Выбор прогностических моделей в римановых фазовых пространствах

Алтай Эйнуллаев Эльшан оглы

Московский физико-технический институт

Научный руководитель: д.ф-м.н. В.В.Стрижов

2025

Выбор моделей в римановых фазовых пространствах

Матрицы ковариации набора временных рядов лежат в римановом пространстве SPD матриц. В этом пространстве решается задача классификации набора временных рядов.

Проблема

В отличие от задачи классификации, задачу прогнозирования нельзя решить в пространстве матриц ковариации, т.к. требуется прогнозировать исходные временные ряды.

Предлагаемый подход

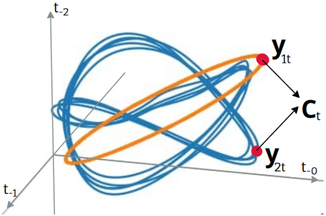
Векторное представление матриц ковариации рассматривается как описание взаимосвязи фазовах траекторий набора временных рядов и используется для улучшения качества прогноза.

Матрица ковариации в фазовых пространствах

$\mathbf{x}_t = [x_{1t}, \ldots, x_{nt}]^\mathsf{T}$ – набор n временных рядов,
$\mathbf{y}_{it} = [x_{i(t-L+1)}, \ldots, x_{it}]^\mathsf{T}$ – точки фазового пространства Y_i векторов задержек ряда x_{it} размерности L.
Матрица ковариации в каждый момент времени:

$$\mathbf{C}_t = \frac{1}{L-1}\mathbf{X}_t\mathbf{X}_t^\mathsf{T},$$

где $\mathbf{X}_t = [\mathbf{y}_{1t} \ldots \mathbf{y}_{nt}]^\mathsf{T}$.



Точкам фазовых траекторий $\mathbf{y}_{1t}, \mathbf{y}_{2t}$ ставится в соответствие матрица ковариации $\mathbf{C}_t$.

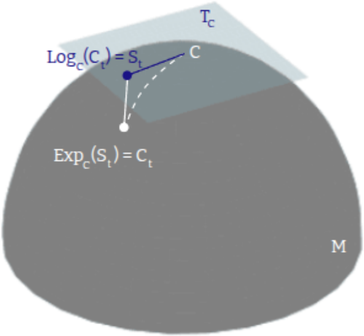
Перевод матриц в касательное пространство $T_{\mathbf{C}}$

Перевод SPD матрицы $\mathbf{C}_t$ в касательное пространство $T_{\mathbf{C}}$:

$$\mathbf{S}_t = \mathrm{Log}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}_t) = \mathbf{C}^{\frac{1}{2}} \log(\mathbf{C}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{C}_t \mathbf{C}^{-\frac{1}{2}})\mathbf{C}^{\frac{1}{2}}.$$

Обратное отображение:

$$\mathbf{C}_t = \mathrm{Exp}_{\mathbf{C}}(\mathbf{S}_t) = \mathbf{C}^{\frac{1}{2}} \exp(\mathbf{C}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{S}_t \mathbf{C}^{-\frac{1}{2}})\mathbf{C}^{\frac{1}{2}}.$$



Перевод $\mathbf{C}_t$ в пространство $T_{\mathbf{C}}$ и обратно

Зашумленные матрицы ковариации

Theorem (Эйнуллаев, 2025)

Пусть $\mathbf{x}_t = (x_{1t}, x_{2t})$ *и* $x_{it} = \tilde{x}_{it} + \varepsilon_{it}$*, где* $i \in \{1, 2\}, \varepsilon_{it} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$*. Пусть* $\tilde{\mathbf{C}}_t$ *– матрица ковариации для набора временных рядов* $\tilde{\mathbf{x}}_t = (\tilde{x}_{1t}, \tilde{x}_{2t})$*. Тогда матрица ковариации* $\mathbf{C}_t$ *для набора* $\mathbf{x}_t$ *равна:*

