Теория к ALSO алгоритму и транспортное моделирование горнолыжных курортов

И. Н. Игнашин

Московский физико-технический институт

Научный руководитель: к.ф.-м.н. Грабовой А. В.
Научный консультант: Ярмошик Д. В. , Безносиков А. Н.

17 мая 2025 г.

План

Теория к ALSO

- Постановка задачи
- Алгоритм ALSO и его сходимость

Моделирование горнолыжных курортов

- Описание предложенной модели
- Переход к оптимизационной задаче
- Эксперименты на синтетике

Постановка задачи

Классическая задача ERM с ℓ_2-регуляризацией:

$$\min_{\theta \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i(\theta) + \frac{\tau}{2} \|\theta\|_2^2. \tag{1}$$

Недостаток: все объекты обучающей выборки имеют одинаковую важность.

Более гибкая формулировка задачи:

$$\min_{\theta \in \mathbb{R}^d} \max_{\boldsymbol{\pi} \in \Delta_{c-1} \cap U} \left\{ h(\theta, \boldsymbol{\pi}) := \sum_{i=1}^{c} \pi_i \left(\frac{c}{n} \sum_{j=1}^{n_i} f_{i,j}(\theta) \right) + \frac{\tau}{2} \|\theta\|_2^2 - \tau \, \mathrm{KL}[\boldsymbol{\pi} \| \hat{\boldsymbol{\pi}}] \right\}. \tag{2}$$

Свойства задачи:

- невыпуклость по θ,
- вогнутость по $\boldsymbol{\pi}$.

Цель: построить теоретические гарантии для уже предложенного алгоритма ALSO.

Анализ алгоритма

Рассмотрим прокс-обновление с Bregman-дивергенцией для задачи вариационного неравенства:

$$z^{\text{new}} = \arg\min_{z\in\mathcal{Z}} \left\{\langle \gamma g, z\rangle + V(z, z^{\text{old}})\right\}.$$

При специальном выборе субградиента g и KL-дивергенции в качестве функции Брегмана получаем обновления алгоритма `ALSO`:

Шаг параметров модели: $\theta^{k+1} = \theta^k - \eta_\theta d_\theta^k$

Шаг весов объектов: $\pi^{k+1} = \arg\min_{\pi\in U} \left\{\langle -\eta_\pi g_\pi^k, \pi\rangle + \mathrm{KL}[\pi\|\pi^k]\right\}$,

где d_θ^k – шаг Адама по θ, g_π^k – стохастический градиент по π.

Теорема: сходимость алгоритма `ALSO`

При выполнении стандартных допущений и корректном выборе параметров, количество итераций для достижения точности ε по критерию $\mathbb{E}\|\nabla\Phi_{1/2L}(\theta)\|_2^2 \le \varepsilon^2$ не превышает

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^8}\right),$$

где $\Phi_{1/2L}(\theta)$ – огибающая Моро для функции $\Phi(\theta) = \max_{\pi\in\mathcal{U}} h(\theta,\pi)$.

Сходимость как у алгоритма SGDA для невыпуклой-вогнутой задачи.

Заключение по ALSO

- Получена оценка на локальную сходимость алгоритма ALSO
- Хочется получить оценки на локальную сходимость данного алгоритма в общей формулировке прокс обновления

Постановка задачи

Проблема: на горнолыжных курортах пользователи скапливаются в очередях перед отдельными подъёмниками.

Цель: снизить нагрузку и уменьшить очереди за счёт внешнего регулирования потоков.

Предлагаемый подход:

- моделирование потоков пользователей на курорте;
- вычисление равновесного распределения с учётом текущих функций затрат;
- оптимальный подбор цен на подъёмники для перераспределения людей между ними.

Описание горнолыжной модели

- Рассматриваем транспортную сеть без корреспонденций: люди движутся по замкнутым циклам.
- Весь граф разбивается на набор циклов $c \in C$.
- Каждый цикл включает подъёмы и спуски.
- Пропускная способность на спусках высока — ограничения отсутствуют.
- Известно среднее время проезда по каждому циклу (включая подъёмники).
- Подъёмники имеют ограниченную пропускную способность — именно там образуются очереди.

Формализация

- Множество подъёмников: $u \in U$, циклы: $c \in C$
- Распределение людей по циклам: $n \in \Delta^C$ — единичный симплекс.
- Принадлежность подъёмников к циклам: $\delta_{u \in c} \to \Theta \in \mathbb{R}^{C \times U}$
- Обозначения:
  - $\hat{t} \in \mathbb{R}^C$ — времена прохождения циклов без учёта очередей
  - $t \in \mathbb{R}^U$ — времена ожидания в очередях на подъёмниках
  - $f^C \in \mathbb{R}^C$, $f^U \in \mathbb{R}^U$ — потоки по циклам и подъёмникам
  - $b \in \mathbb{R}^U$ — пропускные способности подъёмников
- Закон сохранения:

$$\hat{t} + \Theta \cdot t = \frac{n}{f^C}$$

- Ограничения:

$$\Theta^\top \cdot f^C = f^U, \quad f^U \leq b, \quad f^C \geq 0, \quad t \geq 0$$

- Модель очередей: если $f_u < b_u$, то $t_u = 0$; иначе — время t_u зависит от f_u и n_c, то есть: $t * (f^U - b) = 0$

Функция полезности и вариационное неравенство

- Функция полезности учитывает:
  - Привлекательность цикла
  - Время ожидания в очередях (зависит от текущего распределения n)
- Пусть $\tau(n)$ — вектор обобщённых затрат на циклах
- Равновесие формулируется как задача вариационного неравенства:

$$\langle \tau(n^*), n - n^* \rangle \geq 0 \quad \forall n \in \Delta^C$$

- Решение задачи — по определению является равновесным распределением (конкурентным).

