Дистрибутивные методы второго порядка с комперссией и аггрегацией Бернулли

Исламов Рустем Ильфакович

Московский физико-технический институт
Кафедра Интеллектуальных систем

Научный руководитель: д.ф.-м.н. Стрижов В.В.

20.06.2023, Москва

Постановка оптимизационной задачи

Оптимизационная задача

Определить оптимальные параметры модели путем решения оптимизационной задачи:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \left\{ f(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \right\}, \tag{1}$$

где x — параметры модели, n — число участвующих клиентов, f_i — локальная функция потерь i-го клиента.

Вводятся предположения на функции

1. функция f является μ-сильно выпуклой:

$$\nabla^2 f(x) \succeq \mu \mathbf{I}.$$

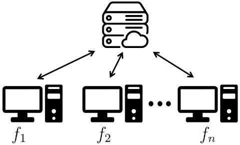
2. каждая функция f_i имеет Липшицев гессиан:

$$\|\nabla^2 f_i(x) - \nabla^2 f_i(y)\| \leq L \|x - y\|.$$

Модель сервер-клиент в распределенной оптимизации

Достоинства и недостатки модели

+ Возможно обучать модели на бо́льших объемах данных, распределенных между устройствами;
+ Возможно параллелизовать вычисления на устройствах;
− Скорость обмена данными между клиентом и сервером намного медленнее, чем скорость вычислений на самих устройствах и сервере.



Архитектура модели клиент-сервер.

Для уменьшения количества передаваемой информации на практике прибегают к ее компрессии.

Существующие подходы и их недостатки:

- Скорость сходимости методов **первого порядка** зависит от числа обусловленности поставленной оптимизационной задачи;
- Скорость сходимости методов **второго порядка** зависит от числа обусловленности поставленной оптимизационной задачи;
- Стоимость коммуникации между сервером и клиентом для методов **второго порядка** очень дорогая.
- Для разных видов компрессии необходимо доказывать сходимость отдельно.

Поставленные цели:

- Предложить и охарактеризовать бóлее широкий класс операторов компресии $\mathcal{S}$, покрывающий существующие;
- Предложить эффективный с точки зрения коммуникации метод второго порядка, чья локальная скорость сходимости не зависит от числа обусловленности, а также работающий для любого компрессора из $\mathcal{S}$;
- Предложить способы улучшения вычислительной сложности метода.

Основная идея — аппроксимация гессиана в оптимуме

Пусть серверу известен гессиан $\nabla^2 f(x^*)$ функции f в оптимуме. Шаг метода Newton Star имеет вид:

$$x^{k+1} = x^k - \left(\nabla^2 f(x^*)\right)^{-1} \nabla f(x^k).$$

Теорема о сходимости Newton Star

Newton Star сходится локально квадратично

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \frac{L}{2\mu}\|x^k - x^*\|^2. \tag{2}$$

Данный метод имеет следующие характеристики:

+ Стоимость коммуникаций одного шага метода $\mathcal{O}(d)$;
+ Локально квадратичная сходимость (такая же, как у классического метода Ньютона);
− Не может быть использован на практике, т.к. гессиан в оптимуме неизвестен.

Предложенный подход: Newton-3PC

Основная идея предложенного подхода

Аппроксимируем гессиан $\nabla^2 f_i(x^*)$ на шаге k матрицей $\mathbf{H}_i^k$ и выполняем шаг типа Ньютон

$$x^{k+1} = x^k - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{H}_i^k\right)^{-1} \nabla f(x^k).$$

Требования:

- $\mathbf{H}_i^k \to \nabla^2 f_i(x^*)$ при $k \to \infty$;
- обновление матрицы $\mathbf{H}_i^k$ должно быть эффективным с точки зрения коммуникаций: $\mathbf{H}_i^{k+1} - \mathbf{H}_i^k$ должно быть сжатым.

