
ВЫБОР ПРОГНОСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В РИМАНОВЫХ ФАЗОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

A PREPRINT

Эйнуллаев Алтай Эльшан оглы
Кафедра интеллектуальных систем
einullaev.ae@phystech.edu

Вадим Викторович Стрижов
д. ф.-м. н.
strijov@forecsys.ru

ABSTRACT

Матрицы ковариации многомерных временных рядов лежат в римановом пространстве SPD матриц. Свойства этого пространства используются для решения задач классификации многомерных временных рядов. Проблема с использованием этого же подхода для прогнозирования многомерных временных рядов заключается в том, что в отличие от задач классификации, нет возможности решать задачу в пространстве SPD матриц. Предлагаются прогностические модели, использующие риманову геометрию SPD матриц, и исследуется качество их прогноза в зависимости от свойств прогнозируемых временных рядов.

Keywords SPD матрицы · Касательное пространство · tSSA · Матрица ковариаций

1 Введение

Матрицы ковариаций многомерных временных рядов принадлежат гладкому многообразию SPD матриц. Свойства этого пространства [1] могут быть применены для решения различных задач, связанных с многомерными временными рядами. В частности, были предложены методы классификации EEG сигналов, основанные на римановой геометрии пространства SPD матриц [2], [3], [4]. Главная идея состоит в том, чтобы перейти в пространство SPD матриц и использовать риманову метрику для решения задачи. Также был разработан метод, в которых матрицы ковариации отображались в касательное пространство, являющееся евклидовым, и в нем классифицировались с помощью известных методов классификации, например SVM. [5].

В отличие от классификации, для прогнозирования многомерных временных рядов не разработаны прогностические модели, использующие риманову геометрию матриц ковариации. В первую очередь, это связано с тем, что нельзя решить задачу в пространстве матриц ковариации, т.к. модель должна прогнозировать исходные временные ряды, а не метку, как в задаче классификации. Однако, можно рассматривать векторное представление матриц ковариации как описание взаимосвязи фазовых траекторий многомерных временных рядов и использовать эту информацию для улучшения качества прогноза.

TODO

2 Постановка задачи

2.1 Матрицы ковариации набора временных рядов

Набор временных рядов в каждый момент времени задается n -мерным вектором: $\{\mathbf{x}_t\}_{t=1}^T = \{[x_{1t}, \dots, x_{nt}]^T\}_{t=1}^T$. Каждому ряду набора можно поставить в соответствие фазовое пространство векторов задержек $\mathbf{y}_{it} = [x_{i(t-L+1)}, \dots, x_{it}]^T$ размерности L . Для точек фазовых траекторий, отвечающих одному и тому же моменту времени поставим в соответствие матрицу ковариации:

$$\mathbf{C}_t = \frac{1}{L-1} \mathbf{X}_t \mathbf{X}_t^T, \quad (1)$$

где $\mathbf{X}_t = [\mathbf{y}_{1t} \dots \mathbf{y}_{nt}]^T$. Таким образом, \mathbf{C}_t описывает взаимосвязь между точками фазовых пространств различных временных рядов набора.

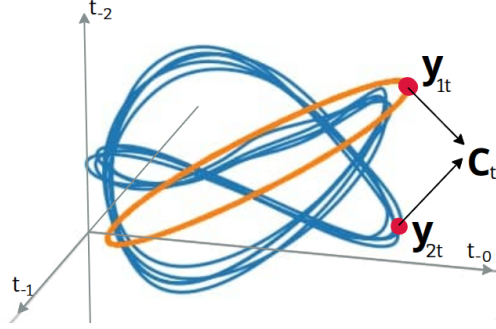


Рис. 1: Точкам фазовых траекторий $\mathbf{y}_{1t}, \mathbf{y}_{2t}$ ставится в соответствие матрица ковариации \mathbf{C}_t .

Матрицы ковариации, при условии, что они не вырождены, являются симметричными положительно определенными (SPD). Пространство SPD – риманово многообразие M , на котором вводится метрика, геометрическое среднее его элементов и определяется касательное пространство в каждой точке многообразия [1]. Касательное пространство в каждой точке – пространство симметричных матриц, являющееся векторным. Следовательно, с элементами касательного пространства можно работать как с векторами. Перевод SPD матриц в касательное пространство осуществляется при помощи логарифмического отображения [1]:

$$\mathbf{S}_t = \text{Log}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}_t) = \mathbf{C}^{\frac{1}{2}} \log(\mathbf{C}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{C}_t \mathbf{C}^{-\frac{1}{2}}) \mathbf{C}^{\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

