# Адаптивное сжатие в распределенной оптимизации

Фанис Адикович Хафизов
Научный руководитель: к.ф.-м.н. А. Н. Безносиков

Кафедра интеллектуальных систем ФПМИ МФТИ
Специализация: Интеллектуальный анализ данных
Направление: 03.03.01 Прикладные математика и физика

2024

# Адаптивное сжатие в распределенной оптимизации

**Проблема:** Современные нейросети требуют больших вычислительных мощностей, из-за чего приходится прибегать к распределенным методам обучения.
Одной из главных проблем является скорость передачи данных между устройствами.

**Цель:** Предложить новый способ сжатия градиентов для более эффективной коммуникации устройств.

**Решение:** Предлагаются семейство смещенных операторов сжатия, использующие показатели важности весов, и схема компенсации ошибок.

# Литература


- Aleksandr Beznosikov, Samuel Horváth, Peter Richtárik, Mher Safaryan. On Biased Compression for Distributed Learning. 2024
- Peter Richtárik, Igor Sokolov, Ilyas Fatkhullin. EF21: A New, Simpler, Theoretically Better, and Practically Faster Error Feedback. 2021

# Задача распределенной оптимизации

$$\min_{x\in\mathbb{R}^d}\left\{f(x) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right\},$$

где $n$ – количество устройств, $x$ – обучаемые параметры, $f_i(x)$ – функция потерь для $i$-го устройства.
Требуется сократить количество передаваемой информации, не сильно потеряв в скорости обучения.

# Требования на $f_i$

### Предположение

*Функция $f$ называется $\mu$-сильно выпуклой, если для любых $x, y \in \mathbb{R}^d$ выполняется следующее неравенство:*

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2, \qquad (1)$$

*где $\mu > 0$ — константа сильной выпуклости.*

### Предположение

*Функция $f$ называется $L$-гладкой, если для любых $x, y \in \mathbb{R}^d$ выполняется следующее неравенство:*

$$\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2 \leq L\|y - x\|_2, \qquad (2)$$

*где $L > 0$ — константа гладкости.*

# Распределенный градиентный спуск со сжатием (DCGD)

$$x^{k+1} = x^k - \frac{\eta}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathcal{C}_i^k(\nabla f_i(x^k)),$$

где $\eta$ – размер шага, $\mathcal{C}_i^k$ – оператор сжатия на $k$-й итерации $i$-го устройства.

Для случая одного устройства итерация метода запишется как

$$x^{k+1} = x^k - \eta \mathcal{C}^k(\nabla f(x^k)).$$

# Новые операторы сжатия

Предлагается определить вектор важности $w \in \mathbb{R}^d$ и на основе него построить семейство операторов сжатия $\mathcal{C}(x, w)$.

Для нахождения вектора $w$ решается задача оптимизации

$$w^k = \arg\min_{w \in Q} f(x^k - \eta w \odot \nabla f(x^k)),$$

где $Q$ – ограниченное множество, $\odot$ – поэлементное умножение. В качестве $Q$ рассмотрены следующие варианты:

- $\Delta_{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\|_1 = d, x_i \geq 0, i = \overline{1, d}\}$ — симплекс размерности $d - 1$;
- $[a, b]^d$ — куб со сторонами длины $b - a$.

# Примеры операторов сжатия с важностью

- **Важностное прореживание.**

$$\mathcal{C}(\nabla f(x)) = \sum_{i=1}^{k} \nabla_{(i)} f(x) e_{(i)}, \tag{3}$$

  где координаты расположены по убыванию значений важности $w_{(1)} \geq w_{(2)} \geq \cdots \geq w_{(d)}$.

- **Рандомизированное важностное прореживание**

$$\mathcal{C}(\nabla f(x)) = \sum_{i \in S} \nabla_i f(x) e_i, \tag{4}$$

  где $S$ — множество индексов, выбранных случайно с вероятностью, пропорциональной значениям важности $w$.

# Примеры операторов сжатия с важностью

- **Важностное прореживание с перевзвешиванием**

$$\mathcal{C}(\nabla f(x)) = \sum_{i=1}^{k} w_{(i)} \nabla_{(i)} f(x) e_{(i)}, \tag{5}$$

где координаты расположены по убыванию значений $|w_{(1)} \nabla_{(1)} f(x)| \geq \cdots \geq |w_{(d)} \nabla_{(d)} f(x)|$.

- **Рандомизированное важностное прореживание с перевзвешиванием**

$$\mathcal{C}(\nabla f(x)) = \sum_{i \in S} w_i \nabla_i f(x) e_i, \tag{6}$$

где $S$ — множество индексов, выбранных случайно с вероятностью, пропорциональной значениям важности $w$.