Новый класс операторов компрессии: Three-point compressors (3PC)

Определение (класса сжимающих компрессоров)

Рандомизированное отображение $\mathcal{C} : \mathbb{R}^{d\times d} \to \mathbb{R}^{d\times d}$, *удовлетворяющее условию*

$$\mathbb{E}\left[\|\mathcal{C}(\mathbf{X}) - \mathbf{X}\|^2\right] \le (1-\alpha)\|\mathbf{X}\|^2, \quad \alpha \in (0,1], \tag{3}$$

называется **оператором сжатия.**

Определение (класса 3PC-компрессоров)

Рандомизированное отображение $\mathcal{C}_{\mathbf{H},\mathbf{Y}} : \mathbb{R}^{d\times d} \times \mathbb{R}^{d\times d} \times \mathbb{R}^{d\times d} \to \mathbb{R}^{d\times d}$, *удовлетворяющее условию*

$$\mathbb{E}\left[\|\mathcal{C}_{\mathbf{H},\mathbf{Y}}(\mathbf{X}) - \mathbf{X}\|^2\right] \le (1-A)\|\mathbf{H} - \mathbf{Y}\|^2 + B\|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|^2, \tag{4}$$

называется **оператором 3PC-компрессии.**

Связь между операторами сжатия и 3PC-компрессорами

Классическим примером сжимающего оператора является Top-K:

$$\begin{pmatrix} 1.9 & -2 \\ -0.2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Top}-1} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

который удовлетворяет (3) с $\alpha = \frac{K}{d^2}$ [1].

На основе произвольного оператора сжатия можно построить виды 3PC-компрессоров. Например, шаг алгоритма Error Feedback (EF21) является 3PC-компрессором. [2]

Лемма (Исламов, 2023)

3PC-компрессор EF21, заданный формулой $\mathcal{C}_{\mathbf{H}}(\mathbf{X}) := \mathbf{H} + \mathcal{C}(\mathbf{X} - \mathbf{H})$, *где* $\mathcal{C}$ *— произвольный оператор сжатия, является 3PC-компрессором с параметрами* $\mathbf{Y} = \mathbf{X}, A = \alpha, B = 0$.

[1] Safaryan et. al, FedNL: Making Newton-Type Methods Applicable to Federated Learning, ICML 2022

[2] Richtárik et. al, EF21: A new, simpler, theoretically better, and practically faster error feedback, NeurIPS 2021

Примеры 3PC-компрессоров

Лемма (Исламов, 2023)

3PC-компрессор CBAG, заданный формулой

$$\mathcal{C}_{\mathbf{H}}(\mathbf{X}) := \begin{cases} \mathbf{H} + \mathcal{C}(\mathbf{X} - \mathbf{H}) & \textit{with prob. } p \\ \mathbf{H} & \textit{otherwise.} \end{cases},$$

где $\mathcal{C}$ — произвольный оператор сжатия, является 3PC-компрессором с параметрами $A = 1 - (1 - p\alpha)(1 + s), B = (1 - p\alpha)(1 + s^{-1})$, где $s = \frac{p\alpha}{2(1-p\alpha)}$ и $\mathbf{Y}$ — произвольная матрица.

Лемма (Исламов, 2023)

3PC-компрессор CLAG, заданный формулой

$$\mathcal{C}_{\mathbf{H},\mathbf{Y}}(\mathbf{X}) := \begin{cases} \mathbf{H} + \mathcal{C}(\mathbf{X} - \mathbf{H}) & \textit{if } \|\mathbf{X} - \mathbf{H}\|^2 > \zeta\|\mathbf{X} - \mathbf{H}\|^2 \\ \mathbf{H} & \textit{otherwise.} \end{cases},$$

где $\mathcal{C}$ — произвольный оператор сжатия, является 3PC-компрессором с параметрами $A = (1 - \alpha)(1 + s), B = \max\{(1 - \alpha)(1 + s^{-1}), \zeta\}$, где $s = \frac{\alpha}{2(1-\alpha)}$.