$$\mathbf{C}_t = \tilde{\mathbf{C}}_t \pm \frac{1}{L-1}\Delta\mathbf{C}_t,$$

где

$$\Delta\mathbf{C}_t = \begin{pmatrix} \sqrt{4\|\mathbf{y}_{1t}\|^2\sigma_1^2 + 2L\sigma_1^4} & \sqrt{\sigma_2^2\|\mathbf{y}_{1t}\|^2 + \sigma_1^2\|\mathbf{y}_{2t}\|^2 + L\sigma_1^2\sigma_2^2} \\ \sqrt{\sigma_2^2\|\mathbf{y}_{1t}\|^2 + \sigma_1^2\|\mathbf{y}_{2t}\|^2 + L\sigma_1^2\sigma_2^2} & \sqrt{4\|\mathbf{y}_{2t}\|^2\sigma_2^2 + 2L\sigma_2^4} \end{pmatrix}$$

– матрица среднеквадратичных отклонений соответствующих элементов матрицы $\mathbf{C}_t$*.*

Риманово расстояние между зашумленными $\mathbf{C}_t$

Определение метрики в пространстве SPD матриц:

$$d(\mathbf{C}_{t_1}, \mathbf{C}_{t_2}) = \|\mathrm{Log}(\mathbf{C}_{t_1}^{-1}\mathbf{C}_{t_2})\|_F = [\sum_{i=1}^{L} \ln^2 \lambda_i]^{\frac{1}{2}},$$

Lemma (Эйнуллаев, 2025)

Пусть $\mathbf{C}_{t_1} = \tilde{\mathbf{C}} \pm \Delta\mathbf{C}_{t_1}, \mathbf{C}_{t_2} = \tilde{\mathbf{C}} \pm \Delta\mathbf{C}_{t_2}$. *Тогда, при условии приближения* $\mathbf{C}_{t_1}^{-1}\mathbf{C}_{t_2} \approx \mathbf{E} \pm (\tilde{\mathbf{C}}^{-1}\Delta\mathbf{C}_{t_1} - \tilde{\mathbf{C}}^{-2}\Delta\mathbf{C}_{t_1}\tilde{\mathbf{C}})$, *в первом порядке теории возмущений, собственные числа матрицы* $\mathbf{C}_{t_1}^{-1}\mathbf{C}_{t_2}$ *равны:*

$$\lambda_1 = 1 \pm (\tilde{\mathbf{C}}^{-1}\Delta\mathbf{C}_{t_1} - \tilde{\mathbf{C}}^{-2}\Delta\mathbf{C}_{t_1}\tilde{\mathbf{C}})_{11},$$

$$\lambda_2 = 1 \pm (\tilde{\mathbf{C}}^{-1}\Delta\mathbf{C}_{t_1} - \tilde{\mathbf{C}}^{-2}\Delta\mathbf{C}_{t_1}\tilde{\mathbf{C}})_{22}.$$

Расстояние, на которое отдалятся матрицы $\mathbf{C}_{t_1}, \mathbf{C}_{t_2}$:

$$\delta(\mathbf{C}_{t_1}, \mathbf{C}_{t_2}) \approx \sqrt{\sum_i (\tilde{\mathbf{C}}^{-1}\Delta\mathbf{C}_{t_1} - \tilde{\mathbf{C}}^{-2}\Delta\mathbf{C}_{t_1}\tilde{\mathbf{C}})_{ii}^2}.$$

Метод улучшения базового прогноза

Требуется выбрать две модели f, F:

$$\mathbf{x}_t \xrightarrow{f} \hat{\mathbf{x}}_{t+1}^f,$$

$$(\hat{\mathbf{x}}_{t+1}^f, \mathbf{S}_t) \xrightarrow{F} \hat{\mathbf{x}}_{t+1}.$$

Отимизационная задача

$$\hat{\mathbf{w}}_f = \arg\min_{\mathbf{w}\in\mathbb{R}^k} \mathcal{L}(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{x}}_{t+1} - \mathbf{x}_{t+1}),$$

$$\hat{\mathbf{w}}_F = \arg\min_{\mathbf{w}\in\mathbb{R}^m} \|F(\hat{\mathbf{x}}_{t+1}^f, \mathbf{S}_t|\mathbf{w}) - \mathbf{x}_{t+1}\|_2^2.$$

Критерий качества

$$\text{MSE} = \frac{1}{h}\sum_{i=T+1}^{T+h}\frac{1}{2}\|\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_i\|_2^2.$$

где h – горизонт прогноза.