# Сходимость DCGD с оператором *ImpK*

**Теорема (Хафизов Ф. А., 2025)**

*Пусть* $Q = [1,2]^d, \gamma \leq \frac{1}{L}$. *Тогда*

$$f(x^T) - f^* \leq \left(1 - \mu\gamma\,(1 - L\gamma)\,\frac{k}{d}\right)^T (f(x^0) - f^*). \tag{7}$$

**Следствие**

*При выборе* $\gamma = \frac{1}{2L}$ *для достижения точности* $\varepsilon > 0$ *по функции требуется*

$$T \geq \frac{4L}{\mu}\frac{d}{k}\log\frac{f(x^0) - f^*}{\varepsilon} \tag{8}$$

*итераций.*

# Схема компенсации ошибок SCAM

**Алгоритм 1** SCAM (Одно устройство)

**Ввод:** стартовая точка $x^0$, шаг обучения $\gamma$, количество итераций $T$, начальная ошибка $\varepsilon^0 = 0$.

**for** $t = 0, 1, \ldots, T-1$ **do**

$$g^t = \nabla f(x^t)$$

$$c = \mathcal{C}^t(\varepsilon^t + g^t)$$

$$\tilde{g}^t = \mathcal{C}^t\left(\sum_{i=1}^{d} I\{c_i \neq 0\} g_i^t e_i\right)$$

$$\varepsilon^t = \varepsilon^{t-1} + g^t - \tilde{g}^t$$

$$x^{t+1} = x^t - \gamma \tilde{g}^t$$

**end for**

**Вывод:** $x^k$

# Сходимость SCAM с оператором *TopK*

## Предположение

*В схеме SCAM TopK частично сохраняет норму градиента:*

$$\|\tilde{g}^t\|_2^2 \geq \delta \|g^t\|_2^2. \tag{9}$$

## Теорема (Хафизов Ф. А., 2025)

*Пусть $\gamma \leq \frac{2}{L}$. Тогда для любого $T \geq 1$ верно:*

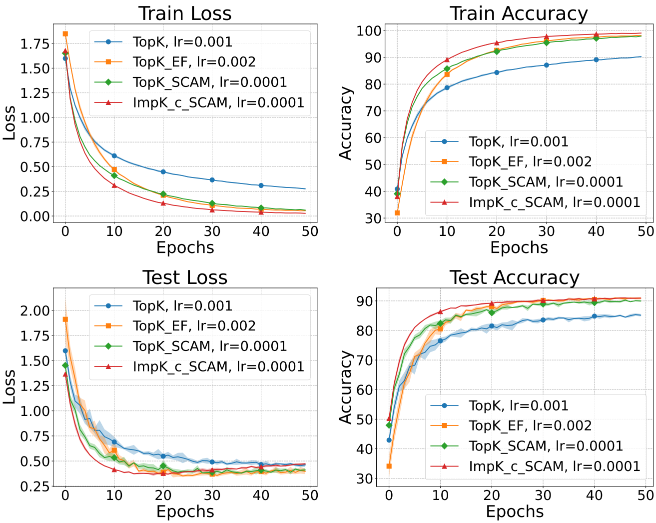
$$f(x^T) - f^* \leq (1 - \mu\gamma(2 - L\gamma)\delta)^T (f(x^0) - f^*). \tag{10}$$

## Следствие

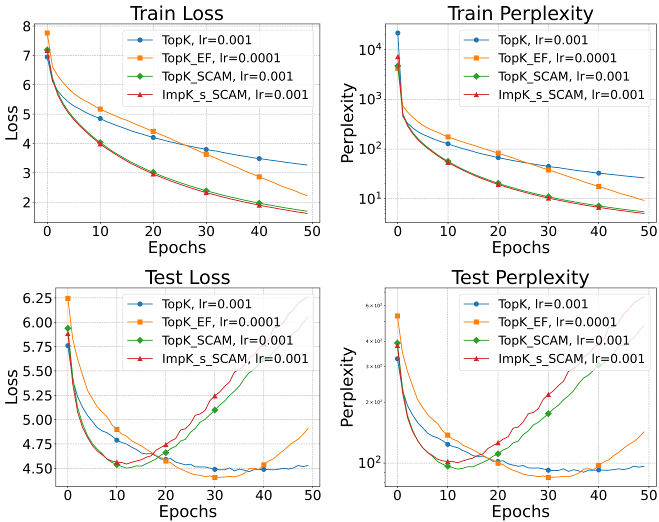
*Пусть выбрано значение шага $\gamma = \frac{1}{L}, \delta \simeq \frac{k}{d}$. Тогда для достижения точности $\varepsilon > 0$ по функции требуется*

$$T \simeq \frac{Ld}{\mu k} \log\left(\frac{f(x^0) - f^*}{\varepsilon}\right). \tag{11}$$

# Эксперимент. Классификация изображений




Сравнение сходимости предложенного метода SCAM с $ImpK_c$ и вариациями *TopK* в процессе обучения ResNet-18 на CIFAR-10.




Сравнение сходимости предложенного метода SCAM с $ImpK_s$ и вариациями *TopK* в процессе обучения GPT-2 на WikiText2.

# Выносится на защиту

1. Предложено семейство операторов сжатия, использующие вектор важности.
2. Для одного оператора сжатия по важности получена оценка сходимости.
3. Предложена схема компенсации ошибки SCAM.
4. Получена теоретическая оценка сходимости для SCAM с оператором $TopK$.
5. Вычислительные эксперименты показали превосходство схемы SCAM с $ImpK$ над остальными методами.