

# Байесовский подход к выбору оптимального размера выборки

Выпускная квалификационная работа бакалавра

---

Никита Сергеевич Киселев

Научный руководитель: к.ф.-м.н. А. В. Грабовой

Кафедра интеллектуальных систем ФПМИ МФТИ

Специализация: Интеллектуальный анализ данных

Направление: 03.03.01 Прикладные математика и физика

2024

# Байесовский подход к определению достаточного размера выборки

---

Исследуется задача определения достаточного размера выборки.

## Проблема

Определение достаточного размера выборки без постановки статистической гипотезы о распределении параметров модели.

## Цель

Предложить критерий определения достаточного размера выборки. Построить метод, реализующий этот критерий на практике.

## Решение

Предлагается провести исследование

1. Значений функции правдоподобия на бутстрапированных подвыборках;
2. Расстояния между апостериорными распределениями параметров модели на схожих подвыборках.

# Постановка задачи определения достаточного размера выборки

## Выборка

$$\mathfrak{D}_m = \{(\mathbf{x}_i, y_i)\}, i \in \mathcal{I} = \{1, \dots, m\}$$

- $\mathbf{x} \in \mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n$  — вектор признакового описания объекта;
- $y \in \mathbb{Y}$  — значение целевой переменной.

## Вероятностная модель

$$p(y, \mathbf{w}|\mathbf{x}) = p(y|\mathbf{x}, \mathbf{w})p(\mathbf{w}) : \mathbb{Y} \times \mathbb{W} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

- $p(y|\mathbf{x}, \mathbf{w})$  — правдоподобие;
- $p(\mathbf{w})$  — априорное распределение.

## Определение

Размер выборки  $m^*$  называется достаточным согласно критерию  $T$ , если  $T$  выполняется для всех  $k \geq m^*$ .

## Требуется

- Предложить критерий  $T$  определения достаточного размера выборки  $m^*$ ;
- Построить метод, реализующий критерий  $T$  на практике.

# Анализ поведения функции правдоподобия

## Функция правдоподобия

$$L(\mathfrak{D}_m, \mathbf{w}) = p(\mathbf{y}_m | \mathbf{X}_m, \mathbf{w}) = \prod_{i=1}^m p(y_i | \mathbf{x}_i, \mathbf{w}), \quad l(\mathfrak{D}_m, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^m \log p(y_i | \mathbf{x}_i, \mathbf{w})$$

## Оценка максимума правдоподобия

$$\hat{\mathbf{w}}_k = \arg \max_{\mathbf{w} \in \mathbb{W}} L(\mathfrak{D}_k, \mathbf{w})$$

## Определение (**D**-достаточный размер выборки)

$$\forall k \geq m^* : D(k) = \mathbb{D}_{\hat{\mathbf{w}}_k} L(\mathfrak{D}_m, \hat{\mathbf{w}}_k) \leq \varepsilon$$

## Определение (**M**-достаточный размер выборки)

$$\forall k \geq m^* : M(k) = \left| \mathbb{E}_{\hat{\mathbf{w}}_{k+1}} L(\mathfrak{D}_m, \hat{\mathbf{w}}_{k+1}) - \mathbb{E}_{\hat{\mathbf{w}}_k} L(\mathfrak{D}_m, \hat{\mathbf{w}}_k) \right| \leq \varepsilon$$

# Корректность определения М-достаточного размера выборки

---

Обозначим параметры распределения  $\hat{\mathbf{w}}_k$  следующим образом:

- Математическое ожидание  $\mathbb{E}\hat{\mathbf{w}}_k = \mathbf{m}_k$ ;
- Матрица ковариации  $\mathbb{D}\hat{\mathbf{w}}_k = \Sigma_k$ .

## Теорема 1 (Киселев, 2023)

Пусть  $\|\mathbf{m}_{k+1} - \mathbf{m}_k\|_2 \rightarrow 0$  и  $\|\Sigma_{k+1} - \Sigma_k\|_F \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Тогда в модели линейной регрессии определение М-достаточного размера выборки является корректным. А именно, для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такой  $m^*$ , что для всех  $k \geq m^*$  выполнено  $M(k) \leq \varepsilon$ .

## Определение<sup>1</sup> (Схожие подвыборки)

Рассмотрим две подвыборки  $\mathcal{D}^1 \subseteq \mathcal{D}_m$  и  $\mathcal{D}^2 \subseteq \mathcal{D}_m$ . Пусть  $\mathcal{I}_1 \subseteq \mathcal{I} = \{1, \dots, m\}$  и  $\mathcal{I}_2 \subseteq \mathcal{I} = \{1, \dots, m\}$  — соответствующие им подмножества индексов.

Подвыборки  $\mathcal{D}^1$  и  $\mathcal{D}^2$  называются схожими, если  $|\mathcal{I}_1 \triangle \mathcal{I}_2| = 1$ .