Поиск t, f^C по заданному распределению n

Задача (поиск t, f по известному n):

$$\hat{t} + \Theta \cdot t = \frac{n}{f^C}, \quad \Theta^\top \cdot f^C = f^U, \quad f^U \leq b, \quad t \geq 0, \quad f^C \geq 0$$

$$t * (f^U - b) = 0$$

Эквивалентная задача:

$$\min_{f^C \geq 0} \left\langle \hat{t}, f^C \right\rangle - \left\langle n, \ln f^C \right\rangle \quad \text{s.t. } \Theta^\top \cdot f^C \leq b$$

Лагранжиан:

$$\mathcal{L}(f^C, t) = \left\langle \hat{t}, f^C \right\rangle - \left\langle n, \ln f^C \right\rangle + \left\langle t, \Theta^\top \cdot f^C - b \right\rangle$$

Условия KKT:

$$\nabla_{f^C} \mathcal{L} = \hat{t} - \frac{n}{f^C} + \Theta \cdot t = 0 \Rightarrow \hat{t} + \Theta \cdot t = \frac{n}{f^C}$$

$$t \geq 0, \quad \Theta^\top \cdot f^C \leq b, \quad t * (\Theta^\top \cdot f^C - b) = 0$$

Отображение из распределения людей во время в очередях

- Так как эквивалентная задача – строго выпуклая на аффинных ограничениях, то решение единственно.
- **Биекция:** между распределением людей n и парой (f^C, t) существует взаимно однозначное соответствие.
- Это позволяет выразить целевую функцию (полезность или время в очередях) **как функцию только от** n.

Решение вариационного неравенства: экстраградиентный метод

Цель: найти $n^* \in \Delta_C$, такое что

$$\langle \tau(n^*), n - n^* \rangle \geq 0, \quad \forall n \in \Delta_C$$

Затраты:

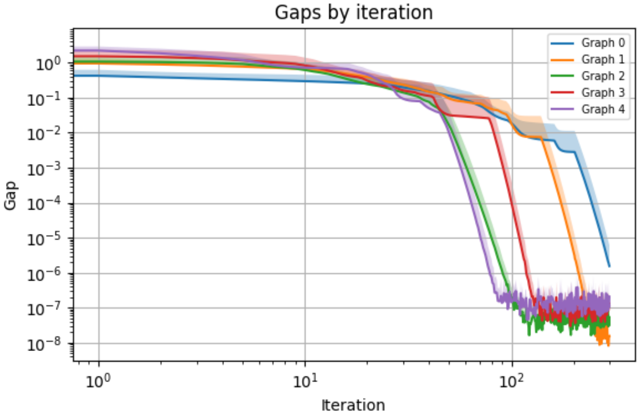
$$\tau(n) = -\frac{a}{\Theta \cdot t(n) + \hat{t}}$$

, где a – некоторый гиперпараметр, означающий привлекательность цикла. Экстраградиентный метод:

$$\begin{cases} y^{(k)} = \Pi_{\Delta_C}\left(n^{(k)} - \gamma \cdot \tau(n^{(k)})\right) \\ n^{(k+1)} = \Pi_{\Delta_C}\left(n^{(k)} - \gamma \cdot \tau(y^{(k)})\right) \end{cases}$$

Результаты на синтетическом графе

- Использован простой граф: 5 циклов, 5 подъёмников, матрица принадлежности верхнедиагональная.
- Модель сходится к устойчивому распределению при разных значениях привлекательности a.
- $\mathrm{Gap}(n) = \max_{z \in \Delta} \langle \tau(n), n - z \rangle \geq 0$
- $\mathrm{Gap}(n^*) = 0$ по определению



Заключение и развитие модели

1. Параметры привлекательности можно задать как:

$$a_c = \alpha_1 \cdot \mathrm{Costs}_c + \alpha_2 \cdot \mathrm{Fun}_c$$

2. Анализ отображения $t(n)$ важен для теоретической гарантии сходимости и единственности решения. Эксперименты на синтетических данных показывают поведение похожее на глобальную сходимость.
3. После подбора гиперпараметров α_1, α_2, можно:
   - Исследовать влияние штрафов (Costs) на равновесие
   - Минимизировать суммарные пробки, рассматривая их как функцию от *Costs*

Связанная работа автора J.D. Brooks [1]: равновесия на циклах в двудольном графе

Ссылки

James D. Brooks, Koushik Kar, David J. Mendonça. *Allocation of flows in closed bipartite queueing networks.*
European Journal of Operational Research, 255(2), 333–344, 2016.
https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.05.017