^T$  – набор  $n$  временных рядов,

$\mathbf{y}_{it} = [x_{i(t-L+1)}, \dots, x_{it}]^T$  – точки фазового пространства  $\mathbf{y}_i$  векторов задержек ряда  $x_{it}$  размерности  $L$ .

Матрица ковариации в каждый момент времени:

$$\mathbf{C}_t = \frac{1}{L-1} \mathbf{X}_t \mathbf{X}_t^T,$$

где  $\mathbf{X}_t = [\mathbf{y}_{1t} \dots \mathbf{y}_{nt}]^T$ .



Точкам фазовых траекторий  $\mathbf{y}_{1t}, \mathbf{y}_{2t}$  ставится в соответствие матрица ковариации  $\mathbf{C}_t$ .

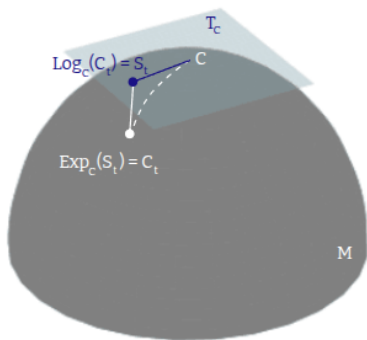
# Перевод матриц в касательное пространство $T_C$

Перевод SPD матрицы  $C_t$  в касательное пространство  $T_C$ :

$$S_t = \text{Log}_C(C_t) = C^{\frac{1}{2}} \log(C^{-\frac{1}{2}} C_t C^{-\frac{1}{2}}) C^{\frac{1}{2}}.$$

Обратное отображение:

$$C_t = \text{Exp}_C(S_t) = C^{\frac{1}{2}} \exp(C^{-\frac{1}{2}} S_t C^{-\frac{1}{2}}) C^{\frac{1}{2}}.$$



Перевод  $C_t$  в пространство  $T_C$  и обратно

# Построение модели и критерии качества

Требуется выбрать две модели  $f$ ,  $F$ :

$$\mathbf{x}_t \xrightarrow{f} \hat{\mathbf{x}}_{t+1}^f,$$

$$(\hat{\mathbf{x}}_{t+1}^f, \mathbf{S}_t) \xrightarrow{F} \hat{\mathbf{x}}_{t+1}.$$

Оптимизационная задача

$$\hat{\mathbf{w}}_f = \arg \min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^k} \mathcal{L}(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{x}}_{t+1} - \mathbf{x}_{t+1}),$$

$$\hat{\mathbf{w}}_F = \arg \min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m} \|F(\hat{\mathbf{x}}_{t+1}^f, \mathbf{S}_t | \mathbf{w}) - \mathbf{x}_{t+1}\|_2^2.$$

Критерий качества

$$\text{MSE} = \frac{1}{h} \sum_{i=T+1}^{T+h} \frac{1}{2} \|\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_i\|_2^2.$$

где  $h$  – горизонт прогноза.

# Разбиение временного ряда для обучения

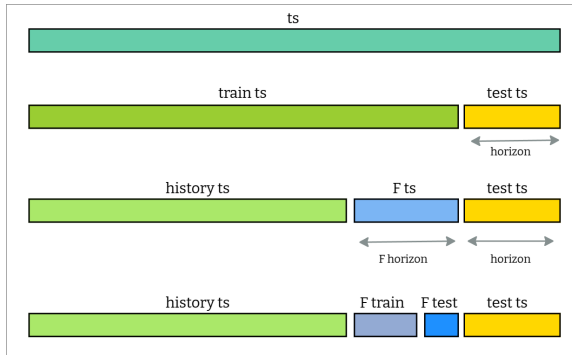


Схема разделения временного ряда для обучения модели:

history ts – используется для обучения  $f$ ,

F train – используется для обучения  $F$ ,

F test – оценка качества  $F$ ,

test ts – сравнение качества  $F$  и  $f$ .

# Метод сходящегося перекрестного отображения (ССМ)

## Идея

$x_{1t}, x_{2t}$  причинно связаны если порождены одной и той же динамической системой.

## Реализация

$M_{x_1}, M_{x_2}$  – фазовые пространства временных рядов,  $L$  – длина временных рядов:

- **Перекрестное отображение** : Возможность предсказать  $x_i$  по  $M_{x_j}$ :  $\hat{x}_i | M_{x_j}$ ,
- **Сходимость** : Улучшение и сходимость качества прогноза к некоторому значению при увеличении  $L$ .

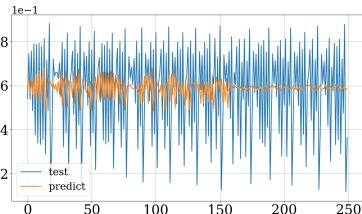
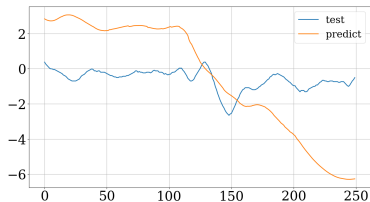
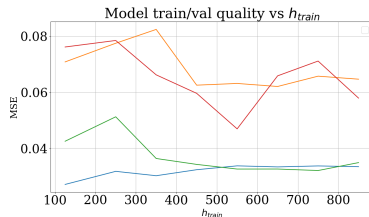
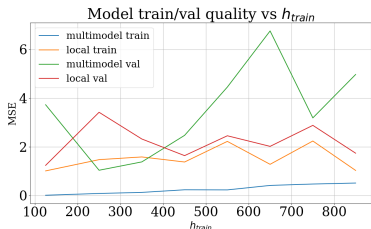
При выполнении условий:  $x_j$  – причина  $x_i$ .

## Критерий выбора метода в случае набора из двух рядов

1. Вычисляем матрицы ковариации  $\mathbf{C}_t$ , переводим их в касательное пространство  $\mathbf{S}_t$
2. Проверяем стационарность временных рядов набора  $\mathbf{x}_t$  и компонент  $\mathbf{S}_t$
3. С помощью ССМ проверяем наличие взаимосвязи между рядами
4. Для  $t = T + 1, \dots, T + h$ :
  - Находим  $k$  ближайших соседей  $\mathbf{S}_t$ :  $\mathbf{S}_{t_1}, \mathbf{S}_{t_2}, \dots, \mathbf{S}_{t_k}$
  - Для  $x_{1t}, x_{2t}$ :
    - Прогнозируем временные ряды:  $x_{j(t+1)} = \sum_{i=1}^k d_i x_{jt_i}$
5. Вычисляем коэффициенты корреляции прогнозов с истинными значениями рядов



# Вычислительный эксперимент



Результаты обучения модели в случае: а) невыполнения условий стационарности, ССМ, теста на ковариации б) при выполнении условий стационарности, при наличии ССМ-причинности, однако коэффициент корреляции низок ( $\approx 0.1$ ).

## Выносятся на защиту

1. Предложенный метод прогнозирования, с учетом векторов касательного пространства матриц ковариации,
2. Условия из критерия применимости метода.