Stochastic Correspondences Frank-Wolfe

И. Н. Игнашин

Московский физико-технический институт

Научный руководитель: к.ф.-м.н. Грабовой А. В.

Научный консультант: Ярмошик Д. В.

21 декабря 2024 г.

План

- Постановка задачи равновесного распределения потоков
- Frank-Wolfe
- Мотивация
- Стохастические корреспонденции
- Эксперименты

Постановка задачи

Задача найти равновесное распределение потоков, а то есть такие потоки, что:

$$\sum_{e \in \mathcal{E}} \tau_e(f_e)\delta_{e \in p} \begin{cases} = t_{i,j}, & \text{если } x_p > 0 \\ \geq t_{i,j}, & \text{если } x_p = 0 \end{cases} \quad \forall p \in \mathcal{P}_{i,j}, (i,j) \in OD$$

Используемые определения:

$\mathcal{E}$ – **ребра дорожного графа**

OD – **множество пар источников-стоков**

$\mathcal{P}_{i,j}$ – **все пути из источника** i **в сток** j

$\tau_e(f_e)$ – **время проезда по ребру е при текущем потоке** f_e

x_p – **поток по пути p**

В качестве модели $\tau(f)$ **- взята модель Бекмана**

Смысл формулы:

- Всем участникам не выгодно отклониться от текущих выбранных путей
- При отклонении от текущих стратегий время проезда увеличится

Оптимизационная задача

Поиск равновесного распределения потоков эквивалентен решению следующей задачи:

$$\Psi(f) = \sum_{e \in \mathcal{E}} \underbrace{\int_0^{f_e} \tau_e(z) dz}_{\sigma_e(f_e)} \longrightarrow \min_{f = \Theta x,\; x \in X}$$

Используемые определения:

$X = \{x \mid d_{i,j} = \sum\limits_{p \in \mathcal{P}_{i,j}} x_p \;,\; x_p \geq 0 \; \forall (i,j) \in OD\}$ – **множество распределений**

x_p – **поток по пути p**

$d_{i,j}$ – **корреспонденция между источником и стоком**

Данный факт можно показать, расписав KKT для оптимизационной задачи

Frank-Wolfe

Аппроксимация до первого линейного члена:

$$\Psi_k(y) \equiv \Psi(f^k) + \langle \nabla \Psi(f^k), y - f^k \rangle$$

Выбор шага и его длины:

$$\mathrm{s}_k^{FW} \equiv \underset{y=\Theta x,\ x \in X}{\arg\min} \langle \nabla \Psi(f^k), y \rangle = \underset{y=\Theta x,\ x \in X}{\arg\min} \langle \tau(f^k), y \rangle$$

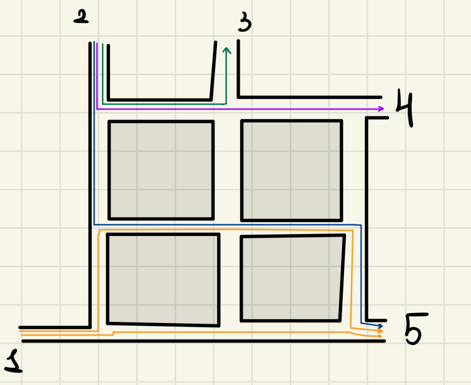
$$\mathrm{d}_k^{FW} = s_k^{FW} - f^k$$

$$\mathrm{f}^{k+1} = f^k + \gamma_k d_k^{FW} \text{ **где** } \gamma_k = \arg\min_{\gamma \in [0,1]} \Psi(f^k + \gamma d_k^{FW})$$

Минимизация линейного члена – поиск кратчайших путей

Аддитивность потоков

Матрица корреспонденций $D = \{d_{i,j}\}_{i,j \in \{1,2,..,5\}}$.
Линии – это потоки $x_p > 0$ по путям p, соединяющим вершины исток-сток (i, j).
Дороги $e \in \mathcal{E}$ – участки от перекрестка до перекрестка.



$$f_e = \sum_{p \in \mathcal{P}} x_p \delta_{e \in p}$$

$$f_e = \sum_{w \in OD} \sum_{p \in \mathcal{P}_w} x_p \delta_{e \in p} = f_e^Q + f_e^{OD \setminus Q} \quad Q \subset OD$$

Стохастические корреспонденции

Поиск кратчайших путей слишком затратный в случае большого графа дорог $|E| >> 1$ и числа источников потока $|O| >> 1$.
Идея: делаем стохастический, не честный LMO.
Идея похожа на SGD, но стохастика не в градиенте а в подмножестве ограничений на которых ведется поиск.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{X}_v^Q &\equiv \{\Theta z, \quad z \in \mathcal{Z} | \forall i \notin Q \to z_i = v_i\} \\
y &= \arg\min_{s \in \mathcal{X}} \langle r, s \rangle && \text{(обычный LMO)} \\
y_v^Q &= \arg\min_{s \in \mathcal{X}_v^Q} \langle r, s \rangle && \text{(стохастический LMO)} \\
\forall i \in Q &\to [\Theta^{-1}(y_v^Q)]_i = [\Theta^{-1}(y)]_i,
\end{aligned}
$$

где $\mathcal{Z}$ – множество распределений на путях, v – вектор потоков с предыдущей итерации.