Алгоритм Newton-3PC

Algorithm Newton-3PC

Input: $x^0 \in \mathbb{R}^d, \mathbf{H}_1^0, \dots, \mathbf{H}_n^0 \in \mathbb{R}^{d \times d}, \mathbf{H}^0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{H}_i^0, l^0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \|\mathbf{H}_i^0 - \nabla^2 f_i(x^0)\|_{\mathrm{F}}^2$

on server

  Option 1: $x^{k+1} = x^k - [\mathbf{H}^k]_\mu^{-1} \nabla f(x^k)$

  Option 2: $x^{k+1} = x^k - [\mathbf{H}^k + l^k \mathbf{I}]^{-1} \nabla f(x^k)$

for each device $i = 1, \dots, n$ in parallel **do**

  compute local gradient $\nabla f_i(x^{k+1})$ and local Hessian $\nabla^2 f_i(x^{k+1})$

  apply 3PC compressor and update $\mathbf{H}_i^{k+1} = \mathcal{C}_{\mathbf{H}_i^k, \nabla^2 f_i(x^k)}(\nabla^2 f_i(x^{k+1}))$

  send $\nabla f_i(x^{k+1})$, $\mathbf{H}_i^{k+1}$, and $l_i^{k+1} = \|\mathbf{H}_i^{k+1} - \nabla^2 f_i(x^{k+1})\|_{\mathrm{F}}$ to the server

end for

on server

  Aggregate $\nabla f(x^{k+1}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \nabla f_i(x^{k+1}), \mathbf{H}^k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{H}_i^{k+1}$

  $l^{k+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n l_i^{k+1}$

Примечание: Метод аналогичен стандартному методу Ньютона, где настоящие гессианы $\nabla^2 f_i(x^k)$ заменены на их аппроксимацию $\mathbf{H}_i^k$, которые обновляются с использованием компрессии.

Теория сходимости Newton-3PC

Введем функцию Ляпунова вида
$\Phi^k := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \|\mathbf{H}_i^k - \nabla^2 f_i(x^*)\|_{\mathrm{F}}^2 + 6(A^{-1} + 3AB)L^2\|x^k - x^*\|^2.$

Теорема о сходимости Newton-3PC, Исламов 2023

Пусть f является μ-сильно выпуклой, а каждая локальная функция f_i имеет L-Липшицев гессиан. Пусть $\|x^0 - x^*\| \leq \frac{\mu}{\sqrt{2}L}$. Тогда Newton-3PC сходится со следующими скоростями:

$$\mathbb{E}\left[\Phi^k\right] \leq \left(1 - \min\left\{\frac{A}{2}, \frac{1}{3}\right\}\right)^k \Phi^0,$$

$$\mathbb{E}\left[\frac{\|x^{k+1} - x^*\|^2}{\|x^k - x^*\|^2}\right] \leq \left(1 - \min\left\{\frac{A}{2}, \frac{1}{3}\right\}\right)^k \left(2 + \frac{AL}{12(1+3AB)L^2}\right)\frac{\Phi^0}{\mu^2}.$$

Используя результаты данной теоремы, можно сделать вывод:

- Скорости сходимости не зависят от числа обусловленности функции;
- Из вида функции Ляпунова и ее сходимости следует, что $\mathbf{H}_i^k \to \nabla^2 f_i(x^*)$.

Практические улучшения

3PC-компрессор CBAG

3PC-компрессор CBAG, заданный формулой

$$\mathcal{C}_{\mathbf{H},\mathbf{Y}}(\mathbf{X}) := \begin{cases} \mathbf{H} + \mathcal{C}(\mathbf{X} - \mathbf{H}) & \text{if } \|\mathbf{X} - \mathbf{H}\|^2 > \zeta \|\mathbf{X} - \mathbf{H}\|^2 \\ \mathbf{H} & \text{otherwise.} \end{cases},$$

позволяет пропускать вычисления локальных гессианов с вероятностью $1 - p$.

Sketch&Project

Оператор Sketch&Project, заданный формулой

$$\mathcal{C}(\mathbf{X}) := \mathbf{S}(\mathbf{S}^\top \mathbf{S})^\dagger \mathbf{S}^\top \mathbf{X},$$

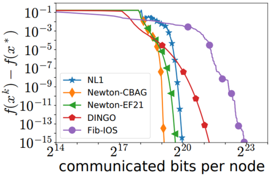
где $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{d \times \tau} \sim \mathcal{D}$, $\tau \ll d$, является оператором сжатия с $\alpha = \lambda_{\min}(\mathbb{E}\left[\mathbf{S}(\mathbf{S}^\top \mathbf{S})^\dagger \mathbf{S}^\top\right)]$. Данный оператор может вычислен при помощи только векторно-матричных вычислений, что позволяет снизить стоимость вычислений.