Разбиение временного ряда для обучения

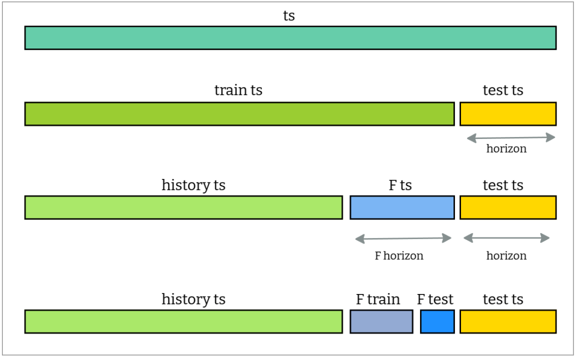


Схема разделения временного ряда для обучения модели:

history ts – используется для обучения f,

F train – используется для обучения F,

F test – оценка качества F,

test ts – сравнение качества F и f.

Метод сходящегося перекрестного отображения (CCM)

Идея

x_{1t}, x_{2t} причинно связаны если порождены одной и той же динамической системой.

Реализация

M_{x_1}, M_{x_2} – фазовые пространства временных рядов, L – длина временных рядов:

- **Перекрестное отображение** : Возможность предсказать x_i по M_{x_j}: $\hat{x}_i | M_{x_j}$,
- **Сходимость** : Улучшение и сходимость качества прогноза к некоторому значению при увеличении L.

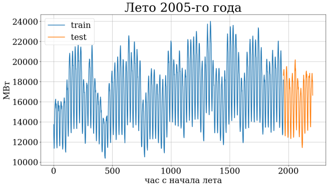
При выполнении условий: x_j – причина x_i.

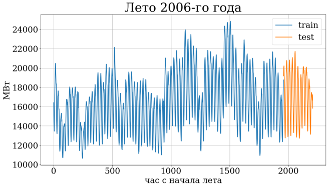
Метод ковариационного перекрестного отображения

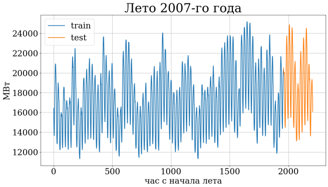
Algorithm Метод ковариационного, перекрестного отображения

Require: $\mathbf{x}_t = (x_{1t}, \ldots, x_{nt})^\mathsf{T}$, $\mathbf{C}_t$; $t = 1, \ldots, N$
Ensure: $[\rho_1, \ldots, \rho_n]$
  for $t \in [L+2, N-1]$ **do**
    $\mathbf{C}_{t_1}, \ldots, \mathbf{C}_{t_{L+1}} \leftarrow \mathrm{nn}(\mathbf{C}_t)$
    for $i \in [1, n]$ **do**
      $[\alpha_1, \ldots, \alpha_{L+1}] \leftarrow \frac{\exp(-\rho(\mathbf{C}_t, \mathbf{C}_{t_j})/\rho(\mathbf{C}_t, \mathbf{C}_{t_1}))}{\sum\limits_{l=1}^{L+1} \exp(-\rho(\mathbf{C}_t, \mathbf{C}_{t_l})/\rho(\mathbf{C}_t, \mathbf{C}_{t_1}))}$
      $\hat{x}_{i(t+1)} \leftarrow \sum\limits_{k=1}^{L+1} d_k x_{it_k}$
    end for
  end for
  for $i \in [1, n]$ **do**
    $\rho_i \leftarrow \rho([x_{i(L+2)}, \ldots, x_{iN}], [\hat{x}_{i(L+2)}, \ldots, \hat{x}_{iN}])$
  end for