Stochastic Correspondences Frank-Wolfe

Частный случай Randomized Frank-Wolfe

Algorithm Stochastic Correspondences Frank–Wolfe

$x_0 \in \mathcal{X}$ — starting point.
$k := 0$
repeat
    $t_1, \ldots, t_m \sim U[1, n] \quad t_i \neq t_j$
    $Q = \{p_{t_1}, \ldots, p_{t_m}\} \subset$
    $s_k^{FW} := \arg\min\limits_{s \in \mathcal{X}_{x_k}^Q} \langle \nabla f(x_k), s \rangle$
    $d_k^Q := s_k^{FW} - x_k^Q$
    $\gamma_k := \arg\min\limits_{\gamma \in [0,1]} \Psi(x_k^{\bar{Q}} + x_k^Q + \gamma \cdot d_k^Q)$
    $x_{k+1}^Q := x_k^Q + \gamma_k \cdot d_k^Q$
    $k := k + 1$
until $k <$ max iter

Также предложена модификация данного алгоритма Stochastic Correspondences N-Conjugate Frank-Wolfe

Сходимость

Сэмплируем определенную долю корреспонденций $\alpha = \frac{|Q|}{|OD|} < 1$ и по ним считаем кратчайшие пути $p_w^*, \forall w \in Q$.

Theorem

Let the optimization problem satisfies assumption 1 and one of assumptions 2 or 3. And let $f(x_0) - f(x^*) \leq \frac{LR^2}{\alpha^2}$. Then this method converges such as:

$$\mathbb{E}f(x^N) - f(x^*) \leq \frac{2LR^2}{N+2} \cdot \frac{1}{\alpha^2}$$

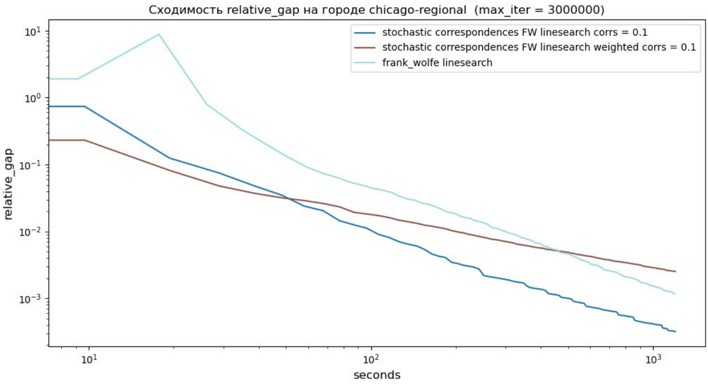
Theorem

This method also converges such as :

$$\min_{k \in \overline{1,\dots,N}} \mathbb{E}g_k \leq \frac{\min\{2h_0, LR^2\}}{\sqrt{N+1}} \cdot \frac{1}{\alpha},$$

where $g_k = -\min_{s \in \mathcal{X}} \langle \nabla f(x_k), s - x_k \rangle$ – Frank-Wolfe gap.

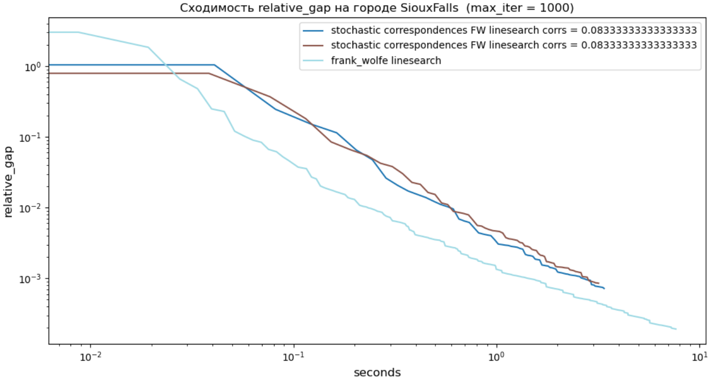
Эксперименты: большие графы дорог



Метод имеет кратное преимущество на больших графах дорог.

Эксперименты: малые графы дорог

Так как граф малый, то затраты на вычисление LMO почти такие же, как и на вычисление градиента: $O(n \log n) \approx O(n)$.
Как итог: шаг становится незначительно быстрее, но качество шага падает значи



Заключение

1. SCFW имеет преимущество на больших дорожных графах перед FW,
2. Разрыв в качестве $\frac{\text{критерий}}{\text{время}}$ между SCFW и FW растет с увеличением размера графа дорог.
3. Из этого следует, что на практике эффективнее обновлять шаг часто, но только на подмножестве корреспонденций, чем обновлять шаг нечасто, но вычислять честный оракул минимизации FW.
4. Текущая модификация SCNFW не имеет преимущества перед SCFW, как ожидалось

Литература

- Frank-Wolfe with Subsampling Oracle (2018; Kerdreux T., Pedregosa F.,Alexandre A.) – **RFW обобщение предложенного SCFW**
- Оптимизационные модели и методы равновесного распределения потоков в транспортных сетях (Крылатов А. Ю.) – **про конкурентное равновесие**
- Equilibrium Search in Two-Stage Models of Traffic Flow Distribution over the Network (Kotlyarova E.V.) – **подробно про задачу поиска равновесного распределения потоков**
- Linearly Convergent Frank-Wolfe with Backtracking Line-Search (Pedregosa F.) – **подробно о Frank-Wolfe**
- Модификации Frank-Wolfe алгоритма в задаче поиска равновесного распределения транспортных потоков (Игнашин. И. Н., Ярмошик Д.В.) – **обзоры модификаций Frank-Wolfe**
- Численные методы поиска равновесного распределения потоков в модели Бэкмана и в модели стабильной динамики (Гасников А. В., Двуреченский П. Е. и др.) – **упоминание о стохастике в поиске кратчайших путей**