## Апостериорные распределения на схожих подвыборках

$$\mathcal{D}_k = (\mathbf{X}_k, \mathbf{y}_k) \rightarrow p_k(\mathbf{w}) = p(\mathbf{w}|\mathcal{D}_k) \propto p(\mathcal{D}_k|\mathbf{w})p(\mathbf{w})$$

$$\mathcal{D}_{k+1} = (\mathbf{X}_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1}) \rightarrow p_{k+1}(\mathbf{w}) = p(\mathbf{w}|\mathcal{D}_{k+1}) \propto p(\mathcal{D}_{k+1}|\mathbf{w})p(\mathbf{w})$$

## Функция близости s-score<sup>2</sup>

$$\text{s-score}(g_1, g_2) = \frac{\int_{\mathbf{w}} g_1(\mathbf{w})g_2(\mathbf{w})d\mathbf{w}}{\max_{\mathbf{b}} \int_{\mathbf{w}} g_1(\mathbf{w} - \mathbf{b})g_2(\mathbf{w})d\mathbf{w}}$$

---

<sup>1</sup>Anastasiya Motrenko, Vadim Strijov и Gerhard-Wilhelm Weber. “**Sample size determination for logistic regression**”. В: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 255 (2014), с. 743—752.

<sup>2</sup>Адуенко Александр Александрович. “**Выбор мультимоделей в задачах классификации**”.  
Кандидатская диссертация. Москва: МФТИ, 2017.

## Близость апостериорных распределений на схожих подвыборках



Определение (**KL**-достаточный размер выборки)

$$\forall k \geq m^* : \text{KL}(k) = D_{KL}(p_k \| p_{k+1}) = \int p_k(\mathbf{w}) \log \frac{p_k(\mathbf{w})}{p_{k+1}(\mathbf{w})} d\mathbf{w} \leq \varepsilon$$

Определение (**S**-достаточный размер выборки)

$$\forall k \geq m^* : \text{S}(k) = \text{s-score}(p_k, p_{k+1}) \geq 1 - \varepsilon$$

# Корректность определений KL- и S-достаточного размера выборки

---

Предположим, что апостериорное распределение является нормальным, то есть  $p_k(\mathbf{w}) = \mathcal{N}(\mathbf{w} | \mathbf{m}_k, \Sigma_k)$ .

## Теорема 2 (Киселев, 2024)

Пусть  $\|\mathbf{m}_{k+1} - \mathbf{m}_k\|_2 \rightarrow 0$  и  $\|\Sigma_{k+1} - \Sigma_k\|_F \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Тогда в модели с нормальным апостериорным распределением параметров определение KL-достаточного размера выборки является корректным. А именно, для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такой  $m^*$ , что для всех  $k \geq m^*$  выполнено  $KL(k) \leq \varepsilon$ .

## Теорема 3 (Киселев, 2024)

Пусть  $\|\mathbf{m}_{k+1} - \mathbf{m}_k\|_2 \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Тогда в модели с нормальным апостериорным распределением параметров определение S-достаточного размера выборки является корректным. А именно, для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такой  $m^*$ , что для всех  $k \geq m^*$  выполнено  $S(k) \geq 1 - \varepsilon$ .



## Вероятностная модель линейной регрессии

$$p(y, \mathbf{w} | \mathbf{X}) = p(y | \mathbf{X}, \mathbf{w}) p(\mathbf{w}) = \mathcal{N}(y | \mathbf{X}\mathbf{w}, \sigma^2 \mathbf{I}) \mathcal{N}(\mathbf{w} | \mathbf{0}, \alpha^{-1} \mathbf{I})$$

## Апостериорное распределение

$$p(\mathbf{w} | \mathbf{X}, y) = \mathcal{N}(\mathbf{w} | \mathbf{m}, \Sigma),$$

$$\Sigma = \left( \alpha \mathbf{I} + \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{X}^\top \mathbf{X} \right)^{-1}, \quad \mathbf{m} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X} + \alpha \sigma^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}^\top y$$

## Теорема 4 (Киселев, 2024)

Пусть множества значений признаков и целевой переменной ограничены, то есть  $\exists M \in \mathbb{R} : \|\mathbf{x}\|_2 \leq M$  и  $|y| \leq M$ . Если  $\lambda_{\min}(\mathbf{X}_k^\top \mathbf{X}_k) = \omega(\sqrt{k})$  при  $k \rightarrow \infty$ , то в модели линейной регрессии с нормальным априорным распределением параметров  $\|\mathbf{m}_{k+1} - \mathbf{m}_k\|_2 \rightarrow 0$  и  $\|\Sigma_{k+1} - \Sigma_k\|_F \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ .

# Близость полных байесовских прогнозов для линейной регрессии

Разделение на обучающую и тестовую выборки

$$\mathcal{D}_m = \mathcal{D}_{m_1}^{\text{train}} \sqcup \mathcal{D}_{m_2}^{\text{test}}$$

Подвыборка тестовой выборки

$$(\mathbf{X}_k, \mathbf{y}_k) \subset \mathcal{D}_{m_1}^{\text{train}}$$

Теорема 5 (Киселев, 2024)

Пусть множества значений признаков и целевой переменной ограничены, то есть  $\exists M \in \mathbb{R} : \|\mathbf{x}\|_2 \leq M$  и  $|y| \leq M$ . Если  $\lambda_{\min}(\mathbf{X}_k^T \mathbf{X}_k) = \omega(\sqrt{k})$  при  $k \rightarrow \infty$ , то в модели линейной регрессии с нормальным априорным распределением параметров

$$\|\mathbb{E}[\mathbf{y}_{\text{test}} | \mathbf{X}_{\text{test}}, \mathbf{X}_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1}] - \mathbb{E}[\mathbf{y}_{\text{test}} | \mathbf{X}_{\text{test}}, \mathbf{X}_k, \mathbf{y}_k]\|_2 \rightarrow 0,$$

$$\|\mathbb{D}[\mathbf{y}_{\text{test}} | \mathbf{X}_{\text{test}}, \mathbf{X}_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1}] - \mathbb{D}[\mathbf{y}_{\text{test}} | \mathbf{X}_{\text{test}}, \mathbf{X}_k, \mathbf{y}_k]\|_F \rightarrow 0,$$

$$D_{\text{KL}}(p(\mathbf{y}_{\text{test}} | \mathbf{X}_{\text{test}}, \mathbf{X}_k, \mathbf{y}_k) \| p(\mathbf{y}_{\text{test}} | \mathbf{X}_{\text{test}}, \mathbf{X}_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1})) \rightarrow 0.$$

# Вычислительный эксперимент

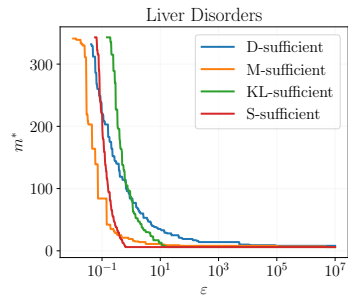
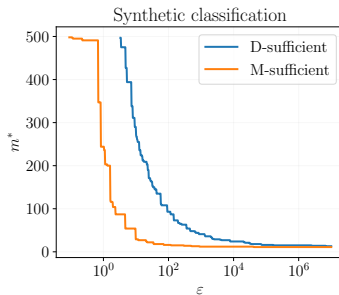
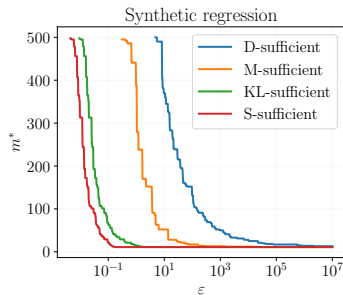
---

# Достаточный размер выборки в зависимости от гиперпараметра $\varepsilon$

Используются выборки

- Синтетическая регрессия: 500 объектов, 10 признаков;
- Синтетическая классификация: 500 объектов, 10 признаков;
- Liver Disorders с задачей регрессии: 345 объектов, 5 признаков.

Для каждого значения  $\varepsilon$  определяется достаточный размер выборки.



# Сравнение подходов на множестве выборок с задачей регрессии

Определяется размер выборки, при котором значение метрики уменьшается в

- 1000 раз для D- и M-достаточного размера выборки;
- 2 раза для KL- и S-достаточного размера выборки.

Пропуски означают, что первоначальный размер выборки недостаточен.

Название выборки	Объектов $m$	Признаков $n$	D	M	KL	S
Abalone	4177	8	96	96	3921	4091
Auto MPG	392	8	15	15	62	—
Automobile	159	25	70	156	156	—
Liver Disorders	345	6	12	19	—	—
Servo	167	4	41	—	163	163
Forest fires	517	12	208	—	507	—
Wine Quality	6497	12	144	144	5305	6099
Energy Efficiency	768	9	24	442	—	—
Student Performance	649	32	129	177	636	—
Facebook Metrics	495	18	31	388	475	—
Real Estate Valuation	414	7	15	23	—	—
Heart Failure Clinical Records	299	12	63	224	276	293
Bone marrow transplant: children	142	36	—	—	109	—

## Выносятся на защиту

---

1. Подходы к определению достаточного размера выборки по
  - Сходимости функции правдоподобия на бутстрапированных подвыборках;
  - Близости апостериорных распределений параметров на схожих подвыборках;
2. Теоремы о корректности определений
  - М-достаточного размера выборки в модели линейной регрессии;
  - KL-достаточного размера выборки в модели с нормальным апостериорным распределением параметров;
  - S-достаточного размера выборки в модели с нормальным апостериорным распределением параметров;
3. Теорема о близости моментов предельного апостериорного распределения в модели линейной регрессии с нормальным априорным распределением параметров;
4. Теорема о близости полных байесовских прогнозов в модели линейной регрессии с нормальным априорным распределением параметров.

# Список работ автора по теме диплома

---

## Публикации ВАК

1. *N. Kiselev, A. Grabovoy*. Sample Size Determination: Posterior Distributions Proximity // Computational Management Science (на рецензировании).

## Выступления с докладом

1. Определение достаточного размера выборки по апостериорному распределению параметров модели // 66-я Всероссийская научная конференция МФТИ, 2024.