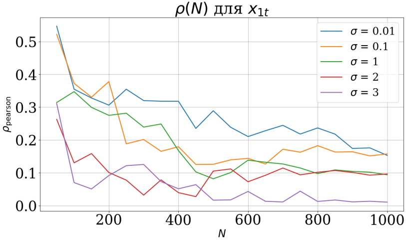
- Набор из 2 зашумленных синусов различной амплитуды и различной дисперсией нормального шума
- Набор потребления электроэнергии за одинаковый промежуток различных годов, набор акселерометров, набор стационарных ряды

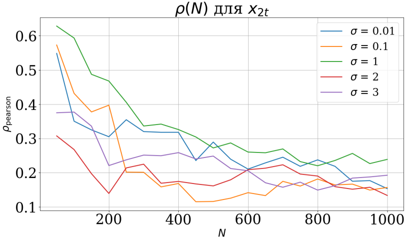






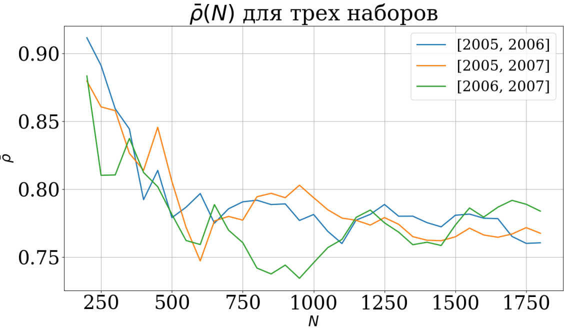
Метод КПО на синтетических данных





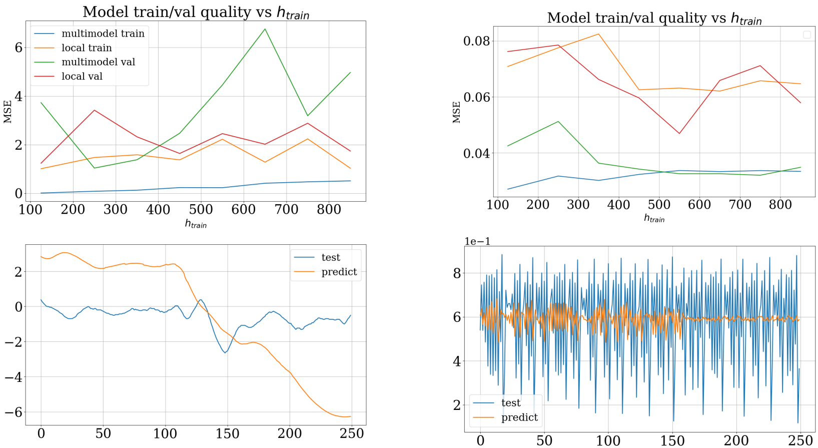
Результаты метода ковариационного, перекрестного отображения для $x_{1t} = \sin(t) + \varepsilon_{1t}$ и $x_{2t} = 3\sin(t) + \varepsilon_{2t}$, $\varepsilon_{it} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ при различных длинах истории N и различных значениях дисперсии шума

Метод КПО наборах потребления электроэнергии



Результаты метода ковариационного перекрестного отображения для трех наборов рядов

Метод улучшения базового прогноза



Результаты обучения модели в случае: а) невыполнения условий стационарности, CCM, теста на ковариации б) при выполнении условий стационарности, при наличии CCM-причинности, однако коэффициент корреляции низок (≈ 0.1).

Выносится на защиту

1. Постановка задачи улучшения прогноза с помощью матрицы ковариации, дана интерпретация,
2. Анализ влияния шума на матрицы ковариации и расстояния между ними в римановом пространстве,
3. Метод ковариационного, перекрестного отображения,
3. Проведенные эксперименты с выбором прогностической модели и условия его применимости.