где \mathbf{C}_t – матрица ковариации, \mathbf{S}_t – ее образ в касательном к \mathbf{C} пространстве. Обратное преобразование осуществляется с помощью экспоненциального отображения [1]:

$$\mathbf{C}_t = \text{Exp}_{\mathbf{C}}(\mathbf{S}_t) = \mathbf{C}^{\frac{1}{2}} \exp(\mathbf{C}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{S}_t \mathbf{C}^{-\frac{1}{2}}) \mathbf{C}^{\frac{1}{2}}. \quad (3)$$

В качестве точки построения касательного пространства выбирается геометрическое среднее матриц ковариации $\{\mathbf{C}_t\}_{t=L}^T$ [5] из тех соображений, что образ матрицы в касательном пространстве тем ближе к исходной матрице, чем ближе точка построения касательного пространства.

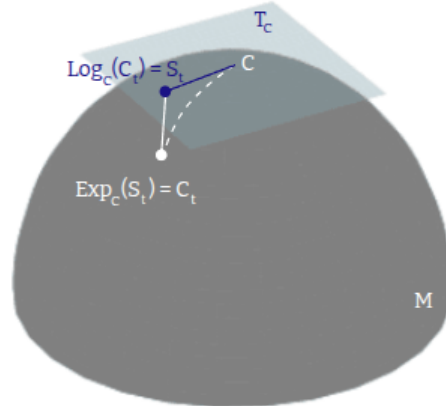


Рис. 2: Перевод \mathbf{C}_t в пространство $T_{\mathbf{C}}$ и обратно.

2.2 Выбор прогностической модели

При прогнозировании набора временных рядов одним из основных вопросов является вопрос о том, имеет ли смысл прогнозировать временные ряды совместно или по-отдельности. Классическим методом определения наличия причинных связей между временными рядами является тест Грейнджера [6]. Вывод о наличии причинной по Грейнджеру связи между рядами делается если удастся улучшить прогноз одного временного ряда с помощью VAR модели [7] при добавлении значений второго ряда. В этом случае говорят, что первый временной ряд является причиной по Грейнджеру второго. Одной из проблем этого метода является то, что он предполагает отсутствие информации о втором временном ряде в первом. Другими словами, если информация о втором временном ряде фундаментально заложена в первом, то тест Грейнджера не обнаружит причинных связей даже если они на самом деле присутствуют.

Требуется выбрать две модели f, h :

$$\mathbf{x}_t \xrightarrow{f} \hat{\mathbf{x}}_{t+1}, \quad (4)$$

$$\mathbf{x}_t \xrightarrow{g} \mathbf{S}_t \xrightarrow{h} \hat{\mathbf{S}}_{t+1}, \quad (5)$$

где f – модель прогнозирования временного ряда в фазовом пространстве, g – отображение, ставящее в соответствие временному ряду представление матрицы ковариации в касательном пространстве \mathbf{S}_t , h – модель прогнозирования $\hat{\mathbf{S}}_{t+1}$ в касательном пространстве. Для улучшения прогноза f строится мультимодель:

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+1} = F(\hat{\mathbf{x}}_{t+1}, \hat{\mathbf{S}}_{t+1}) = F(f(\mathbf{x}_t), h(g(\mathbf{x}_t))). \quad (6)$$

3 Вычислительный эксперимент

4 Сравнение результатов

5 Заключение

Список литературы

- [1] Maher Moakher. A differential geometric approach to the geometric mean of symmetric positive-definite matrices. *SIAM journal on matrix analysis and applications*, 26(3):735–747, 2005.
- [2] Alexandre Barachant, Stéphane Bonnet, Marco Congedo, and Christian Jutten. Riemannian geometry applied to bci classification. In *International conference on latent variable analysis and signal separation*, pages 629–636. Springer, 2010.
- [3] Alexandre Barachant, Stéphane Bonnet, Marco Congedo, and Christian Jutten. Multiclass brain–computer interface classification by riemannian geometry. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 59(4):920–928, 2011.
- [4] Marco Congedo, Alexandre Barachant, and Rajendra Bhatia. Riemannian geometry for eeg-based brain-computer interfaces; a primer and a review. *Brain-Computer Interfaces*, 4(3):155–174, 2017.
- [5] Alexandre Barachant, Stéphane Bonnet, Marco Congedo, and Christian Jutten. Classification of covariance matrices using a riemannian-based kernel for bci applications. *Neurocomputing*, 112:172–178, 2013.
- [6] Clive WJ Granger. Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods. *Econometrica: journal of the Econometric Society*, pages 424–438, 1969.
- [7] Helmut Lütkepohl. *Introduction to multiple time series analysis*. Springer Science & Business Media, 2013.