Эксперименты проводятся на логистической регрессии с ℓ_2 регуляризацией.

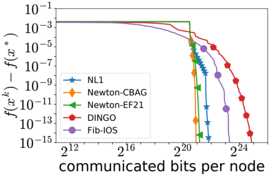
$$\min_{x\in\mathbb{R}^d}\left\{f(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_i(x)+\frac{\lambda}{2}\|x\|^2\right\}\quad f_i(x)=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\log\left(1+\exp(-b_{ij}a_{ij}^\top x\right),$$

где $\{a_{ij}.b_{ij}\}_{j=1}^{m}$ — локальный датасэт i-го клиента. В экспериментах были использованы датасэты из библиотеки LibSVM.

Сравнение с другими методами второго порядка



a1a, $\lambda = 10^{-3}$



w2a, $\lambda = 10^{-4}$

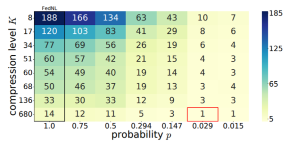
Рис.: Сравнение Newton-CBAG и Newton-EF21 с другими методами второго порядка: NL1[3], DINGO[4], Fib-IOS [5] с точки зрения стоимости коммуникаций.

Исходя из результатов эксперимента, можно сделать вывод, что Newton-3PC превосходит другие методы второго порядка, в некоторых случаях на несколько порядков.

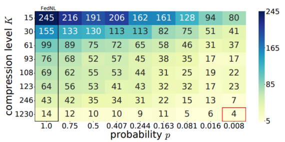
[3] Islamov et. al, Distributed Second Order Methods with Fast Rates and Compressed Communication, ICML 2021

[4] Crane & Roosta. Dingo: Distributed newton-type method for gradient-norm opti- mization, NeurIPS 2019

[5] Fabbro et. al, A newton-type algorithm for federated learning based on incremental hessian eigenvector sharing, arXiv preprint arXiv: 2202.05800, 2022



phishing, $\lambda = 10^{-3}$



a1a, $\lambda = 10^{-4}$

Рис.: Стоимость коммуникаций Newton-CBAG, основанного на Top-K. В экспериментах меняются параметры K и p. Результаты представлены в Mb.

Исходя из результатов эксперимента, можно сделать вывод, что Newton-CBAG более эффективен с точки зрения коммуникаций, если вероятность $p < 1$, что означает, что нет необходимости обновлять матрицы $\mathbf{H}_i^{k+1}$ на каждом шаге.

Результаты, выносимые на защиту

Полученные результаты

- Экспериментальное и теоретическое подтверждение сходимости предложенного метода;
- Экспериментальные данные показывают превосходство предложенного метода над существующими методами в терминах сложности коммуникаций;
- Предложенный класс 3PC-компрессоров обобщает существующие подходы, тем самым унифицирует теорию методов второго порядка;
- Предложены способы улучшения метода с точки зрения вычислительных затрат. Показана экспериментальная эффективность предложенного подхода.

Дальнейшие исследования

- Переход от предложенного метода к методам типа квази-Ньютон.
- Исследование метода с локальными шагами.

Публикации за время обучения

[1] **Rustem Islamov**, Xun Qian, Slavomir Hanzely, Mher Safaryan, Peter Richtárik. *Distributed Newton-Type Methods with Communication Compression and Bernoulli Aggregation* arXiv preprint arXiv: 2206.03588, NeurIPS workshop 2022.

[2] Maksim Makarenko, Elnur Gasanov, **Rustem Islamov**, Abdurakhmon Sadiev and Peter Richtárik. *Adaptive Compression for Communication-Efficient Distributed Training* arXiv preprint arXiv: 2211.00188, 2022. To appear in Transactions of Machine Learning Research.

[3] Konstantin Mishchenko, **Rustem Islamov**, Eduard Gorbunov, Samuel Horváth. *Partially Personalized Federated Learning: Breaking the Curse of Data Heterogeneity* arXiv preprint arXiv 2305.18285, 2023.

[4] Sarit Khirirat, Eduard Gorbunov, Samuel Horváth, Rustem Islamov, Fakhri Karray, Peter Richtárik. *Clip21: Error Feedback for Gradient Clipping* arXiv preprint: arXiv 2305.18929